第四章 离散时间马尔可夫链

第四章 离散时间马尔可夫链

第四章 离散时间马尔可夫链

马尔可夫过程作为最重要的随机过程, 在计算数学、金融经济、生物、化学、管理科学乃至人文科学中都有广泛的应用.

- 设 $\{X_n\} = \{X_n | n = 0, 1, \cdots\}$ 是随机序列, 如果每个 X_n 都在 S 中取值, 则称 S 是 $\{X_n\}$ 的**状态空间**, 称 S 中的元素为状态.
- 当 S 中只有有限或可列个状态时, 可以将 S 中的状态进行编号, 得到由整数构成的号码集合 I . 为表达方便, 以后用状态的编号表示该状态. 于是 I 成为 $\{X_n\}$ 的状态空间.
- 本章总设 $\{X_n\}$ 的状态空间是 I , 并且用 $i, j, k, i_0, i_1, \cdots$ 等表示 I 中的状态. 以后只对状态空间 $I = \{1, 2, \cdots, \}$ 进行叙述, 但是所有的叙述和结论对于一般的有限或可列集合 I 也是成立的.

第四章 离散时间马尔可夫链

定义 (1.1)

如果对任何正整数 n 和 I 中的 $i, j, i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}$, 随机序列 $\{X_n\}$ 满足

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0)$$

$$= P(X_1 = j | X_0 = i), \quad i, j \in I.$$

则称 $\{X_n\}$ 为时齐的马尔可夫(Markov)链, 简称为**马氏链**. 这时称

$$p_{ij} = P(X_1 = j | X_0 = i), \ i, j \in I,$$

为马氏链 $\{X_n\}$ 的转移概率. 称矩阵

$$P = (p_{ij}) = (p_{ij})_{i,j \in I}$$

为马氏链 $\{X_n\}$ 的**一步转移概率矩阵**, 简称为**转移矩阵**.

4 马氏链的直观理解

第四章 离散时间马尔可夫链

对马氏链的直观理解是:

已知现在 $B = \{X_n = i\}$, 将来 $A = \{X_{n+1} = j\}$

与过去 $C = \{X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0\}$ 独立.

人们习惯地称这种性质为**马氏性**.

为了进一步理解马氏性, 需要下面的定理.

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

定义 (3.1)

设 I 是马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间.

(a) 如果 $p_{ii}=1$ ，则称 i 是**吸引状态**;

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

定义 (3.1)

设 I 是马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间.

(a) 如果 $p_{ii}=1$，则称 i 是**吸引状态**;

(b) 如果存在 $n\geq 1$ 使得 $p_{ij}^{(n)}>0$，则称 i 通 j，记做 $i\rightarrow j$；

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

定义 (3.1)

设 I 是马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间.

(a) 如果 $p_{ii}=1$ ，则称 i 是**吸引状态**;

(b) 如果存在 $n\geq 1$ 使得 $p_{ij}^{(n)}>0$ ，则称 i 通 j ，记做 $i\to j$;

(c) 如果 $i\to j$ 且 $j\to i$ ，则称 i,j 互通, 记做 $i\leftrightarrow j$.

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

定义 (3.1)

设 I 是马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间.

(a) 如果 $p_{ii} = 1$ ，则称 i 是**吸引状态**;

(b) 如果存在 $n \geq 1$ 使得 $p_{ij}^{(n)} > 0$ ，则称 i 通 j ，记做 $i \to j$;

(c) 如果 $i \to j$ 且 $j \to i$ ，则称 i,j 互通, 记做 $i \leftrightarrow j$.

$i \to j$ 表示质点从 i 出发以正概率到达 j . i,j 互通表明质点从 i 到达 j 后, 以正概率回到 i ，反之亦然.

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

2 互通的传递性和对称性

直观上符号“ $\to$ ”具有**传递性**: 如果 $i \to j$ 和 $j \to k$ ，则 $i \to k$ ．实际上这时有 n, m 使得 $p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0$ ，用推论2.2得到

$$p_{ik}^{(n+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0..1$$

互通“ $\leftrightarrow$ ”关系还有**对称性**: 如果 $i \leftrightarrow j$ 则 $j \leftrightarrow i$ ．

A. 常返与非常返状态

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

两边都是反射壁的简单随机游动中, 所有的状态互通, 质点从 i 出发一定回到 i 无穷次. 这种状态称为**常返状态**.

3 A. 常返与非常返状态

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

两边都是反射壁的简单随机游动中, 所有的状态互通, 质点从 i 出发一定回到 i 无穷次. 这种状态称为**常返状态**.

- MC在有限的城镇 $I = \{1, 2, \cdots, N\}$ 中转移时, 假设所有的城镇互通. 只要他一直转移下去, 也可以回到出发的城镇无穷次. 这时称他出发的城镇是可以经常返回的. 以后把经常返回简称为常返. 可以理解, 只要所有城镇互通, 则所有城镇都是常返的.

4 常返的含义

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

- 如果城镇 i 是常返的, 且 $i \to j$, 则MC从 i 出发到达 j 的概率 $p > 0$. 他回到 i 后再次以相同的概率 p 到达 j ; 再回到 i 后, 再以相同的概率 p 到达 j ; …… . 每次是否到达 j 是相互独立的.

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

4 常返的含义

- 如果城镇 i 是常返的, 且 $i \to j$,则MC从 i 出发到达 j 的概率 $p > 0$. 他回到 i 后再次以相同的概率 p 到达 j ; 再回到 i 后, 再以相同的概率 p 到达 j ; $\cdots\cdots$. 每次是否到达 j 是相互独立的.
- 这就等价于独立重复试验, 试验成功就是从 i 到达 j , 于是他最终到达 j 的概率是1. i 是常返的, 所以他从 j 必须回到 i . 这就说明如果 $i \to j$, i 是常返的, 则 j 也是常返的, 并且 $j \leftrightarrow i$.

4 常返的含义

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

- 如果城镇 i 是常返的，且 $i \to j$，则MC从 i 出发到达 j 的概率 $p > 0$. 他回到 i 后再次以相同的概率 p 到达 j；再回到 i 后，再以相同的概率 p 到达 j；$\cdots\cdots$. 每次是否到达 j 是相互独立的.
- 这就等价于独立重复试验，试验成功就是从 i 到达 j，于是他最终到达 j 的概率是1. i 是常返的，所以他从 j 必须回到 i. 这就说明如果 $i \to j$，i 是常返的，则 j 也是常返的，并且 $j \leftrightarrow i$.
- 在两端是吸收壁的简单随机游动中，$\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 中的状态互通，但是质点从其中的 i 出发只能回到 i 有限次. 人们将这种状态称为非常返状态.

5 非常返和常返状态的数学定义

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

5 非常返和常返状态的数学定义

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

- 为了在数学上定义非常返和常返状态, 需要引进

$$
\begin{aligned}
f_{ij}^{(1)} &= P(X_1 = j | X_0 = i), \\
f_{ij}^{(n)} &= P(X_n = j, X_k \neq j; 1 \leq k \leq n-1 | X_0 = i), \ n \geq 1.
\end{aligned}
$$

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

5　非常返和常返状态的数学定义

- 为了在数学上定义非常返和常返状态, 需要引进

$$
\begin{aligned}
f_{ij}^{(1)} &= P(X_1 = j | X_0 = i),\\
f_{ij}^{(n)} &= P(X_n = j, X_k \neq j; 1 \leq k \leq n-1 | X_0 = i),\ n \geq 1.
\end{aligned}
$$

$f_{ij}^{(n)}$ 是质点从 i 出发的条件下, 第 n 步首次到达 j 的概率, 称为从 i 出发后第 n 步首达 j 的概率, 简称为**首达概率**.

- 由于对不同的 n , 事件

$$A_1 = \{X_1 = j\},\ A_n = \{X_n = j, X_k \neq j, 1 \leq k \leq n-1\} \qquad (2)$$

互不相容, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 发生表示质点到达过状态 j ,

6 f_{ij}^*的定义

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

所以

$$f_{ij}^* \equiv P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n | X_0 = i\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n | X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \leq 1. \quad (3)$$

6 f_{ij}^*的定义

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

所以

$$f_{ij}^* \equiv P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n | X_0 = i\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n | X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \leq 1. \quad (3)$$

- f_{ij}^* 是质点从从 i 出发的条件下到达过 j 的概率，简称为从 i 出发后到达 j 的概率.

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

- 当 $f_{ii}^* = 1$ ，质点从状态 i 出发以概率1回到 i ，然后再出发，再回到 i ，…… ，所以在实际中必然回到状态 i 无穷次.

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期

定义3.2

定理3.1

正常返和零常返状态

平均回转时间

定理3.2

周期

定理3.3

遍历状态

定理3.4

- 当 $f_{ii}^{*}=1$ ，质点从状态 i 出发以概率1回到 i ，然后再出发，再回到 i ，⋯⋯ ，所以在实际中必然回到状态 i 无穷次.
- 当 $f_{ii}^{*}<1$ ，说明质点从状态 i 出发以正概率 $1-f_{ii}^{*}$ 不再回到 i . 注意，质点从 i 出发，如果回到 i ，则再次从 i 出发并以正概率 $1-f_{ii}^{*}$ 不再回到 i ；如果再回到 i ，就会再次从 i 出发并以正概率 $1-f_{ii}^{*}$ 不再回到 i ；⋯⋯ .

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

- 当 $f_{ii}^{*}=1$ ，质点从状态 i 出发以概率1回到 i ，然后再出发，再回到 i ，…… ，所以在实际中必然回到状态 i 无穷次.
- 当 $f_{ii}^{*}<1$ ，说明质点从状态 i 出发以正概率 $1-f_{ii}^{*}$ 不再回到 i . 注意，质点从 i 出发，如果回到 i ，则再次从 i 出发并以正概率 $1-f_{ii}^{*}$ 不再回到 i ；如果再回到 i ，就会再次从 i 出发并以正概率 $1-f_{ii}^{*}$ 不再回到 i ；…… .
- 这相当于一次次的独立重复试验. 由于有正概率的事件在多次独立重复试验中总会发生. 所以只要 $f_{ii}^{*}<1$ ，质点“不回到 i ”总会发生，因而最终会永远离开状态 i . 由此引入下面的定义.

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

定义 (3.2)

如果 $f_{ii}^* = 1$ ，则称 i 是常返状态.

如果 $f_{ii}^* < 1$ ，则称 i 是非常返状态.

---

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

定义 (3.2)

如果 $f_{ii}^{*}=1$ ，则称 i 是常返状态.

如果 $f_{ii}^{*}<1$ ，则称 i 是非常返状态.

按照定义, 吸引状态 i 满足 $f_{ii}^{*}=f_{ii}^{(1)}=1$ ，因而是常返状态.

当 i 是常返状态, 质点从 i 出发后, 在实际中必然回到 i ，再从 i 出发, 再回到 i ，因而回到 i 无穷次.

i 是非常返状态表明质点从 i 出发后, 以正概率不能回到 i ，因而只能回到 i 有限次, 然后永远离开状态 i .

9 重要的公式

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

9 重要的公式

下面的公式给出了转移概率 $p_{ij}^{(n)}$ 和 $f_{ij}^{(k)}$ 的关系.

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \tag{4}$$

证明如下.

10　证明公式(4)

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

10 证明公式(4)

设

$$A_1=\{X_1=j\},\ A_n=\{X_n=j,X_k\neq j,1\leq k\leq n-1\},$$

互不相容. $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 表示前 n 次转移中到达过 j，所以

$$\{X_n=j\}\subset\bigcup_{k=1}^{n}A_k.$$

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

10 证明公式(4)

设

$$A_1 = \{X_1 = j\},\ A_n = \{X_n = j, X_k \neq j, 1 \leq k \leq n-1\},$$

互不相容. $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 表示前 n 次转移中到达过 j ,所以

$$\{X_n = j\} \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

用全概率公式

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= P(X_n = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k | X_0 = i) P(X_n = j | A_k, X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}. \end{aligned}$$

10 证明公式(4)

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

10 证明公式(4)

公式(4)表明了以下的事实:

“MC从城镇 i 出发, 经过 n 次转移到达城镇 j ” 等于 “他从 i 出发, 在第 k 次转移首次到达 j 后再从 j 出发经过 $n-k$ 次转移到达 j , 再对 $k=1,2,\cdots,n$ 求并” .

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

定理3.1

对于马氏链 $\{X_n\}$ 及其 $\{p_{ii}^{(n)}\}$, $f_{ii}^{(n)}$,有以下结果.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = 1/(1 - f_{ii}^{*})$.

(2) i 是常返状态的充分必要条件是 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$.

(3) 如果 i 是常返状态, $i \to j$,则 $i \leftrightarrow j$,并且 j 也是常返的.

12 证明结论(1)

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

证明结论(1)

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

在(4)中取 $j=i$ ，两边同乘ρ^n ，对 $n\geq 1$ 得到

$$p_{ii}^{(n)}\rho^n=\sum_{k=1}^{n}f_{ii}^{(k)}\rho^k p_{ii}^{(n-k)}\rho^{n-k},\ \rho\in(0,1).$$

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

在(4)中取 $j=i$ ，两边同乘ρ^n ，对 $n\geq 1$ 得到

$$p_{ii}^{(n)}\rho^n=\sum_{k=1}^{n}f_{ii}^{(k)}\rho^k p_{ii}^{(n-k)}\rho^{n-k},\ \rho\in(0,1).$$

上式两边对 n 求和得到

$$\begin{aligned}G(\rho)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}\rho^n &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)}\rho^n\\ &=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}f_{ii}^{(k)}\rho^k p_{ii}^{(n-k)}\rho^{n-k}\\ &=1+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}f_{ii}^{(k)}\rho^k p_{ii}^{(n-k)}\rho^{n-k}\\ &=1+\Big(\sum_{k=1}^{\infty}f_{ii}^{(k)}\rho^k\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}\rho^n\Big)=1+F(\rho)G(\rho).\end{aligned}$$

13　证明结论(1)和(2)

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

证明结论(1)和(2)

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

其中 $F(\rho) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \rho^k$.

于是得到

$$G(\rho) = 1/[1 - F(\rho)].$$

令 $\rho \to 1$ 就得到结论(1).

结论(2)是(1)的直接推论.

14 证明结论(3)

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

证明结论(3)

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

- $i \to j$ 说明质点从 i 到达 j 的概率是正数. i 是常返的, 质点每次回到 i 后都再次以相同的正概率到达 j , 且每次是否到达 j 是相互独立的. 这就等价于独立重复试验: 从 i 到达 j 称为成功. 根据下概率原则, 质点以概率 1 到达 j . 质点到达 j 后又必须回到 i , 因而 $i \leftrightarrow j$.

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

- $i \to j$ 说明质点从 i 到达 j 的概率是正数. i 是常返的, 质点每次回到 i 后都再次以相同的正概率到达 j, 且每次是否到达 j 是相互独立的. 这就等价于独立重复试验: 从 i 到达 j 称为成功. 根据下概率原则, 质点以概率 1 到达 j. 质点到达 j 后又必须回到 i, 因而 $i \leftrightarrow j$.
- 再证明 j 是常返的. 设 n, m 使得 $p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} > 0$. 对于任何 $k \geq 1$, 利用推论2.2得到

$$p_{jj}^{(m+k+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n)}.$$

两边对 k 求和得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(m+k+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} = \infty,$$

由(2)知道 j 是常返的.

证毕

15 B. 正常返和零常返状态

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

在MC旅行的例子中,用取正整数值的随机变量 T_i 表示他首次到达城镇 i 时的转移次数. 也就是说 $T_i = n$ 表示他第 $n(n \geq 1)$ 周首次到达城镇 i ,则

$$T_i = \begin{cases} \min\{n|\, X_n = i; n \geq 1\}, & \text{当} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{X_n = i\}\text{发生}, \\ \infty, & \text{否则}. \end{cases} \tag{5}$$

对于马氏链 $\{X_n\}$,T_i 是质点首次到达状态 i 时的转移次数. $T_i = n$ 表示质点第 $n(\geq 1)$ 次转移首次到达状态 i .

16 平均回转时间

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

引入 $P_i(\cdot) = P(\cdot|X_0 = i)$ ，则

$$f_{ii}^{(n)} = P_i(T_i = n) = P(T_i = n|X_0 = i) \tag{6}$$

是质点从 i 出发的条件下，第 n 步首次回到 i 的概率.
当 $f_{ii}^* = 1$ ，则

$$P_i(T_i < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1.$$

§4.3 状态的命名和周期
§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

引入 $P_i(\cdot) = P(\cdot|X_0 = i)$ ，则

$$f_{ii}^{(n)} = P_i(T_i = n) = P(T_i = n|X_0 = i) \tag{6}$$

是质点从 i 出发的条件下，第 n 步首次回到 i 的概率.
当 $f_{ii}^* = 1$ ，则

$$P_i(T_i < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1.$$

引入条件 $X_0 = i$ 下，T_i 的数学期望

$$\mu_i = \mathrm{E}(T_i|X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} nP_i(T_i = n) = \sum_{n=1}^{\infty} nf_{ii}^{(n)}. \tag{7}$$

μ_i 是质点返回状态 i 所需要的平均转移次数，称 μ_i 为状态 i 的**平均回转时间或期望回转时间**. 平均回转时间 μ_i 越小，表明质点返回 i 越频繁. 当 $\mu_i = \infty$ ，说明质点平均转移无穷次才能回到 i.

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

定义 (3.3)

设 i 是常返状态.

如果 i 的平均回转时间 $\mu_i < \infty$ ，则称 i 是**正常返状态**或**积极常返状态**.

如果 i 的平均回转时间 $\mu_i = \infty$ ，则称 i 是**零常返状态** 或**消极常返状态**.

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

定理3.2

设 i 是常返状态，则

(1) i 是零常返状态的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$;

(2) 当 i 是零常返的，$i \to j$ 时，j 也是零常返的;

(3) 当 i 是正常返的，$i \to j$ 时，j 也是正常返的.

19 证明定理3.2

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

结论(1)是用数学分析方法得到的, 略去 下面证明(2). 从定理3.1(3)知道 $i \leftrightarrow j$. 设正整数 m, n 使得 $p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(m)} > 0$, 则有

$$p_{ii}^{(n+k+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(k)} p_{ji}^{(m)}.$$

证明定理3.2

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期

定义3.2

定理3.1

正常返和零常返状态

平均回转时间

定理3.2

周期

定理3.3

遍历状态

定理3.4

结论(1)是用数学分析方法得到的, 略去 下面证明(2). 从定理3.1(3)知道 $i \leftrightarrow j$. 设正整数 m, n 使得 $p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(m)} > 0$, 则有

$$p_{ii}^{(n+k+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(k)} p_{ji}^{(m)}.$$

用 $p_{ii}^{(n)} \to 0$, 得到

$$\lim_{k\to\infty} p_{jj}^{(k)} \leq \frac{1}{p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(m)}} \lim_{k\to\infty} p_{ii}^{(n+k+m)} = 0.$$

说明 j 是零常返的. 由(2)得到(3).

例3.1

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

例3.1

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

- 如果 j 不是正常返的, 则对任何状态 i , 有

$$p_{ij}^{(n)} \to 0, \text{当 } n \to \infty. \tag{8}$$

(8)说明, 只要 j 不是正常返的, 从任何 i 出发, 较长的时间后, 质点以极小的概率位于 j .

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

- 如果 j 不是正常返的, 则对任何状态 i , 有

$$p_{ij}^{(n)} \to 0, \text{当 } n \to \infty. \tag{8}$$

(8)说明, 只要 j 不是正常返的, 从任何 i 出发, 较长的时间后, 质点以极小的概率位于 j .

证明 对非常返的 j , 用定理3.1(2)知道 $p_{jj}^{(n)} \to 0$. 对零常返的 j , 用定理3.2(1)得到 $p_{jj}^{(n)} \to 0$. 对任何状态 i , 利用(4)得到

21 解例3.1

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \\
&\le \sum_{k=1}^{m} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^{n} f_{ij}^{(k)}.
\end{aligned}
$$

解例3.1

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^{n} f_{ij}^{(k)}.$$

令 $n \to \infty$，右方第一项 $\sum_{k=1}^{m} p_{jj}^{(n-k)} \to 0$. 于是得到

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} f_{ij}^{(k)}.$$

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^{n} f_{ij}^{(k)}.$$

令 $n \to \infty$ ，右方第一项 $\sum_{k=1}^{m} p_{jj}^{(n-k)} \to 0$. 于是得到

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} f_{ij}^{(k)}.$$

因为 $\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} \leq 1$ ，所以再令 $m \to \infty$ 就得结论.

C. 周期及其性质

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

C. 周期及其性质

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

在直线上的简单随机游动中, 质点从 i 出发, 只能在 2 的倍数 $2m$ 时回到 i , 这时称状态 i 的周期是 2 .

- 对于一般的马氏链 $\{X_n\}$, 定义状态 i 的周期如下.

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

在直线上的简单随机游动中, 质点从 i 出发, 只能在 2 的倍数 $2m$ 时回到 i , 这时称状态 i 的周期是 2 .

- 对于一般的马氏链 $\{X_n\}$, 定义状态 i 的周期如下.

(a) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$, 则质点从 i 出发不可能再回到 i , 这时称 i 的周期是 ∞ .

C. 周期及其性质

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

在直线上的简单随机游动中, 质点从 i 出发, 只能在 2 的倍数 $2m$ 时回到 i , 这时称状态 i 的周期是 2 .

- 对于一般的马氏链 $\{X_n\}$, 定义状态 i 的周期如下.

(a) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$, 则质点从 i 出发不可能再回到 i , 这时称 i 的周期是 ∞ .

(b) 设 d 是正整数. 质点从 i 出发, 如果只可能在 d 的整倍数上回到 i , 而且 d 是有此性质的最大整数, 则称 i 的周期是 d .

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

在直线上的简单随机游动中，质点从 i 出发，只能在 2 的倍数 $2m$ 时回到 i，这时称状态 i 的周期是 2 .

- 对于一般的马氏链 $\{X_n\}$，定义状态 i 的周期如下.

(a) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$，则质点从 i 出发不可能再回到 i，这时称 i 的周期是 ∞ .

(b) 设 d 是正整数. 质点从 i 出发，如果只可能在 d 的整倍数上回到 i，而且 d 是有此性质的最大整数，则称 i 的周期是 d .

(c) 如果 i 的周期是 1，则称 i 是**非周期的**.

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

C. 周期及其性质

在直线上的简单随机游动中, 质点从 i 出发, 只能在 2 的倍数 $2m$ 时回到 i , 这时称状态 i 的周期是 2 .

- 对于一般的马氏链 $\{X_n\}$, 定义状态 i 的周期如下.

  (a) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$, 则质点从 i 出发不可能再回到 i , 这时称 i 的周期是 ∞ .

  (b) 设 d 是正整数. 质点从 i 出发, 如果只可能在 d 的整倍数上回到 i , 而且 d 是有此性质的最大整数, 则称 i 的周期是 d .

  (c) 如果 i 的周期是 1 , 则称 i 是**非周期的**.

- 其中的(b)说明: 称状态 i 的周期是 d , 如果 $p_{ii}^{(n)} > 0$, 则必有 $n = md$, 而且 d 是满足此性质的最大整数. 但是当 i 的周期 $d < \infty$, $p_{ii}^{(nd)} > 0$ 也不必对所有的 n 成立, 但至少对某个 n 成立.

例3.2

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

- 在直线上, 如果质点每次向前、向后移动1步的概率都是 1/3 , 向后移动 2 步的概率也是 1/3 . 则每个状态都是非周期的.

解 易见

$$p_{ii}^{(2)} \geq p_{i,i+1} p_{i+1,i} > 0,$$
$$p_{ii}^{(3)} \geq p_{i,i-2} p_{i-2,i-1} p_{i-1,i} > 0,$$

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

- 在直线上, 如果质点每次向前、向后移动1步的概率都是 $1/3$, 向后移动 2 步的概率也是 $1/3$. 则每个状态都是非周期的.

解 易见

$$p_{ii}^{(2)} \geq p_{i,i+1}p_{i+1,i} > 0,$$

$$p_{ii}^{(3)} \geq p_{i,i-2}p_{i-2,i-1}p_{i-1,i} > 0,$$

于是从 $2 = nd$, $3 = md$ 得到 $d = 1$. i 的周期是 $d = 1$, i 是非周期的.

例3.3

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

例3.3

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

- 在直线上, 如果质点每次向前移动1步的概率都是 p ,向后移动 5 步的概率是 $q = 1 - p$, $pq > 0$. 则每个状态的周期都是 6 .

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

- 在直线上, 如果质点每次向前移动1步的概率都是 p ,向后移动 5 步的概率是 $q = 1 - p$, $pq > 0$. 则每个状态的周期都是 6 .

解　质点从 i 出发, 经过 n 次转移回到 i 时, 我们说明 $n = 6m$. 设质点向前一共移动了 k 次, 向后一共移动了 m 次, 根据题意得到 $k = 5m$.

于是, 质点移动的次数 $n = k + m = 5m + m = 6m$. 又由于 $p_{ii}^{(6)} > p^5 q > 0$, 所以状态 i 的周期是 $d = 6$.

以后总用 d_i 表示 i 的周期.

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

定理3.3

若状态 i 的周期 $d_i < \infty$ ，则

(1) d_i 是数集 $B_i = \{n \mid p_{ii}^{(n)} > 0, n \geq 1\}$ 的最大公约数;

(2) 如果 $i \leftrightarrow j$ ，则 $d_i = d_j$ ；

(3) 存在正数 N_i 使得 $n \geq N_i$ 时，$p_{ii}^{(nd_i)} > 0$.

性质3重要， 说明如果周期=1, 当n>=N_i时， 可以在任意时间返回状态i。-- 遍历

25 * 证明

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

(1) 根据定义, d_i 是数集 B_i 的最大公约数.

(2) 设正整数 m, n 使得 $p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} > 0$. 对于任何 $k \in B_i = \{k \mid p_{ii}^{(k)} > 0, k \geq 1\}$, 于是得到

$$p_{jj}^{(m+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} > 0,$$
$$p_{jj}^{(m+k+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n)} > 0.$$

于是 d_j 整除 $m+n$ 和 $m+k+n$, 这样就整除 $k = (m+k+n)-(m+n)$, 于是整除 B_i 中的所有元, 从而得到 d_j 整除 d_i . 对称地可以得到 d_i 整除 d_j , 故 $d_i = d_j$.

27 证明结论(3)

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

(3) 设(1)中的 $B_i = \{n_1, n_2, \cdots\}$ ，l_m 是子集 $\{n_1, n_2, \cdots n_m\}$ 的最大公约数，则 d_i 是 l_m 的约数，且 l_m 单调不增收敛到 d_i ．因为 l_m 是整数，所以有 k 使得 $d_i = l_k$ 是 $\{n_1, n_2, \cdots n_k\}$ 的最大公约数. 根据数论的基本知识知道存在 N_i ，使得只要 $n \geq N_i$ ，就有

$$nd_i = n_1 m_1 + n_2 m_2 + \cdots + n_k m_k,\ m_i\text{是非负整数.}$$

再用推论2.2得到

$$\begin{aligned} p_{ii}^{(nd_i)} &\geq p_{ii}^{(n_1 m_1)} p_{ii}^{(n_2 m_2)} \cdots p_{ii}^{(n_k m_k)} \\ &\geq [p_{ii}^{(n_1)}]^{m_1} [p_{ii}^{(n_2)}]^{m_2} \cdots [p_{ii}^{(n_k)}]^{m_k} > 0. \end{aligned}$$

D. 遍历状态

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

- 当城镇的数目有限. MC从城镇 i 出发, 无论前若干次转移中是否能回到 i , 根据定理3.3, 当城镇 i 是常返的和非周期的, 他就可以在充分大的任意时刻 n 回到城镇 i .
- 当所有的状态互通, 只要有一个状态是非周期的, 所有的状态就都是非周期的, 所以时间充分长后, 他可以在任意的时刻到达任意的城镇.
- 这时我们说他的旅行可以 “遍历” 每个城镇. 设想将他的旅行轨迹用线段连接出来, 如果MC能够一直走下去, 这样的线段将穿过每个城镇无穷次.

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

定义 (3.4)

*如果状态 i 是正常返和非周期的, 则称 i 是**遍历状态**.*

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

定理3.4

设常返状态 i 有周期 d_i 和平均回转时间

$$\mu_i = \mathrm{E}(T_i|X_0 = i),$$

则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd_i)} = \frac{d_i}{\mu_i}.$$

略去证明

30 定理3.4的含义

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

定理3.4的含义

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

- 定理3.4表明, 质点从常返状态 i 出发后,对于充分大的 n ,质点在第 nd_i 步回到 i 的概率与 d_i 成正比, 与平均回转时间 μ_i 成反比.

定理3.4的含义

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

- 定理3.4表明, 质点从常返状态 i 出发后,对于充分大的 n ,质点在第 nd_i 步回到 i 的概率与 d_i 成正比, 与平均回转时间 μ_i 成反比.
- 对于常返状态 i ，$i \to j$ 时, i 的性质就会传递给 j ：因为这时有 $j \leftrightarrow i$ ；$d_j = d_i$ ；$\mu_j < \infty$ 的充分必要条件是 $\mu_i < \infty$ ；

定理3.4的含义

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

- 定理3.4表明，质点从常返状态 i 出发后,对于充分大的 n ，质点在第 nd_i 步回到 i 的概率与 d_i 成正比，与平均回转时间 μ_i 成反比.
- 对于常返状态 i ， $i \to j$ 时，i 的性质就会传递给 j ：因为这时有 $j \leftrightarrow i$ ；$d_j = d_i$ ；$\mu_j < \infty$ 的充分必要条件是 $\mu_i < \infty$ ；
- 当 $n \to \infty$ ， $p_{jj}^{(n)} \to 0$ 的充分必要条件是 $p_{ii}^{(n)} \to 0$. 说明 $i \leftrightarrow j$ 时，j 是正常返状态的充分必要条件为 i 是正常反状态；j 是遍历状态的充分必要条件为 i 是遍历状态.

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

- 定理3.4表明, 质点从常返状态 i 出发后,对于充分大的 n ,质点在第 nd_i 步回到 i 的概率与 d_i 成正比, 与平均回转时间 μ_i 成反比.
- 对于常返状态 i , $i \to j$ 时, i 的性质就会传递给 j : 因为这时有 $j \leftrightarrow i$; $d_j = d_i$; $\mu_j < \infty$ 的充分必要条件是 $\mu_i < \infty$;
- 当 $n \to \infty$, $p_{jj}^{(n)} \to 0$ 的充分必要条件是 $p_{ii}^{(n)} \to 0$. 说明 $i \leftrightarrow j$ 时, j 是正常返状态的充分必要条件为 i 是正常反状态; j 是遍历状态的充分必要条件为 i 是遍历状态.
- 如果 i 是非常返状态, 从 $i \to j$ 我们还不能得到 j 的更多知识. 这时 j 可以是常返的(参考两边是吸收壁的简单随机游动中的 0 或 n), 也可以是非常返的(参考两边带有吸收壁的随机游动中的 $i,j \in \{1,2,\cdots,n-1\}$).

31 例3.4

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

- 对于常返状态 j ,有

(1) $\mu_j \geq 1$;

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

- 对于常返状态 j ,有

  (1) $\mu_j \geq 1$;

  (2) 当 $i \leftrightarrow j$,质点从 i 出发以概率1到达 j :

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} = P(T_j < \infty | X_0 = i) = 1;$$

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

- 对于常返状态 j ,有

(1) $\mu_j \geq 1$;

(2) 当 $i \leftrightarrow j$,质点从 i 出发以概率1到达 j :

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} = P(T_j < \infty | X_0 = i) = 1;$$

(3) 当 j 是遍历状态, $i \leftrightarrow j$,有

$$p_{ij}^{(n)} \to \pi_j \equiv 1/\mu_j. \tag{9}$$

其中“$\equiv$”表示定义成.

32 解例3.4

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

证明 (1) 从(7)知道

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = 1. \tag{10}$$

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

证明 (1) 从(7)知道

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = 1. \tag{10}$$

(2) 由于质点每次回到 i 后，总以相同的正概率到达 j ，且和上次从 i 出发是否到达 j 独立，所以质点从 i 出发以概率1到达 j . 即

$$P(T_j < \infty | X_0 = i) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T_j = k | X_0 = i) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} = 1.$$

33 解例3.4

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

解例3.4

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期

定义3.2

定理3.1

正常返和零常返状态

平均回转时间

定理3.2

周期

定理3.3

遍历状态

定理3.4

(3) 遍历状态的周期是 1 ，所以用定理3.4得到

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j} = \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} \in (0, 1].$$

从公式(4)得到，对选定的 m ，

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

(3) 遍历状态的周期是 1 ，所以用定理3.4得到

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j} = \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} \in (0, 1].$$

从公式(4)得到，对选定的 m ，

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

令 $n \to \infty$ 时，右边第一项收敛到 $\sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} \pi_j$ ，第二项的极限不超过 $b_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} f_{ij}^{(k)}$. 于是得到

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

(3) 遍历状态的周期是 1 ，所以用定理3.4得到

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j} = \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} \in (0,1].$$

从公式(4)得到, 对选定的 m ，

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

令 $n \to \infty$ 时, 右边第一项收敛到 $\sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} \pi_j$ ，第二项的极限不超过 $b_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} f_{ij}^{(k)}$. 于是得到

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} \pi_j + O(b_m).$$

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
正常返和零常返状态
平均回转时间
定理3.2
周期
定理3.3
遍历状态
定理3.4

(3) 遍历状态的周期是 1，所以用定理3.4得到

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j} = \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} \in (0,1].$$

从公式(4)得到，对选定的 m，

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

令 $n \to \infty$ 时，右边第一项收敛到 $\sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} \pi_j$，第二项的极限不超过 $b_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} f_{ij}^{(k)}$. 于是得到

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} \pi_j + O(b_m).$$

再令 $m \to \infty$，用 $b_m \to 0$ 和结论(2)得到结论(3).