第2章

离散信息的度量

符号约定-离散信源

随机变量和集合：大写字母，例 — X, Y

取值空间：以集合表示

随机变量 X 的取值空间 — $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$

随机变量实现：小写字母，例 — $x \in A$

概率分布：$P_X(x)$ —》简记为 $p(x)$

$P_{XY}(x, y)$ —》简记为 $p(x, y)$

§2.1 自信息和互信息

★ 自信息

- 自信息
- 联合自信息
- 条件自信息

★ 互信息

- 互信息
- 互信息的性质
- 条件互信息

§2.1.1 自信息

★ 事件集合X中的事件 $x = a_i$ 的自信息：

$$\boxed{I_X(a_i) = -\log P_X(a_i)}$$

简记 $I(X) = -\log p(x)$ 或 $I(a_i) = -\log p_i$

其中：1）$\sum_i p_i = 1$ ，$0 \le p_i \le 1$

2）$I(X)$非负 $\Rightarrow$? 对数的底数大于1

本书符号的约定

集合 $\rightarrow X$

事件 $\rightarrow x$

$\mathrm{x} = a_i$的概率 $\rightarrow \mathrm{P_x(a_i)}$

联合概率 $\rightarrow \mathrm{P_{XY}}(a_i, b_j)$

关于对数底的选取

$$\begin{cases} \log_2 x \to \text{比特} \\ \ln x \to \text{奈特} \\ \log_{10} x \to \text{哈特} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1\text{奈特} = 1.443\text{比特} \\ 1\text{哈特} = 3.32\text{比特} \end{cases}$$

§2.1.1 自信息

★自信息为随机变量

★自信息的含义包含两方面：

事件发生前→事件发生的不确定性

事件发生后→事件包含的信息量

例 2.1

箱中有90个红球，10个白球。现从箱中随机地取出一个球。求：

（1）事件“取出一个红球”的不确定性；

（2）事件“取出一个白球”所提供的信息量；

（3）事件“取出一个红球”与“取出一个白球”的发生，哪个更难猜测？

解:

（1）设 a_1 表示“取出一个红球”的事件，则 $p(a_1)=0.9$ 故事件 a_1 的不确定性为：

$$I(a_1)=-\log 0.9=0.152 \text{ 比特}$$

（2）设 a_2 表示“取出一个白球”的事件，则 $p(a_2)=0.1$ 故事件 a_2 所提供的信息量为：

$$I(a_2)=-\log 0.1=3.323 \text{ 比特}$$

（3）因为 $I(a_2)>I(a_1)$ ，所以事件“取出一个白球”的发生更难猜测。

联合自信息

★ 事件集合 XY 中的事件 $x = a_i, y = b_j$ 的自信息：

$$\boxed{I_{XY}(a_i, b_j) = -\log P_{XY}(a_i, b_j)}$$

简记 $I(XY) = -\log p(xy)$

其中： 1）p(xy)要满足非负和归一化条件

例 2.1(续)

箱中球不变，现从箱中随机取出两个球。求：

（1）事件“两个球中有红、白球各一个”的不确定性；

（2）事件“两个球都是白球”所提供的信息量；

（3）事件“两个球都是白球”和“两个球都是红球”的发生，哪个事件更难猜测？

解:

三种情况都是求联合自信息。设x为红球数，y为白球数。

(1) $P_{XY}(1,1)=\frac{C_{90}^{1}C_{10}^{1}}{C_{100}^{2}}=\frac{90\times 10}{100\times 99/2}=2/11$ $I(1,1)=-\log 2/11=2.460$ 比特

X=1和y=1

(2) $P_{XY}(0,2)=\frac{C_{10}^{2}}{C_{100}^{2}}=\frac{10\times 9/2}{100\times 99/2}=1/110$ $I(0,2)=-\log 1/110=6.782$ 比特

(3) $P_{XY}(2,0)=\frac{C_{90}^{2}}{C_{100}^{2}}=\frac{90\times 89/2}{100\times 99/2}=89/110$ $I(2,0)=-\log 89/110=0.306$ 比特

因为 $I(0,2)>I(2,0)$ ，所以事件“两个球都是白球”的发生更难猜测。

条件自信息

★ 事件 $y = b_j$ 给定，事件 $x = a_i$ 的自信息：

$$\boxed{I_{X|Y}(a_i \mid b_j) = -\log P_{X|Y}(a_i \mid b_j)}$$

简记 $I(X \mid Y) = -\log p(x \mid y)$

$p(x|y)$要满足非负和归一化条件

★条件自信息的含义包含两方面：

$y=b_j$给定，$x=a_i$发生前 $\rightarrow$ 事件发生的不确定性

$y=b_j$给定，$x=a_i$发生后 $\rightarrow$ 事件包含的信息量

★自信息、条件自信息和联合自信息之间的关系

$$I(xy)=I(x)+I(y|x)=I(y)+I(x|y)$$

链式法则

例 2.1(续)

箱中球不变，现从箱中先拿出一球，再拿出一球，求：

（1）事件“在第一个球是红球条件下，第二个球是白球”的不确定性；

（2）事件“在第一个球是红球条件下，第二个球是红球”所提供的信息量。

解:

这两种情况都是求条件自信息，设r表示红球，w表示白球。

(1) $$p(y=w\,|\,x=r)=10/99$$

$$I(y=w\,|\,x=r)=-\log 10/99=3.307 \text{ 比特}$$

(2) $$p(y=r\,|\,x=r)=89/99$$

$$I(y=r\,|\,x=r)=-\log 89/99=0.154 \text{ 比特}$$

例 2.2

有8×8=64个方格，甲将一棋子放入方格中，让乙猜：

1）将方格按顺序编号，让乙猜顺序号的困难程度为何？

2）将方格按行和列编号，当甲告诉乙方格的行号后，让乙猜列顺序号的困难程度为何？

解：两种情况下的不确定性

2个消息：x-行号；y-列号

1) $I(xy)=\log_2 64=6$ bit

2) $I(x|y)=-\log_2 p(x|y)=-\log2(1/8)=3$ bit

§2.1.2 互信息

★ 互信息

★ 互信息的性质

★ 条件互信息

互信息

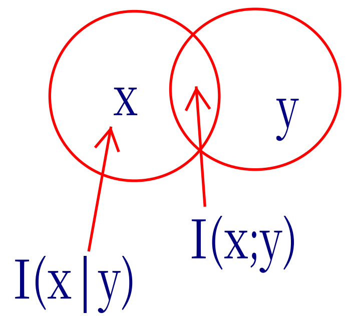
★ 离散随机事件 $x = a_i,\ y = b_j$ 之间的互信息：

$$I_{X;Y}(a_i;b_j) = \log\frac{P_{X/Y}(a_i/b_j)}{P_X(a_i)}$$

通过计算

简记 $I(x;y) = \log\frac{p(x/y)}{p(x)}$ 或 $I(a_i;b_j) = \log\frac{p_{ji}}{p_i}$

$$I(x;y) = I(x) - I(x|y)$$



I(x;y)与 I(x|y)的区别？

互信息的性质

★ 互易性

★ 当事件x，y统计独立时，互信息为0，即 I（x；y）=0

★ 互信息可正可负

Logp(y|x)/p(y),
p(y|x)<p(y)时为负

★ 任何两事件之间的互信息不可能大于其中任一事件的自信息

例 2.3

设e表示“降雨”，f表示“空中有乌云”，且

P(e)=0.125，P(e|f)=0.8

求：1）“降雨”的自信息 $I(e)$

2）“空中有乌云”条件下“降雨”的自信息 $I(e|f)$

3）“无雨”的自信息 $I(\bar{e})$

4）“空中有乌云”条件下“无雨”的自信息 $I(\bar{e}|f)$

5）“降雨”与“空中有乌云”的互信息 $I(e;f)$

6）“无雨”与“空中有乌云”的互信息 $I(\bar{e};f)$

解:

1) $I(e) = -\log 0.125 = 3$ bit

2) $I(e|f) = -\log 0.8 = 0.322$ bit

3) $I(\bar{e}) = -\log 0.875 = 0.193$ bit

4) $I(\bar{e}|f) = -\log 0.2 = 2.322$ bit

5) $I(e;\ f) = 3 - 0.322 = 2.678$ bit

6) $I(\bar{e};\ f) = 0.193 - 2.322 = -2.129$ bit

p(e-|f)=1-p(e|f)=0.2

I(e)-I(e|f)

互信息为负—》空中有乌云不利于无雨

条件互信息

★ 设联合集XYZ，在给定z∈Z 条件下x(∈X)与y(∈Y)之间的互信息定义为：

$$I(x;y/z)=\log\frac{p(x/yz)}{p(x/z)}$$

除条件外，条件互信息的含义与互信息的含义与性质都相同

§2.2　信息熵

★信息熵的定义与计算

★条件熵与联合熵

★熵的基本性质

信息熵的定义与计算

★ 离散信源X的熵定义为自信息的平均值，记为H(X)

$$H(X)=\underset{p(x)}{E}[I(x)]=-\sum_{x}p(x)\log p(x)$$

→ I(x)为事件x的自信息

→ $\underset{p(x)}{E}$ 表示对随机变量x用p(x)来进行取平均运算

→ 熵的单位为比特（奈特）/信源符号

信息熵H(X)的含义

★ 信源输出前→ 信源的平均不确定性

★ 信源输出后→ 一个信源符号所提供的平均信息量

或编码一个信源符号的平均长度

★ 表示信源随机性大小：H（X）大的，随机性大

★ 信源输出后，不确定性就解除→ 解除信源不确定性所需信息量

例 2.4　一电视屏幕的格点数为500×600=300000，每点有10个灰度等级，若每幅画面等概率出现，求每幅画面平均所包含的信息量

解：　可能的画面数是多少？ 10^{300000} $\Rightarrow p = \frac{1}{10^{300000}}$

出现每幅画面的概率

代入公式：

$$H(X) = \log_2(1/p) = \log_2(10^{300000}) = 10^6 bit$$

例 2.5

A、B两城市天气情况概率分布如下表：

	晴	阴	雨
A城市	0．8	0．15	0．05
B城市	0．4	0．3	0．3

问哪个城市的天气具有更大的不确定性？

解:

$$H(A)=H(0.8,0.15,0.05)=-0.8\times\log 0.8-0.15\times\log 0.15-0.05\times\log 0.05$$
$$=0.884\ \text{比特/符号}$$

$$H(B)=H(0.4,0.3,0.3)=-0.4\times\log 0.4-0.3\times\log 0.3-0.3\times\log 0.3$$
$$=1.571\ \text{比特/符号}$$

所以，B城市的天气具有更大的不确定性。

例 2.6

有甲、乙两箱球，甲箱中有红球50、白球20、黑球30；乙箱中有红球90、白球10。现做从两箱中分别随机取一球的实验，问从哪箱中取球的结果随机性更大？

解：　设A、B分别代表甲、乙两箱，则

$$H(A)=H(0.5,0.2,03)=-0.5\times\log 0.5-0.2\times\log 0.2-0.3\times\log 0.3$$
$$=1.486 \text{ 比特/符号}$$

$$H(B)=H(0.9,0.1)=-0.9\times\log 0.9-0.1\times\log 0.1=0.469 \text{ 比特/符号}$$

所以，从甲箱中取球的结果随机性更大。

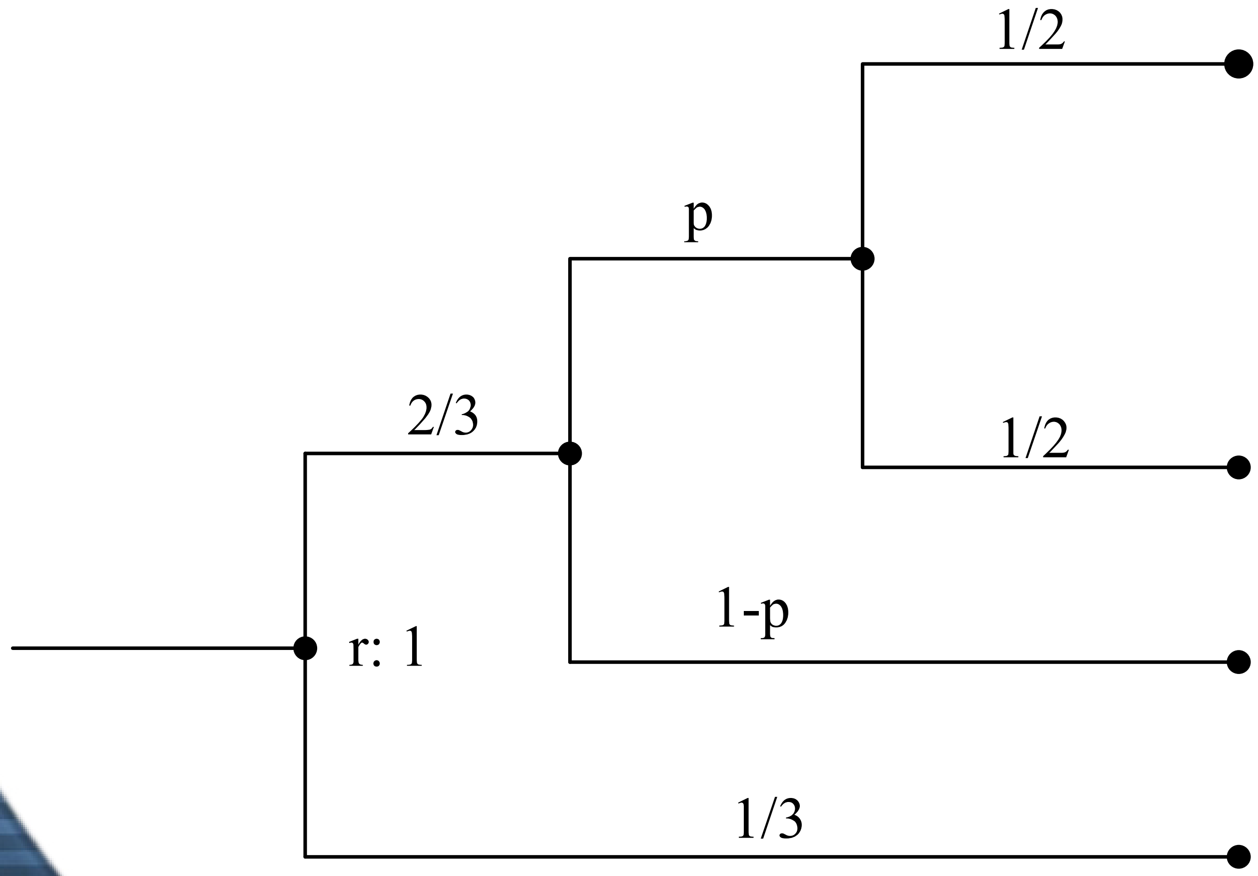
信息熵的计算

★定理2.1 离散信源的熵等于所对应的有根概率树上所有节点(包括根节点，不包括叶)的分支熵用该节点概率加权的和，即

$$H(X)=\sum_i q(u_i)H(u_i)$$

其中，$q(u_i)$为节点u_i的概率，$H(u_i)$为节点u_i的分支熵。

例 2.6



条件熵

★ 条件熵：联合集XY上，条件自信息I(y|x)的平均值

$$H(Y/X)=\underset{p(xy)}{E}[I(y/x)]$$

$$=-\sum_{x}\sum_{y}p(x\,y)\log p(y/x)$$

$$=\sum_{x}p(x)[-\sum_{y}p(y/x)\log p(y/x)]$$

$$=\sum_{x}p(x)\boxed{H(Y/x)}$$

遍历x取平均

$$H(Y/x)=-\sum_{y}p(y/x)\log p(y/x)$$

为在x取某一特定值时 Y的熵

例 2.7

随机变量X和Y，符号集均为{0，1} $p_x(0)=\frac{2}{3}$ $p_x(1)=\frac{1}{3}$

$p(y=0\,|\,x=0)=p(y=1\,|\,x=0)=\frac{1}{2}$ $p(y=1\,|\,x=1)=1$ 求H(Y|X)

解：$$H(Y\,|\,X)=\sum_x p(x)H(Y\,|\,x)=p(x=0)H(Y\,|\,x=0)+p(x=1)H(Y\,|\,x=1)$$

联合熵H(p1,p2,...,pn)一般写成H(p1,p2,...p(n-1))

X=1时，Y确定，
信息量为0

$$=\frac{2}{3}H(\frac{1}{2})+\frac{1}{3}H(1)=\frac{2}{3}$$ 比特/符号

联合熵

★ 联合熵：联合集XY上，对联合自信息I (xy) 的平均值

$$\boxed{H(XY) = \underset{p(xy)}{E}[I(x\ \ y)]}$$

$$= -\sum_{x}\sum_{y} p(x\ y)\log p(x\ y)$$

例 2.7(续)

求H(XY)

解：由已知条件可得XY的联合概率分布，如下表所示

		Y	
p(xy)		0	1
X	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	1	0	$\frac{1}{3}$

$$H(XY)=H(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})=\log 3=1.585\ \text{比特/符号}$$

熵的基本性质

- ★ 凸函数
- ★ 信息散度
- ★ 熵的基本性质
- ★ 各类熵的关系
- ★ 熵函数的唯一性

凸函数

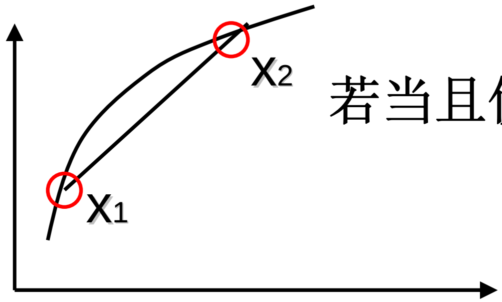
$$\left.\begin{aligned} &H(X)=H(p)=-\sum p_i \log p_i \\ &\sum p_i = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad H(X)\text{为}n-1\text{元函数}$$

当$n=2$ $\quad \Rightarrow H(p)=H(p_1,p_2)=H(p_1,1-p_1)=H(p_1)$

下面我们来定义凸函数 LOOK一下

★ 对于α（$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$）及任意两矢量$x_1, x_2$，有

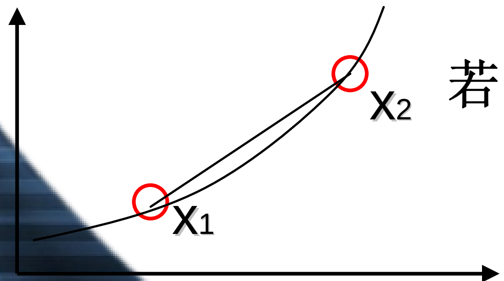
$f[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2] \geqslant \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$ 上凸函数(cap)



若当且仅当$x_1 = x_2$或$\alpha = 0,1$时等式成立 $\Rightarrow$ 严格上凸函数

★ 对于α（$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$）及任意两矢量$x_1, x_2$，有

$f[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2] \leqslant \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$ 下凸函数(cup)



若当且仅当$x_1 = x_2$或$\alpha = 0,1$时等式成立 $\Rightarrow$ 严格下凸函数

说明：

- 在很多数学或信息论专著中，需要注意凸和凹的使用含义；
- 函数f(x)是凸的（convex）《——》本书中的下凸（cup）
- 函数f(x)是凹的（concave）《——》本书中的上凸（cap）

★ 定理 ：

注意：lambda为小于等于1的正数

f(x)是区间上的实值连续严格上凸函数

任意一组$x_1, x_2, \cdots, x_q$

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q$，$\sum \lambda_k=1$

$\Rightarrow$

Jenson不等式

$$f[\sum_{k=1}^{q} \lambda_k x_k] \geq \sum_{k=1}^{q} \lambda_k f(x_k)$$

当且仅当$x_1=x_2=\ldots=x_q$或$\lambda_k=1$（$1 \leqq k \leqq q$）且$\lambda_j=0$（$j \neq k$）时，等式成立

证　利用数学归纳法。根据上凸函数的定义有

$$f[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2]\geqslant \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$$

其中$0<\alpha<1$，即$q=2$ 时成立。

今假定 $q=n$ 成立。现考虑 $q=n+1$ 的情况

设　$\lambda_k\geq 0, \sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k=1$，令 $\alpha=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k$，则 $\lambda_{n+1}=1-\alpha$，

$$\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k f(x_k)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k)+\lambda_{n+1}f(x_{n+1})$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k / \alpha) f(x_k) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

利用n时的归纳假定

$$\le \alpha f[\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k / \alpha) x_k] + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

二次利用上凸函数的性质

$$\le f[\alpha \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k / \alpha) x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1}]$$

$$= f[\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k]$$

当且仅当 $x_1=x_2=\ldots=x_q$ 或 $\lambda_k=1$（$1\leqq k\leqq q$）且 $\lambda_j=0$（$j\neq k$）时，等式成立。

★ 特别地，当x_k为离散信源符号的取值，λ_k为相应的概率，f(x)为对数函数时，有

对数是上凸函数

$$E[\log(x)] \le \log[E(x)]$$

★ 对于一般的凸函数有

$$E[f(x)] \le f[E(x)]$$

★ 上凸函数的判定方法

1）在某区间的二阶导数小于0，则在此区间内为严格上凸函数。

2）利用Jenson不等式 $f[\sum_{k=1}^{q} \lambda_k x_k] \geq \sum_{k=1}^{q} \lambda_k f(x_k)$

一个在以后的公式推导中反复使用的不等式：

对于任意x，有： $1-\dfrac{1}{x} \le \ln x \le x-1$

不等式应用：信息论中，很多场合带有对数符号，使用该不等式去掉对数符号

这是怎么得来的？

设 $\boxed{f(x)=\ln x-x+1}$ $\Rightarrow \begin{cases} ① \text{ x=1为稳定点} \\ ② \text{ x=1时，2阶导数小于0} \end{cases}$ $\Rightarrow$x=1处有极大值

上凸

$y=\dfrac{1}{x}$代入等式 $\Rightarrow 1-\dfrac{1}{y} \le \ln y$

y换成x

信息散度

★ P和Q为定义在同一概率空间的两个概率测度，则P相对于Q的散度：

注意本章仅讨论离散信息

$$D(P//Q)=\sum_{x}P(x)\log\frac{P(x)}{Q(x)}$$

注意：散度不对称，即$D(P||Q)\neq D(Q||P)$

上式中，概率分布的维数不限，可以是一维，也可以是多维。

★ 定理：如果在一个共同的有限字母表(指标集)的概率空间上给定的两个概率测度P(x)和Q(x)

$$\boxed{D(P\,//\,Q) \geq 0}$$

当且仅当对所有x, P(x) = Q(x) 时,等式成立

logx是上凸函数

$$-D(P//Q) = \sum_x P(x)\log\frac{Q(x)}{P(x)} \leq \log[\sum_x P(x)\ \frac{Q(x)}{P(x)}]$$

$$\leq \log[\sum_x Q(x)] = 0$$

信息散度的物理含义：

对于服从P的信源X采用基于分布Q的编码平均所需要的额外比特数

1）对于信源X服从$P(X)$，符号x的最优编码长度为：$\log\frac{1}{P(x)}$，平均编码长度为：$H(x)=\sum P(x)\log\frac{1}{P(x)}$

2）符号x采用分布$Q(x)$的编码长度为：$\log\frac{1}{Q(x)}$，平均编码长度为：$\sum P(x)\log\frac{1}{Q(x)}$

3）编码的额外长度为：$\sum P(x)\log\frac{1}{Q(x)}-\sum P(x)\log\frac{1}{P(x)}$

$$=\sum P(x)\log\frac{P(x)}{Q(x)}=D_{KL}(P\|Q)$$

熵的基本性质（1）

★ 对称性：$p=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$中，各分量的次序可以任意改变

★ 非负性：自信息非负，熵为自信息的平均 $\Rightarrow$ 熵非负

★ 扩展性：$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log\varepsilon=0 \quad \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} H_{n+1}(p_1,p_2,\ldots,p_n-\varepsilon,\varepsilon)=H_n(p_1,p_2,\ldots,p_n)$

即：小概率事件对熵的影响很小，可以忽略

★ 可加性：$H(XY)=H(X)+H(Y|X)$

$$H(X_1X_2\ldots X_N)=H(X_1)+H(X_2|X_1)+\ldots+H(X_N|X_1\ldots X_{N-1})$$

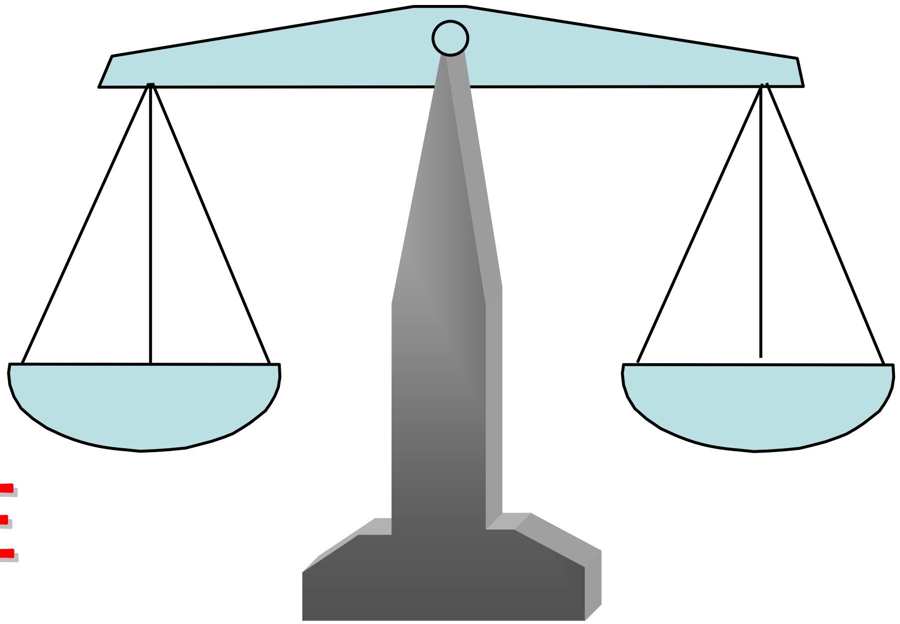
复合事件集合的不确定性为各个分事件集合的不确定性的和

说明：

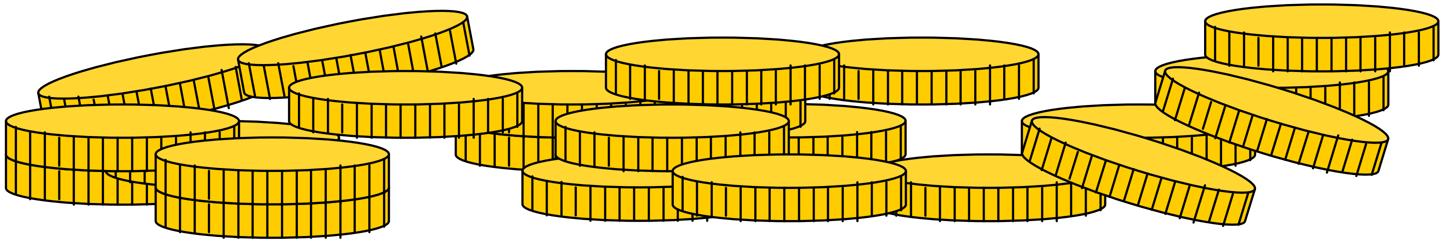
- ✓ 熵的对称性 — 改变概率矢量中各分量的顺序，熵不改变
- ✓ 熵的非负性 — 只适用于离散信源，对连续信源不成立
- ✓ 熵的可加性 — 熵的链式法则 (Chain Rule)

熵的链原则举例

找找假币在哪里?



1. 12个外形相同的硬币，有一个重量不同的假币
2. 天平称重：平衡、左倾、右倾
3. 最少称几次可鉴别假币？



解题要点：

- ✓ 据熵的链式法则，复合事件的不确定性可通过多次实验去除
- ✓ 每次实验所获得信息量最大，则总实验次数最少
- ✓ 天平一次称重信息量log3，k次为klog3
- ✓ 12个硬币，每个有真/假2状态，共24种可能状态，信息量为log24
- ✓ 注意到3log3=log27>log24，故理论上最少3次

熵的基本性质（2）

★ 极值性：

定理2. 4. 3 — 离散最大熵定理

对于离散随机信源，当其中的事件等概率发生时，熵达到最大值

$$\boxed{H(X) \le \log\ n}$$

证 设随机变量集合有n个符号，概率分布为P(x)；Q(x)为等概率分布，即 Q(x)=1/n。 根据散度不等式有

$$D(P//Q) = \sum_x P(x)\log\frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$= \sum_x P(x)\log P(x) - \sum_x P(x)\log(1/n)$$

$$= -H(X) + \log\ n \ge 0$$

$$\Rightarrow \quad H(X) \le \log\ n$$

熵的基本性质（3）

★ 确定性：

H(1,0) = H(1,0,0)= … = H(1,0,…0) = 0。
当随机变量集合中任一事件概率为1时，熵为0

★ 上凸性：

H(p)=H(p1,p2,…,pn) 是 (p1,p2,…,pn) 的严格的上凸函数

有关熵严格上凸性的说明:

- ✓ 熵函数H(P)是概率矢量P=(p1,p2,…,Pn)的严格上凸函数
- ✓ 对任意概率分布P1和P2，及任意0<a<1，有

$$H[aP1+(1-a)P2]>aH(P1)+(1-a)H(P2)$$

- ✓ 说明存在一个概率分布P，使信源熵最大。对离散信源，该分布是均匀分布；对于连续信源，该分布是高斯
- ✓ 证明留给大家

各类熵的关系

★ 条件熵不大于信息熵：

定理 （熵的不增原理）

$$\boxed{H(Y|X) \le H(Y)}$$

$$H(Y)-H(Y/X)=-\sum_{Y} q(y)\log q(y)+\sum_{x}\sum_{y} p(x)p(y/x)\log p(y/x)$$

$$\boxed{q(y)=p(x)p(y/x)}$$

$$=\sum_{x} p(x)\sum_{y} p(y/x)\log\frac{p(y/x)}{q(y)}$$

$$=\sum_{x} p(x)D(p(y/x)//q(y)) \ge 0$$

熵不增加原理 — 证明要点和讨论

1、$q(y)=\sum_{x} p(x)p(y|x)$

2、$\sum_{x} p(y|x)\log\frac{p(y|x)}{q(y)}=D[p(y|x)\|q(y)]\geq 0$

3、$I(X;Y)=H(Y)-H(Y|X)\geq 0$

4、信息处理中，条件越多，熵越小

各类熵的关系

★ 联合熵不大于个信息熵的和：

$$H(X_1X_2\cdots X_N)\le\sum_{i=1}^{N}H(X_i)$$

联合信源编码可以获得高的编码效率

证明思路：熵的可加性和熵不增加原理

$$\left.\begin{array}{l}\\ H(Y\,|\,X)\le H(Y)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

★ 联合熵与信息熵、条件熵的关系

H(XY)= H(X) + H(Y/X)

熵函数的唯一性

如果要求熵函数满足以下条件：

★ 是概率的连续函数 $H(X)=\log n$

★ 信源符号等概率时是n（信源符号数）的增函数

★ 可加性或链式法则

那么，以概率矢量为变量的熵函数的表示是唯一的。

§2.3 平均互信息

★ 平均互信息的定义

涉及二个随机变量之间

★ 平均互信息的性质

★ 平均条件互信息

集合与事件之间的互信息

★ 集合X与事件$y=b_j$之间的互信息：

$$I(X;y)=\sum_{x}P(x|y)\log\frac{P(x|y)}{p(x)}$$

由事件$y=b_j$提供的关于集合X的平均条件互信息（用条件概率平均）

定理　　I(X；y)≧0，

仅当y与所有x 独立时，等式成立。

证　　根据散度的定义，有 $I(X;y)=D(P_{X/y}//P_X)\geq 0$

仅当对所有x，p(x)= p(x / y) 时，等式成立，证毕。

有关集合X和事件y互信息的说明:

1、事件x和y互信息的定义

$$I(x;y)=\log\frac{p(x/y)}{p(x)} \text{ 或 } I(a_i;b_j)=\log\frac{p_{ji}}{p_i}$$

2、对条件概率 $P(x|y)$中x取平均，有:

$$I(X;y)=\sum_{x}P(x|y)\log\frac{P(x|y)}{p(x)}$$

平均互信息

★ 集合X、Y之间的平均互信息：

$$\boxed{I(X;Y)=\sum_{x}p(x)I(Y;x)}$$

$$=\sum_{x,y}p(x)p(y/x)\log\frac{p(y/x)}{p(y)}$$

$$=\sum_{x,y}p(x)p(y/x)\log\frac{p(y/x)}{\sum_{x}p(x)p(y/x)}$$

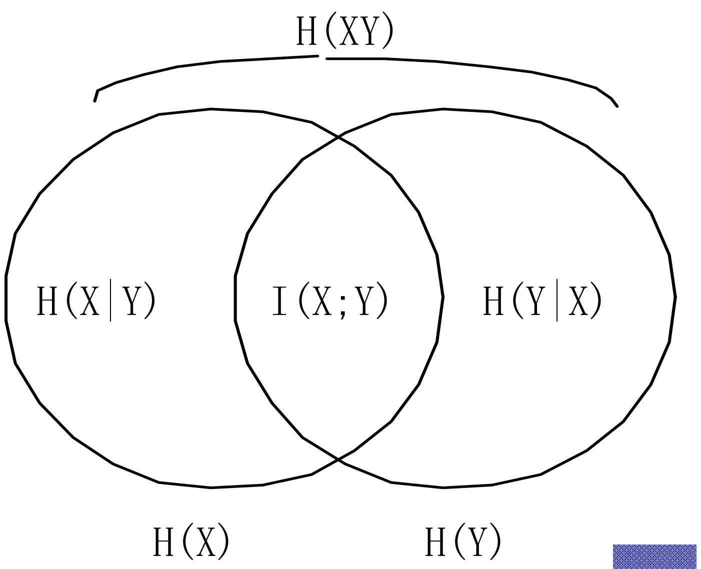
$$=\sum_{i,j}p_i p_{ij}\log\frac{p_{ij}}{\sum_{i}p_i p_{ij}}$$

平均互信息与熵的关系

★ $I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)$

★ $I(X;Y)=H(Y)-H(Y|X)$

★ $I(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(XY)$



平均互信息的性质

★ 非负性：

定理： $\boxed{I(X;Y)\geqslant 0}$ 仅当X，Y 独立时，等式成立

证明思路： $I(X;y)\geq 0 \Rightarrow$ 其均值 ≥ 0 p(x|y)和p(x)的散度

★ 互易性(对称性)： $\boxed{I(X;Y)=I(Y;X)}$

★ 凸函数性

I(X;Y) 是p(xy)或p(x), p(y|x)的函数

- 是关于p(x)的上凸函数

- 是关于的p(y|x)下凸函数

★ 定理：

I(X;Y)为概率分布p(x)的上凸函数。

证明思路:

1、设 $p(y|x)$ 固定，用于描述特定信道

2、任取二种输入分布 $p_1(x)$ 和 $p_2(x)$，$0<\theta<1$，构造 $p(x)=\theta p_1(x)+(1-\theta)p_2(x)$，验证 $p(x)$ 满足概率分布条件 $\sum p(x)=1$，记 $I(X;Y)=I[p(x)]$

3、利用 Jenson 不等式证明:

$$I\left[\theta p_1(x)+(1-\theta)p_2(x)\right]\geq\theta I[p_1(x)]+(1-\theta)I[p_2(x)]$$

例

二元信源X输出符号为{0, 1}，$P_X(0)=\omega$，条件概率分别为$P_{Y|X}(0|0) = P_{Y|X}(1|1)=1-p$，$P_{Y|X}(1|0)=P_{Y|X}(0|1)=p$，求$I(X;Y)$。

解：

$$\left.\begin{array}{l} P_Y(0)\to q(0) \\ P_Y(1)\to q(1) \end{array}\right\} \Rightarrow [q(0) \quad q(1)] = [\omega \quad 1-\omega]\begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

$$q(0) = \omega(1-p) + (1-\omega)p = p+\omega-2\omega p$$

$$q(1) = \omega p + (1-\omega)(1-p) = \omega p + (1-\omega) - (1-\omega)p = 1-\omega-p+2\omega p$$

$$\Rightarrow H(Y) = H(p+\omega-2\omega p)$$

$$H(Y|X)=\omega[-(1-p)\log(1-p)-p\log p]+(1-\omega)[-p\log p-(1-p)\log(1-p)]$$

x=0, {(1-p), p}　　x=1, {p, (1-p)}

$$=-p\log p-(1-p)\log(1-p)=H(p)$$

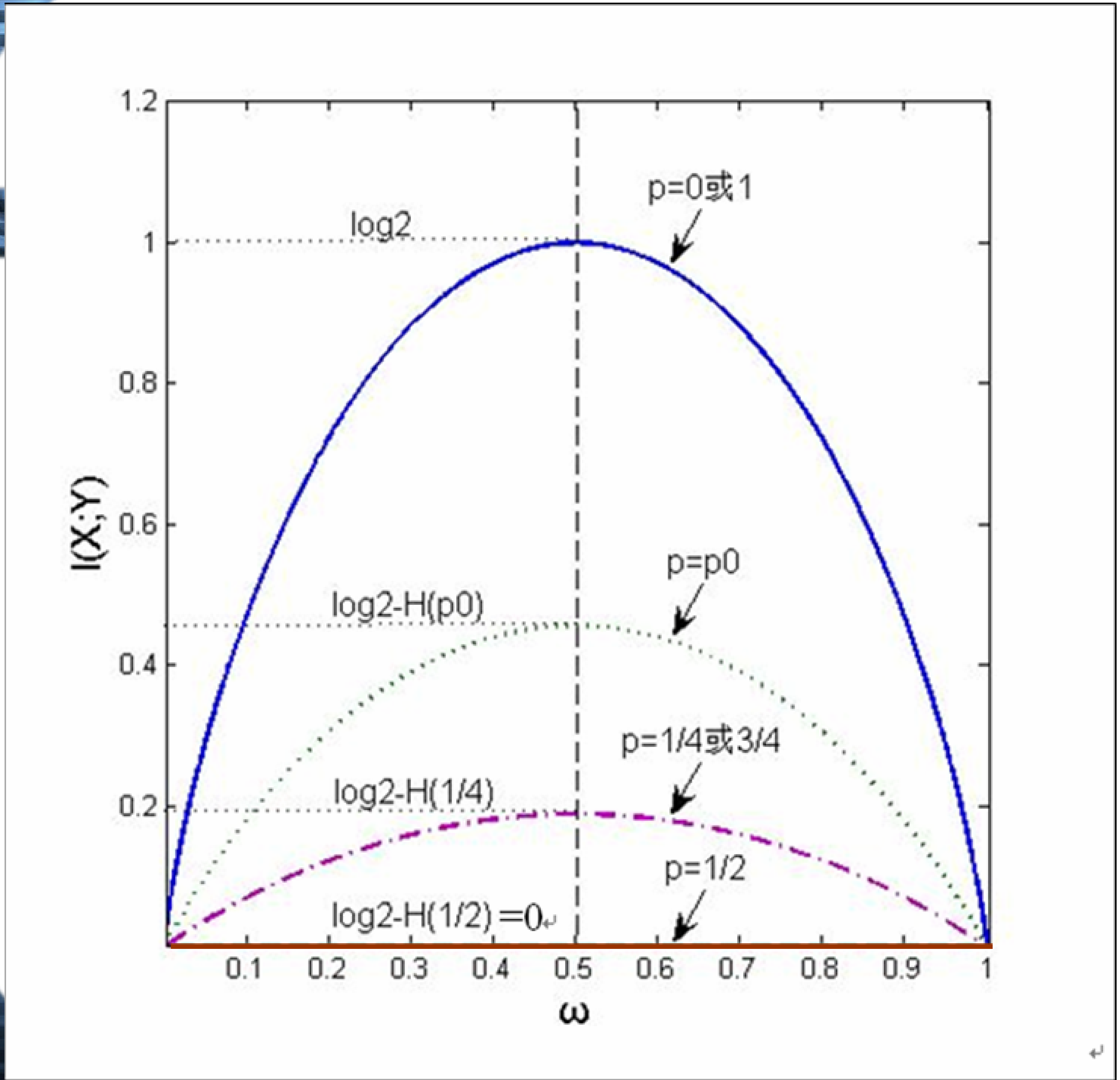
$$\Rightarrow I(X;Y)=H(Y)-H(Y|X)$$
$$=H(p+\omega-2\omega p)-H(p)$$

可见：

1）这是一个上凸函数，注意区别输入分布和信道误码率；

2） $p+\omega-2\omega p=\dfrac{1}{2}$ 移项 $\Rightarrow(1-2\omega)(p-1/2)=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}\text{当}p\neq\dfrac{1}{2},\omega=\dfrac{1}{2}\text{时，有极大值}\\ \text{当}p=\dfrac{1}{2},I(X;Y)=H(\dfrac{1}{2})-H(\dfrac{1}{2})=0\end{cases}$$



1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
I(X;Y)
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
ω
log2
p=0或1
log2-H(p0)
p=p0
p=1/4或3/4
log2-H(1/4)
p=1/2
log2-H(1/2)=0

★ 定理：

对于固定的概率分布p(x)，I(X;Y)为条件概率p(y|x)的下凸函数。

证明思路： 设$p_1(y|x), p_2(y|x)$

令$0<\theta<1$,取$p(y|x)=\theta p_1(y|x)+(1-\theta)p_2(y|x)$

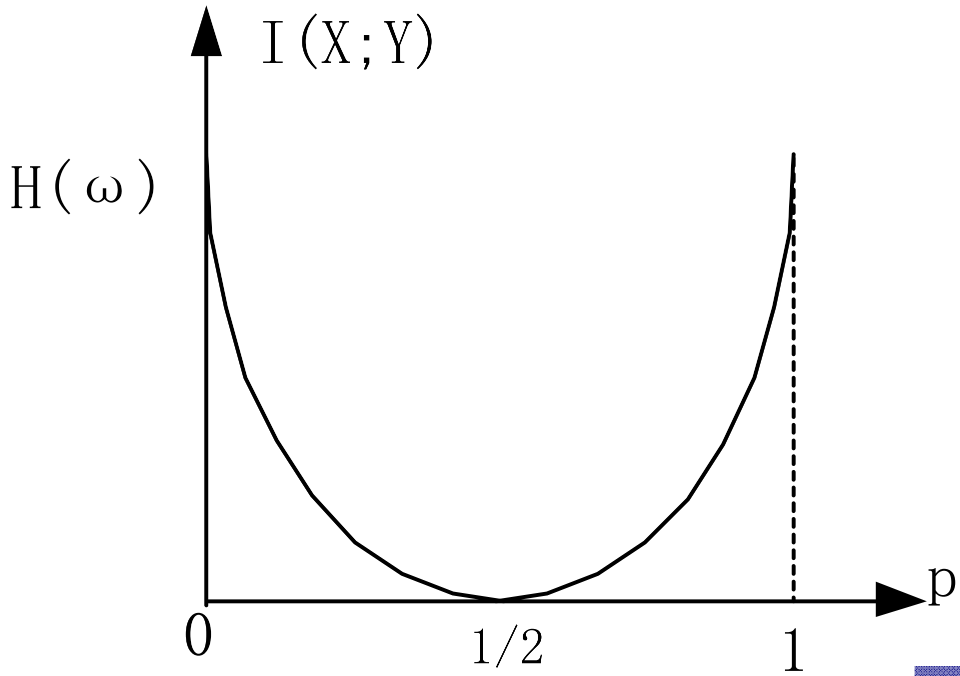
$\Rightarrow \sum_y p(y|x)=1$ 记$I(X;Y)=I[p(y|x)]$

那么只要证$I[p(y|x)]\le \theta I[p_1(y|x)]+(1-\theta)I[p_2(y|x)]$

ω

例 续 $I(X;Y) = H(p+\omega-2\omega p) - H(p)$， ω固定

解：这是一个下凸函数



★ 极值性：

$$I(X;Y) \leqq H(X)$$
$$I(X;Y) \leqq H(Y)$$

平均条件互信息

★ 设联合集XYZ，Z条件下，X与Y之间的平均互信息：

$$\boxed{I(X;Y|Z)=\underset{p(xyz)}{E}\{\log\frac{p(x|yz)}{p(x|z)}\}}=\sum_{x,y,z}p(xyz)\log\frac{p(x|yz)}{p(x|z)}$$

链式法则

由于$I(x;yz)=\log\frac{p(x|yz)}{p(x)}=\log\frac{p(x|yz)}{p(x|z)}\frac{p(x|z)}{p(x)}=I(x;y|z)+I(x;z)$

同理得—》 $\boxed{I(x;yz)=I(x;z/y)+I(x;y)}$

两边求平均，得：$\boxed{I(X;YZ)=I(X;Z/Y)+I(X;Y)}=I(X;Y/Z)+I(X;Z)$

★ 定理：平均条件互信息是非负的：

$$\boxed{I(X;Y/Z)\geq 0}$$

当且仅当$p(x|z)=p(x|yz)$，等式成立

构造KL散度D，并利用D>=0是证明类似问题的常用方法

证明：

$$I(X;Y/Z)=\sum_{x,y,z}p(xyz)\log\frac{p(x/yz)}{p(x/z)}$$

$$=\sum_{x,y,z}p(xyz)\log\frac{p(xyz)}{p(x/z)p(yz)}=D(P_{XYZ}//P_{X/Z}\times P_{YZ})\geq 0$$

当且仅当$p(x|z)=p(x|yz)$时，$I(X;Y/Z)=D(P_{XYZ}//P_{X/Z}\times P_{YZ})\geq 0$等式成立

★ 定理：

给定z时，X和Y独立

$$\boxed{I(X;YZ) \geq I(X;Z)}$$

表明给定Z时，有关Y的信息对X无贡献

当且仅当$p(x|z) = p(x|yz)$时等式成立

$$\boxed{I(X;YZ) \geq I(X;Y)}$$

当且仅当$p(x|y) = p(x|yz)$时等式成立

定理证明依据：$I(X;YZ) = I(X;Z/Y) + I(X;Y) = I(X;Y/Z) + I(X;Z)$

设Y、Z为独立随机变量集合，其中Y含n个事件,Z含k个事件，则联合集YZ含nk个事件。Z集合可看成YZ集合中某些事件的合并处理，$\{yz\}_y$->{z}，于是nk个事件合并成k个事件。

1）随机事件合并后，获得的信息量减少,log(nk)->logk

2）如果YZ为二维取值空间，则Z的取值空间是对YZ取值空间的合并；而YZ取值空间是对Z或Y取值空间的细化。可见，通过对取值空间的细化，可使获得的信息量增加。

本 章 小 结

★ 自信息的平均值为熵 $H(X)=\underset{p(x)}{E}[-\log p(x)]$

★ 条件自信息的平均值为条件熵 $H(X/Y)=\underset{p(xy)}{E}[-\log p(x/y)]$

★ 联合自信息的平均值为联合熵 $H(XY)=\underset{p(xy)}{E}[-\log p(xy)]$

★ 互信息的平均值为平均互信息 $I(X;Y)=\underset{p(xy)}{E}[\log\frac{p(y/x)}{q(y)}]$

★ 条件互信息的平均值为平均条件互信息

$$I(X;Y/Z)=\underset{p(xyz)}{E}[\log\frac{p(y/xz)}{q(y/z)}]$$

本 章 小 结

★ 熵的可加性 $H(X_1X_2\cdots X_n)=H(X_1)+H(X_2/X_1)+\cdots+H(X_n/X_1\cdots X_{n-1})$

★ 平均互信息与熵的关系

$$
\begin{aligned}
I(X;Y)&=H(X)-H(X/Y)\\
&=H(Y)-H(Y/X)\\
&=H(X)+H(Y)-H(XY)
\end{aligned}
$$

★ 离散熵与平均互信息都具有非负性

★ 离散最大熵定理 $H(X)=\log n$(n为信源符号数)

★ 平均互信息的凸函数性质

对输入

对信道

平均互信息为输入概率的上凸函数，为条件概率的下凸函数

课后习题

Page 35

2.6、2.7、2.10