第四章 离散时 间马尔可夫链

第四章 离散时间马尔可夫链

第四章 离散时间马尔可夫链

马尔可夫过程作为最重要的随机过程,在计算数学、金融经济、生物、化学、管理科学乃至人文科学中都有广泛的应用.

- 设 $\{X_n\} = \{X_n | n = 0, 1, \dots\}$ 是随机序列, 如果每个 X_n 都在 S 中取值, 则称 S 是 $\{X_n\}$ 的状态空间, 称 S 中的元素为状态.
- 当 S 中只有有限或可列个状态时,可以将 S 中的状态进行编号, 得到由整数构成的号码集合 I. 为表达方便,以后用状态的编 号表示该状态.于是 I 成为 {X_n} 的状态空间.
- 本章总设 $\{X_n\}$ 的状态空间是 I, 并且用 i,j,k,i_0,i_1,\cdots 等表示 I 中的状态. 以后只对状态空间 $I=\{1,2,\cdots,\}$ 进行叙述, 但是所有的叙述和结论对于一般的有限或可列集合 I 也是成立的.

第四章 离散时 间马尔可夫链

第四章 离散时 司马尔可夫链 定义 (1.1)

如果对任何正整数n和I中的 $i, i, io, i_1, \cdots, i_{n-1}$,随机序列 $\{X_n\}$

满足

 $P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0)$

 $=P(X_1 = j|X_0 = i), i,j \in I.$

则称 $\{X_n\}$ 为时齐的马尔可夫(Markov)链, 简称为**马氏链**. 这时

 $P = (p_{ii}) = (p_{ii})_{i,i \in I}$

 $p_{ij}=P(X_1=j|X_0=i),\ i,j\in I,$ 为马氏链 $\{X_n\}$ 的转移概率. 称矩阵

为人挺 $\{X_n\}$ 的特移概率. 称矩件

为马氏链{X_n}的一步转移概率矩阵,简称为转移矩阵.

4 马氏链的直观理解

第四章 离散时 间马尔可夫链

第四章 离散时 间马尔可夫链

对马氏链的直观理解是:

已知现在 $B = \{X_n = i\}$, 将来 $A = \{X_{n+1} = j\}$ 与过去 $C = \{X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\}$ 独立.

人们习惯地称这种性质为马氏性.

为了进一步理解马氏性,需要下面的定理.

§4.3 状态的命 名和周期

定义3.2

AC-05-3-1

近水态

平均回转时间

定理3.2

周期

定理3.3

遍历状态

主理3.4

§4.3 状态的命名和周期

§4.3 状态的命 名和周期 定义3.2

定理3.1

返状态

干均四转时间

足理3.2

定理3.3

遍历状态

定义 (3.1)

设I 是马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间.

(a) 如果 $p_{ii} = 1$,则称 i 是吸引状态;

§4.3 状态的命 名和周期

定理3.1 E常返和零常

▽√√心 平均回转时间

定理3.2 周期 定理3.3

题 加 状 心

定义 (3.1)

设I 是马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间.

- (a) 如果 $p_{ii} = 1$, 则称 i 是吸引状态;
- (b) 如果存在 $n \ge 1$ 使得 $p_{ii}^{(n)} > 0$,则称 i 通 j,记做 $i \to j$;

定义(3.1)

设I 是马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间.

- (a) 如果 $p_{ii} = 1$, 则称 i 是吸引状态;
- (b) 如果存在 $n \ge 1$ 使得 $p_{ii}^{(n)} > 0$,则称 i 通 j,记做 $i \to j$;
- (c) 如果 $i \rightarrow j$ 且 $j \rightarrow i$,则称i,j 互通,记做 $i \leftrightarrow j$.

平均回转⁸ 定理3.2 周期 定理3.3 遍历状态

定义 (3.1)

设I 是马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间.

- (a) 如果 $p_{ii} = 1$, 则称 i 是吸引状态;
- (b) 如果存在 $n \ge 1$ 使得 $p_{ii}^{(n)} > 0$, 则称 i 通 j, 记做 $i \to j$;
- (c) 如果 $i \rightarrow j$ 且 $j \rightarrow i$,则称i,j 互通,记做 $i \leftrightarrow j$.

 $i \rightarrow j$ 表示质点从i 出发以正概率到达j. i,j 互通表明质点从i 到达j 后,以正概率回到i,反之亦然.

2 互通的传递性和对称性

§4.3 状态的命 名和周期

```
4.3 状态的命
3 和周期
E 义3.2
E 理3.1
E 常返和零常
```

平均回转时间

定理3.2

遍历状态 定理3.4 直观上符号" \rightarrow " 具有传递性: 如果 $i \rightarrow j$ 和 $j \rightarrow k$,则 $i \rightarrow k$. 实际上这时有 n,m 使得 $p_{ij}^{(n)}p_{jk}^{(m)} > 0$,用推论2.2得到

$$p_{ik}^{(n+m)} \ge p_{ij}^{(n)} p_{ik}^{(m)} > 0..1$$

互通"↔"关系还有**对称性**: 如果 $i \leftrightarrow j$ 则 $j \leftrightarrow i$.

3 A. 常返与非常返状态

§4.3 状态的命 名和周期

§4.3 状态的命 名和周期 . .

定理3.1

正偿证和要的

巡状念

平均回转时间

定理3.2

问规

足理3.3

題加本心

两边都是反射壁的简单随机游动中,所有的状态互通,质点从i出发一定回到i无穷次.这种状态称为**常返状态**.

3 A. 常返与非常返状态

§4.3 状态的命 名和周期

两边都是反射壁的简单随机游动中,所有的状态互通,质点从 i 出发一定回到 i 无穷次.这种状态称为**常返状态**.

MC在有限的城镇 I = {1,2,···,N} 中转移时,假设所有的城镇互通.只要他一直转移下去,也可以回到出发的城镇无穷次.这时称他出发的城镇是可以经常返回的.以后把经常返回简称为常返.可以理解,只要所有城镇互通,则所有城镇都是常返的.

常返的含义

§4.3 状态的命

• 如果城镇 i 是常返的, 且 $i \rightarrow j$, 则MC从 i 出发到达 j 的 概率p>0. 他回到 i 后再次以相同的概率p 到达 i; 再 回到 i 后, 再以相同的概率 p 到达 j; ····· . 每次是否 到达 *i* 是相互独立的.

4 常返的含义

§4.3 状态的命 名和周期

¥4.3 状态的 é 名和周期 定义3.2 定理3.1 正常返和零常

返状态 平均回转时间

定理3.2 周期 定理3.3

遍历状态 定理3.4

- 如果城镇 i 是常返的, 且 $i \rightarrow j$, 则MC从 i 出发到达 j 的概率 p > 0 . 他回到 i 后再次以相同的概率 p 到达 j ; 再回到 i 后, 再以相同的概率 p 到达 j ; …… . 每次是否到达 j 是相互独立的.
- 这就等价于独立重复试验,试验成功就是从i 到达j,于是他最终到达j 的概率是1. i 是常返的,所以他从j 必须回到i. 这就说明如果 $i \rightarrow j$, i 是常返的,则j 也是常返的,并且 $j \leftrightarrow i$.

4 常返的含义

§4.3 状态的命 名和周期

- 如果城镇 i 是常返的,且 $i \rightarrow j$,则MC从 i 出发到达 j 的 概率 p > 0 . 他回到 i 后再次以相同的概率 p 到达 j ;再回到 i 后,再以相同的概率 p 到达 j ; · · · · · · · 每次是否到达 i 是相互独立的.
- 这就等价于独立重复试验,试验成功就是从i 到达j,于是他最终到达j 的概率是1. i 是常返的,所以他从j 必须回到i. 这就说明如果 $i \rightarrow j$, i 是常返的,则j 也是常返的,并且 $j \leftrightarrow i$.
- 在两端是吸收壁的简单随机游动中, {1,2,···,n-1} 中的 状态互通, 但是质点从其中的 i 出发只能回到 i 有限次. 人们将这种状态称为非常返状态.

5 非常返和常返状态的数学定义

§4.3 状态的命 名和周期

§4.3 状态的命 名和周期

定义3.2

.

5.状态

十均四转的

定理3.2

..4.224

扁历状态

7 理3 4

5 非常返和常返状态的数学定义

§4.3 状态的命 名和周期

\$4.3 状态的名和周期定义3.2定理3.1

返状态

平均回转时间

定理3.

宝 珊 2

遍历状态

• 为了在数学上定义非常返和常返状态,需要引进

$$\begin{split} f_{ij}^{(1)} &=& P(X_1=j|X_0=i), \\ f_{ij}^{(n)} &=& P(X_n=j,X_k\neq j; 1\leq k\leq n-1|X_0=i), \ n\geq 1. \end{split}$$

5 非常返和常返状态的数学定义

● 为了在数学上定义非常返和常返状态,需要引进

$$f_{ij}^{(1)} = P(X_1 = j | X_0 = i),$$

 $f_{ii}^{(n)} = P(X_n = j, X_k \neq j; 1 \le k \le n - 1 | X_0 = i), n \ge 1.$

 $f_{ij}^{(n)}$ 是质点从i 出发的条件下,第n 步首次到达j 的概率,称为从i 出发后第n 步首达j 的概率,简称为**首达概**率.

• 由于对不同的 n . 事件

$$A_1 = \{X_1 = j\}, \ A_n = \{X_n = j, X_k \neq j, 1 \le k \le n - 1\}$$
 (2)

 $A_1 = \{X_1 = j\}, A_n = \{X_n = j, X_k \neq j, 1 \leq k \leq n - j\}$ 互不相容, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 发生表示质点到达过状态j,

84名 X 3.2 定理3.1 正张 3.2 正张 5 四转时 定理3.2 周 定理3.3

§4.3 状态的命

6 f_{ij}^* 的定义

§4.3 状态的命 名和周期

§4.3 状态的命 名和周期

定义3.2

定理3.1

正常返和零 返状杰

半均回转时

足理3

谝历状态

7 理3 4

定理31

正常返和零常

平均回結計间

1 - 4 - 7 - 1 - 1 2 - 1 4 - 1

ES tho

da em a

遍历状态

定理3.4

所以

$$f_{ij}^* \equiv P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n | X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n | X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \le 1.$$
 (3)

f_{ii}^* 的定义

§4.3 状态的命

所以

$$f_{ij}^* \equiv P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n | X_0 = i\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n | X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \le 1.$$
 (3)

• f_{ij}^* 是质点从从i 出发的条件下到达过j 的概率,简称为从i 出发后到达j 的概率.

\$4.3 状态的命 定义3.2 定理3.1 正近状态 转时间 定理3.2 用期 定理3.3 • 当 $f_{ii}^* = 1$, 质点从状态 i 出发以概率1回到 i , 然后再出发, 再回到 i , …… , 所以在实际中必然回到状态 i 无穷次.

- 当 $f_{ii}^* = 1$, 质点从状态 i 出发以概率1回到 i , 然后再出发, 再回到 i , …… , 所以在实际中必然回到状态 i 无穷次.
- 当 f_{ii}^* < 1 ,说明质点从状态 i 出发以正概率 $1 f_{ii}^*$ 不再回到 i . 注意, 质点从 i 出发, 如果回到 i , 则再次从 i 出发并以正概率 $1 f_{ii}^*$ 不再回到 i ; 如果再回到 i , 就会再次从 i 出发并以正概率 $1 f_{ii}^*$ 不再回到 i ; …… .

- 4.3 状态的命 名和周期 定义3.2 定理3.1 正常返和零常
- 返状态 平均回转时间
- 定理3.2 周期 定理3.3
- 遍历状态 定理3.4

- 当 $f_{ii}^* = 1$, 质点从状态 i 出发以概率1回到 i , 然后再出发, 再回到 i , …… , 所以在实际中必然回到状态 i 无穷次.
- 当 f_{ii}^* < 1 ,说明质点从状态 i 出发以正概率 $1-f_{ii}^*$ 不再回到 i . 注意, 质点从 i 出发, 如果回到 i , 则再次从 i 出发并以正概率 $1-f_{ii}^*$ 不再回到 i ; 如果再回到 i , 就会再次从 i 出发并以正概率 $1-f_{ii}^*$ 不再回到 i ; …… .
- 这相当于一次次的独立重复试验.由于有正概率的事件在多次独立重复试验中总会发生.所以只要 fii < 1,质点 "不回到 i"总会发生,因而最终会永远离开状态 i.由此引入下面的定义.

§4.3 状态的命 名和周期

定理3.1

正常返和零常

平均回转时间

定理3.2

玛 协

定理3.3

遍历状态

定理3.4

定义 (3.2)

如果 $f_{ii}^* = 1$,则称i 是常返状态.

如果 $f_{ii}^* < 1$,则称i 是非常返状态.

定义 (3.2)

如果 $f_{ii}^* = 1$,则称i 是常返状态.

如果 $f_{ii}^* < 1$,则称i 是非常返状态.

按照定义, 吸引状态 i 满足 $f_{ii}^* = f_{ii}^{(1)} = 1$, 因而是常返状态. 当 i 是常返状态, 质点从 i 出发后, 在实际中必然回到 i , 再从 i 出发, 再回到 i , 因而回到 i 无穷次.

i 是非常返状态表明质点从i 出发后,以正概率不能回到i,因而只能回到i有限次,然后永远离开状态i.

9 重要的公式

§4.3 状态的命 名和周期

§4.3 状态的命 名和周期

定义3.2

足埋3.1

正常返和零· 仮壯太

平均回转时

会班3つ

761 281

X-5-3.3

字理3.4

9 重要的公式

§4.3 状态的命 名和周期

§4.3 状态的句 名和周期

定义3.2

足埋3.1

正常返和零常

平均回 杜 财 间

-

754 294

油石サフ

÷ 理3 4

下面的公式给出了转移概率 $p_{ii}^{(n)}$ 和 $f_{ii}^{(k)}$ 的关系.

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$$
 (4)

证明如下.

10 证明公式(4)

§4.3 状态的命 名和周期

§4.3 状态的命 名和周期

定义3.2

及徑3.1

正常返和零售 返状态

半均回转时

定理3.2

214 224

温历状太

さ 押34

设

$$A_1=\{X_1=j\},\; A_n=\{X_n=j, X_k\neq j, 1\leq k\leq n-1\},\;$$

互不相容. $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 表示前 n 次转移中到达过 j , 所以

$${X_n = j} \subset \bigcup_{k=1}^n A_k.$$

设

$$A_1 = \{X_1 = j\}, \ A_n = \{X_n = j, X_k \neq j, 1 \le k \le n - 1\},$$

互不相容. $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 表示前 n 次转移中到达过 j , 所以

$${X_n = j} \subset \bigcup_{k=1}^n A_k.$$

用全概率公式

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(A_k | X_0 = i) P(X_n = j | A_k, X_0 = i)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

10 证明公式(4)

§4.3 状态的命 名和周期

§4.3 状态的命 名和周期

定义3.2

及徑3.1

正常返和零售 返状态

半均回转时

定理3.2

214 224

温历状太

さ 押34

10 证明公式(4)

§4.3 状态的命 名和周期

§4.3 状态的命 名和周期 定义3.2

廷坦3.1 正常返和零常

返状态 平均回结时间

定理3.2

周期

火吐3.3 遍历状态

定理3.4

公式(4)表明了以下的事实:

"MC从城镇 i 出发,经过 n 次转移到达城镇 j "等于"他从 i 出发,在第 k 次转移首次到达 j 后再从 j 出发经过 n-k 次转移到达 j ,再对 $k=1,2,\cdots,n$ 求并".

§4.3 状态的命 名和周期 定义3.2

足埋3.1

E市巡和令币 S状态 P均回转时间

定理3.2

定理3.3 品历状之

^包刀状。 定理3.4

定理3.1

对于马氏链 $\{X_n\}$ 及其 $\{p_{ii}^{(n)}\}$, $f_{ii}^{(n)}$, 有以下结果.

(1)
$$\sum_{i=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = 1/(1 - f_{ii}^*).$$

- (2) i 是常返状态的充分必要条件是 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$.
- (3) 如果i 是常返状态, $i \rightarrow j$,则 $i \leftrightarrow j$,并且j 也是常返的.

12 证明结论(1)

§4.3 状态的命 名和周期

{4.3 状态的& 名和周期

定义3.2

足理3.1

常返和零件

半均回转时

定理3.2

. 4 - 24

遍历状态

字理3.4

$$p_{ii}^{(n)}\rho^n = \sum_{k=1}^n f_{ii}^{(k)}\rho^k p_{ii}^{(n-k)}\rho^{n-k}, \ \rho \in (0,1).$$

12 证明结论(1)

4.3 状态的 ;和周期

、双3.2

正常返和零常 返状态

平均回转时间

定理3.2 周期

定理3.3

定理3.4

在(4)中取
$$j=i$$
,两边同乘 ρ^n ,对 $n \ge 1$ 得到

$$p_{ii}^{(n)}\rho^n = \sum_{k=1}^n f_{ii}^{(k)} \rho^k p_{ii}^{(n-k)} \rho^{n-k}, \ \rho \in (0,1).$$

上式两边对n 求和得到

$$G(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \rho^{n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \rho^{n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{(k)} \rho^{k} p_{ii}^{(n-k)} \rho^{n-k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \rho^{k} p_{ii}^{(n-k)} \rho^{n-k}$$

$$= 1 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \rho^{k}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \rho^{n}\right) = 1 + F(\rho)G(\rho).$$

13 证明结论(1)和(2)

§4.3 状态的命 名和周期

§4.3 状态的命 名和周期

定义3.2

走程3.1

L常返和零9 L状态

半均回转时

定理3.2

..4.224

.

理3.4

13 证明结论(1)和(2)

§4.3 状态的命 名和周期

i4.3 状态的命 名和周期

◇ 珊2 1

正常返和零常

平均回结計间

定理3.2

周期マココ

遍历状态

定理3.4

其中
$$F(\rho) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \rho^k$$
.

于是得到

$$G(\rho) = 1/[1 - F(\rho)].$$

令 ρ →1 就得到结论(1).

结论(2)是(1)的直接推论.

14 证明结论(3)

§4.3 状态的命 名和周期

§4.3 状态的命 名和周期

定义3.2

K-5.1

返状态

1 500 144 40

rs3 4hn

定理3.3

遍历状态

字理3.4

14 证明结论(3)

\$4.3 状态的命 名和周期 \$4.3 状态的命 定义3.2 定理3.1 正常近和零常 延ب为四转时间

• $i \rightarrow j$ 说明质点从 i 到达 j 的概率是正数. i 是常返的,质点每次回到 i 后都再次以相同的正概率到达 j ,且每次是否到达 j 是相互独立的. 这就等价于独立重复试验:从 i 到达 j 称为成功. 根据下概率原则,质点以概率 1 到达 j .质点到达 j 后又必须回到 i ,因而 $i \leftrightarrow j$.

- 4.3 状态的命 3和周期 E义3.2
- 正常返和零常 返状态 平均回转时间
- 定理3.2 周期
- 定理3.3 遍历状态

- $i \rightarrow j$ 说明质点从 i 到达 j 的概率是正数. i 是常返的,质点每次回到 i 后都再次以相同的正概率到达 j ,且每次是否到达 j 是相互独立的. 这就等价于独立重复试验:从 i 到达 j 称为成功. 根据下概率原则,质点以概率 1 到达 j . 质点到达 j 后又必须回到 i ,因而 $i \leftrightarrow j$.
- 再证明 j 是常返的. 设 n,m 使得 $p_{ji}^{(m)}p_{ij}^{(n)}>0$. 对于任何 $k\geq 1$, 利用推论2.2得到

$$p_{jj}^{(m+k+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n)}.$$

两边对k 求和得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(m+k+n)} \ge p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} = \infty,$$

由(2)知道 ; 是常返的.

证毕

15 B. 正常返和零常返状态

§4.3 状态的命 名和周期

§4.3 状态的命 名和周期

定义3.2

K-5-3-1

返状态

十均当特的

定理3.2

周期

定理3.3

遍历状态

B. 正常返和零常返状态 15

§4.3 状态的命

他首次到达城镇 i 时的转移次数. 也就是说 $T_i = n$ 表示 他第 $n(n \ge 1)$ 周首次到达城镇 i,则

在MC旅行的例子中, 用取正整数值的随机变量 T_i 表示

$$T_i = \begin{cases} \min\{n | X_n = i; n \ge 1\}, & \text{if } \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = i\} \not \leq \pm, \\ \infty, & \text{if } M \end{cases}$$

$$(5)$$

对于马氏链 $\{X_n\}$, T_i 是质点首次到达状态 i 时的转移 次数. $T_i = n$ 表示质点第 $n(\geq 1)$ 次转移首次到达状态 i.

16 平均回转时间

§4.3 状态的命 名和周期

§4.3 状态的命 名和周期

定义3.2

AC 1343.1

正,这个令, 返状态

十均当转的

定理3.2

遍历状态

理3.4

§4.3 状态的命 名和周期

定理3.1

正常返和零常 返状态

平均回转时间

定理3.2

周期

定理3.3

引入
$$P_i(\cdot) = P(\cdot|X_0 = i)$$
,则

$$f_{ii}^{(n)} = P_i(T_i = n) = P(T_i = n | X_0 = i)$$
 (6)

是质点从i 出发的条件下,第n 步首次回到i 的概率. 当 $f_{ii}^{*}=1$,则

$$P_i(T_i < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1.$$

平均回转时间 16

§4.3 状态的命

引入 $P_i(\cdot) = P(\cdot|X_0 = i)$,则

$$f_{ii}^{(n)} = P_i(T_i = n) = P(T_i = n | X_0 = i)$$
 (6)

是质点从 i 出发的条件下, 第 n 步首次回到 i 的概率. 当 $f_{::}^* = 1$, 则

$$P_i(T_i < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1.$$

引入条件 $X_0 = i$ 下, T_i 的数学期望

$$\mu_i = E(T_i|X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} nP_i(T_i = n) = \sum_{n=1}^{\infty} nf_{ii}^{(n)}.$$
 (7)

 μ_i 是质点返回状态 i 所需要的平均转移次数, 称 μ_i 为 状态 i 的平均回转时间或期望回转时间. 平均回转时 间 μ_i 越小, 表明质点返回 i 越频繁. 当 $\mu_i = \infty$, 说明质 点平均转移无穷次才能回到 i.

定义 (3.3)

设 i 是常返状态.

如果i 的平均回转时间 $\mu_i < \infty$,则称i 是正常返状态或积极常返状态.

如果i 的平均回转时间 $\mu_i = \infty$,则称i 是零常返状态 或消极常返状态.

§4.3 状态的命 名和周期

定理3.1 正常返和零常

平均回转时间

足埋3.2 田加

定理3.3 遍历状2

定理3.4

定理3.2

设 i 是常返状态,则

- (1) i 是零常返状态的充分必要条件是 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$;
- (2) 当 i 是零常返的, $i \rightarrow j$ 时, j 也是零常返的;
- (3) 当 i 是正常返的, $i \rightarrow j$ 时, j 也是正常返的.

19 证明定理3.2

§4.3 状态的命 名和周期

§4.3 状态的命 名和周期

定义3.2

处性3.1

正常返和零 及状态

均回转时间

de ema a

(-1.554

遍历状态

と理3.4

§4.3 状态的6 名和周期 定义3.2

足裡3.1

近状态

平均回转时间

定理3.2

周期

定理3.

遍历状态

定理3.4

结论(1)是用数学分析方法得到的, 略去 下面证明(2). 从定理3.1(3)知道 $i \leftrightarrow j$. 设正整数 m,n 使得 $p_{ij}^{(n)}p_{ji}^{(m)}>0$,则有

$$p_{ii}^{(n+k+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(k)} p_{ji}^{(m)}.$$

¥4.3 状态的《 名和周期 定义3.2 定理3.1 正常返和零常 返状态

平均回转时间

定理3.2 周期

定理3.3 溩历状态

遍历状态

结论(1)是用数学分析方法得到的, 略去 下面证明(2). 从定理3.1(3)知道 $i \leftrightarrow j$. 设正整数 m,n 使得 $p_{ij}^{(n)}p_{ji}^{(m)}>0$, 则有

$$p_{ii}^{(n+k+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(k)} p_{ji}^{(m)}.$$

用 $p_{ii}^{(n)} \rightarrow 0$, 得到

$$\lim_{k \to \infty} p_{jj}^{(k)} \le \frac{1}{p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(m)}} \lim_{k \to \infty} p_{ii}^{(n+k+m)} = 0.$$

说明j是零常返的.由(2)得到(3).

§4.3 状态的命 名和周期

定义3.2

....

返状态

干均 中核的

-

定理33

遍历状态

定理3.4

定义3.2

定理3.1

止軍返和零軍返状态

平均回转时间

定理3.2

周期

定理3.

遍历状态

足理3.4

• 如果j 不是正常返的,则对任何状态i,有

$$p_{ij}^{(n)} \to 0, \, \stackrel{\ \, \scriptscriptstyle\perp}{=} \, n \to \infty. \tag{8}$$

(8)说明,只要j 不是正常返的,从任何i 出发,较长的时间后,质点以极小的概率位于j.

定理3.1

正常返和零常

平均回转时间

定理3.2

周期

定理3.3

題別本意

定理3/

• 如果j 不是正常返的,则对任何状态i,有

$$p_{ij}^{(n)} \to 0, \, \stackrel{\ \, \scriptscriptstyle\perp}{=} \, n \to \infty. \tag{8}$$

(8)说明,只要j 不是正常返的,从任何i 出发,较长的时间后,质点以极小的概率位于j.

证明 对非常返的j,用定理3.1(2)知道 $p_{jj}^{(n)} \rightarrow 0$. 对零常返的j,用定理3.2(1)得到 $p_{jj}^{(n)} \rightarrow 0$. 对任何状态i,利用(4)得到

定理3.1

正常返和零常返状态

平均回转时间

定理3.2

周期

定理3.

遍历状态

定理3.4

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^{n} f_{ij}^{(k)}.$$

\$4.3 状态的命 2 和周期 定义3.2 定理3.1 正常返和零常 返状态 平均回转时间 定理3.2

$$\begin{split} p_{ij}^{(n)} &= \sum_{k=1}^m f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \\ &\leq \sum_{k=1}^m p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^n f_{ij}^{(k)}. \end{split}$$

$$\diamond n \to \infty$$
 , 右方第一项 $\sum_{k=1}^{m} p_{jj}^{(n-k)} \to 0$. 于是得到

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \le \sum_{k=m+1}^{\infty} f_{ij}^{(k)}.$$

$$\begin{split} p_{ij}^{(n)} &= \sum_{k=1}^m f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \\ &\leq \sum_{k=1}^m p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^n f_{ij}^{(k)}. \end{split}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \le \sum_{k=m+1}^{\infty} f_{ij}^{(k)}.$$

因为 $\sum f_{ij}^{(k)} \leq 1$, 所以再令 $m \to \infty$ 就得结论.

§4.3 状态的命 名和周期

§4.3 状态的命 名和周期

定义3.2

.

返状态

干均四转时

定理3.2

シェ田っつ

遍历状态

主理3.4

§4.3 状态的命 名和周期

§4.3 状态的命 名和周期

定义3.2

足理3.1

止軍返和零軍

平均回转时间

足埋3.2

周期

定理3.3

遍历状态

主理3.4

在直线上的简单随机游动中, 质点从i 出发, 只能在2 的 倍数2m 时回到i, 这时称状态i 的周期是2.

• 对于一般的马氏链 $\{X_n\}$, 定义状态 i 的周期如下.

§4.3 状态的命 名和周期

§4.3 状态的命 名和周期

A 1120 1

正常返和零常

亚拉回杜叶苗

十均 四 转 的 F

ال 15£3.2

周期

定理3.

遍历状态

定理3.4

在直线上的简单随机游动中,质点从i 出发,只能在2 的倍数2m 时回到i,这时称状态i 的周期是2.

• 对于一般的马氏链 $\{X_n\}$, 定义状态 i 的周期如下.

(a) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$,则质点从i 出发不可能再回到i , 这时称i 的周期是 ∞ .

§4.3 状态的命 名和周期

在直线上的简单随机游动中, 质点从i 出发, 只能在2 的 倍数 2m 时回到i, 这时称状态i 的周期是2.

- 对于一般的马氏链 $\{X_n\}$, 定义状态 i 的周期如下.
 - (a) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$,则质点从i 出发不可能再回到i , 这时称i 的周期是 ∞ .
 - (b) 设 d 是正整数. 质点从 i 出发, 如果只可能在 d 的整倍数上回到 i , 而且 d 是有此性质的最大整数, 则称 i 的周期是 d .

在直线上的简单随机游动中, 质点从i 出发, 只能在2 的 倍数 2m 时回到i, 这时称状态i 的周期是2.

- 对于一般的马氏链 $\{X_n\}$, 定义状态 i 的周期如下.
 - (a) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$,则质点从i 出发不可能再回到i , 这时称i 的周期是 ∞ .
 - (b) 设 d 是正整数. 质点从 i 出发, 如果只可能在 d 的整倍数上回到 i , 而且 d 是有此性质的最大整数, 则称 i 的周期是 d .
 - (c) 如果i 的周期是1,则称i 是非周期的.

在直线上的简单随机游动中, 质点从i 出发, 只能在2 的 倍数2m 时回到i, 这时称状态i 的周期是2.

- 对于一般的马氏链 {X_n},定义状态 i 的周期如下.
 - (a) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$,则质点从i 出发不可能再回到i , 这时称i 的周期是 ∞ .
 - (b) 设 d 是正整数. 质点从 i 出发, 如果只可能在 d 的整倍数上回到 i , 而且 d 是有此性质的最大整数, 则称 i 的周期是 d .
 - (c) 如果i的周期是1,则称i是非周期的.
- 其中的(b)说明: 称状态 i 的周期是 d ,如果 $p_{ii}^{(n)} > 0$,则必有 n = md ,而且 d 是满足此性质的最大整数. 但是当 i 的周期 $d < \infty$, $p_{ii}^{(nd)} > 0$ 也不必对所有的 n 成立,但至少对某个 n 成立.

84.3 状态的命名和周期定义3.2

疋埋3.1 正常返和零常 衍业太

平均回转时间

定理3.2

局期 定理33

遍历状态

定理3.4

● 在直线上, 如果质点每次向前、向后移动1步的概率都 是 1/3 , 向后移动 2 步的概率也是 1/3 . 则每个状态都 是非周期的.

解 易见

$$p_{ii}^{(2)} \ge p_{i,i+1}p_{i+1,i} > 0,$$

$$p_{ii}^{(3)} \ge p_{i,i-2}p_{i-2,i-1}p_{i-1,i} > 0,$$

● 在直线上. 如果质点每次向前、向后移动1步的概率都 是 1/3, 向后移动 2 步的概率也是 1/3.则每个状态都 是非周期的.

解 易见

$$p_{ii}^{(2)} \ge p_{i,i+1}p_{i+1,i} > 0,$$

$$p_{ii}^{(3)} \ge p_{i,i-2}p_{i-2,i-1}p_{i-1,i} > 0,$$

于是从 2 = nd , 3 = md 得到 d = 1 . i 的周期是 d = 1, i 是非周期的.

§4.3 状态的命 名和周期

定义3.2

走程3.1

止吊返和冬 返状态

十均四转时

定理3.2

字理33

遍历状态

定理3.4

名和周期 定义3.2 定理3.1 正常返和零常 返状态 平均回转时间

El tho

定理3.

遍历状态

定理3.4

• 在直线上,如果质点每次向前移动1步的概率都是p,向后移动5步的概率是q=1-p,pq>0.则每个状态的周期都是6.

\$4.3 状态的命 定义3.2 定理3.1 正逐状态 平均回转时间 定理3.2 周期

• 在直线上, 如果质点每次向前移动1步的概率都是p, 向后移动 5 步的概率是q=1-p, pq>0.则每个状态的周期都是 6.

解 质点从 i 出发,经过 n 次转移回到 i 时,我们说明 n=6m.设质点向前一共移动了 k 次,向后一共移动了 m 次,根据题意得到 k=5m.

于是, 质点移动的次数 n = k + m = 5m + m = 6m . 又由于 $p_{ii}^{(6)} > p^5 q > 0$, 所以状态 i 的周期是 d = 6 .

以后总用 d_i 表示 i 的周期.

定理3.3

若状态 i 的周期 $d_i < \infty$,则

- (1) d_i 是数集 $B_i = \{n \mid p_{ii}^{(n)} > 0, n \ge 1\}$ 的最大公约数;
- (2) 如果 $i \leftrightarrow j$,则 $d_i = d_j$;
- (3) 存在正数 N_i 使得 $n \ge N_i$ 时, $p_{ii}^{(nd_i)} > 0$.

性质3重要,说明如果周期=1, 当n>=N_i时,可以在任意时间 返回状态i。-- 遍历 ara lli bul A

§4.3 状态的命 名和周期

名和周期

E X 3.1

工浴活工面

平均回結計

1 24 144 14

周期

定理3.3

遍历状态

§4.3 状态的命 名和周期

定理3.1

正常返和零常

平均回转时间

定理3.2

定理3.3

定理3.4

(1) 根据定义, d_i 是数集 B_i 的最大公约数.

(2) 设正整数 m,n 使得 $p_{ji}^{(m)}p_{ij}^{(n)}>0$. 对于任何 $k \in B_i = \{k \mid p_{jk}^{(k)}>0, k \geq 1\}$,于是得到

$$\begin{split} p_{jj}^{(m+n)} &\geq p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} > 0, \\ p_{jj}^{(m+k+n)} &\geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n)} > 0. \end{split}$$

于是 d_j 整除 m+n 和 m+k+n ,这样就整除 k=(m+k+n)-(m+n) ,于是整除 B_i 中的所有元,从而得到 d_j 整除 d_i . 对称地可以得到 d_i 整除 d_j ,故 $d_i=d_j$.

27 证明结论(3)

§4.3 状态的命 名和周期

§4.3 状态的命 名和周期

定义3.2

足理3.1

正常返和零· 反状态

半均回转时

会班3つ

79 790

字理3.4

```
$4.3 状态的命名和周期
定义3.2
定理3.1
```

正常返和零常

平均回转时间

定理3.2 周期

定理3.3

量历状态 定理3.4 (3) 设(1)中的 $B_i = \{n_1, n_2, \cdots\}$, l_m 是子集 $\{n_1, n_2, \cdots, n_m\}$ 的最大公约数,则 d_i 是 l_m 的约数,且 l_m 单调不增收敛到 d_i .因为 l_m 是整数,所以有 k 使得 $d_i = l_k$ 是 $\{n_1, n_2, \cdots n_k\}$ 的最大公约数.根据数论的基本知识知道存在 N_i ,使得只要 $n \geq N_i$,就有

$$nd_i = n_1m_1 + n_2m_2 + \cdots + n_km_k, m_i$$
是非负整数.

再用推论2.2得到

$$\begin{split} p_{ii}^{(nd_i)} \geq & p_{ii}^{(n_1m_1)} p_{ii}^{(n_2m_2)} \cdots p_{ii}^{(n_km_k)} \\ \geq & [p_{ii}^{(n_1)}]^{m_1} [p_{ii}^{(n_2)}]^{m_2} \cdots [p_{ii}^{(n_k)}]^{m_k} > 0. \end{split}$$

§4.3 状态的《 名和周期

定义3.2

/C+343.1

返状态

半均回转时

定理3.2

遍历状态

÷ 110 a 4

- 当城镇的数目有限. MC从城镇 i 出发, 无论前若干次转移中是否能回到 i , 根据定理3.3, 当城镇 i 是常返的和非周期的, 他就可以在充分大的任意时刻 n 回到城镇 i .
- 当所有的状态互通,只要有一个状态是非周期的,所有的状态就都是非周期的,所以时间充分长后,他可以在任意的时刻到达任意的城镇。
- 这时我们说他的旅行可以"遍历"每个城镇. 设想将他的旅行轨迹用线段连接出来, 如果MC能够一直走下去, 这样的线段将穿过每个城镇无穷次.

§4.3 状态的命 名和周期

\$4.3 状态的命 定义3.2 定理3.1 正常状态 四本态 中均四本态时间 建3.2 周期

定理3.3

過历状だ

定理3.4

定义(3.4)

如果状态 i 是正常返和非周期的,则称 i 是遍历状态.

4.3 状态的命 名和周期

§4.3 状态的命 名和周期

足义3.2

正常近和震常

平均回结时间

丁均 巴 桉 的 巴

足理3.2

周期

走程3.3

題 勿 本 ć

定理3.4

设常返状态 i 有周期 di 和平均回转时间

$$\mu_i = \mathrm{E}(T_i|X_0=i),$$

则

$$\lim_{n\to\infty}p_{ii}^{(nd_i)}=\frac{d_i}{\mu_i}.$$

略去证明

30 定理3.4的含义

§4.3 状态的命 名和周期

§4.3 状态的命 名和周期

定义3.2

....

返状态

1 29日報明

rs3 4ha

定理3.

遍历状态

30 定理3.4的含义

§4.3 状态的命 名和周期

§4.3 状态的命 名和周期

定义3.2

足理3.1

正常返和零常

平均回转时间

1 3 - 12 - 13 - 1

周期

定理3.3

遍历状态

ミ理3.4

• 定理3.4表明, 质点从常返状态 i 出发后,对于充分大的 n ,质点在第 nd_i 步回到 i 的概率与 d_i 成正比,与平均回转时间 μ_i 成反比.

30 定理3.4的含义

§4.3 状态的命 名和周期

§4.3 状态的命 名和周期 定义3.2

正常返和零常

T IA TO HOLD

半均四转时间

定理3.2

周期

遍历状为

字理3.4

- 定理3.4表明, 质点从常返状态i 出发后,对于充分大的n , 质点在第 nd_i 步回到i 的概率与 d_i 成正比, 与平均回转时间 μ_i 成反比.
- 对于常返状态 i , $i \rightarrow j$ 时, i 的性质就会传递给 j : 因为这时有 $j \leftrightarrow i$; $d_j = d_i$; $\mu_j < \infty$ 的充分必要条件是 $\mu_i < \infty$;

正常返和零常

平均回转时间 定理3.2 周期

定理3.3 遍历状态 • 定理3.4表明, 质点从常返状态 i 出发后,对于充分大的 n , 质点在第 nd_i 步回到 i 的概率与 d_i 成正比,与平均回转时间 μ_i 成反比.

- 对于常返状态 i , $i \to j$ 时, i 的性质就会传递给 j : 因为这时有 $j \leftrightarrow i$; $d_j = d_i$; $\mu_j < \infty$ 的充分必要条件是 $\mu_i < \infty$;
- ullet 当 $n o \infty$, $p_{jj}^{(n)} o 0$ 的充分必要条件是 $p_{ii}^{(n)} o 0$. 说明 i o j 时, j 是正常返状态的充分必要条件为 i 是正常反状态; j 是 遍历状态的充分必要条件为 i 是遍历状态.

- 4.3 状态的命 名和周期 定义3.2 定理3.1 正常远和零常 压状态 平均回转时间 定理3.2
- 周期 定理3.3 遍历状态 定理3.4

- 定理3.4表明, 质点从常返状态 i 出发后,对于充分大的 n , 质点在第 nd_i 步回到 i 的概率与 d_i 成正比,与平均回转时间 μ_i 成反比.
- 对于常返状态 i , $i \rightarrow j$ 时, i 的性质就会传递给 j : 因为这时有 $j \leftrightarrow i$; $d_j = d_i$; $\mu_j < \infty$ 的充分必要条件是 $\mu_i < \infty$;
- \bullet 当 $n \to \infty$, $p_{jj}^{(n)} \to 0$ 的充分必要条件是 $p_{ii}^{(n)} \to 0$. 说明 $i \leftrightarrow j$ 时, j 是正常返状态的充分必要条件为 i 是正常反状态; j 是遍历状态的充分必要条件为 i 是遍历状态.
- 如果 i 是非常返状态, 从 $i \rightarrow j$ 我们还不能得到 j 的更多知识. 这时 j 可以是常返的(参考两边是吸收壁的简单随机游动中的 0 或 n), 也可以是非常返的(参考两边带有吸收壁的随机游动中的 $i,j \in \{1,2,\cdots,n-1\}$).

§4.3 状态的命 名和周期

4.3 状态的6 3 和周期

定义3.2

足理3.1

止市巡和令 返状态

平均回转时

周 加

定理3.3

遍历状态

§4.3 状态的命 名和周期

定义3.2

定理3.1

正常返和零常

平均回转时间

2----

周加

定理3

遍历状态

と理3.4

• 对于常返状态j,有

(1) $\mu_j \ge 1$;

• 对于常返状态 ; , 有

- (1) $\mu_i \ge 1$;
- (2) 当 $i \leftrightarrow j$, 质点从 i 出发以概率1到达 j:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} = P(T_j < \infty | X_0 = i) = 1;$$

- 对于常返状态 i, 有
 - (1) $\mu_i \geq 1$;
 - (2) 当 $i \leftrightarrow j$, 质点从 i 出发以概率1到达 j:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} = P(T_j < \infty | X_0 = i) = 1;$$

(3) 当i 是遍历状态, $i \leftrightarrow i$, 有

$$p_{ij}^{(n)} \to \pi_j \equiv 1/\mu_j. \tag{9}$$

其中"≡"表示定义成。

§4.3 状态的命

定义3.2

返状态

干均申转的

周期

定理3.3

遍历状态

§4.3 状态的6 名和周期

定义3.2

正常边和零常

平均回转时间

定理3.2

周期

定理3.

遍历状态

主理3.4

证明 (1) 从(7)知道

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} \ge \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = 1.$$
 (10)

证明 (1) 从(7)知道

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} \ge \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = 1.$$
 (10)

(2) 由于质点每次回到 i 后, 总以相同的正概率到达 j, 且和上次从;出发是否到达;独立,所以质点从;出发以 概率1到达 i.即

$$P(T_j < \infty | X_0 = i) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T_j = k | X_0 = i) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} = 1.$$

§4.3 状态的命

定义3.2

......

返状态

半均回转时

ra tha

定理3.3

遍历状态

遍历状态

(3) 遍历状态的周期是1,所以用定理3.4得到

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j} = \lim_{n \to \infty} p_{jj}^{(n)} \in (0, 1].$$

从公式(4)得到,对选定的 m,

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^m f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

(3) 遍历状态的周期是 1, 所以用定理3.4得到

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j} = \lim_{n \to \infty} p_{jj}^{(n)} \in (0, 1].$$

从公式(4)得到,对选定的m,

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^m f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

限不超过
$$b_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} f_{ij}^{(k)}$$
 . 于是得到

(3) 遍历状态的周期是1,所以用定理3.4得到

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j} = \lim_{n \to \infty} p_{jj}^{(n)} \in (0, 1].$$

从公式(4)得到,对选定的m,

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

令 $n \to \infty$ 时, 右边第一项收敛到 $\sum_{i=1}^{m} f_{ij}^{(k)} \pi_{j}$, 第二项的极

限不超过
$$b_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} f_{ij}^{(k)}$$
. 于是得到

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} \pi_j + O(b_m).$$

§4.3 状态的命

 $\pi_j = \frac{1}{u_i} = \lim_{n \to \infty} p_{jj}^{(n)} \in (0, 1].$

解例3.4

从公式(4)得到,对选定的m,

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

(3) 遍历状态的周期是 1, 所以用定理3.4得到

限不超过 $b_m = \sum_{ij}^{\infty} f_{ij}^{(k)}$. 于是得到

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} \pi_j + O(b_m).$$

再令 $m \to \infty$, 用 $b_m \to 0$ 和结论(2)得到结论(3).