第3章 线性方程组的数值方法之二

3.5 解线性方程组的迭代法

主讲：纪庆革副教授

中山大学数据科学与计算机学院

E-Mail: 1024180018@qq.com

直接法（解在理论上是准确的）：

计算时间复杂性 $O(n^3)$，存储量为n^2量级（实用范围$n<400$）

对于很大n的矩阵（含有大量0元素）的求解：

用直接法时就会耗费大量的时间和存储单元。

迭代法（速度快）：

构造一个等价的方程，

构造一个收敛序列，

序列的极限值就是方程组的根

对方程组 $Ax=b$ 做等价变换 $x=Gx+g$

如：令 $A=M-N$ ，则

$$Ax=b \Rightarrow (M-N)x=b \Rightarrow Mx=b+Nx \Rightarrow x=M^{-1}Nx+M^{-1}b$$

则，我们可以构造序列 $x^{(k+1)}=G\,x^{(k)}+g$

若 $x^{(k)} \to x^*$ $\Rightarrow x^*=G\,x^*+g \Rightarrow Ax^*=b$

同时：$x^{(k+1)}-x^*=Gx^{(k)}-Gx^*=G(x^{(k)}-x^*)$

$$=\Lambda \ =G^{k+1}(x^{(0)}-x^*)$$

所以，序列收敛 $\Leftrightarrow G^k \to 0$ 与初值的选取无关

定义3.5.1：（收敛矩阵） $G^k \to 0$

定理： $G^k \to 0 \iff \rho(G) < 1$

矩阵G为收敛矩阵，当且仅当G的谱半径<1

由 $\rho(G) < \|G\|$ 知，若有某种范数 $\|G\|_p < 1$ ，则迭代收敛

回顾：
定义：设 $A \in R^{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_i(i = 1,2,\Lambda\ ,n)$,
称 $\rho(A) = \max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$ 为A谱半径。

3.5.1 Jacobi迭代

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\quad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1) \\ x_2 = \dfrac{-1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n - b_2) \\ \quad \vdots \\ x_n = \dfrac{-1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + \cdots + a_{n\,n-1}x_{n-1} - b_n) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{-1}{a_{11}}(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{-1}{a_{22}}(a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_2) \\ \qquad \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{-1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1^{(k)} + \cdots + a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(k)} - b_n) \end{cases}$$

格式很简单：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{ii}}\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i\right)$$

Jacobi迭代算法

1、输入系数矩阵A和向量b，和误差控制eps

2、x1={0,0,…..,0} , x2={1,1,…..,1} //赋初值

3、while(||A*x2-b||>eps) {

```
        x1=x2;
        for(i=0;i<n;i++) {
            x2[i]=0;
            for(j=0;j<i;j++) {
                x2[i] += A[i][j]*x1[j]
            }
            for(j=i+1;j<n;j++) {
                x2[i] += A[i][j]*x1[j]
            }
            x2[i]=-(x2[i]-b[i])/A[i][i]
        }
    }
```

4、输出解x2

- 迭代矩阵

记 $A = D - L - U$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ -a_{21} & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ -a_{n1} & & \cdots & -a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & & -a_{1n} \\ & 0 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -a_{n-1n} \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

易知，Jacobi迭代有

$$(D-L-U)x=b$$

$$Dx=(L+U)x+b$$

$$x=D^{-1}(L+U)x+D^{-1}b$$

$$\therefore\ G=D^{-1}(L+U)=I-D^{-1}A\ ,\quad g=D^{-1}b$$

- 收敛条件

迭代格式收敛的充要条件是G的谱半径<1。对于Jacobi迭代，我们有一些保证收敛的充分条件

定理：若A满足下列条件之一，则Jacobi迭代收敛。

① A为行对角占优阵 $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

② A为列对角占优阵 $|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$

③ A满足 $\sum_{i \neq j} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$

证明：$G = D^{-1}(L+U)$

$$\|G\|_\infty = \max_i \sum_{j\neq i} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1 \Leftrightarrow \sum_{j\neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

$$\|G\|_1 = \max_i \sum_{i\neq j} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

② A为列对角占优阵，则A^T为行对角占优阵，有

$$\rho(I - D^{-1}A^T) < 1$$

$$\therefore \quad \rho(I - D^{-1}A) = \rho(I - D^{-1}A^T) < 1$$

#证毕

3.5.2 Gauss－Seidel迭代

在Jacobi迭代中，使用最新计算出的分量值

$$\therefore \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{-1}{a_{11}}(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{-1}{a_{22}}(a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_2) \\ \quad\vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{-1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1^{(k+1)} + \cdots + a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} - b_n) \end{cases}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{ii}}\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i\right)$$

Gauss-Siedel迭代算法：

1、输入系数矩阵A和向量b，和误差控制eps

2、x2={1,1,…..,1} //赋初值

3、while(||A*x2-b||>eps) {

```
        for(i=0;i<n;i++)  {
            for(j=0;j<i;j++)  {
                x2[i] += A[i][j]*x2[j]
            }
            for(j=i+1;j<n;j++)  {
                x2[i] += A[i][j]*x2[j]
            }
            x2[i]=-(x2[i]-b[i])/A[i][i]
        }
    }
```

4、输出解x2

- 迭代矩阵

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + b)$$

$$(I - D^{-1}L)x^{(k+1)} = D^{-1}Ux^{(k)} + D^{-1}b$$

$$x^{(k+1)} = (I - D^{-1}L)^{-1}D^{-1}Ux^{(k)} + (I - D^{-1}L)^{-1}D^{-1}b$$

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k)} + (D - L)^{-1}b$$

$$\therefore \quad G = (D - L)^{-1}U \ , \ g = (D - L)^{-1}b$$

A=(D-L)-U

定义3.5.2.1：设 $A=\left(a_{ij}\right)\in R^{n\times n}$，若

$$\left|a_{ii}\right|>\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left|a_{ij}\right| \quad \left(i=1,2,\Lambda\ ,n\right)$$

则称A为严格对角占优矩阵。

定理3.5.2.1：若A为严格对角占优矩阵，则J法和GS法均收敛。

定理3.5.2 .2：若A为对称正定矩阵，则GS迭代法收敛。

证明： 设G的特征多项式为 $P_s(\lambda)$ ，则

$$P_s(\lambda)=\left|\lambda I-G\right|=\left|\lambda I-(D-L)^{-1}U\right|=\left|(D-L)^{-1}\right|\cdot\left|\lambda(D-L)-U\right|$$

$A=D-L-U$ 为对角占优阵，则 $|\lambda|\geq 1$ 时，

$\lambda(D-L)-U$ 为对角占优阵

$\therefore\ \left|\lambda(D-L)-U\right|\neq 0$ 即 $P_s(\lambda)\neq 0$

$\therefore\ |\lambda|<1$ 即 $\rho(G)<1$ #证毕

注：二种方法都存在收敛性问题。

Gauss-Seidel法收敛时，Jacobi法可能不收敛；

而Jacobi法收敛时， Gauss-Seidel法也可能不收敛。

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 8 & 0\\ -1 & 0 & 9\\ 9 & -1 & -1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}7\\8\\7\end{pmatrix}, x^{(0)}=(0,0,0)'$$

1、预处理

$$A=\begin{pmatrix}9 & -1 & -1\\ -1 & 8 & 0\\ -1 & 0 & 9\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}7\\7\\8\end{pmatrix}$$

2、格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{9}(x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 7) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{8}(x_1^{(k+1)} + 7) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{9}(x_1^{(k+1)} + 8) \end{cases}$$

3、结果

$$x^{(1)} = (0.7778, 0.9722, 0.9753)'$$

$$x^{(2)} = (0.9942, 0.9993, 0.9994)'$$

$$x^{(3)} = (0.9999, 0.9999, 0.9999)'$$

$$x^{(4)} = (1.0000, 1.0000, 1.0000)'$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1、Jacobi迭代

$$B=D^{-1}(L+U)=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

特征值为 $|\lambda I-B|=\lambda^3+\frac{5}{4}\lambda=0$ $\qquad \lambda_1=0,\lambda_{2,3}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}i$ 发散

2、Gauss－Siedel迭代

$$B=(D-L)^{-1}U=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1=0,\lambda_{2,3}=-\frac{1}{2}$ 收敛

3.5.3 松弛迭代

逐次超松弛迭代法（successive over relation method,简称SOR方法）是高斯赛德尔方法的一种加速方法，是解大型稀疏矩阵方程组的有效方法之一。

记 $\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$

则 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$

可以看作在前一步上加一个修正量。若在修正量前乘以一个因子 ω，有

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega \Delta x^{(k)}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega (x^{(k+1)} - x^{(k)})$$

对Gauss－Seidel迭代格式 $x^{(k+1)} = D^{-1}(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + b)$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega (D^{-1}Lx^{(k+1)} + D^{-1}Ux^{(k)} + D^{-1}b - x^{(k)})$$

$$x^{(k+1)} = (1-\omega)x^{(k)} + \omega (D^{-1}Lx^{(k+1)} + D^{-1}Ux^{(k)} + D^{-1}b)$$

写成分量形式，有

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \omega \dfrac{-1}{a_{11}}(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1) \\ x_2^{(k+1)} = (1-\omega)x_2^{(k)} - \dfrac{\omega}{a_{22}}(a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_2) \\ \qquad \vdots \\ x_n^{(k+1)} = (1-\omega)x_n^{(k)} + \omega \dfrac{-1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1^{(k+1)} + \cdots + a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} - b_n) \end{cases}$$

松弛迭代算法

```
1、输入系数矩阵A、向量b和松弛因子omega，和误差控制eps
2、x2={1,1,…..,1} //赋初值
3、while( ||A*x2-b||>eps) {
        for(i=0;i<n;i++) {
            temp-0
            for(j=0;j<i;j++) {
                temp += A[i][j]*x2[j]
            }
            for(j=i+1;j<n;j++) {
                temp += A[i][j]*x2[j]
            }
            temp = -(x2[i]-b[i])/A[i][i]
            x2[i] = (1-omega)*x2[i]+omega*temp
        }
    }
4、输出解x2
```

- 迭代矩阵

$$x^{(k+1)} = (1-\omega)x^{(k)} + \omega(D^{-1}Lx^{(k+1)} + D^{-1}Ux^{(k)} + D^{-1}b)$$

$$(I-\omega D^{-1}L)x^{(k+1)} = ((1-\omega)I + \omega D^{-1}U)x^{(k)} + \omega D^{-1}b$$

$$x^{(k+1)} = (I-\omega D^{-1}L)^{-1}((1-\omega)I + \omega D^{-1}U)x^{(k)} + \omega(I-\omega D^{-1}L)^{-1}D^{-1}b$$

$$\therefore \quad G = (I-\omega D^{-1}L)^{-1}((1-\omega)I + \omega D^{-1}U)$$

$$g = \omega(I-\omega D^{-1}L)^{-1}D^{-1}b$$

定理： 设 $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 且松弛迭代法收敛，则$0 < \omega < 2$

定理： 设A对称正定，且 $0 < \omega < 2$ ，则松弛迭代法收敛

SOR方法收敛的快慢与松弛因子ω的选择有密切关系.

如何选取最佳松弛因子,即选取$\omega=\omega^*$,使G 的谱半径$\rho(G)$达到最小,是一个尚未很好解决的问题.

实际上可采用试算的方法来确定较好的松弛因子.经验上可取$1.4<\omega<1.6$.

当 $\omega=1$ 时, SOR迭代法就是Gauss-Seidel迭代法;

当$0<\omega<1$时, SOR迭代法被称为低松弛法;

当$1<\omega<2$时, SOR迭代法被称为超迭代法，能够加速收敛速度。

注1：不管是超迭代还是低松弛，通常统称超松弛。

注2：计算公式简单，程序设计容易，占用计算机内存较少；但需要较好的加速因子。

定理： 设 $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$，且松弛迭代法收敛，则$0 < \omega < 2$

证 设SOR方法收敛，根据迭代法的充要条件，

$\rho(G)<1$,所以 $|\det(G)| = |\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n| < 1$

而 $\det(G) = \det[(D-\omega L)^{-1}((1-\omega)D+\omega U)]$

$$= \det[(E-\omega D^{-1}L)^{-1}]\det[(1-\omega)E+\omega D^{-1}U)]$$

$$= \det D^{-1} \det[(1-\omega)D]$$

$$= \frac{1}{a_{11}} \cdot \frac{1}{a_{22}} \cdots \frac{1}{a_{nn}} \cdot (1-\omega)^n a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$= (1-\omega)^n$$

于是 $|1-\omega|<1$, 或 $0<\omega<2$

定理 设A是对称正定矩阵，则解方程组$\mathbf{Ax=b}$的SOR方法，当$0<\omega<2$时收敛.

Thanks!

本课件是在中国科技大学张瑞老师课件基础上部分修改而成的，在此表示感谢！