

第5章 数值积分和数值微分

主讲：纪庆革

软件工程与应用研究所
数据科学与计算机学院

中山大学，广州

E-Mail: 1024180018@qq.com



数值积分

关于积分，有Newton-Leibniz公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

但是，在很多情况下，还是要数值积分：

1、函数由离散数据组成

2、 $F(x)$ 求不出

3、 $F(x)$ 非常复杂

定义数值积分如下：是离散点上的函数值的线性组合

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

称为积分系数，与 $f(x)$ 无关，与积分区间和积分点有关



两个问题：

- 1、系数 a_i 如何选取，即选取原则
- 2、若节点可以自由选取，取什么点好？

定义

代数精度 如果某个求积公式对于次数不超过 m 的一切多项式都准确成立，而对某个 $m+1$ 次多项式并不准确成立，则称该求积公式的代数精确度为 m 。


$I_n(f) = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$ 为数值积分， $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ 为积分，则称数值

积分有**k阶代数精度**是指： $I_n(x^i) = I(x^i), i = 0, \Lambda, k; I_n(x^{k+1}) \neq I(x^{k+1})$



插值型

用插值函数的积分，作为数值积分

$$I_n(f) = \int_a^b L_n(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i) dx = \sum_{i=0}^n \left(\int_a^b l_i(x) dx \right) f(x_i)$$


代数精度

由Lagrange插值的误差表达式, $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$, 有

$$I(f) - I_n(f) = \int_a^b R_n(x) dx = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) dx$$

可以看出, 至少 **n** 阶代数精度

$$\ominus f^{(n+1)}(x) = 0, f(x) = x^k, k \leq n$$



例： 梯形求积公式具有一次代数精确度。

当 $f(x) \in C_{[a,b]}^1$, $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在,

用一次多项式 $P_1(x)$ 逼近 $f(x)$ 有关系式

$$f(x) = P_1(x) + \frac{f''(\xi)}{2!} (x-a)(x-b), a \leq \xi \leq b$$

根据假定 $f(x)$ 是一次多项式, 则 $f''(x) \equiv 0, \therefore f(x) \equiv P_1(x)$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b P_1(x) dx = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

但当 $f(x) = x^2$ 时,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3} \neq \frac{b-a}{2} (a^2 + b^2)$$


故梯形求积公式具有一次代数精确度。

Newton-Cotes 积分



若节点可以自由选取，则一个自然的办法就是取等距节点。
对区间做等距分割。

如插值型求积公式


$$I_n = (b-a) \sum_{k=0}^n C_k^{(n)} f(x_k)$$

称为Newton-Cotes积分公式，其中 $C_k^{(n)}$ 称为柯茨系数。





设节点步长

$$h = \frac{b-a}{n}, x_k = a + kh, k = 0, 1, \dots, n$$

$$C_k^{(n)} = \frac{h}{b-a} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{t-j}{k-j} dt$$

$$= \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (t-j) dt$$

$C_i^{(n)}$ 与步长h无关，可以预先求出





$n=1$ 时

$$C_0^{(1)} = -\int_0^1 (t-1)dt = \frac{1}{2}$$

$$C_1^{(1)} = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \iff I_1(f) &= (b-a)\frac{1}{2}f(a) + (b-a)\frac{1}{2}f(b) \\ &= \frac{(b-a)}{2}[f(a) + f(b)] \end{aligned}$$

梯形
公式



$n=2$ 时

$$C_0^{(2)} = \frac{1}{4} \int_0^2 (t-1)(t-2)dt = \frac{1}{6}$$

$$C_1^{(2)} = -\frac{1}{2} \int_0^2 t(t-2)dt = \frac{4}{6}$$

$$C_2^{(2)} = \frac{1}{4} \int_0^2 t(t-1)dt = \frac{1}{6}$$

抛物线公式
(或辛普森
(Simpson)
公式)

$$\begin{aligned} I_2(f) &= (b-a) \frac{1}{6} f(a) + (b-a) \frac{4}{6} f\left(\frac{b+a}{2}\right) + (b-a) \frac{1}{6} f(b) \\ &= \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b) \right] \end{aligned}$$









当 $n=4$ 时，牛顿-柯茨公式为

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{90} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)]$$

它也特别称为柯茨公式，其中，

$$h = \frac{b-a}{4}, x_i = a + ih, i = 0, 1, 2, 3, 4.$$



[illegible]

误差

1、梯形公式的误差估计

$$E_1(f) = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2!} (x-a)(x-b) dx = \frac{f''(\eta)}{2!} \int_a^b (x-a)(x-b) dx = \frac{-(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

此处用了
积分中值
定理

注：可以
给出证明



2、Simpson公式的误差估计

注意到，Simpson公式有3阶代数精度，因此为了对误差有更精确地估计，我们用3次多项式估计误差

$$P_3(a) = f(a), P_3(b) = f(b), P_3\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right), P_3'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$E_2(f) = I(f) - S(f) = \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b) dx$$

$$= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_a^b (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b) dx = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$$



复化积分（复合求积公式）

数值积分公式与多项式插值有很大的关系。

因此Runge现象的存在，使得我们不能用太多的积分点计算。

与插值类似，我们采用分段、低阶的方法。

复化梯形公式

做等距节点, $h = \frac{b-a}{n}, x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, n$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) - \frac{h^3}{12} f''(\xi_i)$$

$$T_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) - \frac{h^3}{12} f''(\xi_i) \right\}$$

$$= h \left(\frac{1}{2} f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2} f(b) \right) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^3}{12} f''(\xi_i)$$

误差

由均值定理知 $f \in C^2[a, b] \Rightarrow \exists \xi \in [a, b], s.t., \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = nf''(\xi)$

$$\therefore E_n(f) = -\frac{nh^3}{12} f''(\xi) = -\frac{h^2}{12} (b-a) f''(\xi) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$$

可以看出，复化梯形公式是收敛的。

复化Simpson公式（复合抛物线公式）

做等距节点, $h = \frac{b-a}{2n}, x_i = a + ih, i = 0, \Lambda, 2n$

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx = \frac{2h}{6} (f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})) - \frac{(2h)^5}{2880} f^{(4)}(\xi_i)$$

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \frac{2h}{6} (f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})) - \frac{(2h)^5}{2880} f^{(4)}(\xi_i) \right\}$$

$$= \frac{h}{3} \left(f(a) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(b) \right) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(2h)^5}{2880} f^{(4)}(\xi_i)$$

其中 $x_{2i} \leq \xi_i \leq x_{2i+2}$

误差



由均值定理知

$$E_n(f) = -\frac{(2h)^5 n}{2880} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} f^{(4)}(\xi)$$

可以看出，复化Simpson公式是收敛的。



收敛速度与误差估计

定义 若一个积分公式的误差满足 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R[f]}{h^p} = C < \infty$

且 $C \neq 0$, 则称该公式是 p 阶收敛的。

$$T_n \sim O(h^2), S_n \sim O(h^4), C_n \sim O(h^6)$$

例: 计算 $\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$

$$T_8 = \frac{1}{16} \left[f(0) + 2 \sum_{k=1}^7 f(x_k) + f(1) \right] \quad \text{其中 } x_k = \frac{k}{8}$$

$$= 3.138988494$$

$$S_4 = \frac{1}{24} \left[f(0) + 4 \sum_{\text{odd}} f(x_k) + 2 \sum_{\text{even}} f(x_k) + f(1) \right] \quad \text{其中 } x_k = \frac{k}{8}$$

$$= 3.141592502$$

运算量基本相同



变步长求积公式

复合求积公式的截断误差随 n 的增大而减小, 但对于一个给定的积分, 选定了某种求积方法后, 如何确定适当的 n , 使得计算结果达到预选给定的精度要求呢?

当然可以用前面的误差估计求 n , 但这要用到高阶导数, 一般是比较困难的。

在实际计算中, 常采用积分步长 h 的自动选择 (具体地讲, 就是在求积过程中, 将步长逐次折半, 反复利用复合求积公式, 直到相邻两次的计算结果之差的绝对值小于允许误差为止)。

注: 这是一种事后估计误差的方法。





先看事后误差估计（不同的误差表达式，事后误差估计式是不同的）

以复化梯形公式为例

$$I(f) - T_n(f) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi)$$

n等分区间

$$I(f) - T_{2n}(f) = -\frac{(b-a)}{12} \left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(\eta)$$

2n等分区间

近似有：

$$f''(\eta) \approx f''(\xi), \text{ 则有 } \frac{I - T_n}{I - T_{2n}} \approx 4$$

$$\Rightarrow I(f) - T_{2n}(f) \approx \frac{1}{3} (T_{2n}(f) - T_n(f))$$






∴ 可用 $|T_{2n} - T_n| < \varepsilon$ (允许误差)




来判断近似值 T_{2n} 是否已满足精度要求。

具体计算过程如下：

(1) 取 $n=1$, 计算


$$T_1 = (b-a) \left[\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} \right]$$

(2) 取 $n=2$, 计算


$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{(b-a)}{2} \left[\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} T_1 + \frac{(b-a)}{2} f(x_1) \end{aligned}$$


(3) 取 $n=4$, 计算

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{(b-a)}{4} \left[\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \right] \\ &= \frac{1}{2} T_2 + \frac{(b-a)}{4} [f(x_1) + f(x_3)] \end{aligned}$$

式中 $x_i = a + ih, h = \frac{b-a}{4}, i = 1, 2, 3$.

一般地计算公式为 $T_{2n} = \frac{1}{2} T_n + \frac{(b-a)}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + (2i+1) \frac{b-a}{2n}\right)$

检验是否有 $|T_{2n} - T_n| < \varepsilon$ (允许误差)

如满足, T_{2n} 就是满足精度要求的近似值。

注: 每次都是在前一次基础上将子区间再对分, 原分点上的函数值不需要重复计算, 只需计算新分点上的函数值。



类似，对于复化Simpson公式，有

$$I(f) - S_{2n}(f) \approx \frac{1}{15} (S_{2n}(f) - S_n(f))$$

若 $|S_{2n}(f) - S_n(f)| < \varepsilon$ （允许误差），

则 S_{2n} 就是要求的近似值，

否则，再将每个子区间对分，

直到满足为止。



龙贝格公式 (*Romberg*积分公式)

由前面的事后误差估计式,

$$I(f) - T_{2n}(f) \approx \frac{1}{3}(T_{2n}(f) - T_n(f))$$

则,

$$I(f) \approx T_{2n}(f) + \frac{1}{3}(T_{2n}(f) - T_n(f)) = S_n(f)$$

类似,

$$I(f) \approx S_{2n}(f) + \frac{1}{15}(S_{2n}(f) - S_n(f)) = C_n(f)$$

注:

可以用低阶的公式组合后成为一个高阶的公式。

$$S_n = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n \quad (5.4.2)$$

用梯形公式二分前后的两个积分值 T_n 与 T_{2n} 按照公式(5.4.2)线性组合, 其结果正好是用抛物线公式得到的积分值 S_n .

$$C_n = \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n \quad (5.4.4)$$

用抛物线公式二分前后的两个积分值 S_n 与 S_{2n} 按照公式(5.4.4)线性组合, 其结果正好是用柯茨公式得到的积分值 C_n .

$$R_n = \frac{64}{63}C_{2n} - \frac{1}{63}C_n \quad (5.4.6)$$

称式(5.4.6)为龙贝格(Romberg)公式。

龙贝格公式是一种加速计算积分的方法。在变步长的求积过程中, 运用(5.4.2)、(5.4.4)、(5.4.6)式可以将精度低的梯形值逐步加工成精度较高的抛物线值, 柯茨值与龙贝格值。



龙贝格求积的计算步骤如下：

(1) 计算 $f(a), f(b)$, 算出 T_1 ;

(2) 把 $[a, b]$ 2等分, 计算 $f(\frac{a+b}{2})$, 算出 T_2 与 S_1 ;

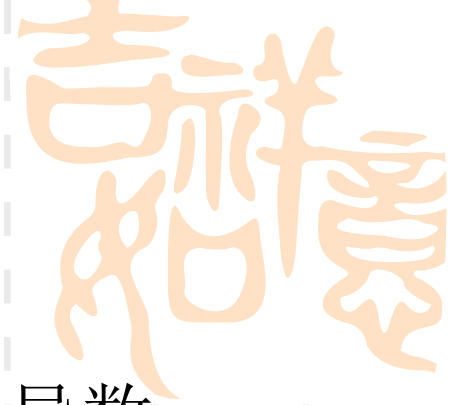
(3) 把 $[a, b]$ 4等分, 计算 $f(a+\frac{b-a}{4}), f(a+3\cdot\frac{b-a}{4})$, 算出 T_4, S_2 与 C_1 ;

(4) 把 $[a, b]$ 8等分, 计算 $f(a+i\frac{b-a}{8}), i=1,3,5,7$, 算出 T_8, S_4 与 C_2 与 R_1 ;

(5) 把 $[a, b]$ 16等分, 计算 $f(a+i\frac{b-a}{16}), i=1,3,5,\Lambda, 15$, 算出 T_{16}, S_8, C_4 与 R_2 , 继续重复进行, 直到

$|R_{2n} - R_n| < \varepsilon$ (允许误差)

时停止计算, R_{2n} 就是所求的积分值。



理查森外推加速法

定理 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有任意阶导数,
 $T_0(h)$ 为将 $[a,b]$ n 等分用梯形公式得到的积分值,
 I 为积分准确值, 则

$$T_0(h) - I = a_1 h^2 + a_2 h^4 + a_3 h^6 + \Lambda \quad (5.4.7)$$

式中系数 $a_i (i = 1, 2, \Lambda)$ 与 h 无关。





若将子区间分半, 即将 $[a, b]$ $2n$ 等分,
用梯形公式求得的积分值记为 $T_0(\frac{h}{2})$,

按 (5.4.7) 式

$$T_0(\frac{h}{2}) - I = a_1(\frac{h}{2})^2 + a_2(\frac{h}{2})^4 + \Lambda \quad (5.4.13)$$

将式 (5.4.7) 与式 (5.4.13) 按以下方式作线性组合

$$T_1(h) = \frac{4}{3}T_0(\frac{h}{2}) - \frac{1}{3}T_0(h) \quad (5.4.14)$$

得到

$$T_1(h) = I + b_1h^4 + b_2h^6 + \Lambda \quad (5.4.15)$$

比较 (5.4.14) 式与 (5.4.2) 式可知, 这样构造出的 $\{T_1(h)\}$ 其实就是**抛物线**值序列。

又按照 (5.4.15) 式

$$T_1\left(\frac{h}{2}\right) = I + \frac{1}{16}b_1h^4 + \frac{1}{64}b_2h^6 + \Lambda$$

令

$$T_2(h) = \frac{16}{15}T_1\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{15}T_1(h)$$

则得到

$$T_2(h) = I + C_1h^6 + C_2h^8 + \Lambda$$

这样构造出的 $\{T_2(h)\}$ 其实就是**柯茨**值序列。

如此继续下去, 每加速一次, 误差的量级便提高二阶。

一般地, 按公式

$$T_m(h) = \frac{4^m}{4^m - 1} T_{m-1}\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{4^m - 1} T_{m-1}(h) \quad (7.4.16)$$

经过 m 次加速后, 余项为下列形式

$$T_m(h) - I = d_1 h^{2(m+1)} + d_2 h^{2(m+2)} \dots \quad (7.4.17)$$

上述方法称为理查森 (Richardson) 外推加速法。

可以证明, 如果 $f(x)$ 充分光滑, 那么 T 数表
每一列的元素及 对角线元素均收敛到所求的
积分值 I , 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_m^{(k)} = I$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} T_m^{(k)} = I$$

注: 所谓龙贝格算法, 就是在二分过程中逐步
形成 T 数表的具体方法。

*Gauss*型积分公式



问题的提出：

在节点数目固定为 $n+1$ 的条件下，能否适当地选择节点位置和相应的系数，使求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

具有最大的代数精度。



以 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式 $\omega_{n+1}(x)$ 的 $n+1$ 个零点 $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ 为节点的插值型求积公式，可使该求积公式的代数精度提高到 $2n+1$ 次。

具有 $2n+1$ 次代数精度的求积公式：

$$\int_a^b f(x) \rho(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + R_n[f] \quad (5.5.1)$$

称为高斯型求积公式，相应的求积节点称为高斯点。

$$R_n[f] = \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\eta) \int_a^b \rho(x) \omega_{n+1}^2(x) dx, \eta \in (a, b)$$

定理 1 插值型求积公式 (5.5.1) 的节点 $a \leq x_0 < x_1 < \Lambda < x_n \leq b$ 是高斯点的充分必要条件是这些节点为零点的多项式

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\Lambda (x - x_n)$$

与任意次数不超过 n 的多项式 $P(x)$ 带权 $\rho(x)$ 正交, 即

$$\int_a^b P(x)\omega_{n+1}(x)\rho(x)dx = 0 \quad (5.5.5)$$



证明： 必要性（“ \Rightarrow ”）

设 $P(x) \in H_n$,

则 $P(x)\omega_{n+1}(x) \in H_{2n+1}$,

如果 x_0, x_1, Λ, x_n 是高斯点,

则求积公式 (5. 5. 1) 对于 $f(x) = P(x)\omega_{n+1}(x)$ 精确成立, 有

$$\int_a^b P(x)\omega_{n+1}(x)\rho(x)dx = \sum_{k=0}^n A_k P(x_k)\omega_{n+1}(x_k).$$

因为 $\omega_{n+1}(x_k) = 0 (k = 0, 1, \Lambda, n)$, 故 (5. 5. 5) 成立。

充分性 (“ \Leftarrow ”)

对于 $\forall f(x) \in H_{2n+1}$, 用 $\omega_{n+1}(x)$ 除 $f(x)$, 记商为 $P(x)$, 余式为 $q(x)$, 即 $f(x) = P(x)\omega_{n+1}(x) + q(x)$,

其中 $P(x), q(x) \in H_n$.

由 (5.5.5) 可得

$$\int_a^b f(x)\rho(x)dx = \int_a^b q(x)\rho(x)dx.$$

由于所给求积公式 (5.5.1) 是插值型的, 它对于 $q(x) \in H_n$ 是精确的, 即

$$\int_a^b f(x)\rho(x)dx = \sum_{k=0}^n A_k q(x_k).$$



又 $\omega_{n+1}(x_k) = 0 (k = 0, 1, \Lambda, n),$
知 $q(x_k) = f(x_k) (k = 0, 1, \Lambda, n),$

从而由有

$$\int_a^b f(x) \rho(x) dx = \int_a^b q(x) \rho(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k).$$

可见求积公式 (5.5.1) 对于一切次数不超 $2n+1$ 的多项式均精确成立。因此 $x_k (k = 0, 1, \Lambda, n)$ 为高斯点。证毕。



定理2 积分区间 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的 $n+1$ 次正交多项式 $\varphi_{n+1}(x)$ 的 $n+1$ 个零点就是一组 **Gauss** 点。

注：含有 $n+1$ 个节点而代数精确度为 $2n+1$ 的插值型求积公式是存在的，它所用的节点是 $[a, b]$ 上的第 $n+1$ 次正交多项式的零点。

注：由定理2，求Gauss 点的问题又可转化为如何找到一组正交多项式中的一个 $n+1$ 次正交多项式。

$$\varphi_{n+1}(x)$$

定理3 高斯公式(5.5.1)的求积系数 A_k 全为正,且

$$A_k = \int_a^b l_k(x) dx = \int_a^b l_k^2(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (5.5.4)$$

证明 因为 $l_k(x)$ 是 n 次多项式,所以 $l_k^2(x)$ 是 $2n$ 次多项式,从而高斯公式(5.5.1)对它能准确成立,

即

$$\int_a^b l_k(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i l_k(x_i)$$

$$\int_a^b l_k^2(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i l_k^2(x_i)$$

注意到 $l_k(x_i) = \delta_{ki}$, 上面二式的右端实际上等于 A_k , 从而有

$$A_k = \int_a^b l_k(x) dx = \int_a^b l_k^2(x) dx > 0$$

定理4 对于高斯公式(5.5.1), 其余项为

$$R(f) = \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\eta) \int_a^b \omega_{n+1}^2(x) dx \quad (5.5.5)$$

其中

$$\eta \in [a, b], \omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

证明：以 x_0, x_1, Λ, x_n 为节点构造 $f(x)$ 的埃尔米特插值多项式 $H(x)$

$$H(x_i) = f(x_i), H'(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, 1, \Lambda, n$$

因为 $H(x)$ 是 $2n+1$ 次多项式, 而它的余项是

$$f(x) - H(x) = \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) \omega_{n+1}^2(x)$$

所以高斯公式 (5. 5. 1) 对 $H(x)$ 能准确成立, 即

$$\int_a^b H(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i H(x_i) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

从而

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b H(x)dx \\ &= \int_a^b \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) \omega_{n+1}^2(x) dx \end{aligned}$$

若 $f^{(2n+2)}(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 由于 $\omega_{n+1}^2(x)$ 在 $[a, b]$ 上不变号, 故应用积分中值定理可得

$$R(f) = \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\eta) \int_a^b \omega_{n+1}^2(x) dx, \quad \eta \in [a, b]$$

证毕

注: 与牛顿—科兹公式比较, 高斯公式不但具有高精度, 而且它还是数值稳定的, 但是节点和求积系数的计算比较麻烦。



高斯—勒让德公式

对于任意求积区间 $[a, b]$, 通过变换

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

可化为区间 $[-1, 1]$, 这时

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)dt$$

因此, 不失一般性, 可取 $a = -1, b = 1$, 考查区间 $[-1, 1]$ 上的高斯公式

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) \quad (5.5.6)$$





勒让德 (Legendre) 多项式

$$L_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [(x^2 - 1)^{n+1}] \quad (5.5.7)$$

是区间 $[-1, 1]$ 上权函数 $\rho(x) = 1$ 的正交多项式,

因此, $L_{n+1}(x)$ 的 $n+1$ 个零点就是高斯公式 (5.5.6) 的 $n+1$ 个节点。特别地, 称 $L_{n+1}(x)$ 的零点为高斯点, 形如 (5.5.6) 的高斯公式称为高斯-勒让德公式。

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) \quad (5.5.6)$$





勒让德多项式性质：

$$(1-x^2)L'_{n+1}(x) = (n+1)[L_n(x) - xL_{n+1}(x)]$$

高斯-勒让德求积系数 A_i 为：

$$A_i = \frac{2(1-x_i^2)}{[(n+1)L_n(x_i)]^2}$$





由 (5.5.7) 可逐步构造出勒让德多项式:

$$p_1(x) = x$$

$$p_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$p_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

$$p_4(x) = x^4 - \frac{30}{35}x^2 + \frac{3}{35}$$

$$p_5(x) = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x$$

M



利用勒让德多项式，取它的零点作为求积节点，即可构造高斯求积公式。

(1) 令 $P_1(x) = x = 0$ ，得高斯点 $x_1 = 0$ ，

从而一点高斯-勒让德公式(中矩形公式)为

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx w_1 f(0)$$

令它对 $f(x) = 1$ 准确成立，所以

$$w_1 = 2, \text{ 从而得 } \int_{-1}^1 f(x)dx \approx 2f(0) \quad (5.5.10)$$

$$\text{其余项为 } R(f) = \frac{1}{3} f''(\eta)$$

(2) 若取 $P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3} = 0$ 的两个零点 $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ 为节点, 则
从而二点高斯-勒让德公式为

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx w_1 f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + w_2 f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (5.5.11)$$

令它对 $f(x) = 1, x$ 都准确成立, 所以 $w_1 = w_2 = 1$,

从而得
$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

其余项为
$$R(f) = \frac{2^5 \cdot 2^4}{5 \cdot 24^3} f^{(4)}(\eta) = \frac{1}{135} f^{(4)}(\eta)$$



同理, 三点高斯-勒让德公式为

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right) \quad (5.5.12)$$

其余项为 $R(f) = \frac{1}{15750} f^{(6)}(\eta)$

注: 一般地, 高斯-勒让德公式 (5.5.6) 的节点可以通过勒让德多项式的零点确定

表5-2给出了高斯—勒让德公式在节点数为1,2,3,4,5,6时的节点、求积系数及余项(略, 请查相关资料)。

n	x_k	A_k	n	x_k	A_k
1	0	2	6	± 0.9324695142	0.1713244924
2	± 0.5773502692	1		± 0.6612093865	0.3607615730
3	± 0.7745966692	0.5555555556		± 0.2386191861	0.4679139346
	0	0.8888888889	7	± 0.9491079123	0.1294849662
4	± 0.8611363116	0.3478548451		± 0.7415311856	0.2797053915
	± 0.3399810436	0.6521451549		± 0.4058451514	0.3818300505
5	± 0.9061798459	0.2369268851	8	0	0.4179591837
	± 0.5384693101	0.4786286705		± 0.9602898565	0.1012285363
	0	0.5688888889		± 0.7966664774	0.2223810345
				± 0.5255324099	0.3137066459
				± 0.1834346425	0.3626837834



例 用二点高斯-勒让德公式计算积分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

解 作变量代换 $x = \frac{\pi}{4}(t+1)$, 则

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 \sin \frac{\pi(t+1)}{4} dt$$





记 $f(t) = \sin \frac{\pi(t+1)}{4}$, 因为节点 $t_i = \pm 0.5773503$ 得

$$f(t_0) = 0.32589, \quad f(t_1) = 0.94541$$

所以, 由二点高斯公式

$$I \approx \frac{\pi}{4} [f(t_0) + f(t_1)]$$

$$= \frac{\pi}{4} (0.32589 + 0.94541) = 0.94541$$

注: 计算结果比用 复合梯形公式 7个节点计算的结果还要好。

注：

一般性，考虑积分：

$$I(f) = \int_a^b W(x) f(x) dx, W(x) \geq 0$$

称为权函数

定义两个可积函数的内积为：

$$(f, g) = \int_a^b W(x) f(x) g(x) dx$$

两个函数正交，就是指这两个函数的内积为0

(选修内容)

利用施密特 (Schmidt) 正交化过程,

$$\left\{ \begin{array}{l} g_0(x) = f_0(x) \\ \text{M} \\ g_n(x) = f_n(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(f_n(x), g_i(x))}{(g_i(x), g_i(x))} g_i(x) \end{array} \right.$$

就可以将多项式基函数

$\{1, x, \Lambda, x^n\}$ 变为正交基 $\{p_0(x), p_1(x), \Lambda, p_n(x)\}$

(选修内容)

Gauss型求积公式的构造方法

- (1) 求出区间 $[a,b]$ 上权函数为 $\rho(x)$ 的正交多项式 $p_n(x)$;
- (2) 求出 $p_n(x)$ 的 n 个零点 x_1, x_2, \dots, x_n 即为 **Gauss** 点;
- (3) 计算积分系数。

(选修内容)

例：求积分 $\int_{-1}^1 x^2 f(x) dx$ 的2点Gauss公式.

解 按 Schmidt正交化过程作出正交多项式：

$$p_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = x - \frac{(x, p_0(x))}{(p_0(x), p_0(x))} p_0(x)$$

$$p_2(x) = x^2 - \frac{(x^2, p_0(x))}{(p_0(x), p_0(x))} p_0(x) - \frac{(x^2, p_1(x))}{(p_1(x), p_1(x))} p_1(x)$$

$$= x^2 - \frac{\int_{-1}^1 x^4 dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} - \frac{\int_{-1}^1 x^5 dx}{\int_{-1}^1 x^4 dx} x = x^2 - \frac{3}{5}$$

(选修内容)
 $P_2(x)$ 的两个零点为 $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$,

积分系数为

$$A_1 = \int_{-1}^1 x^2 l_1(x) dx = \int_{-1}^1 x^2 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} dx = \frac{1}{3}$$

$$A_2 = \int_{-1}^1 x^2 l_2(x) dx = \int_{-1}^1 x^2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} dx = \frac{1}{3}$$

故两点 **Gauss** 公式为

$$\int_{-1}^1 x^2 f(x) dx \approx \frac{1}{3} [f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + f(\sqrt{\frac{3}{5}})]$$

吉祥如意

Thanks!

