

## 第2章 非线性方程求根

非线性科学是当今科学发展的一个重要研究方向，而非线性方程的求根也成了不可缺少的内容。但是，非线性方程的求根非常复杂。

**主讲：纪庆革副教授**

**中山大学数据科学与计算机学院**

**E-Mail: 1024180018@qq.com**

## 第2章 非线性方程求根

通常非线性方程的根的情况非常复杂：

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}x) = y \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{无穷组解}$$
$$\begin{cases} y = x^2 + a \\ x = y^2 + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 & \text{无解} \\ a = \frac{1}{4} & \text{一个解} \\ a = 0 & \text{两个解} \\ a = -1 & \text{四个解} \end{cases}$$

续

所以，只在某个区域内可能解存在唯一，而且经常很简单形式的方程得不到精确解：

$$e^x - \cos(\pi x) = 0$$

因此，通常我们用迭代法解非线性方程

看迭代法之前，先看看一种简单直观的方法

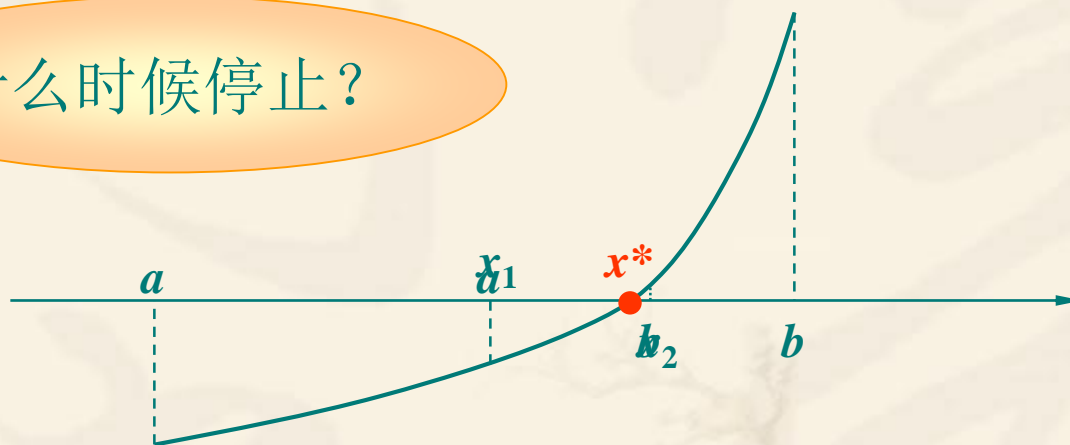
**原理：**  $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists x, s.t., f(x) = 0$

# 内容

- ❖ 二分法
- ❖ 迭代法
- ❖ 牛顿法
- ❖ 弦截法（割线法）

## 2.1 二分法(1/2)

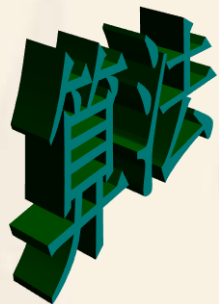
什么时候停止？



$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon_1 \quad \text{或} \quad |f(x)| < \varepsilon_2$$



# 二分法(2/2)



While( $|a-b|>\epsilon$ )

$x=(a+b)/2$

$f(x)$

若( $|f(x)|<\epsilon$ )  $x$ 为解

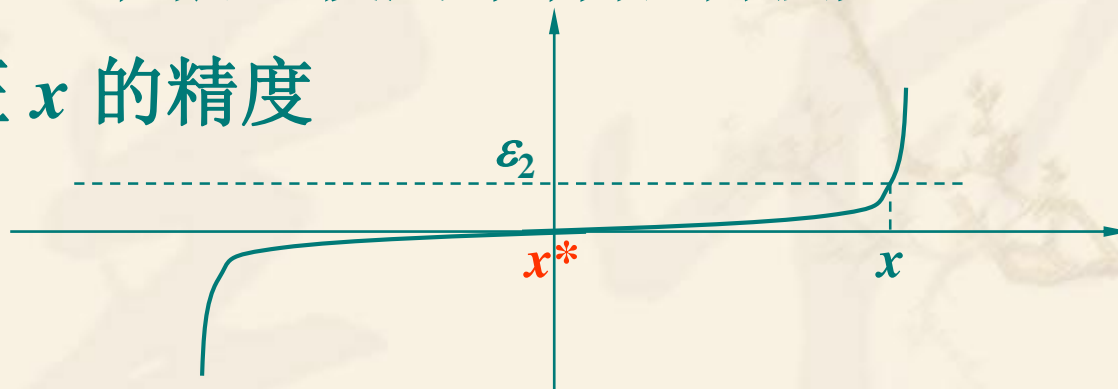
若 $f(x)*f(b)<0$  修正区间为 $[x,b]$

若 $f(a)*f(x)<0$  修正区间为 $[a,x]$

End while

每次缩小一倍的区间，收敛速度为 $1/2$ ，较慢，  
且只能求一个根，使用条件限制较大

不能保证  $x$  的精度



## 2.2 迭代法<sub>(1/10)</sub>

$$f(x) = 0 \xleftrightarrow{\text{等价变换}} x = g(x)$$

$f(x)$  的根  $\longleftrightarrow$   $g(x)$  的不动点



思路

从一个初值  $x_0$  出发, 计算  $x_1 = g(x_0)$ ,  $x_2 = g(x_1)$ , ...,  $x_{k+1} = g(x_k)$ , ... 若  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  收敛, 即存在  $x^*$  使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ , 且  $g$  连续, 则由  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} g(x_k)$  可知  $x^* = g(x^*)$ , 即  $x^*$  是  $g$  的不动点, 也就是  $f$  的根。迭代式  $x_{k+1} = g(x_k)$ ,  $k=0,1,2,\dots$  被称为基本迭代式, 也被称为不动点迭代式。

# 迭代法(2/10)

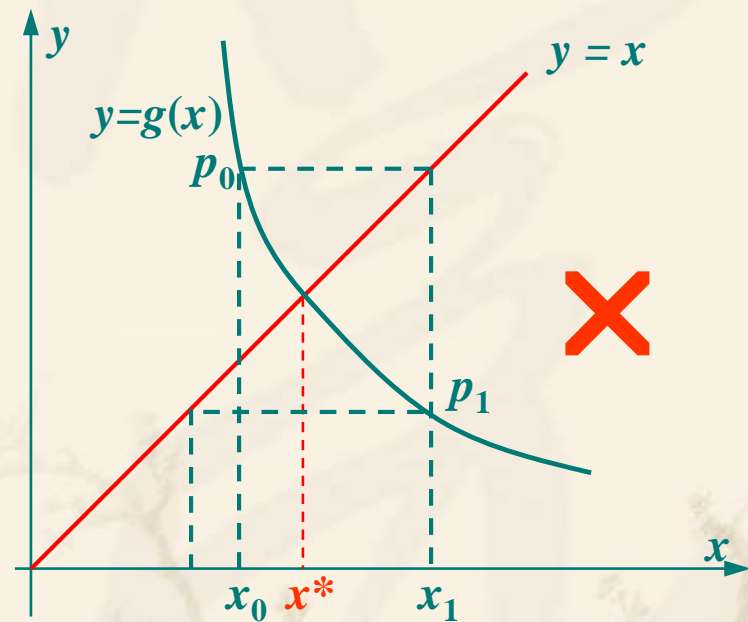
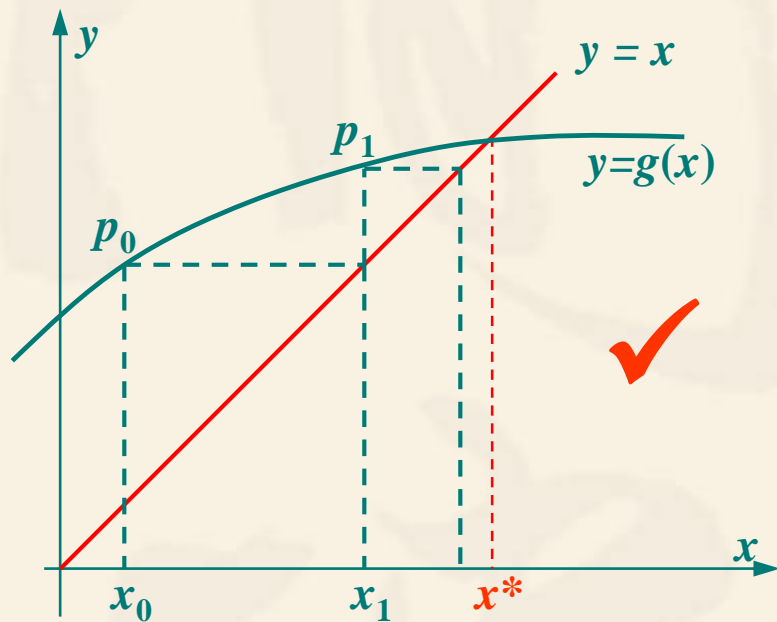
迭代法的基本步骤如下：

- 1、给出方程的局部等价形式  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x)$
- 2、取合适的初值  $x_0$ ，产生迭代序列  $x_{i+1} = \phi(x_i)$
- 3、求极限  $x^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ ，易知，该值为方程的根

一定收敛  
吗？



# 迭代法(3/10)



# 迭代法<sub>(4/10)</sub>

- ❖ 定义1 设 $x^*$ 是 $g(x)$ 的不动点, 若存在 $x^*$ 的一个邻域 $B: |x - x^*| \leq \delta$ , 使得对任何初值 $x_0 \in B$ , 由基本迭代法生成的序列满足 $\{x_k\} \subset B$ , 且收敛到 $x^*$ , 则称基本迭代法是局部收敛的。

# 迭代法<sub>(5/10)</sub>

**定理2.1**  $\varphi(x), x \in [a, b]$  , 若满足:

1、  $a \leq \varphi(x) \leq b, x \in [a, b]$

2、  $\varphi(x)$  可导, 且存在正数  $L < 1$ , 使得对任意的  $x$ ,

有  $|\varphi'(x)| \leq L$

则有:

1、 存在唯一的点  $x^*, x^* = \varphi(x^*)$

2、  $\forall x_0 \in [a, b]$  , 迭代序列  $\{x_k\}$  收敛 到  $\varphi(x)$  的不动点  $x^*$ , 且有误差估计

$$|x^* - x_k| \leq \frac{L^k}{1 - L} |x_1 - x_0|$$

# 迭代法(6/10)

证明：①存在唯一性

做辅助函数  $\psi(x) = x - \varphi(x)$ ，则有  $\psi(a) \leq 0, \psi(b) \geq 0$

所以，存在点  $x^*, s.t., \psi(x^*) = 0 \Rightarrow x^* = \varphi(x^*)$

若  $x^{**} = \varphi(x^{**})$ ，则有：

$$|x^* - x^{**}| = |\varphi(x^*) - \varphi(x^{**})| = |\varphi'(\xi)(x^* - x^{**})| \leq L|x^* - x^{**}|$$

又， $L < 1 \Rightarrow x^* = x^{**}$

②  $\forall x_0 \in [a, b]$  则

$$x_{k+1} - x^* = \varphi(x_k) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi)(x_k - x^*)$$

$$|x_{k+1} - x^*| \leq L|x_k - x^*| \leq L^k|x_0 - x^*|$$

所以，任意的初值都收敛

# 迭代法(7/10)

## ③误差估计

$$|x_{k+1} - x_k| = |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| \leq L|x_k - x_{k-1}| \leq \Lambda \leq L^k|x_1 - x_0|$$

$$\begin{aligned} \therefore |x_{k+p} - x_k| &\leq |x_{k+p} - x_{k+p-1}| + \Lambda + |x_{k+1} - x_k| \\ &\leq (L^{k+p+1} + \Lambda + L^k)|x_1 - x_0| \\ &= \frac{L^k(1 - L^p)}{1 - L}|x_1 - x_0| < \frac{L^k}{1 - L}|x_1 - x_0| \end{aligned}$$

由 $p$ 的任意性, 令 $p \rightarrow +\infty$

$$|x^* - x_k| \leq \frac{L^k}{1 - L}|x_1 - x_0|$$

证毕



# 迭代法(8/10)

定义2.2 设序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x^*$ , 令 $\varepsilon_n = x^* - x_n$ , 若存在某实数 $p \geq 1$ 及正常数 $C$ , 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p} = C$$

则称序列 $\{x_n\}$   $p$ 阶收敛, 其中 $C$ 称为渐进误差常数。

如果序列 $\{x_n\}$ 是由迭代 $x_{n+1} = g(x_n)$ 产生的, 且 $p$ 阶收敛, 则称这种迭代过程是 $p$ 阶收敛。

当 $p=1$ , 且 $C < 1$ 时, 称为线性收敛。

当 $p > 1$ , 称为超线性收敛;

当 $p=2$ , 称为平方收敛(二次收敛)。

# 迭代法(9/10)

## ❖ 迭代法的加速

❧ 埃特金(Altken)加速方法的计算公式:

❖ 第一步: 校正  $\tilde{x}_{k+1} = \varphi(x_k)$ ;

❖ 第二步: 再校正  $\bar{x}_{k+1} = \varphi(\tilde{x}_{k+1})$ ;

❖ 第三步: 加速  $x_{k+1} = \bar{x}_{k+1} - \frac{(\bar{x}_{k+1} - \tilde{x}_{k+1})^2}{\bar{x}_{k+1} - 2\tilde{x}_{k+1} + x_k}$ .

# 迭代法(10/10)

构造满足定理条件的等价形式一般难于做到。要构造收敛迭代格式有两个要素：

- 1、等价形式
- 2、初值选取

下面我们开始介绍若干种迭代法的构造方法：

- 1、切线法
- 2、割线法

## 2.3 Newton迭代法（切线法） (1/5)

将 $f(x)$ 在初值处作Taylor展开

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \Lambda$$

取线性部分作为 $f(x)$ 的近似，有：

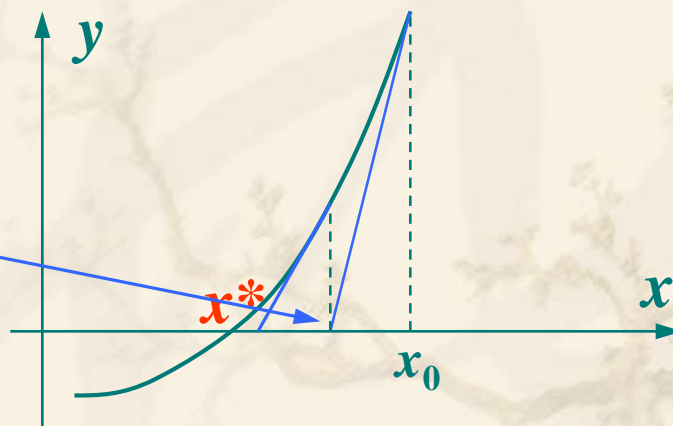
$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \approx 0$$

若  $f'(x_0) \neq 0$ ，则有

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{记为 } x_1$$

类似，我们可以得到

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$



## 2.3 Newton迭代法(2/5)

这样一直下去，我们可以得到迭代序列

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

**Newton**迭代的等价方程为：

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

所以

$$\varphi'(x) = \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)' = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

若 $f(x)$ 在 $a$ 处为单根，则

$$f(a) = 0, f'(a) \neq 0, \therefore \varphi'(a) = 0$$

所以，迭代格式收敛



## 2.3 Newton迭代法<sub>(3/5)</sub>

若 $a$ 为 $p$ 重根，取迭代格式为：

$$x_{k+1} = x_k - p \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

函数在 $a$ 处作  
***Taylor***展开

收敛速度

$$\begin{aligned} x_{n+1} - a &= \varphi(x_n) - \varphi(a) = (x_n - a)\varphi'(a) + \frac{(x_n - a)^2}{2} \varphi''(\xi_n) \\ &= \frac{(x_n - a)^2}{2} \varphi''(\xi_n) \approx \frac{(x_n - a)^2}{2} \varphi''(a) \end{aligned}$$

即  $\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = M$

**Newton**迭代收敛速度快，格式简单，应用广泛

## 2.3 Newton迭代法<sup>(4/5)</sup>

例 用Newton迭代法求方程 $xe^x-1=0$ 在0.5附近的根, 精度要求 $\varepsilon=10^{-5}$ .

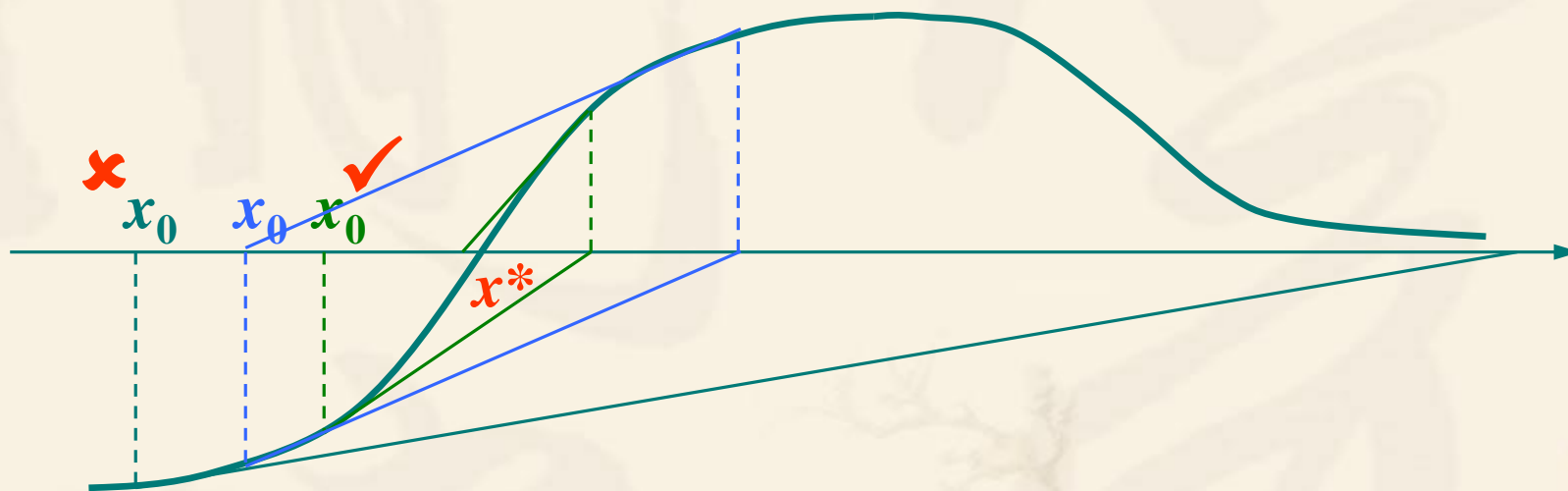
解 Newton 迭代格式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k e^{x_k} - 1}{e^{x_k} + x_k e^{x_k}} = x_k - \frac{x_k - e^{-x_k}}{1 + x_k}, k = 0, 1, 2, \Lambda$$

k	$x_k$	$f(x_k)$	$ x_k - x_{k-1} $
0	0.5	-0.17563936	
1	0.57102044	0.01074751	0.07102044
2	0.56715557	0.00003393	0.00386487
3	0.56714329	0.0000000003	0.00001228
4	0.56714329	0.0000000003	0.00000000

## 2.3 Newton迭代法<sup>(5/5)</sup>

注：Newton's Method 收敛性依赖于 $x_0$  的选取。



## 2.4 弦截法（割线法） (1/3)

将 $Newton$ 迭代中的导数，用差商代替，有格式

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

又称双点割线法，也称有记忆割线法

几何解释：通过 $(x_k, f(x_k))$ 和 $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ 作 $y=f(x)$ 的割线，割线与 $x$ 轴交点的横坐标就是 $x_{k+1}$ 。注：该方法是两步迭代法，不能直接用单步迭代法收敛性分析的结果。

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^{1.618}} = M$$

双点割线法是  
超线性收敛的  
( $p=1.618>1$ )

割线

切线

$x_1$   $x_0$

# 弦截法（割线法） (2/3)

把上式中的 $x_{n-1}$ 换为 $x_0$ ，则得  
迭代公式：

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)}$$

该式称为单点割线法。

单点割线法在单根附近是  
线性收敛的。

注：双点割线法、单点割  
线法都需要 $x^*$ 邻近的两个  
初始近似值 $x_0, x_1$ 才能开始  
计算。



# 弦截法<sub>(3/3)</sub>

定理：设方程  $f(x) = 0$  的根为  $x^*$ . 若  $f(x)$  在  $x^*$  附近有连续的二阶导数,  $f'(x) \neq 0$ , 而初值  $x_0, x_1$  充分接近  $x^*$ , 则双点割线法的迭代过程收敛, 收敛速度为

$$\left| x_{n+1} - x^* \right| \approx \left| \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \right|^{0.618} \left| x_n - x^* \right|^{1.618}$$

# 实验2 非线性方程求根

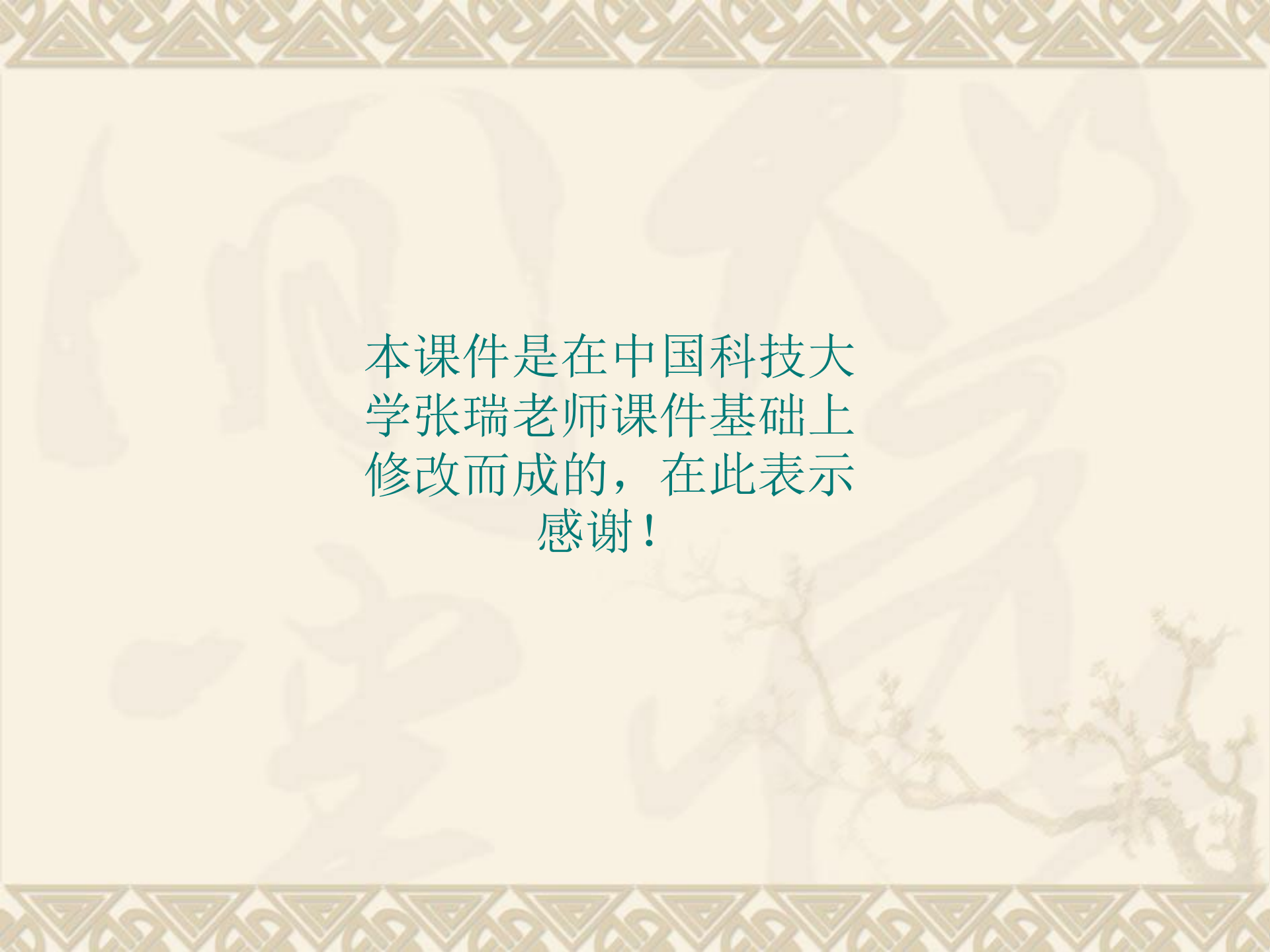

1.分别编写用Newton迭代和弦截法求根的通用程序

2.用如上程序求根

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x = 0$$

取初值 $x_0$  为  $0.1, 0.2, 0.9, 9.0$

3.简单分析你得到的数据



本课件是在中国科技大学  
张瑞老师课件基础上  
修改而成的，在此表示  
感谢！

