ALJABAR LINEAR

Pertemuan ke-14 - Row Space, Column Space, Null Space, Rank, Nulitas, dan Fundamental Matrix Spaces

Oleh:
Annastya Bagas Dewantara, S.T., M.T.
(email: annastya.bagas@ui.ac.id)

Fakultas Teknik
Universitas Indonesia

Daftar Paparan

1. Row Space, Column Space, dan Null Space
2. Rank, Nullity, dan Matrix Spaces
3. Tugas
4. Daftar Pustaka

Row Space, Column Space, dan Null Space

1. Row Space, Column Space, dan Null Space
2. Rank, Nullity, dan Matrix Spaces
3. Tugas
4. Daftar Pustaka

Matrix Space

Jika A adalah matriks $m \times n$, maka:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Row space:
$\mathrm{row}(A)$ adalah **subspace** dari $\mathbb{R}^n$ yang merupakan spanning dari **row vector** pada A.

$$r_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$
$$r_2 = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix}$$
$$r_m = \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$W = \mathrm{span}\left(\{r_1, r_2, \cdots r_m\}\right), \quad W \subseteq \mathbb{R}^n$$

Column space:
$\mathrm{col}(A)$ adalah **subspace** dari $\mathbb{R}^n$ yang merupakan spanning dari **row column** pada A.

$$c_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad c_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$W = \mathrm{span}\left(\{c_1, c_2, \cdots c_n\}\right), \quad W \subseteq \mathbb{R}^m$$

Null space:
$\mathrm{null}(A)$ adalah **solution space** dari **homogenous system** $Ax = 0$, yang merupakan **subspace** dari $\mathbb{R}^n$.

Sistem Persamaan Linear dan Column Vector

$$Ax = b$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x} = b$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b, \quad c_i = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}}_{\substack{\textbf{column vector} \\ \text{dari kolom ke-i}}}$$

$$\underbrace{x_1 c_1 + x_2 c_2 + \cdots + x_n c_n}_{Ax} = b$$

Given system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Solution:

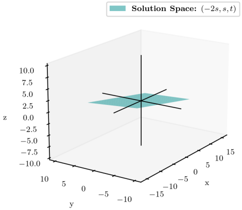
- Solve by Gaussian elimination: $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 3$
- Column vectors of A:

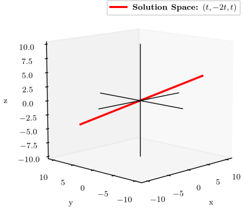
$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$2\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 + 3\mathbf{c}_3 = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Solusi dari $\boxed{Ax = b \textbf{ adalah consistent}}$, ketika b adalah **linear kombinasi** dari **column vector** pada A dan $b \in \mathbb{R}^m$.

Solution Space





Solution Space:

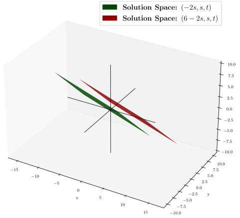
2 Free Variable Solution

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{\substack{\text{rank}(A)=1 \\ \textbf{Free variable } = n - \text{rank}(A) = 2}}, \quad \textbf{Solusi pada: } (-2s - 3t, s, t)$$

1 Free Variable Solution

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{\substack{\text{rank}(A)=2 \\ \textbf{Free variable } = n - \text{rank}(A) = 1}}, \quad \textbf{Solusi pada: } (t, -2t, t)$$

Relasi $Ax = 0$ dan $Ax = b$



Homogenous Linear Equation

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_h}$$

Non-Homogenous Linear Equation

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_h} + \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{x_0}$$

Homogenous Linear Equation

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \textbf{Solusi:} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - 3t \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

Non-Homogenous Linear Equation

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 4y + 6z = 12 \\ 3x + 6y + 9z = 18 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \textbf{Solusi:} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - 2s - 3t \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

General Solution of a Linear System

Misalkan $Ax = b$ adalah sistem persamaan linear yang **konsisten**, Jika x_0 adalah salah satu solusi dari $Ax = b$, dan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ adalah basis untuk **null space** dari A, maka:

$$x = x_0 + c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

1. Semua solusi dari $Ax = b$ dapat di temukan dengan menggunakan kombinasi linear $x_1, c_2, \cdots, c_n$ dan x_0.
2. Solusi dari **Non Homogenous Linear System** adalah translasi dari solusi **Homogenous Linear System**

Teorema Basis dari Row Spaces, Column Spaces dan Null Spaces

Teorema

Misalkan A dan B adalah matriks yang *row equivalent*. Maka:

(a) A dan B memiliki **row space** yang sama:

$$\mathrm{row}(A) = \mathrm{row}(B).$$

$$\mathrm{span}\left(\left\{r_1^A, r_2^A, \cdots r_m^A\right\}\right) = \mathrm{span}\left(\left\{r_1^B, r_2^B, \cdots r_m^B\right\}\right)$$

(b) A dan B memiliki **null space** yang sama:

$$\mathrm{null}(A) = \mathrm{null}(B).$$

Teorema

Jika R adalah matriks dalam *row echelon form*, maka:

- Vektor baris **nonzero** dari R membentuk **basis** untuk **row space** matriks R.
- Vektor kolom yang berisi **leading** 1 membentuk **basis** untuk **column space** matriks R.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

B adalah ERO $R_2 \to R_2 - 2R_1$ dari A

Row space:

$$\mathrm{row}(A) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}$$
$$\mathrm{row}(B) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}$$

Null space:

$$(A\mathbf{x} = \mathbf{0}), \quad x + 2y = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(B\mathbf{x} = \mathbf{0}), \quad x + 2y = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Row space basis

$$\mathrm{row}(R) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

Column space basis

$$\mathrm{col}(R) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

Row Equivalent

Suatu metriks A dan B dikatakan **Row Equivalent** jika salah satu matriks dapat diperoleh dari matriks lainnya dengan melakukan serangkaian **Elementary Row Operation**.

Elementary Row Operation
A → B

1. Baris dikali dengan nonzero constant c
2. Tukar dua baris
3. Menambahkan konstanta dikalikan satu baris dengan baris lainnya

Inverse Row Operation
B → A

1. Baris yang sama dikali dengan nonzero constant $\frac{1}{c}$
2. Tukar dua baris yang sama
3. Jika matriks B diperoleh dari A dengan operasi $R_j \to R_j + cR_i$, maka operasi invers adalah $R_j \to R_j - cR_i$

Contoh:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}}_{\textbf{Step 1: } R_1 \to 2R_1} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}}_{\textbf{Step 2: } R_2 \to R_2 - 3R_1} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & -7 & -12 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}}_{\textbf{Step 3: } R_2 \leftrightarrow R_3} \to B = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \\ -2 & -7 & -12 \end{bmatrix}}$$

$$B = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \\ -2 & -7 & -12 \end{bmatrix}}_{\textbf{Step 1: } R_2 \leftrightarrow R_3} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & -7 & -12 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}}_{\textbf{Step 2: } R_2 \to R_2 + 3R_1} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}}_{\textbf{Step 1: } R_1 \to \frac{1}{2} R_1} \to A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Bases from Row and Column Vectors

Teorema

Jika sebuah matriks A direduksi ke **row echelon form** R, maka:

- Basis untuk **row space** dapat diperoleh langsung dari baris **nonzero** R. Basis tersebut juga berlaku sebagai basis untuk $row(A)$.
- Basis untuk **column space** R **tidak selalu** menjadi basis untuk $col(A)$, karena **Elementary Row Operation (ERO)** dapat mengubah **column space**

Teorema

Jika A dan B adalah matriks yang **row equivalent**, maka:

1. Sekumpulan kolom dari A adalah **linearly independent** $\iff$ kolom terkait di B juga **linearly independent**.
2. Sekumpulan kolom dari A membentuk basis $col(A)$ $\iff$ kolom terkait di B membentuk basis $col(B)$.

Contoh: Basis untuk Column Space

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{RREF } (R)}$$

Column space dari R di dapatkan dari **column vector** yang memiliki **leading 1**

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sehingga basis dari **column space** A adalah:

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad c_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Contoh: Basis dari Row Space

Diberikan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Langkah-langkah:

Transpos matriks: A^T untuk mengubah row space menjadi column space:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 15 & 18 \\ 0 & -2 & 10 & 8 \\ 3 & 6 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Reduksi ke bentuk eselon baris:

$$\text{RREF dari } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kolom-kolom pivot pada A^T adalah $1, 2, 4$. Kolom-kolom ini membentuk basis untuk $col(A^T)$:

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad c_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 18 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Transpos kembali untuk mendapatkan basis row space dari A:

$$r_1 = [1, -2, 0, 0, 3], \quad r_2 = [2, -5, -3, -2, 6], \quad r_4 = [2, 6, 18, 8, 6].$$

Maka

$$\mathcal{B}_{row(A)} = \{ r_1, r_2, r_4 \}, \quad \dim(row(A)) = 3.$$

Contoh : Basis dan Kombinasi Linear

Data:

$$v_1 = (1, -2, 0, 3),\ v_2 = (2, -5, -3, 6),$$

$$v_3 = (0, 1, 3, 0),\ v_4 = (2, -1, 4, -7),$$

$$v_5 = (5, -8, 1, 2).$$

Matriks kolom:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{bmatrix} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathrm{RREF}(A)}$$

Kolom pivot: $1, 2, 4 \Rightarrow \{v_1, v_2, v_4\}$ basis.

Linear Relation: Dari RREF:

$$w_3 = 2w_1 - w_2,\ w_5 = w_1 + w_2 + w_4$$

Translasi:

$$v_3 = 2v_1 - v_2, \quad v_5 = v_1 + v_2 + v_4.$$

Ringkasan:
Basis $= \{v_1, v_2, v_4\}$
Vektor lain dinyatakan sebagai kombinasi linear basis.

Rank, Nullity, dan Matrix Spaces

1. Row Space, Column Space, dan Null Space
2. Rank, Nullity, dan Matrix Spaces
3. Tugas
4. Daftar Pustaka

Example: Rank and Nullity Check

Diberikan

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}^{4\times 6} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jumlah kolom $= 6 \implies \text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = 6$ (Teorema Dimensi).

Dari hasil reduksi (lihat Contoh 1), diperoleh

$$\text{rank}(A) = 2, \quad \text{nullity}(A) = 4.$$

Verifikasi: $2 + 4 = 6$ ✓.

Kesimpulan: Teorema dimensi konsisten, ruang baris/kolom A berdimensi 2 dan ruang null berdimensi 4.

Tugas

1. Row Space, Column Space, dan Null Space
2. Rank, Nullity, dan Matrix Spaces
3. **Tugas**
4. Daftar Pustaka

Tugas

Tugas ke-3

3.1 No. 12

3.3 No. 27, 29

3.4 No. 20

3.5 No. 31

Tugas ke-4

4.1 No. 7, 9

4.2 No. 3

4.3 No. 9

4.9 No. 1

(Deadline: 04/11/2025 Offline di kelas, Portofolio, Tiap Tugas beda kertas)

Daftar Pustaka

1. Row Space, Column Space, dan Null Space
2. Rank, Nullity, dan Matrix Spaces
3. Tugas
4. Daftar Pustaka

Daftar Pustaka I