ALJABAR LINEAR

Pertemuan ke-8 dan 9 - Geometri dari Sistem Linear dan Cross Product

Oleh:

Annastya Bagas Dewantara, S.T., M.T.

(email: annastya.bagas@ui.ac.id)

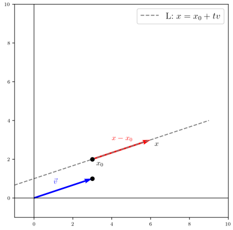
Fakultas Teknik

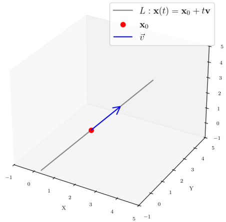
Universitas Indonesia

Daftar Paparan

Vektor dan Persamaan Parametrik

Garis pada $\mathbb{R}^2$ *dan* $\mathbb{R}^3$





Persamaan parametrik adalah persamaan yang merepresentasikan suatu koordinat dari suatu titik sebagai fungsi dari satu atau lebih variabel bebas (**Parameter (t)**), dimana $-\infty \leq \mathbf{t} \leq \infty$.

Teori

Jika **L** adalah garis pada $\mathbb{R}^2$ atau $\mathbb{R}^3$ yang memuat titik $\mathbf{x_0}$ dan **parallel** dengan **vektor nonzero** $\vec{v}$. Maka persamaan tersebut adalah:
$x = x_0 + tv$

Pada $\mathbb{R}^2$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t = 1$$

Maka:

$$x = x_0 + tv = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+3t \\ 2+t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\text{Pada } t = 1}$$

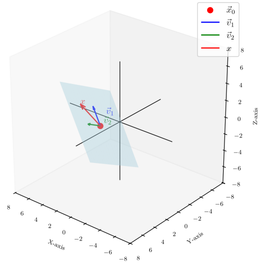
Pada $\mathbb{R}^3$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad t = 1$$

$$x = x_0 + tv = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2t \\ 2-t \\ 3t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\text{Pada } t = 1}$$

Bidang pada $\mathbb{R}^3$



Teori

Jika **W** adalah bidang pada $\mathbb{R}^3$ yang memuat titik $\mathbf{x_0}$ dan **parallel** terhadap **vektor noncollinear** $\vec{v_1}$ *dan* $\vec{v_2}$. Maka persamaan tersebut adalah:
$x = x_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2$

Contoh 1:

$$x_0 = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}, \quad t = 1$$

Maka:

$$x = x_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 + t_1\\2 + 2t_2\\2t_1 + t_2\end{bmatrix}$$

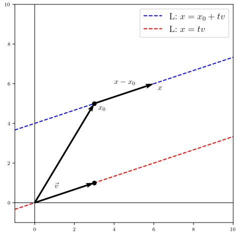
Contoh 2:

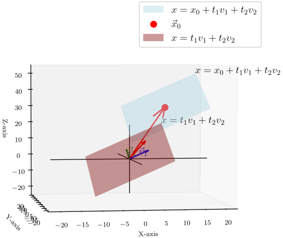
$x - y + 2z = 5$
Jika:
$y = t_1, \; z = t_2$
Maka:

$$x - y + 2z = 5$$
$$x = 5 + y - 2z$$
$$x = 5 + t_1 - 2t_2$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 + t_1 - 2t_2\\t_1\\t_2\end{bmatrix}$$

Translasi pada Garis dan Bidang





Persamaan parametrik dapat direpresentasikan sebagai **translasi** dari garis atau bidang yang melalui origin, dengan arah vektor tertentu, sejauh $\mathbf{x_0}$:

Pada $\mathbb{R}^2$:

$$\{t\mathbf{v} : t \in \mathbb{R}\} \xrightarrow{+\mathbf{x}_0} \{\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} : t \in \mathbb{R}\}$$

Pada $\mathbb{R}^3$:

$$\{t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v_2} : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \xrightarrow{+\mathbf{x}_0} \{\mathbf{x}_0 + t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v_2} : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

Dot Product

Dot Product dari Sistem Linear

Persamaan Linear pada $\mathbb{R}^n$:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

dengan $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, maka:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = b$$

Sistem Persamaan Homogen:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0, \vec{u} \perp \vec{v}}$$

General sistem:

$$A\mathbf{x} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{x} = 0 \quad (i = 1, \ldots, \text{m-equation})$$

Sehingga **solution** dari $A\mathbf{x} = 0$ terdiri atas vektor $\mathbf{x}$ yang orthogonal terhadap tiap baris pada A.

Contoh Dot Product dari Sistem Linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad RREF :\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solusi general:

$$\mathbf{x} = (-3r - 4s - 2t,\ r,\ -2s,\ s,\ t,\ 0)$$

Maka ortogonalitas dapat diketahui dengan $r_i \cdot x = 0, (i = 1, \ldots, \text{m-equation})$:

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{x} = 1(-3r - 4s - 2t) + 3r + (-2)(-2s) + 2t = 0$$

Cross Product

Definisi dan Notasi

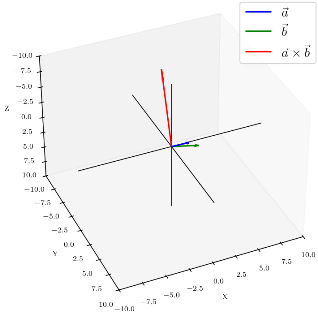
Definisi: Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ adalah vektor di $\mathbb{R}^3$, maka **cross product** didefinisikan sebagai

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2,\; u_3 v_1 - u_1 v_3,\; u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

Notasi determinan:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Contoh: Cross Product



Contoh 1: Misalkan $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ dan $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$. Maka

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2, -7, -6).$$

Hasil dari $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ akan selalu tegak lurus terhadap $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0, \quad \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$$

Teorema: Hubungan Cross Product dan Dot Product

Teorema untuk vektor $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$

a. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$

b. $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$

c. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$ (Identitas Lagrange)

d. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$

e. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$

Cross Product pada Vektor Satuan

Vektor satuan standar di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Pembuktian:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 1) = \mathbf{k}$$

Maka Hasil perkalian silang:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

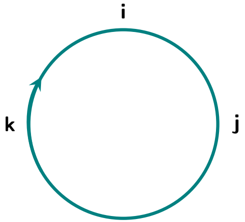
$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

Setiap vektor dapat ditulis sebagai kombinasi linear:

$$(v_1, v_2, v_3) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

Contoh:

$$(2, -3, 4) = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$



Teorema: Sifat-sifat Cross Product

Properti Cross Product

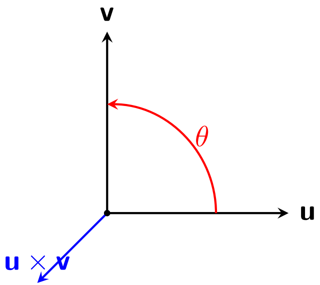
Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ dan $k \in \mathbb{R}$:

a. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
b. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
c. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
d. $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$
e. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Right-Hand Rule

Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ adalah vektor tak nol, maka arah $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ dapat ditentukan dengan **aturan tangan kanan**:

1. Putar $\mathbf{u}$ menuju $\mathbf{v}$ melalui sudut θ.
2. Jika jari-jari tangan kanan mengikuti arah rotasi, maka ibu jari menunjuk arah $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.



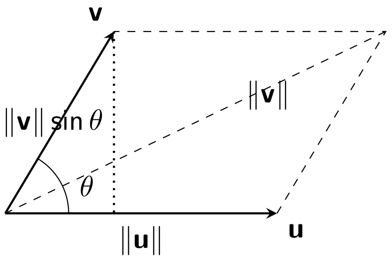
Interpretasi Geometri dari Cross Product

Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, maka norma $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ memiliki interpretasi geometris.
Dari identitas Lagrange:

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$$

Karena $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$, maka

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta$$



Scalar Triple Product

Mulai dari definisi:

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Maka:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 \\ w_1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Example

Contoh: Hitung hasil **triple product skalar** $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ dari vektor berikut:

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

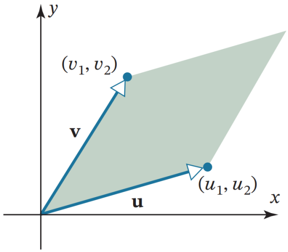
$$= 3 \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-5) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3((4)(2) - (-4)(3)) + 2((1)(2) - (0)(-4)) - 5((1)(3) - (0)(4))$$

$$= 3(8 + 12) + 2(2) - 5(3)$$

$$= 60 + 4 - 15 = 49$$

Interpretasi Geometris Determinan 2x2



$$A = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right|$$

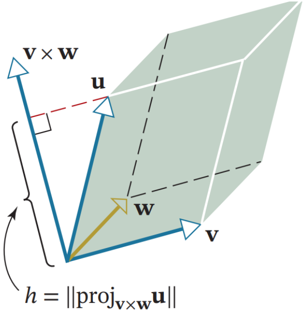
Bukti: Anggap $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)$, maka

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \mathbf{k}$$

Sehingga

$$A = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right|$$

Interpretasi Geometris Determinan 3x3



$$V = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right|$$

Bukti:

$$\text{Luas alas} = \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|, \qquad h = \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|}$$

$$V = (\text{luas alas})(\text{tinggi}) = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right|$$

Daftar Pustaka

Daftar Pustaka I