ALJABAR LINEAR

Pertemuan ke-10 - Ruang Vektor Nyata

Oleh:

Annastya Bagas Dewantara, S.T., M.T.

(email: annastya.bagas@ui.ac.id)

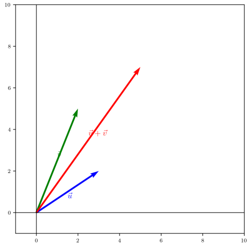
Fakultas Teknik

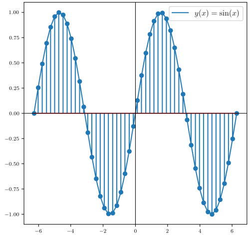
Universitas Indonesia

Daftar Paparan

Ruang Vektor Nyata

Introduksi





Definisi

Meningkatkan konseptual vektor melalui properti aljabar dari vektor $\mathbb{R}^n$ melalui aksioma. Apabila **himpunan objek** V memenuhi **aksioma** maka V dapat di representasikan sebagai ruang vektor.

1. Vektor sering di notasikan sebagai **ordered pairs** ($\mathbb{R}^2$) dan **ordered triples** ($\mathbb{R}^2$).
2. Konsep vektor ini di abstraksikan lebih lanjut pada **n-tuples** ($\mathbb{R}^n$)
3. Representasi ini dapat berada pada domain kompleks ($\mathbb{C}$) maupun domain real ($\mathbb{R}$), materi ini akan berfokus pada domain $\mathbb{R}$.

Kategori Himpunan Objek

1. Ordered Pairs ($\mathbb{R}^2$)

$$(u_1, u_2)+(v_1, v_2) = (u_1+v_1, u_2+v_2), \quad k(u_1, u_2) = (ku_1, ku_2).$$

Example: $u = (-1, 2)$, $v = (3, 4)$, $k = 3$

$$u + v = (2, 6), \quad ku = (-3, 6).$$

(Vector space)

2. Matrices ($M_{2\times 2}(\mathbb{R})$)

Elements: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ with $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Operations are entry-wise.

Example:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}, \ k = 2$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}, \ kA = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

(Vector space, dim $= 4$*)*

3. Polynomials ($\mathbb{P}_2$) Set of all real polynomials of degree ≤ 2.
Example:

$$p(x) = 1 + 2x + x^2, \ q(x) = 3 - x + 4x^2, \ k = 3$$

$$p + q = 4 + x + 5x^2, \quad kp = 3 + 6x + 3x^2.$$

(Vector space, dim $= 3$*)*

4. Infinite Sequences Let V be the set of all infinite real sequences

$$u = (u_1, u_2, u_3, \dots), \quad u_i \in \mathbb{R}.$$

Example:

$$u = (1, 0, 1, 0, \dots), \quad v = (0, 1, 0, 1, \dots), \quad k = 2$$

$$u + v = (1, 1, 1, 1, \dots), \quad ku = (2, 0, 2, 0, \dots).$$

(Infinite-dimensional vector space)

Aksioma Ruang Vektor

Aksioma

1. $u, v \in V \quad \Rightarrow \quad u + v \in V$ **(Closure under addition)**
2. $u + v = v + u$ (Komutatif)
3. $u + (v + w) = (u + v) + w$ (Asosiatif)
4. Ada $0 \in V$ sehingga $u + 0 = u$ (Elemen nol)
5. Untuk setiap u, ada $-u$ sehingga $u + (-u) = 0$ (Inverse)
6. $k \in \mathbb{R}, u \in V \quad \Rightarrow \quad ku \in V$ **(closure under scalar)**
7. $k(u + v) = ku + kv$ (distributif 1)
8. $(k + m)u = ku + mu$ (distributif 2)
9. $k(mu) = (km)u$ (asosiatif skalar)
10. $1u = u$ (identitas skalar)

Misalkan V adalah **arbitrary nonempty set of objects** yang terdefinisi atas dua operasi:

a. **Penjumlahan**: menggabungkan dua objek $u, v \in V$ menjadi $u + v$.

b. **Perkalian skalar**: mengalikan skalar $k \in \mathbb{R}$ dengan $u \in V$ menjadi ku.

Jika 10 aksioma di samping terpenuhi, maka V disebut **ruang vektor**, dan objek-objek di dalamnya disebut **vektor**.

Tahapan Penentuan Ruang Vektor

Langkah-langkah

1. Mengidentifikasi set V sebagai objek yang akan menjadi vektor/
2. Mengidentifikasi operasi penjumlahan dan perkalian skalar pada V.
3. Periksa **Aksioma 1** dan **Aksioma 6**.
4. Pastikan **Aksioma 2,3,4,5,7,8,9,10** juga terpenuhi.

Contoh 1: $V = \mathbb{R}^2$ Follows the Axioms

Model dunia nyata: Setiap pekerja dilambangkan dengan pasangan berurutan

$$(x_1, x_2) = (\text{gaji pokok},\ \text{tunjangan transport}).$$

Jika V adalah **set of ordered pairs** dari **real number**, dan mengikuti operasi penambahan dan perkalian pada $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2), \quad k(x_1, x_2) = (kx_1,\ kx_2).$$

Contoh:

$$u = (3, 1), \quad v = (2, 2), \quad k = 2,\ m = -1.$$

Verifikasi aksioma:

1. *Closure under addition:* $u + v = (5, 3) \in \mathbb{R}^2$.
2. *Komutatif:* $u + v = (5, 3) = v + u$.
3. *Asosiatif:* $(u + v) + w = u + (v + w)$ untuk setiap w (cek entrywise).
4. *Identitas nol:* $0 = (0, 0)$, $u + 0 = u$.
5. *Invers:* $-u = (-3, -1)$, $u + (-u) = (0, 0)$.

Contoh 1: $V = \mathbb{R}^2$ Follows the Axioms

6. *Closure under scalar:* $ku = 2(3,1) = (6,2) \in \mathbb{R}^2$.
7. *Distributif 1:* $k(u+v) = 2(5,3) = (10,6) = ku + kv$.
8. *Distributif 2:* $(k+m)u = (2-1)u = 1u = (3,1)$,
   $ku + mu = (6,2) + (-3,-1) = (3,1)$.
9. *Asosiatif skalar:* $k(mu) = 2((-1)u) = (-2)u = (-6,-2)$,
   $(km)u = (2 \cdot -1)u = (-2)u = (-6,-2)$.
10. *Identitas skalar:* $1 \cdot u = u$.

Kesimpulan: Karena model ini memenuhi seluruh aksioma, maka V adalah Ruang Vektor.

Contoh 1: $V = \mathbb{R}^2$ Violates the Axioms

Model dunia nyata: Baris dalam database: setiap entri dilambangkan sebagai

$$(x_1, x_2) = (\text{ID},\ \text{jumlah\_uang}).$$

Jika V adalah **set of ordered pairs** dari **real number**, dan mengikuti operasi penambahan dan perkalian pada $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2)$$

$$k(x_1, x_2) = (0,\ kx_2) \quad (\textit{menghapus ID} \text{ dan hanya mengalikan jumlah})$$

Contoh:

$$u = (3, 1)\ (\text{ID} = 3,\ \text{jumlah} = 1), \quad v = (2, 2), \quad k = 2,\ \ell = 3.$$

Verifikasi aksioma:

1. *Closure under addition:* $u + v = (3 + 2,\ 1 + 2) = (5, 3) \in \mathbb{R}^2$.
2. *Komutatif:* $u + v = (5, 3) = v + u$.
3. *Asosiatif:* $(u + v) + w = u + (v + w)$ berlaku entrywise (cek umum).
4. *Elemen nol:* $0 = (0, 0)$ dan $u + 0 = u$.
5. *Invers:* $-u = (-3, -1)$ sehingga $u + (-u) = (0, 0)$.

Contoh 1: $V = \mathbb{R}^2$ Violates the Axioms

$$ku = 2(3,1) = (0,2), \qquad \ell u = 3(3,1) = (0,3).$$

$$(k+\ell)u = 5(3,1) = (0,5), \qquad ku + \ell u = (0,2) + (0,3) = (0,5).$$

Pemeriksaan aksioma skalar:

6. *Closure under scalar:* $ku = (0,2) \in \mathbb{R}^2$
7. *Distributif 1:* $k(u+v) = k(5,3) = (0,6)$ dan $ku + kv = (0,2) + (0,6) = (0,8)$.
8. *Distributif 2:* $(k+\ell)u = (0,5)$ dan $ku + \ell u = (0,2) + (0,3) = (0,5)$.
9. *Asosiatif skalar:* $k(\ell u) = 2((0,3)) = (0,6)$ dan $(k\ell)u = (6)u = (0,6)$.
10. *Identitas skalar (gagal):*
    $1 \cdot u = (0,1) \neq (3,1) = u$. Jadi axioma $1 \cdot u = u$ **tidak terpenuhi**.

Kesimpulan: model ini melanggar aksioma (**identitas skalar**). Oleh karena itu, meskipun penjumlahan dan banyak sifat skalar lain tampak benar, struktur ini *bukan* vektor space karena $1 \cdot u \neq u$ untuk umumnya u.

Contoh 2: $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ Follows the Axioms

Model dunia nyata: Matriks dapat mewakili transformasi sederhana atau data gambar kecil

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{dengan } a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}, \qquad kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}.$$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad k = 2,\ m = -1.$$

Verifikasi aksioma:

1. *Closure under addition:* $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
2. *Komutatif:* $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} = B + A$.
3. *Asosiatif:* $(A + B) + C = A + (B + C)$ berlaku entrywise untuk semua A, B, C.
4. *Identitas nol:* $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dan $A + 0 = A$.
5. *Invers aditif:* $-A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ sehingga $A + (-A) = 0$.

Contoh 2: $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ Follows the Axioms

6. *Closure under scalar:* $kA = 2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
7. *Distributif (skalar terhadap penjumlahan vektor):* $k(A+B) = 2\begin{bmatrix}1 & 1\\ 8 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 2\\ 16 & 12\end{bmatrix}$,
   $kA + kB = \begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -2\\ 10 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 2\\ 16 & 12\end{bmatrix}$.
8. *Distributif (penjumlahan skalar terhadap vektor):* $(k+m)A = (2-1)A = 1\cdot A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$,
   $kA + mA = \begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1 & -2\\ -3 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$.
9. *Asosiatif skalar (compatibility):* $k(mA) = 2\big((-1)A\big) = (-2)A = \begin{bmatrix}-2 & -4\\ -6 & -8\end{bmatrix}$,
   $(km)A = (2\cdot -1)A = (-2)A = \begin{bmatrix}-2 & -4\\ -6 & -8\end{bmatrix}$.
10. *Identitas skalar:* $1\cdot A = A$.

Kesimpulan: Semua aksioma terpenuhi, sehingga $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ adalah ruang vektor.

Contoh 2: $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ Violates the Axioms

Model dunia nyata: Matriks mewakili catatan dua-baris; operasi skalar merepresentasikan transformasi yang secara tidak sengaja *menghapus* baris pertama (mis. sensor reset baris atas).

Definisi operasi: untuk $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}, \qquad kA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}.$$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad k = 1.$$

Pemeriksaan singkat:

Penjumlahan: $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$ (masih entrywise) — penutupan OK.

Perkalian skalar: $1 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Identitas skalar gagal: seharusnya $1 \cdot A = A$, tetapi $1 \cdot A \neq A$ karena baris pertama menjadi nol.

Kesimpulan: Karena aksioma ke-10 dari $(1 \cdot v = v)$ dilanggar $(1 \cdot A \neq A)$, sehingga $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ bukan ruang vektor.

Contoh 3: $V = \mathbb{P}_2$ Follows the Axioms

Model dunia nyata (intuisi): Polinom sederhana dapat mewakili model biaya kuadrat:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad (a_i \in \mathbb{R}).$$

Operasi (standar):

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2,$$

$$k \cdot (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (ka_0) + (ka_1)x + (ka_2)x^2.$$

Contoh konkret:

$$p(x) = 1 + 2x + x^2, \quad q(x) = 3 - x + 4x^2, \quad k = 3,\ m = -1.$$

Verifikasi aksioma:

1. *Closure under addition:* $p + q = 4 + x + 5x^2 \in \mathbb{P}_2$.
2. *Komutatif:* $p + q = q + p$ (entrywise koefisien sama).
3. *Asosiatif:* $(p + q) + r = p + (q + r)$ (entrywise untuk semua koefisien).
4. *Elemen nol:* $0(x) = 0$ dan $p + 0 = p$.
5. *Invers* $-p = -1 - 2x - x^2$ sehingga $p + (-p) = 0$.

Contoh 3: $V = \mathbb{P}_2$ Follows the Axioms

Verifikasi aksioma:

6. *Closure under scalar:* $kp = 3(1 + 2x + x^2) = 3 + 6x + 3x^2 \in \mathbb{P}_2$.
7. *Distributif 1:* $k(p + q) = 3(4 + x + 5x^2) = 12 + 3x + 15x^2$,
   $kp + kq = (3 + 6x + 3x^2) + (9 - 3x + 12x^2) = 12 + 3x + 15x^2$.
8. *Distributif 2:* $(k + m)p = (3 - 1)p = 2p$ dan $kp + mp = 3p + (-1)p = 2p$.
9. *Asosiatif skalar:* $k(mp) = (3 \cdot -1)p = -3p$ dan $k(mp) = 3((-1)p) = -3p$.
10. *Identitas skalar:* $1 \cdot p = p$.

Kesimpulan: $V = \mathbb{P}_2$ memenuhi semua aksioma ruang vektor.

Contoh 3: $V = \mathbb{P}_2$ Violates the Axioms

Definisi operasi:

$$p(x) + q(x) = \text{penjumlahan koefisien biasa (entrywise)},$$

$$k(a_0 + a_1x + a_2x^2) \;=\; 0 \;+\; (ka_1)x \;+\; (ka_2)x^2.$$

(Perhatikan: konstanta a_0 dihilangkan setiap kali dikalikan skalar.)

Contoh konkret:

$$p(x) = 1 + 2x + x^2, \qquad k = 1, \qquad m = 1.$$

Perhitungan singkat:

$$1 \cdot p(x) = 0 + 1 \cdot 2x + 1 \cdot x^2 = 2x + x^2 \neq p(x).$$

Pemeriksaan aksioma penting:

- **Aksioma 1-5** — (Terpenuhi).
- **Clsure under scalar:** untuk setiap skalar k, $k \odot p \in \mathbb{P}_2$ — (Terpenuhi).
- **Distributif 1:** $k \cdot (p + q) = k \cdot p + k \cdot q$ — (Terpenuhi).
- **Distributif 2:** $(k + m)p = kp + mp = 2p$ — (Terpenuhi).
- **Asosiatif skalar** $(k\ell) \cdot p = k \cdot (\ell \cdot p)$ — (Terpenuhi).
- **Identitas skalar:** $1 \cdot p \neq p$ kecuali jika konstanta $a_0 = 0$. Jadi aksioma $1 \cdot v = v$ — (Tidak terpenuhi).

Kesimpulan: $V = \mathbb{P}_2$ bukan ruang vektor.

Pengamatan Penutup

Teorema tentang *vector space* berlaku untuk **semua** jenis vektor:

vektor geometri,
vektor di $\mathbb{R}^n$,
barisan tak hingga,
matriks,
fungsi bernilai real,
maupun bentuk vektor lain yang baru didefinisikan.

Artinya, setiap kali kita membuktikan sifat umum vektor, kita sekaligus menemukan sifat yang berlaku pada semua contoh tersebut.

Contoh: pada ruang vektor *bilangan real positif* dengan operasi tidak biasa, hasil $0u = 0$ berarti:

$$u^0 = 1,$$

yang sesuai dengan aturan eksponen yang sudah dikenal.

Daftar Pustaka

Daftar Pustaka I