ALJABAR LINEAR

Pertemuan ke-3 - Matriks Elementer dan Invertible, Metode menentukan A^{-1}, dan Pendalaman Sistem Linear

Oleh:

Annastya Bagas Dewantara, S.T., M.T.

(email: annastya.bagas@ui.ac.id)

Fakultas Teknik

Universitas Indonesia

Daftar Paparan

Matriks Elementer dan Metode menentukan A^{-1}

Row Equivalent

Suatu metriks A dan B dikatakan **Row Equivalent** jika salah satu matriks dapat diperoleh dari matriks lainnya dengan melakukan serangkaian **Elementary Row Operation**.

Elementary Row Operation
A → B

1. Baris dikali dengan nonzero constant c
2. Tukar dua baris
3. Menambahkan konstanta dikalikan satu baris dengan baris lainnya

Inverse Row Operation
B → A

1. Baris yang sama dikali dengan nonzero constant $\frac{1}{c}$
2. Tukar dua baris yang sama
3. Jika matriks B diperoleh dari A dengan operasi $R_j \to R_j + cR_i$, maka operasi invers adalah $R_j \to R_j - cR_i$

Contoh:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}}_{\textbf{Step 1: } R_1 \to 2R_1} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}}_{\textbf{Step 2: } R_2 \to R_2 - 3R_1} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & -7 & -12 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}}_{\textbf{Step 3: } R_2 \leftrightarrow R_3} \to B = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \\ -2 & -7 & -12 \end{bmatrix}}$$

$$B = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \\ -2 & -7 & -12 \end{bmatrix}}_{\textbf{Step 1: } R_2 \leftrightarrow R_3} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & -7 & -12 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}}_{\textbf{Step 2: } R_2 \to R_2 + 3R_1} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}}_{\textbf{Step 1: } R_1 \to \frac{1}{2} R_1} \to A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Definisi

Matriks E adalah **Elementary Matrix** jika dapat di ubah ke **Identity Matrix** hanya dengan satu kali **Elementary Row Operation**.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}}_{R_2 \to \frac{R_2}{-3}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{R_2 \leftrightarrow R_4} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_1 \to R_1 - 3R_3}$$

Jika matriks elementer **E** dihasilkan dari melakukan operasi baris tertentu pada I_m dan jika **A** adalah matriks $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$, maka hasil kali **EA** adalah matriks yang dihasilkan ketika operasi baris yang sama ini dilakukan pada **A**.

$$E = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{3\times 3 \\ R_3 \to R_3 + 3R_1 \\ \text{dari matriks } I}}, A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}}_{3\times 4} \longrightarrow EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} \text{Setara dengan} \\ R_3 \to R_3 + 3R_1 \\ \text{matriks A} \end{matrix}$$

Inversibilitas dari Matriks Elementer

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari Identitas matriks tersebut di ubah ke **Elementary Matrix**:

$$E = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_1 \to R_1 + 3R_2}$$

Kemudian menggunakan inverse operation dari identitas matriks, di dapatkan **Inverse Elementary Matrix**:

$$E_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_1 \to R_1 - 3R_2}$$

Di dapatkan bahwa **Inverse Row Operation** saling meniadakan efek satu sama lain:

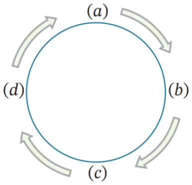
$$EE_0 = I$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I}$$

Equivalence Statement

Jika A adalah matriks $(n \times n)$, maka statement berikut dapat benar semua atau salah semua

a. A adalah **Invertible** atau **Bukan Singular**.
b. $Ax = 0$ hanya memiliki **Trivial Solution**
c. **Reduced Row Echelon Form** dari matriks A adalah I_n
d. Matriks A dapat di representasikan sebagai produk dari **Matriks Elementer**



$(a) \rightarrow (b) \rightarrow (c) \rightarrow (d) \rightarrow (a)$
Mengimplikasikan:
$(d) \rightarrow (c) \rightarrow (b) \rightarrow (a)$
Sehingga:
$(a) \leftrightarrow (b) \leftrightarrow (c) \leftrightarrow (d)$

Bukti dari Equivalence Statement-1

(a) → (b)
Jika A adalah **Invertible**, dan x_0 adalah solusi dari $Ax = 0$, maka:

$$\begin{aligned} Ax_0 &= 0 \\ A^{-1}Ax_0 &= A^{-1}0 \\ I_nx_0 &= A^{-1}0 \end{aligned}$$

Karena $x_0 = 0$, dan $A^{-1}0 = 0$ maka :

$$\begin{aligned} I_nx_0 &= A^{-1}0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

(b) → (c)
Jika $Ax = 0$ adalah:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \underbrace{\rightarrow}_{\text{di ubah ke augmented matrix}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\rightarrow}_{\text{di ubah ke RREF}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow I_n$$

Bukti dari Equivalence Statement-2

(c) $\rightarrow$ (d)

Melalui **Eliminatary Row Operation (ERO)**, matriks A dapat di reduksi menjadi **Reduced Row Echelon Form (RREF)** yang mana berbentuk **Matriks Identitas**. Tiap **ERO** dapat di **encode** menjadi **Elementary Matriks** untuk menghasilkan **RREF**.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\rightarrow}_{R_1 \leftarrow \frac{1}{2} R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\rightarrow}_{R_2 \leftarrow R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\rightarrow}_{R_2 \leftarrow \frac{2}{7} R_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\rightarrow}_{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\rightarrow}_{R_1 \leftarrow R_1 - \frac{1}{2} R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\rightarrow}_{R_3 \leftarrow 7R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\rightarrow}_{R_2 \leftarrow R_2 - \frac{3}{7} R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\rightarrow}_{R_1 \leftarrow R_1 + \frac{5}{7} R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriks Identitas } I_{n=3} \text{ atau RREF}$$

Bukti dari Equivalence Statement-2

$R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1$

$$E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_2 \leftarrow R_2 + R_1$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_2 \leftarrow \frac{2}{7}R_2$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_1 \leftarrow R_1 - \frac{1}{2}R_2$

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_3 \leftarrow 7R_3$

$$E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$R_2 \leftarrow R_2 - \frac{3}{7}R_3$

$$E_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_1 \leftarrow R_1 + \frac{5}{7}R_3$

$$E_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga A dapat direpresentasikan sebagai multiplikasi dari **Elementary Matrix**:

$$\begin{aligned} (E_8\, E_7\, \cdots\, E_1)\, A &= I_3 \\ (E_8\, E_7\, \cdots\, E_1)^{-1}(E_8\, E_7\, \cdots\, E_1)\, A &= (E_8\, E_7\, \cdots\, E_1)^{-1} I_3 \\ I_3\, A &= (E_8\, E_7\, \cdots\, E_1)^{-1} I_3 \end{aligned}$$

Menggunakan aturan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, maka di dapatkan:

$$\boxed{A = E_1^{-1}\, E_2^{-1}\, E_3^{-1}\, E_4^{-1}\, E_5^{-1}\, E_6^{-1}\, E_7^{-1}\, E_8^{-1} I_3}$$

Atau, di notasikan sebagai:

$$\boxed{A = E_1^{-1}\, E_2^{-1}\, \cdots\, E_k^{-1} I_n}$$

Algoritma Inversion

Dalam menentukan, inverse dari matriks A, temukan urutan dari **Elementary Row Operation (ERO)** yang mereduksi **matriks A ke matriks identitas**, kemudian lakukan urutan operasi yang sama pada **matriks I_n untuk mendapatkan A^{-1}**:

$$\begin{aligned}
A &= E_1^{-1}\, E_2^{-1} \cdots E_8^{-1} \\
A^{-1}A &= A^{-1}\,(E_1^{-1}\, E_2^{-1} \cdots E_8^{-1}) \\
I_n &= A^{-1}\,(E_1^{-1}\, E_2^{-1} \cdots E_8^{-1}) \\
I_n(E_1^{-1}\, E_2^{-1} \cdots E_8^{-1})^{-1} &= A^{-1}\,(E_1^{-1}\, E_2^{-1} \cdots E_8^{-1})(E_1^{-1}\, E_2^{-1} \cdots E_8^{-1})^{-1} \\
I_n(E_1^{-1}\, E_2^{-1} \cdots E_8^{-1})^{-1} &= A^{-1}\, I_n \\
I_n(E_8\, E_7 \cdots E_1) &= A^{-1}
\end{aligned}$$

Sehingga:

$$\boxed{A^{-1} = (E_k \cdots E_2\, E_1) I_n}$$

Contoh dengan Produk Multiplikasi dengan Matriks Elementer

Menggunakan persamaan $\boxed{A^{-1} = (E_k \cdots E_2 E_1)I_n}$, mari kita lihat matriks A di bawah untuk menentukan A^{-1} (matriks A adalah matriks **invertible/bukan singular**):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad [A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_3 \leftarrow R_3 - R_1$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_3 \leftarrow -1 \cdot R_3$

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$R_1 \leftarrow R_1 - 9R_3$

$$E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_2 \leftarrow R_2 + 3R_3$

$$E_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga nilai A^{-1}a:

$A^{-1} = E_7 E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Contoh dengan Eliminatary Row Operation-1

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow -1 \cdot R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right].$$

Contoh dengan Eliminatary Row Operation-2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 + 3R_3]{R_1 \leftarrow R_1 - 9R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right].$$

Sehingga di dapatkan matriks A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pendalaman Sistem Linear

Menyelesaikan Persamaan Linear dengan Matriks Inversion

Jika matriks A adalah matriks **invertible/bukan singular** memiliki ukuran $n \times n$, maka untuk setiap matriks b dengan ukuran $n \times 1$ dengan sistem persamaan $Ax = b$ memiliki satu solusi pada $x = A^{-1}b$.

$$\begin{aligned} Ax_0 &= b \\ A^{-1}Ax_0 &= A^{-1}b \\ I_n x_0 &= A^{-1}b \\ x_0 &= A^{-1}b \end{aligned}$$

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Karena nilai A^{-1}, telah diketahui:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Sehingga nilai x di dapatkan:

$$x = A^{-1}b$$

$$= \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sistem Linear menggunakan Coefficient Matriks yang sama

Jika sistem linear berbeda dengan **Matriks Koefisien** (A) yang sama, dimana A adalah matriks **Invertible/bukan singular**, dengan nilai b yang berbeda-beda:

$$Ax = b_1, \quad Ax = b_2, \quad Ax = b_1, \quad \cdots \quad Ax = b_k$$

Dengan tiap solusi:

$$x_1 = A^{-1}b_1, \quad x_2 = A^{-1}b_2, \quad \cdots \quad x_k = A^{-1}b_k$$

Maka tiap solusinya dapat di selesaikan dengan **Partitioned Matrix**:

$$[A \mid b_1 \mid b_2 \mid \cdots \mid b_3]$$

Contoh:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + 8x_3 = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + 8x_3 = -6 \end{cases}$$

Karena A^{-1} dan x adalah sama, dan nilai b_1 dan b_2 adalah:

$$\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$x = A^{-1}B = \underbrace{(E_7 \ \cdots E_2 \ E_1)}_{A^{-1}} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to \mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dan } \mathbf{b_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Properti dari Matriks Invertible

Misalkan **A** adalah **Square Matrix** atau matriks dengan ukuran $n \times n$.
(a) Jika **B** adalah matriks persegi yang memenuhi $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, maka $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.
(b) Jika **B** adalah matriks persegi yang memenuhi $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, maka $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

$$\begin{aligned} BA &= I_n \\ BAA^{-1} &= I_n A^{-1} \\ BI_n &= I_n A^{-1} \\ B &= A^{-1} \end{aligned}$$

Equivalence Theorem

Jika A adalah matriks $(n \times n)$, maka statement berikut dapat benar semua atau salah semua

a. A adalah **Invertible** atau **Bukan Singular**.
b. $Ax = 0$ hanya memiliki **Trivial Solution**
c. **Reduced Row Echelon Form** dari matriks A adalah I_n
d. Matriks A dapat di representasikan sebagai produk dari **Matriks Elementer**
e. $Ax = b$ **Consistent** untuk setiap matriks B dengan ukuran $n \times 1$
f. $Ax = b$ memiliki tepat **satu solusi** untuk setiap matriks B dengan ukuran $n \times 1$

Equivalence Theorem

Jika A adalah matriks $(n \times n)$, maka statement berikut dapat benar semua atau salah semua

a. A adalah **Invertible** atau **Bukan Singular**.
b. $Ax = 0$ hanya memiliki **Trivial Solution**
c. **Reduced Row Echelon Form** dari matriks A adalah I_n
d. Matriks A dapat di representasikan sebagai produk dari **Matriks Elementer**
e. $Ax = b$ **Consistent** untuk setiap matriks B dengan ukuran $n \times 1$
f. $Ax = b$ memiliki tepat **satu solusi** untuk setiap matriks B dengan ukuran $n \times 1$

Tugas

1.2 2b, 2d, 2f, 16, 20

1.3 6d, 6f

1.4 16, 18, 22

1.5 1b, 1d, 2b, 2d, 12b

1.6 4, 10, 12, 14, 18, 20

1.7 8, 10, 28, 36

Deadline Pengumpulan: 16/09/2025

Daftar Pustaka

Daftar Pustaka I