ALJABAR LINEAR

Pertemuan ke-17 dan 18 - Inner Products dan Ortogonalitas pada Inner Product Spaces

Oleh:

Annastya Bagas Dewantara, S.T., M.T.

(email: annastya.bagas@ui.ac.id)

Fakultas Teknik

Universitas Indonesia

Daftar Paparan

Inner Product Spaces

Definisi

Pada vektor $\mathbb{R}^n$, operasi **dot product** digunakan untuk menghitung **panjang vektor, sudut, jarak dan Ortogonalitas:**

$$\underbrace{\|u\|}_{\textit{Panjang}}, \quad \underbrace{\|u - v\|}_{\textit{Jarak}}, \quad \underbrace{\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|}}_{\textit{Sudut}}, \quad \underbrace{\|\text{proj}_a u\|}_{\textit{Ortogonalitas}},$$

Inner product adalah generalisasi dari dot product pada ruang vektor umum, memungkinkan kita untuk mendefinisikan konsep-konsep geometris tersebut **di luar** $\mathbb{R}^n$.

$$\langle u, v\rangle = u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Definisi-2

Definisi

Inner product pada **Real Vector Space** (V) adalah fungsi yang mengasosiasikan bilangan real $\langle u, v \rangle$ pada setiap pasangan vektor $u, v \in V$ sehingga memenuhi:

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (Symmetry)
2. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ (Additivity)
3. $\langle ku, v \rangle = k\langle u, v \rangle$ (Homgeinity)
4. $\langle v, v \rangle \geq 0$ dan $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (Positivity)

Aksioma inner product didasarkan pada properti *dot product*. Oleh karena itu, keempat aksioma tersebut secara otomatis terpenuhi pada $\mathbb{R}^n$, dengan definisi:

$$\langle u, v \rangle = u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Inner product ini dikenal sebagai Euclidean inner product pada $\mathbb{R}^n$.

Inner Product pada Real Vector Space

Matrix Inner Product

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\langle A, B\rangle = 1(5) + 2(6) + 3(7) + 4(8) = 70$$

Weighted Inner Product

$$\langle u, v\rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2 + 5u_3v_3$$

$$u = (1, 2, 3), \quad v = (4, 5, 6)$$

$$\langle u, v\rangle = 2(1)(4) + 3(2)(5) + 5(3)(6) = 8 + 30 + 90 = 128$$

Polynomial Inner Product

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x), dx$$

Let p(x) = 1 + x, q(x) = x :

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} (1 + x)x = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Continous Inner Product

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{\pi} f(x)g(x)dx$$

$$f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$$

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = 0$$

Norm dan Jarak pada Inner Product Space

Sifat Norma dan Jarak

Jika $u, v \in V$ ruang produk dalam nyata dan k skalar, maka:

1. $\|v\| \geq 0$, dengan $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $\|kv\| = |k|\|v\|$
3. $d(u, v) = d(v, u)$
4. $d(u, v) \geq 0$, dengan $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$

Maka **norm** $\|v\|$ dari vektor $v \in V$ dan jarak antara vektor $u, v \in V$ didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned}\|v\| &= \sqrt{\langle v, v\rangle} \\ &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} \Longrightarrow \boxed{\text{Jika dalam } \mathbb{R}^n}\end{aligned}$$

Serta **jarak** $d(u, v)$ dari vektor u dan v adalah:

$$\begin{aligned}d(u, v) &= \|u - v\| \\ &= \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle} \\ &= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2} \Longrightarrow \boxed{\text{Jika dalam } \mathbb{R}^n}\end{aligned}$$

Weighted Inner Product

- Euclidean Inner Product dapat dimodifikasi dengan **pembobotan** pada setiap komponennya.
- Jika $w_1, w_2, \ldots, w_n$ adalah bilangan real positif (bobot), serta $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah vektor di $\mathbb{R}^n$.
- Inner product bertimbang didefinisikan sebagai:

$$\langle u, v \rangle = w_1 u_1 v_1 + w_2 u_2 v_2 + \cdots + w_n u_n v_n$$

Euclidean Inner Product biasa merupakan kasus khusus di mana semua $w_i = 1$.

Contoh 1: Weighted Inner Product - Follow Axioms

Diberikan dua vektor $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$ di $\mathbb{R}^2$. Buktikan aksioma inner product. Definisikan inner product bertimbang sebagai:

$$\langle u, v\rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$$

Aksioma 1 (Symmetry):

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= 3u_1v_1 + 2u_2v_2\\ &= 3v_1u_1 + 2v_2u_2\\ &= \langle v, u\rangle\end{aligned}$$

Aksioma 2 (Additivity):
Untuk $w = (w_1, w_2)$,

$$\begin{aligned}\langle u + v, w\rangle &= 3(u_1 + v_1)w_1 + 2(u_2 + v_2)w_2\\ &= (3u_1w_1 + 2u_2w_2) + (3v_1w_1 + 2v_2w_2)\\ &= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle\end{aligned}$$

Aksioma 3 (Homogeinity):

$$\begin{aligned}\langle ku, v\rangle &= 3(ku_1)v_1 + 2(ku_2)v_2\\ &= k(3u_1v_1 + 2u_2v_2)\\ &= k\langle u, v\rangle\end{aligned}$$

Aksioma 4 (Positivity):

$$\begin{aligned}\langle v, v\rangle &= 3(v_1v_1) + 2(v_2v_2)\\ &= 3v_1^2 + 2v_2^2 \geq 0\end{aligned}$$

Kesimpulan: Inner product $\langle u, v\rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ memenuhi seluruh aksioma inner product pada $\mathbb{R}^2$.

Contoh 2: Weighted Inner Product - Violate Axioms

Diberikan dua vektor $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$ di $\mathbb{R}^2$. Buktikan aksioma inner product. Definisikan operasi berikut:

$$\langle u, v\rangle = u_1 v_1 - u_2 v_2$$

Aksioma 1 (Symmetry):

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle &= u_1 v_1 - u_2 v_2 \\ &= v_1 u_1 - v_2 u_2 \\ &= \langle v, u\rangle \end{aligned}$$

Aksioma 2 (Additivity):

$$\begin{aligned} \langle u + v, w\rangle &= (u_1 + v_1)w_1 - (u_2 + v_2)w_2 \\ &= (u_1 w_1 - u_2 w_2) + (v_1 w_1 - v_2 w_2) \\ &= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \end{aligned}$$

Aksioma 3 (Homogeinity):

$$\begin{aligned} \langle ku, v\rangle &= (ku_1)v_1 - (ku_2)v_2 \\ &= k(u_1 v_1 - u_2 v_2) \\ &= k\langle u, v\rangle \end{aligned}$$

Aksioma 4 (Positivity):

$$\begin{aligned} \langle v, v\rangle &= v_1^2 - v_2^2 \\ &= 1^2 - 2^2 = -3 < 0 \implies \boxed{\textit{Jika } v = (1, 2)} \end{aligned}$$

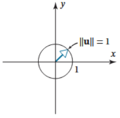
Kesimpulan: Operasi $\langle u, v\rangle = u_1 v_1 - u_2 v_2$ bukan inner product karena tidak memenuhi aksioma keempat (positivity).

Unit Circles dan Spheres pada Inner Product Spaces

Definisi

Jika V adalah ruang produk dalam, himpunan titik-titik yang memenuhi disebut **Unit Sphere** dalam V (atau **Unit Circle** jika $V = \mathbb{R}^2$).

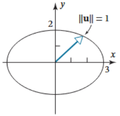
$$\|u\| = 1$$



(*a*) The unit circle using the standard Euclidean inner product.

Euclidean Inner Product:
Produk dalam: $\langle u, v\rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$ Jika $u = (x, y)$, maka

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1$$



(*b*) The unit circle using a weighted Euclidean inner product.

Weighted Euclidean Inner Product:
Produk dalam: $\langle u, v\rangle = \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2$ Jika $u = (x, y)$, maka

$$\|u\| = \sqrt{\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Matrix Inner Products pada $\mathbb{R}^n$

Definisi

Matriks inner product adalah generalisasi dari inner product Euclidean dan Weighted Inner Product pada $\mathbb{R}^n$. Jika u, v adalah vektor kolom di $\mathbb{R}^n$ dan A adalah matriks $n \times n$ yang invertibel. Jika $u \cdot v$ adalah Euclidean Inner Product, maka:

$$\langle u, v\rangle = (Au) \cdot (Av)$$

Dari bentuk kolom, diketahui bahwa $u \cdot v = v^T u$, sehingga:

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= (Av)^T (Au) \\ &= v^T A^T A u\end{aligned}$$

(a) Euclidean Inner Product
Untuk $A = I$, maka:

$$\langle u, v\rangle = (Iu) \cdot (Iv) = u \cdot v$$

sehingga inner product Euclidean standar dihasilkan oleh matriks identitas.

(b) Weighted Inner Product
Untuk bobot positif $w_1, w_2, \ldots, w_n$, inner product:

$$\langle u, v\rangle = w_1 u_1 v_1 + w_2 u_2 v_2 + \cdots + w_n u_n v_n$$

dihasilkan oleh matriks diagonal:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{w_n} \end{bmatrix}$$

Contoh 1: Matrix Inner Products pada $\mathbb{R}^n$

Diberikan dua vektor $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$ di $\mathbb{R}^2$. Ubah ke dalam matrix inner products. Definisikan inner product bertimbang sebagai:

$$\langle u, v \rangle = 3u_1 v_1 + 2u_2 v_2$$

merupakan inner product pada $\mathbb{R}^2$ yang dihasilkan oleh matriks:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Karena:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

sehingga inner product tersebut memenuhi definisi umum $\langle u, v \rangle = v^T A^T A u$.

Inner Product pada $\mathbb{M}_{n \times n}$

Jika $u = U$ dan $v = V$ adalah matriks dalam ruang vektor M_{nn}, maka:

$$\langle u, v \rangle = \mathrm{tr}(U^T V)$$

mendefinisikan **inner product standar** pada ruang matriks tersebut.
Pada matriks $M_{2 \times 2}$:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$$

diperoleh:

$$\langle u, v \rangle = \mathrm{tr}(U^T V) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4$$

Dari definisi inner product tersebut, norma matriks U diberikan oleh:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{\mathrm{tr}(U^T U)} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}$$

Inner Product pada $\mathbb{M}_{n\times n}$

Aksioma 1 — Symmetry

$$\begin{aligned}\langle A, B\rangle &= \mathrm{tr}(A^T B)\\ &= \mathrm{tr}((A^T B)^T)\\ &= \mathrm{tr}(B^T A)\\ \langle B, A\rangle &= \mathrm{tr}(B^T A) \implies \boxed{\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle}\end{aligned}$$

Aksioma 2 — Additivity

$$\begin{aligned}\langle A + C, B\rangle &= \mathrm{tr}\left((A + C)^T B\right)\\ &= \mathrm{tr}(A^T B) + \mathrm{tr}(C^T B)\\ &= \langle A, B\rangle + \langle C, B\rangle.\end{aligned}$$

Kesimpulan: $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$ adalah inner product pada $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Aksioma 3 — Homogeinity

$$\begin{aligned}\langle A, B\rangle &= \mathrm{tr}\left((kA)^T B\right)\\ &= \mathrm{tr}(kA^T B)\\ &= k\,\mathrm{tr}(A^T B)\\ &= k\langle A, B\rangle.\end{aligned}$$

Aksioma 4 — Positivity

$$\langle A, A\rangle = \mathrm{tr}(A^T A).$$

Tulis $A = (a_{ij})$. Maka

$$\mathrm{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0.$$

Jika $\mathrm{tr}(A^T A) = 0$ maka semua $a_{ij} = 0$, sehingga $A = 0$. Sebaliknya jika $A = 0$ jelas $\mathrm{tr}(A^T A) = 0$. Jadi $\langle A, A\rangle = 0 \iff A = 0$.

Contoh 1: Inner Product pada $\mathbb{M}_{2\times 2}$

Misalkan:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka:

$$\langle u, v \rangle = \mathrm{tr}(U^T V) = 1(-1) + 2(0) + 3(3) + 4(2) = 16$$

$$\|u\| = \sqrt{\mathrm{tr}(U^T U)} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30}$$

$$\|v\| = \sqrt{\mathrm{tr}(V^T V)} = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

Inner Product pada $\mathbb{P}_n$

Misalkan

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n \in \mathbb{P}_n.$$

Definisikan **inner product standar** sebagai:

$$\langle p, q \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

Norma dari p terhadap inner product ini adalah:

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Inner Product pada $\mathbb{P}_n$

Misalkan

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n, \quad r(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n \in \mathbb{P}_n,$$

dan $c \in \mathbb{R}$. Definisikan inner product standar:

$$\langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_nb_n.$$

Aksioma 1 — Symmetry:

$$\langle p, q \rangle = a_0b_0 + \cdots + a_nb_n = b_0a_0 + \cdots + b_na_n = \langle q, p \rangle.$$

Aksioma 2 — Additivity:
Untuk $p, q, r \in \mathbb{P}_n$,

$$\begin{aligned} \langle p + q, r \rangle &= (a_0 + b_0)c_0 + (a_1 + b_1)c_1 + \cdots + (a_n + b_n)c_n \\ &= a_0c_0 + \cdots + a_nc_n + b_0c_0 + \cdots + b_nc_n \\ &= \langle p, r \rangle + \langle q, r \rangle. \end{aligned}$$

Aksioma 3 — Homogeneity:
Untuk $c \in \mathbb{R}$,

$$\langle cp, q \rangle = (ca_0)b_0 + \cdots + (ca_n)b_n = c(a_0b_0 + \cdots + a_nb_n) = c\langle p,$$

Aksioma 4 — Positivity:

$$\langle p, p \rangle = a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0,$$

dengan kesetaraan hanya jika $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$, artinya $p \equiv 0$.

Kesimpulan: $\langle p, q \rangle = a_0b_0 + \cdots + a_nb_n$ memenuhi keempat aksioma inner product.

Contoh 1: Inner Product pada $\mathbb{P}_n$

Titik sampel:

$$x_0 = -2, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2$$

Polinomial:

$$p(x) = x^2, \quad q(x) = 1 + x$$

$$\langle p, q \rangle = p(-2)q(-2) + p(0)q(0) + p(2)q(2) = (4)(-1) + (0)(1) + (4)(3) = 8$$

$$\|p\| = \sqrt{p(-2)^2 + p(0)^2 + p(2)^2} = \sqrt{4^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Inner Product pada Continous Space

Misalkan

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n \in \mathbb{P}_n.$$

Definisikan **inner product kontinu** sebagai:

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x)\, dx.$$

Norma dari p terhadap inner product ini adalah:

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} p(x)^2\, dx}.$$

Inner Product pada Continous Space

Misalkan

$$p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{P}_n, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Definisikan

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx.$$

Aksioma 1 — Symmetry:

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx = \int_{-1}^{1} q(x)p(x)\,dx = \langle q, p \rangle.$$

Aksioma 2 — Additivity:

$$\begin{aligned}\langle p+q, r \rangle &= \int_{-1}^{1} (p(x)+q(x))r(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} p(x)r(x)\,dx + \int_{-1}^{1} q(x)r(x)\,dx \\ &= \langle p, r \rangle + \langle q, r \rangle.\end{aligned}$$

Aksioma 3 — Homogeneity:

$$\langle cp, q \rangle = \int_{-1}^{1} (cp(x))q(x)\,dx = c\int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx = c\langle p, q \rangle.$$

Aksioma 4 — Positivity:

$$\langle p, p \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)^2\,dx \geq 0,$$

dengan kesetaraan hanya jika $p(x) = 0$ untuk semua $x \in [-1, 1]$, artinya $p \equiv 0$.

Kesimpulan: Relasi

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

memenuhi keempat aksioma inner product. Normanya:

$$\|p\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} p(x)^2\,dx}.$$

Contoh 1: Inner Product pada Continous Space

Polinomial:

$$p(x) = x^2, \quad q(x) = 1 + x$$

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} x^2(1+x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2\,dx + \int_{-1}^{1} x^3\,dx = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$$

$$\|p\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^4\,dx} = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Sudut dan Ortogonalitas Inner Product Spaces

Pertidaksamaan Cauchy–Schwarz

Pada rumus sudut antara dua vektor u dan v di $\mathbb{R}^n$:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}\right)$$

Rumus ini valid karena memenuhi ketidaksamaan Cauchy–Schwarz:

$$-1 \leq \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} \leq 1$$

Pertidaksamaan ini dapat digeneralisasi ke **Inner Product Space**

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$$

Contoh 1: Sudut pada $\mathbb{M}_{2\times 2}$

Diketahui ruang M_{22} dengan **inner product standar**. Diberikan dua matriks:

$$u = U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad v = V = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \operatorname{trace}(A^T B) \\ &= (1)(-1) + (2)(0) + (3)(3) + (4)(2) \\ &= 16 \\ \|U\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30} \\ \|V\| &= \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\langle U, V \rangle}{\|U\|\|V\|} \\ &= \frac{16}{\sqrt{30}\sqrt{14}} \\ &\approx 0.78 \implies \boxed{\theta \approx 38.7^\circ} \end{aligned}$$

Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz

Triangle Inequality

Jika $u, v, w \in V$ dan k adalah skalar real, maka:

$$\text{(a)} \quad \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \qquad \text{(b)} \quad d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$$

Bukti (a):

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v \rangle \\
&= \langle u,u \rangle + \langle u,v \rangle + \langle v,u \rangle + \langle v,v \rangle \\
&\leq \|u\|^2 + 2|\langle u,v \rangle| + \|v\|^2 \\
&\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \\
&= \|u\|^2 + 2\langle u,v \rangle + \|v\|^2 \\
\|u+v\|^2 &= (\|u\| + \|v\|)^2 \\
\|u+v\| &= \|u\| + \|v\|
\end{aligned}$$

Bukti (b):

$$\begin{aligned}
d(u,v) &= \|u-v\| \\
&= \|u-w+w-v\| \\
&\leq \|u-w\| + \|w-v\| \\
&\leq d(u,w) + d(w,v)
\end{aligned}$$

Ortogonalitas dalam Inner Product Space

Ortogonalitas

Dua vektor u dan v dalam ruang inner product V dikatakan **ortogonal** jika:

$$\langle u, v \rangle = 0$$

Contoh pada Euclidean Inner Product dan Weighted Inner Product:

Diberikan dua vektor pada $\mathbb{R}^2$:

$$u = (1, 1), \quad v = (1, -1)$$

Dengan **inner product Euclidean standar**, diperoleh:

$$u \cdot v = (1)(1) + (1)(-1) = 0$$

Maka u dan v **ortogonal** dalam $\mathbb{R}^2$.

Jika Weighted Inner Product:

$$\langle u, v \rangle = 3u_1 v_1 + 2u_2 v_2$$

maka diperoleh:

$$\langle u, v \rangle = 3(1)(1) + 2(1)(-1) = 1 \neq 0$$

Contoh 2 — Inner Product Ortogonal pada $\mathbb{M}_{2\times 2}$

Misalkan ruang M_{22} memiliki **inner product standar** seperti pada Contoh 6:

$$\langle U, V\rangle = \mathrm{tr}(U^T V)$$

Diberikan matriks:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Perhitungan inner product:

$$\langle U, V\rangle = 1(0) + 0(2) + 1(0) + 1(0) = 0$$

Kesimpulan: U dan V ortogonal.

Contoh 3 — Inner Product Ortogonal pada $\mathbb{P}_2$

Ruang polinomial P_2 dengan inner product:

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

Diberikan polinomial:

$$p(x) = x, \quad q(x) = x^2$$

Norma:

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\|q\| = \sqrt{\langle q, q \rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^4 dx} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

Inner product:

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot x^2 dx = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$$

Kesimpulan: Polinomial $p = x$ dan $q = x^2$ ortogonal terhadap integral inner product ini.

Orthogonal Complements

Teori

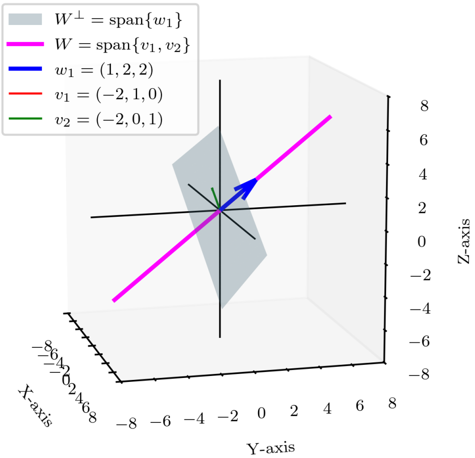
Jika W adalah **subspace dari real inner product space** V, maka **Orthogonal Complements** dari W adalah himpunan semua vektor di V yang ortogonal terhadap setiap vektor di W.

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0, \ \forall w \in W\}$$

dengan:

1. $W^{\perp}$ merupakan **subruang** dari V.
2. $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.

Orthogonal Complement



Jika W adalah subspace dari $\mathbb{R}^3$ yang spanning oleh vektor:

$$W = \mathrm{span}\{v_1, v_2\}, \qquad v_1 = (-2,1,0), \quad v_2 = (-2,0,1).$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Basis dari nullspace:

$$\underbrace{A}_{\substack{\text{Row}\\ \text{space}}} \underbrace{x}_{\substack{\text{Null}\\ \text{space}}} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2}t, \quad x_2 = x_3 = t, \quad x_3 = t$$

Maka basis dari nullspace:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boxed{\text{Basis Orthogonal Complement}}$$

Daftar Pustaka

Daftar Pustaka I