# ALJABAR LINEAR

**Pertemuan ke-4** - Determinan dengan Ekspansi Kofaktor dan Evaluasi Determinan melalui Reduksi Baris

**Oleh:**
Annastya Bagas Dewantara, S.T., M.T.
(email: annastya.bagas@ui.ac.id)

**Fakultas Teknik**
Universitas Indonesia

# Daftar Paparan

# Determinan dengan Ekspansi Kofaktor

# Determinan Matriks

**Teori**

Matriks A adalah **invertible/bukan singular** jika $ad - bc \neq 0$, dan $ad - bc$ disebut sebagai **determinan** dari matriks A.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Kemudian inverse dari matriks A dapat di notasikan sebagai:

$$det(A) = ad - bc$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix}$$

# Minor dan Kofaktor - 1

Determinan dari matriks **Higher-Order** di bangun secara induktif menggunakan minor dan kofaktor:

1. Determinan dari Matriks $2 \times 2$ di bangun dari determinan matriks $1 \times 1$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12}$$

2. Determinan dari Matriks $3 \times 3$ di bangun dari determinan matriks $2 \times 2$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}.$$

3. Determinan dari Matriks $4 \times 4$ di bangun dari determinan matriks $3 \times 3$, dan seterusnya $\cdots$

# Minor dan Kofaktor - 2

**Teori**

Jika $A$ adalah **Square Matrix**, maka minor entri $a_{ij}$ dilambangkan dengan $M_{ij}$ dan didefinisikan sebagai determinan submatriks yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihapus dari $A$. Bilangan $(-1)^{i+j} M_{ij}$ dilambangkan dengan $C_{ij}$ dan disebut kofaktor entri $a_{ij}$

$M_{ij} \rightarrow$ **Minor entri** $a_{ij}$
$C_{ij} \rightarrow$ **Kofaktor entri** $a_{ij}$

$$C_{ij} = \underbrace{(-1)^{i+j}}_{+/-} M_{ij} \underbrace{\longrightarrow}_{\text{Contoh pada Matriks } 4\times 4} \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

**Contoh:**
Determinan matriks A dengan ukuran $3 \times 3$ di bangun menggunakan matriks ukuran $2 \times 2$, sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$a_{11} = 3$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 24 = 16$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1 \cdot 16 = 16$$

# Ekspansi Kofaktor

**Teori**

Determinan suatu matriks A berukuran $n \times n$ dapat diperoleh dengan memilih baris atau kolom mana pun, mengalikan setiap entri dengan kofaktornya yang sesuai, dan menjumlahkan hasilnya.

**Ekspansi Kofaktor sepanjang baris ke-i:**

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, C_{ij}$$

**Ekspansi Kofaktor sepanjang kolom ke-j:**

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, C_{ij}$$

**Contoh:**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

**Menggunakan Baris ke-1:**

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = a_{11}\, C_{11} + a_{12}\, C_{12} + a_{13}\, C_{13}$$

$$= 3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

**Menggunakan Kolom ke-1:**

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = a_{11}\, C_{11} + a_{12}\, C_{12} + a_{13}\, C_{13}$$

$$= 3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (-2) \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

# Strategi dalam Ekspansi Kofaktor

Strategi dalam melakukan **Ekspansi Faktor** adalah dengan **memilih baris atau kolom** yang **memiliki entri zero paling banyak**.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = ?$$

Dalam menentukan $\det(A)$, menggunakan Ekspansi Kofaktor menggunakan kolom ke-2, maka:

$$\det(A) = a_{12}\, C_{12} + a_{22}\, C_{22} + a_{32}\, C_{32} + a_{42}\, C_{42}$$

$$= 0 \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Lakukan Ekspansi Kofaktor kembali menggunakan kolom ke-2:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (1 - (-2)) = -6$$

# Determinan Pada Matriks Triangular

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} \begin{vmatrix} a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

**Teori**

Sehingga jika matriks **A** adalah **Triangular Matrix** $n \times n$ (Upper Triangular, Lower Triangular, or Diagonal), maka $\det(A)$ adalah hasil kali entri-entri pada diagonal utama matriks tersebut yaitu:

$$\boxed{\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}}$$

# Aturan Saarus

**Aturan Saarus** merupakan metode untuk menentukan determinan menggunakan arah panah diagonal sebagai penambahan atau pengurangan dari multiplikasi produk:

Pada matriks $2 \times 2$, terdapat 2! permutasi, sehingga 2 operasi dan 2 arah panah :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Pada matriks $3 \times 3$, terdapat $3! = 6$ permutasi, sehingga 6 operasi dan 6 arah panah:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Metode ini hanya dapat digunakan pada matriks $2 \times 2$ dan $3 \times 3$, dan **Teknik ini tidak berlaku** pada matriks dengan ukuran $n \geq 4$. Contoh pada matriks $4 \times 4$ membutuhkan $4! = 24$ permutasi, namun arah panah yang dihasilkan hanya 8 arah panah.

# Determinan dengan Row Reduction

# Teorema Dasar

**1. Baris Nol atau Kolom Nol**
Jika **A** adalah **Square matrix** dengan ukuran $n \times n$, dan jika **A** memiliki baris nol atau kolom nol, maka $\det(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 0 \cdot C_{21} + 0 \cdot C_{22} + 0 \cdot C_{23} = 0 \qquad \det(B) = 0 \cdot C_{11} + 0 \cdot C_{21} + 0 \cdot C_{31} = 0$$

**2. Baris Nol atau Kolom Nol**
Jika **A** adalah **Square matrix** dengan ukuran $n \times n$, maka $\det A = \det(A^T)$, contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (1)(4) - (2)(3) = 4 - 6 = -2 \qquad \det(A^T) = (1)(4) - (3)(2) = 4 - 6 = -2$$

# Elementary Row Operation

Jika $A$ adalah matriks $n \times n$.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Jika **satu baris atau kolom** di kalikan dengan skalar **k** ($R_i \to kR_i$), maka:

$$\det(B) = k\det(A)$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Jika **dua baris atau dua kolom** di tukar **k** ($R_i \leftrightarrow R_j$), maka:

$$\det(B) = -\det(A)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Jika hasil dari menambahkan atau mengurangi konstanta dikalikan satu baris terhadap baris lainnya ($R_i \to R_i + kR_j$), maka:

$$\det(B) = \det(A)$$

# Matriks Elementer

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Jika $E$ diperoleh dari perkalian baris $I_n$ dengan bilangan bukan nol k, maka :
$\det(E) = k$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Jika $E$ diperoleh dari pertukaran dua baris $I_n$, maka:

$$\det(E) = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Jika $E$ diperoleh dari penjumlahan kelipatan satu baris $I_n$ dengan baris lainnya, maka:

$$\det(E) = 1$$

# Matriks dengan Baris atau Kolom Proporsional

**Teori**

Jika matriks persegi $A$ memiliki dua baris atau dua kolom yang saling proporsional, maka nilai determinannya bernilai nol.

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \end{vmatrix} = 0$$

# Determinan dengan Row Operation

Mencari Determinan menggunakan Elementary Row Operation dapat dilakukan untuk mempermudah perhitungan:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det(B) = -\det(A)]{R_1 \leftarrow R_2}$$

$$= (-1) \cdot (3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det(B) = k\det(A)]{R_1 \leftarrow \frac{1}{3} R_1}$$

$$= (-1) \cdot (3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det(B) = \det(A)]{R_3 \leftrightarrow R_3 - 2R_1}$$

$$= (-1) \cdot (3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det(B) = \det(A)]{R_3 \leftarrow R_3 - 10R_2}$$

$$= (-1) \cdot (3) \cdot (1) \cdot (1) \cdot (-55) \xrightarrow[\det(A) = a_{111} \ldots a_{333}]{TriangularForm}$$

$$= 165$$

# Determinan dengan Column Operation

**Teori**

Mencari Determinan menggunakan Elementary Column Operation dapat dilakukan untuk mempermudah perhitungan, namun teknik ini **tidak dapat digunakan untuk Augmented Matrix**, dan hanya digunakan untuk **Square Matriks** dengan ukuran $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det(B)=\det(A)]{C_4 \leftarrow C_4 - 3C_1}$$

$$= (1) \cdot (7) \cdot (3) \cdot (-26) \xrightarrow[\det(A)=a_{1111}a_{2222}\ldots a_{4444}]{TriangularForm}$$

$$= -546$$

# Strategi dalam Ekspansi Kofaktor dengan Elementary Row Operation

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = ?$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{R_4 \leftarrow R_4 - 3R_2 \\ \det(B)=\det(A)}]{\substack{R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2}}$$

$$= a_{11}\,C_{11} + a_{21}\,C_{21} + a_{31}\,C_{31} + a_{41}\,C_{41} \xrightarrow[\text{dengan kolom ke-1}]{\text{Ekspansi Kofaktor}}$$

$$= 0 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det(B)=\det(A)]{R_3 \leftarrow R_3 - R_1}$$

$$= -\left(a_{11}\,C_{11} + a_{21}\,C_{21} + a_{31}\,C_{31}\right) \xrightarrow[\text{dengan kolom ke-1}]{\text{Ekspansi Kofaktor}}$$

$$= -\left(-1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}\right) = -\left(-1 \cdot (3 \cdot 3 - 3 \cdot 9)\right) = \boxed{-18}$$

# Properti Determinan

# Properti Dasar

$$\det(\mathbf{kA}) = \mathbf{k^n} \det(\mathbf{A})$$

$$k = 2, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 8 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot (1 \cdot 1 - 3 \cdot 0) - 2 \cdot (0 \cdot 1 - 3 \cdot 4) + 0 \\ &= 1 - 2(-12) \\ &= 25 \\ \det(2A) &= 2 \cdot (2 \cdot 2 - 6 \cdot 0) - 4 \cdot (0 \cdot 2 - 6 \cdot 8) + 0 \\ &= 8 - 4(-48) \\ &= 200 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(2A) &= 2^3 \det(A) = 8 \cdot 25 \\ &= 200 \end{aligned}$$

$$\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 1$
$\det(B) = 1$
$\det(A) + \det(B) = 2$
$\det(A+B) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

$$\det(\mathbf{AB}) \neq \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\det(AB) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
$\det(A) = 1$
$\det(B) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ $\det(A)\det(B) = 6$

# Menguji Invertibilitas Matriks

**Teori**

Suatu matriks A berukuran $n \times n$ dikatakan inverse jika $\det(A) \neq 0$.

Dalam menguji apakah matriks A dengan ukuran $n \times n$ dapat dilakukan inverse adalah dengan mengidentifikasi nilai determinan nya.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Karena matriks A **memiliki baris yang proporsional** satu sama lain, yakni pada $R_1$ dan $R_3$, maka $\det(A) = 0$, sehingga **matriks A tidak invertible**.

# Kofaktor dari Baris/Kolom yang berbeda

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} C_{11} = 12 & C_{12} = 6 & C_{13} = -16 \\ C_{21} = 4 & C_{22} = 2 & C_{23} = 16 \\ C_{31} = 12 & C_{32} = -10 & C_{33} = 16 \end{matrix}$$

Nilai determinan akan selalu sama terlepas dari baris atau kolom mana yang di pilih untuk Ekspansi kofaktor:

$$\det(A) = 3C_{11} + 2C_{12} + (-1)C_{13} = 36 + 12 + 16 = 64$$
$$\det(A) = 3C_{11} + 1C_{21} + 2C_{31} = 36 + 4 + 24 = 64$$

Perkalian kofaktor pada baris atau kolom yang berbeda akan menghasilkan jumlah produk bernilai nol:

1. Terhadap Baris yang berbeda
$3C_{21} + 2C_{22} + (-1)C_{23} = 12 + 4 - 16 = 0$

2. Terhadap Kolom yang berbeda
$3C_{12} + 1C_{22} + 2C_{32} = 18 + 2 - 20 = 0$

Notasi untuk **Matriks Kofaktor** dari matriks A adalah:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Serta notasi untuk **Transpose Matriks Kofaktor** atau **Matriks Adjoint** dari matriks A adalah:

$$adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

# Matriks Inverse

$$A\ adj(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan perkalian kofaktor sebelumnya, di dapatkan:

**Ketika** $i = k$**:**

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{kj} = \det(A)$

**Ketika** $i \neq k$**:**

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{kj} = 0$

Atau:

$$\big(A\ \text{adj}(A)\big)_{ik} = \begin{cases} \det(A), & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$$

Sehingga:

$$A\ adj(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)\ I_n$$

$$A\ adj(A) = \det(A)\ I_n \longrightarrow \text{kedua sisi dikalikan } \times \frac{1}{\det(A)}$$

$$\frac{1}{\det(A)}\ A\ adj(A) = I_n \longrightarrow \text{kedua sisi dikalikan } \times A^{-1}$$

$$\frac{A^{-1}}{\det(A)}\ A\ adj(A) = A^{-1} \rightarrow \boxed{\frac{1}{\det(A)}\ I_n\ adj(A) = A^{-1}}$$

# Daftar Pustaka

# Daftar Pustaka I