ALJABAR LINEAR

Pertemuan ke-6 dan 7 - Ruang vektor, Norm, Dot Product dan Ortogonalitas

Oleh:

Annastya Bagas Dewantara, S.T., M.T.

(email: annastya.bagas@ui.ac.id)

Fakultas Teknik

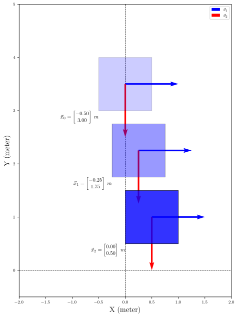
Universitas Indonesia

Daftar Paparan

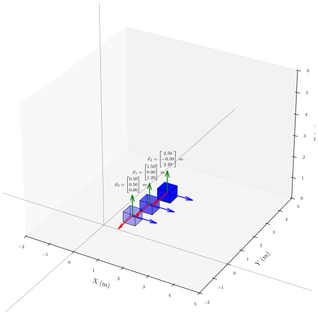
Ruang Vaktor pada $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ dan $\mathbb{R}^n$

Introduksi

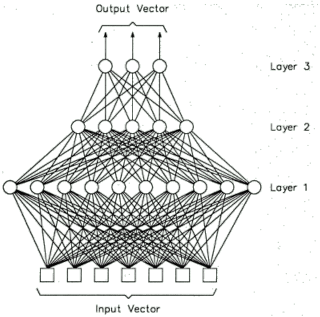
Vektor pada 2-Space ($\mathbb{R}^2$)



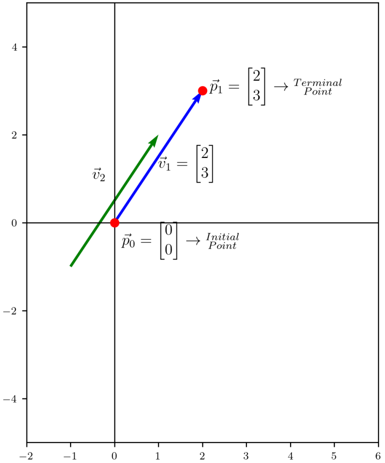
Vektor pada 3-Space ($\mathbb{R}^3$)



Vektor pada n-Space ($\mathbb{R}^n$)



Vektor Geometri



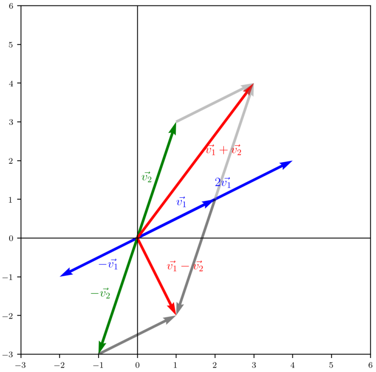
Length:
Merepresentasikan magnitude vektor

Direction:
Merepresentasikan arah dari vektor

Equivalent:
Apabila kedua vektor memiliki arah dan magnitude yang sama

Zero Vector:
Apabila **initial point** dan **terminal point** bernilai nol.

Penjumlahan, Pengurangan dan Multiplikasi Skalar pada Vektor



Penambahan:
Penambahan vektor $\vec{v}_1$ dan $\vec{v}_2$ dapat diartikan sebagai translasi dari vektor $\vec{v}_1$ sebesar $\vec{v}_2$.

$$\boxed{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2+1 \\ 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}}$$

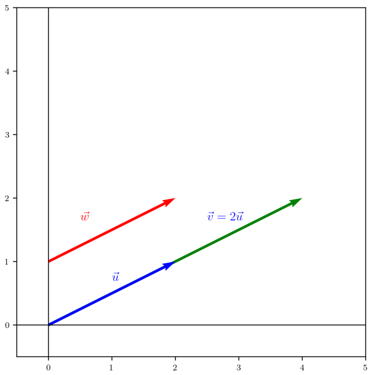
Pengurangan:
Pengurangan vektor $\vec{v}_1$ dan $\vec{v}_2$ dapat diartikan sebagai penambahan vektor $\vec{v}_1$ dengan vektor $\vec{v}_2$ yang berlawanan arah.

$$\boxed{\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}$$

Multiplikasi Skalar:
Multiplikasi skalar vektor $\vec{v}_1$ dengan k, dimana $k \neq 0$, menghasilkan vektor dengan panjang k kali dari $\vec{v}_1$. Jika $k < 0$, arah vektor berlawanan.

$$\boxed{\|k\vec{v}_1\| = k\|\vec{v}_1\|}$$

Vektor Parallel dan Collinear



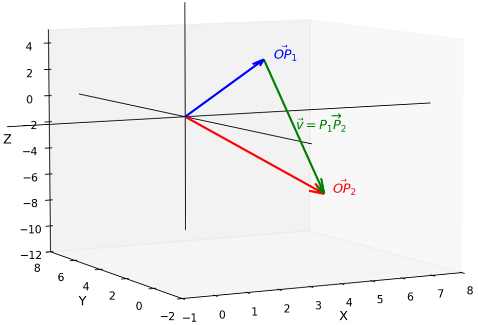
Collinear:
Jika dua atau lebih vektor terletak pada satu garis yang sama (atau garis perpanjangan yang sama), maka vektor tersebut adalah **collinear**.

$$\boxed{\vec{u} \text{ dan } \vec{v} \text{ collinear jika } \vec{u} = k\vec{v},\ k \in \mathbb{R}}$$

Parallel:
Jika dua vektor memiliki arah yang sama atau berlawanan arah, tetapi tidak harus terletak pada garis yang sama (bisa berada pada garis sejajar), maka vektor tersebut adalah **parallel**.

$$\boxed{\vec{u} \parallel \vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{R},\ k \neq 0 \ \text{ sehingga } \ \vec{u} = k\vec{v}}$$

Vektor yang Titik Awal Tidak di Origin



Parallel:

Apabila vektor memiliki initial point yang tidak terletak pada origin $[0, 0, 0]$, dan vektor $P_1\vec{P}_2$ memiliki initial point pada $\vec{P_1}$ dan terminal point pada $\vec{P_2}$, maka nilai vektor $P_1\vec{P}_2$ dapat diperoleh dengan melakukan pengurangan koordinat initial point dengan terminal point.

$$\boxed{P_1\vec{P}_2 = O\vec{P}_2 - O\vec{P}_1 = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}}$$

Vektor n-space $\mathbb{R}^n$

Theorem 3.1.1

If $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, and $\mathbf{w}$ are vectors in R^n, and if k and m are scalars, then:

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(c) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(d) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

(e) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$

(f) $(k + m)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + m\mathbf{u}$

(g) $k(m\mathbf{u}) = (km)\mathbf{u}$

(h) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Jika $v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$ dan $w = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{bmatrix}$ adalah vektor $\mathbb{R}^n$, dan k adalah skalar, maka:

$$\begin{aligned} v + w &= \begin{bmatrix} v_1 + w_1 & v_2 + w_2 & \cdots & v_n + w_n \end{bmatrix} \\ kv &= \begin{bmatrix} kv_1 & kv_2 & \cdots & kv_n \end{bmatrix} \\ -v &= \begin{bmatrix} -v_1 & -v_2 & \cdots & -v_n \end{bmatrix} \\ v - w = v + (-w) &= \begin{bmatrix} v_1 - w_1 & v_2 - w_2 & \cdots & v_n - w_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kombinasi Linear

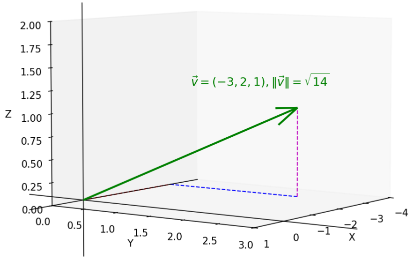
Vektor $\vec{w}$ dikatakan kombinasi linear dari vektor-vektor $v_1, v_2, \cdots, v_n$ yang dapat di notasikan:

$$\boxed{\vec{w} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n}$$

di mana $k_1, k_2, \cdots, k_n$ adalah skalar. Skalar-skalar ini disebut koefisien dari kombinasi linear tersebut.

Norm, Dot Product dan Jarak $\mathbb{R}^n$

Norm Vektor



Theorem 3.2.1

If $\mathbf{v}$ is a vector in R^n, and if k is any scalar, then:

(a) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$

(b) $\|\mathbf{v}\| = 0$ if and only if $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

(c) $\|k\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\|$

Jika $v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$ adalah vektor $\mathbb{R}^n$, dan panjang dari vektor (**norm**) dari vektor **v** di notasikan sebagai $\|v\|$, maka **norm** dari vektor adalah:

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

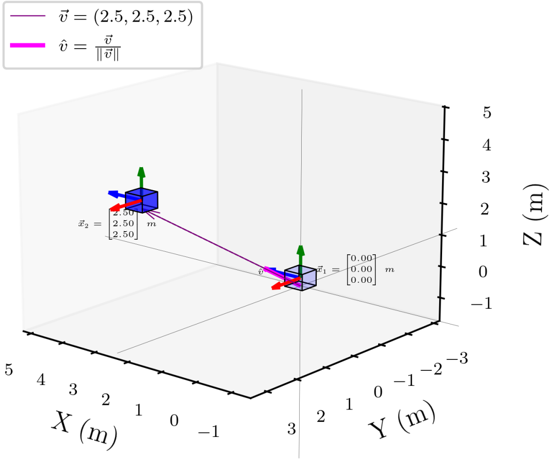
Contoh:
Jika vektor $\vec{v} = (2, -1, 3, -5)$ adalah vektor $\mathbb{R}^4$, maka:

(a) Non-negativity $\|\vec{v}\| \geq 0$
$\|v\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{39}$

Jika vektor adalah zero vector $\vec{v} = (0, 0, 0, 0)$
(b) Zero vector $\|\vec{v}\| = 0 \iff v = 0$
$\|v\| = \sqrt{0^2 + (0)^2 + 0^2 + (0)^2} = 0$

Jika vektor $\vec{v} = (2, -1, 3, -5)$ adalah vektor $\mathbb{R}^4$ dan $k = 2$, maka:
(c) Multiplikasi skalar $\|\vec{kv}\| = |k|\|\vec{v}\|$
$\|2v\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 6^2 + (-10)^2} = 2\sqrt{39}$

Vektor Unit



Vektor unit adalah vektor yang memiliki **norm** bernilai 1. Vektor ini dipakai ketika arah vektor lebih penting daripada panjangnya, misalnya dalam navigasi atau fisika.

$\hat{v} = \frac{1}{\|v\|} v$

Contoh:

Suatu drone bergerak dari titik $\vec{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ ke $\vec{x_1} = \begin{bmatrix} 2.5 & 2.5 & 2.5 \end{bmatrix}^T$, apabila drone bergerak denagn kecepatan $v = 5m/s$

$\vec{v} = \vec{x_1} - \vec{x_0} = \begin{bmatrix} 2.5 & 2.5 & 2.5 \end{bmatrix}^T$

$$\hat{v} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{(2.5-0)^2 + (2.5-0)^2 + (2.5-0)^2}} \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2.5\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jika drone bergerak pada kecepatan $v = 5m/s$, maka:

$\vec{v} = 5\hat{v} = \begin{bmatrix} 2.886 & 2.886 & 2.886 \end{bmatrix}^T$

Mengindikasikan drone bergerak **2.886 m/s pada x-axis, 2.886 m/s pada y-axis, 2.886 m/s pada z-axis.**

Standard Vektor Unit

Pada koordinat cartesian $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$, **Vektor Unit** di representasikan sebagai arah positif pada koordinat axis yang disebut sebagai **Standard Vektor Unit**. Pada ruang 2 dimensi $\mathbb{R}^2$, standard vektor unit tersebut di representasikan:

$$\boxed{i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0) \text{ dan } k = (0, 0, 1)}$$

Pada ruang vektor-n $\mathbb{R}^n$, standard vektor unit di representasikan:

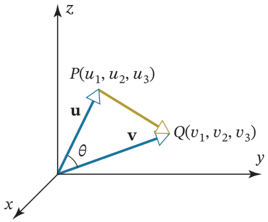
$$\boxed{e_1 = (1, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, 0, \cdots, 1)}$$

Sehingga vektor $\vec{v}$ dapat di representasikan:

$$\boxed{v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \cdots + v_n e_n}$$

Contoh:
$(7, 2, 3, 4) = 7e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4$

Dot Product-1



$$\|PQ\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta$$

$$\|v-u\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta$$

$$\|u\|\|v\|\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|v-u\|^2\right) \rightarrow \boxed{u \cdot v = \|u\|\|v\|\cos\theta}$$

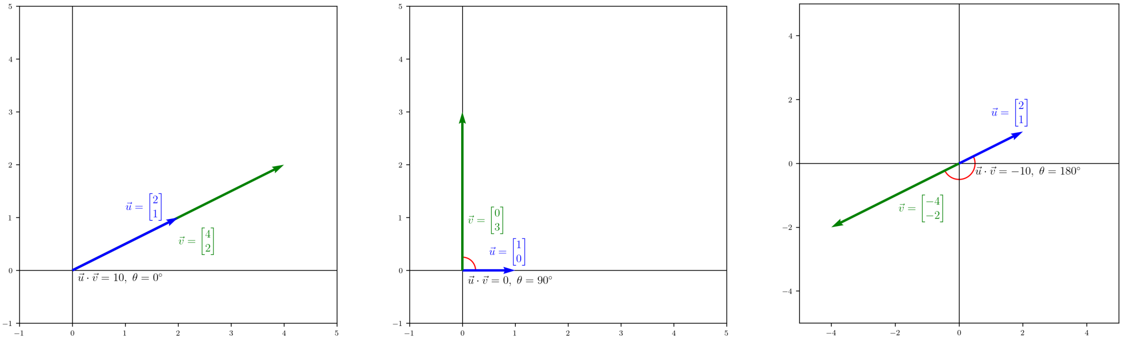
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|v-u\|^2\right) \rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\|u\|^2 = u_1^2+u_2^2+u_3^2 \\ \|v\|^2 = v_1^2+v_2^2+v_3^2 \\ \|v-u\|^2 = (v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2+(v_3-u_3)^2\end{array}}$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)\right)$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Contoh:
$u = (-1, 3, 5, 7)$
$v = (-3, -4, 1, 0)$
$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (-1)(-3) + (3)(-4) + (5)(1) + (7)(0) = -4$

Dot Product-2



Aljabar pada Dot Product

Theorem 3.2.2

If $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, and $\mathbf{w}$ are vectors in R^n, and if k is a scalar, then:

(a) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$ **[Symmetry property]**

(b) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$ **[Distributive property]**

(c) $k(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = (k\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}$ **[Homogeneity property]**

(d) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \geq 0$ and $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 0$ if and only if $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ **[Positivity property]**

Theorem 3.2.3

If $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, and $\mathbf{w}$ are vectors in R^n, and if k is a scalar, then:

(a) $\mathbf{0}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{0} = 0$

(b) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$

(c) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$

(d) $(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$

(e) $k(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot(k\mathbf{v})$

$$v \cdot v = \|v\|\|v\| \cos\theta \quad \rightarrow \theta = 0,\ \cos 0 = 1$$
$$v \cdot v = \|v\|\|v\|$$
$$v \cdot v = \|v\|^2$$
$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$$

Cauchy–Schwarz Inequality:

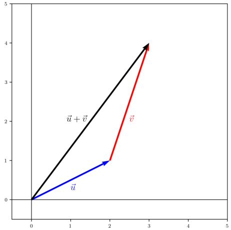
$$u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos\theta$$

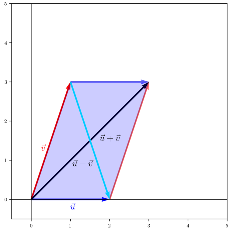
$$\cos\theta = \frac{u\cdot v}{\|u\|\|v\|} \quad \longrightarrow \quad \boxed{-1 \leq \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} \leq 1}$$

Contoh:

$$\begin{aligned}(u-2v)\cdot(3u+4v) &= u\cdot(3u+4v) - 2v\cdot(3u+4v)\\ &= 3(u\cdot u) + 4(u\cdot v) - 6(v\cdot u) - 8(v\cdot v)\\ &= 3\|u\|^2 - 2(u\cdot v) - 8\|v\|^2.\end{aligned}$$

Pertidaksamaan Cauchy–Schwarz





$$|u \cdot v| \leq \|u\|\|v\|$$

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= (u+v)\cdot(u+v) = (u \cdot u) + 2(u \cdot v) + (v \cdot v) \\
&= \|u\|^2 + 2(u \cdot v) + \|v\|^2 \\
&\leq \|u\|^2 + 2|u \cdot v| + \|v\|^2 && \text{(property of absolute value)} \\
&\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 && \text{(Cauchy-Schwarz inequality)} \\
&= (\|u\| + \|v\|)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 &= (u+v)\cdot(u+v) + (u-v)\cdot(u-v) \\
&= 2(u \cdot u) + 2(v \cdot v) \\
&= 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).
\end{aligned}$$

$$u \cdot v = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$$

Dot Product untuk Multiplikasi Matriks

Dot product dpat digunakan untuk multiplikasi matriks. Namun, multiplikasi metriks perlu memperhatikan jenis dari matriks yang dikalikan, apakah matriks baris atau matriks kolom.

a. $\vec{u}, \vec{v} \rightarrow$ **column matrix**

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u \cdot v = u^T v = v^T u \text{ dan } u^T v = -7$$

b. $\vec{u}, \vec{v} \rightarrow$ **row matrix**

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad uv = uv^T = vu^T = -7$$

c. $\vec{u} \rightarrow$ **row matrix,** $\vec{v} \rightarrow$ **column matrix**

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad uv = uv = v^T u^T = -7$$

d. $\vec{u} \rightarrow$ **column matrix,** $\vec{v} \rightarrow$ **row matrix**

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad uv = vu = u^T v^T = -7$$

Dot Product untuk Multiplikasi Matriks Kolom

Jika matriks A adalah matriks berukuran $(n \times n)$, dan matriks vektor u dan v adalah matriks berukuran $(n \times 1)$, maka **dot product** dapat di bentuk ke dalam multiplikasi matriks:

$$\boxed{u \cdot v = u^T v = v^T u}$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{A}_{n\times n}\underbrace{u}_{n\times 1} \cdot \underbrace{v}_{n\times 1} &= \underbrace{(Au)^T}_{1\times n}\underbrace{v}_{n\times 1} = \underbrace{u^T A^T}_{1\times n}\underbrace{v}_{n\times 1} = \underbrace{u^T}_{1\times n}\underbrace{(v^T A)^T}_{n\times 1} \\
&= \underbrace{v^T}_{1\times n}\underbrace{Au}_{n\times 1} = (\underbrace{v^T}_{1\times n}\underbrace{A}_{n\times n})\underbrace{u}_{n\times 1} = \underbrace{(A^T v)^T}_{1\times n}\underbrace{u}_{n\times 1} \\
&= u \cdot (A^T v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{u}_{n\times 1} \cdot \underbrace{A}_{n\times n}\underbrace{v}_{n\times 1} &= \underbrace{u^T}_{1\times n}\underbrace{Av}_{n\times 1} = \underbrace{(A^T u)^T}_{1\times n}\underbrace{v}_{n\times 1} = \underbrace{(A^T u)}_{1\times n} \cdot \underbrace{v}_{n\times 1} \\
&= \underbrace{(Av)^T}_{1\times n}\underbrace{u}_{n\times 1} = \underbrace{v^T A^T}_{1\times n}\underbrace{u}_{n\times 1} = \underbrace{v^T}_{1\times n}\underbrace{(u^T A)^T}_{n\times 1}
\end{aligned}$$

Ortogonalitas

Vektor Ortogonalitas

Dua **nonzero vektor** pada dimensi $\mathbb{R}^n$ dikatakan **Ortogonal** atau **Tegak Lurus**, apabila memenuhi syarat berikut:

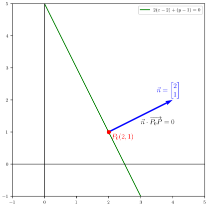
$$u \cdot v = 0, \quad \theta(u, v) = 90^\circ$$

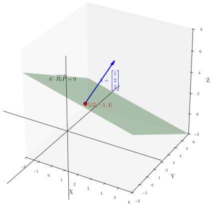
Contoh:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ pada } \mathbb{R}^4$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2(1) + 3(2) + 1(0) + 4(-1) = 0$$

Garis dan Bidang — Bentuk Point Normal





Jika vektor $\overrightarrow{P_0P}$ tegak lurus terhadap vektor normal $\vec{n}$ dari sebuah garis atau bidang ($\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$), maka dot product kedua vektor tersebut nol:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0, \qquad \vec{n} \neq \mathbf{0}.$$

Untuk $\mathbb{R}^2$: jika $\vec{n} = (a, b)$, $P_0 = (x_0, y_0)$ dan $P = (x, y)$, maka

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0}$$

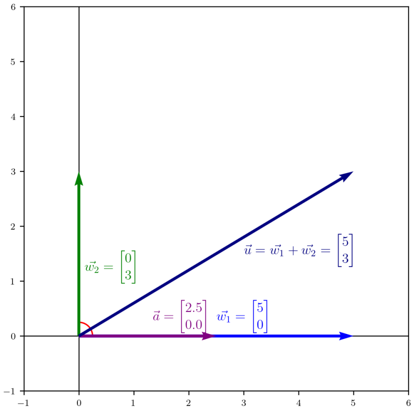
Untuk $\mathbb{R}^3$: jika $\vec{n} = (a, b, c)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dan $P = (x, y, z)$, maka

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

Secara umum di $\mathbb{R}^n$: dengan $\vec{n} = (a_1, \ldots, a_n)$, $P_0 = (x_{1,0}, \ldots, x_{n,0})$ dan $P = (x_1, \ldots, x_n)$,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - x_{i,0}) = 0}$$

Projeksi Ortogonal



Jika $\vec{u}$ dan $\vec{a}$ terletak $\mathbb{R}^n$, dan $\vec{a} \neq 0$, dan $\vec{u}$ dapat dinyatakan dengan $\vec{u} = \vec{w_1} + \vec{w_2}$, di mana $\vec{w_1} = k\vec{a}$ dan $\vec{w_2}$ ortogonal terhadap $\vec{a}$ ($\vec{a} \perp \vec{w_2}$).

$$\vec{u} = \vec{w_1} + \vec{w_2}$$
$$\vec{u} = k\vec{a} + \vec{w_2}$$

Maka dot product:

$u \cdot a = (ka + w_2) \cdot a = ka \cdot a + w_2 \cdot a$

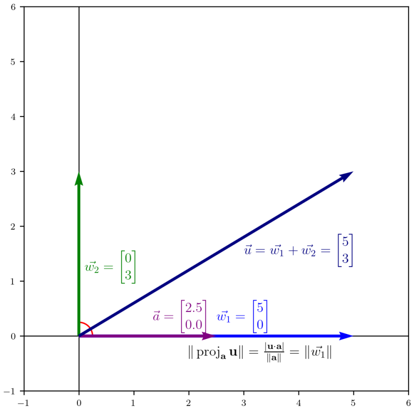
$$= ka \cdot a + w_2 \cdot a = k\|a\|^2 \leftarrow \boxed{w_2 \cdot a = 0, \quad (w_2 \perp a)}$$

$$k = \frac{u \cdot a}{\|a\|^2}$$

Sehingga:

$$\boxed{\text{proj}_{\vec{a}}\, \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}\, \vec{a} = \vec{w_1}} \qquad \boxed{\vec{w_2} = \vec{u} - \text{proj}_{\vec{a}}\, \vec{u} = \vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}\, \vec{a}}$$

Norm dari Projeksi Ortogonal



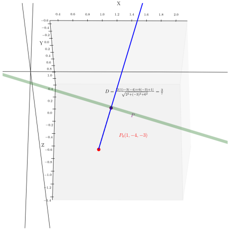
Dalam mengukur panjang dari projeksi orthogonal ($\|\operatorname{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}\|$), dapat dirumuskan sebagai:

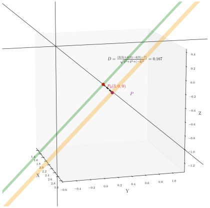
$$\operatorname{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}.$$

Maka nilai norm adalah:

$$\begin{aligned}\|\operatorname{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}\| &= \left\|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}\right\| = \left|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\right|\|\mathbf{a}\| \\ &= \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|^2}\|\mathbf{a}\| = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|} \\ &= \|u\|\|cos\theta\| \rightarrow \boxed{u\cdot a = \|u\|\|a\|cos\theta}\end{aligned}$$

Jarak Ortogonal terhadap Garis atau Bidang





Pengukuran **jarak ortogonal** dari **suatu titik** terhadap suatu **Garis** atau **Bidang** yang di representasikan oleh (D), dapat dihitung dengan:

$$D = \left\| \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \overrightarrow{QP_0} \right\| = \frac{\left| \overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{n} \right|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

$$\overrightarrow{QP_0} = (x_0 - x_1,\ y_0 - y_1,\ z_0 - z_1),$$

$$\overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{a} = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1), \qquad \|\mathbf{a}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$$D = \frac{\left| a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1) \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Daftar Pustaka

Daftar Pustaka I