ALJABAR LINEAR

Pertemuan ke-2 - Operasi, Properti dan Bentuk Spesial Matrix

Oleh:
Annastya Bagas Dewantara, M.T.
(email: annastya.bagas@ui.ac.id)

Fakultas Teknik
Universitas Indonesia

Daftar Paparan

Matriks dan Operasi Matriks

Notasi dan Terminologi - 1

Augmented Metrics $\rightarrow$ Matriks untuk System of Linear equation
Matrix $\rightarrow$ Rectangular array of number
Entris $\rightarrow$ Nilai pada array matriks
m $\rightarrow$ Baris matriks
n $\rightarrow$ Kolom matriks
Size $\rightarrow$ Ukuran dari matrikx $(m \times n)$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}}_{3\times 2}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}}_{\substack{1\times 4 \\ \textbf{Row Vector}}}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{3\times 3}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\substack{2\times 1 \\ \textbf{Column Vector}}}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}}_{\substack{1\times 1 \\ \textbf{Both} \\ \textit{Column/Row} \\ \textit{Vector}}}$$

Notasi dan Terminologi - 2

Huruf Kapital $\rightarrow$ Notasi untuk matriks
Huruf Kecil $\rightarrow$ Notasi untuk numerical quantities (scalar)

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Nilai **entry** yang terletak pada baris ke-i dan kolom ke-j, di notasikan sebagai $\mathbf{a_{ij}}$ atau juga bisa $(\mathbf{A})_{\mathbf{ij}}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Apabila matriks memiliki **jumlah kolom dan baris yang sama**, maka matriks tersebut adalah **square matrix of order-n**, dengan garis pada matriks di atas adalah **main diagonal**.

Operasi Matriks

Syarat **size** dari matriks **A** dan **B** harus sama:

Penambahan

$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$

Pengurangan

$(A - B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij}$

Perkalian Skalar

$(A)_{mn} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$

Syarat **kolom** dari matriks **A** dan **baris** dari **B** harus sama:

Perkalian Matriks

$$\underbrace{A}_{m\times r}\,\underbrace{B}_{r\times n} = \underbrace{AB}_{m\times n}$$

Terdapat beberapa cara dalam melakukan matrix product, antara lain:

1. Entry by entry
2. Row-Column

Partitioned Matrix

3. Column by column
4. Row by row
5. Column row expansion

Partitioned Matrix

Matriks dapat terbagi/**partitioned** ke dalam **matriks yang lebih kecil** dengan memasukkan garis **horizontal** atau **vertikal** di antara **baris** atau **kolom** terpilih.

Contoh 4×4 matriks:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array}\right]$$

Partitioned menjadi empat 2×2 **submatrices**:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Dimana:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{bmatrix}.$$

Multiplikasi Matriks — Entry by entry

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}.$$

Jika $C = AB$ adalah matriks berukuran 2×2, maka

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\, b_{kj}, \qquad i = 1, 2, \; j = 1, 2.$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{bmatrix}.$$

Multiplikasi Matriks — Row–Column

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}.$$

Nilai dari entry c_{ij} diperoleh dari **dot product** antara baris ke-i dari A dan kolom ke-j dari B.

$$C = \begin{bmatrix} (1,2,3)\cdot(7,9,11)^T & (1,2,3)\cdot(8,10,12)^T \\ (4,5,6)\cdot(7,9,11)^T & (4,5,6)\cdot(8,10,12)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{bmatrix}.$$

Multiplikasi Matriks - Row by Row

$$C = A\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 \end{bmatrix}.$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

$$Ab_1 = \begin{bmatrix} 58 \\ 139 \end{bmatrix}, \quad Ab_2 = \begin{bmatrix} 64 \\ 154 \end{bmatrix}.$$

$$C = \begin{bmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{bmatrix}.$$

Multiplikasi Matriks — Column by Column

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}.$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$C = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} B,$$

$$a_1 B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 \\ 64 \end{bmatrix},$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 139 \\ 154 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{bmatrix}.$$

Multiplikasi Matriks – Linear Combinations

Apabila $A_1, A_2, \cdots, A_r$ adalah matriks dengan **size** yang sama, dan $c_1, c_2, \cdots, c_r$ adalah skalar, maka bentuk **Linear Combination** dapat di ekspresikan:
$c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_rA_r$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3+2 \\ 1 & 2-3 \\ 2 & 1-2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Multiplikasi Matriks – Column-Row Expansion

$\underbrace{A}_{m\times r}$ di **partitioned** ke ukuran $(\mathbf{m} \times \mathbf{1})$ dan di ubah ke **column vector** $c_1, c_2, \cdots, c_r$

$\underbrace{B}_{r\times n}$ di **partitioned** ke ukuran $(\mathbf{1} \times \mathbf{n})$ dan di ubah ke **row vector** $r_1, r_2, \cdots, r_r$

$$AB = c_1 r_1 + c_2 r_2 + \cdots + c_r r_r$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}, \quad c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}, \quad r_1 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}, r_2 = \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$AB = c_1 r_1 + c_2 r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$AB = c_1 r_1 + c_2 r_2 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 15 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 28 & 32 \end{bmatrix}.$$

$$AB = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}.$$

Representasi Matriks Sistem Persamaan Linear

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= -4 \end{aligned}$$

Coefficient Matrix

$$\underbrace{A}_{\substack{\textit{coefficient} \\ \textit{matrix}}} \underbrace{\mathbf{x}}_{\substack{\textit{variable} \\ \textit{vector}}} = \underbrace{\mathbf{b}}_{\substack{\textit{constant} \\ \textit{vector}}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Augmented Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & 3 & -4 \end{array}\right]$$

Matriks Transpose

Jika $A = [a_{ij}]$ adalah matriks berukuran $m \times n$, maka **transpose** dari A, ditulis A^T, adalah matriks berukuran $n \times m$ dengan elemen

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}.$$

Contoh-1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Contoh-2

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Contoh-3

$$C = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

Contoh-4

$$D = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D^T = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Trace Matriks

Jika $A = [a_{ij}]$ adalah **square matric** berukuran $n \times n$, maka **trace** dari A ($\mathrm{tr}(A)$), adalah jumlah dari semua elemen diagonal utama:

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Contoh-1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(A) = 1 + 4 = 5$$

Contoh-2

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(B) = 2 + 3 + (-2) = 3$$

Contoh-3

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(C) = 10+5+(-4)+2 = 13$$

Matriks dan Operasi Matriks

Properti penambahan matriks dan perkalian skalar

Theorem 1.4.1

Properties of Matrix Arithmetic

Assuming that the sizes of the matrices are such that the indicated operations can be performed, the following rules of matrix arithmetic are valid.

(a) $A + B = B + A$ **[Commutative law for matrix addition]**
(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ **[Associative law for matrix addition]**
(c) $A(BC) = (AB)C$ **[Associative law for matrix multiplication]**
(d) $A(B + C) = AB + AC$ **[Left distributive law]**
(e) $(B + C)A = BA + CA$ **[Right distributive law]**
(f) $A(B - C) = AB - AC$
(g) $(B - C)A = BA - CA$
(h) $a(B + C) = aB + aC$
(i) $a(B - C) = aB - aC$
(j) $(a + b)C = aC + bC$
(k) $(a - b)C = aC - bC$
(l) $a(bC) = (ab)C$
(m) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Contoh properti (l)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad a = 2, \ b = 3.$$

$$bA = 3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

$$a(bA) = 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}.$$

$$(ab)A = (2 \cdot 3)A = 6A = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}.$$

Properti dari perkalian matriks

Tidak semua aritmetika matriks pada aturan sebelumnya berlaku sama untuk matriks multiplikasi, contohnya pada **commutative law**, yang mana AB dan BA dapat bernilai berbeda, karena:

1. AB mungkin memenuhi syarat perkalian matriks, namun BA tidak
2. AB dan BA terdefinisi keduanya, namun dapat memiliki **size** yang berbeda di akhir
3. AB dan BA terdefinisi keduanya dan memiliki **size** yang sama, namun hasilnya dapat berbeda.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Properti dari Matriks Zero

Theorem 1.4.2

Properties of Zero Matrices

If c is a scalar, and if the sizes of the matrices are such that the operations can be perfomed, then:

(a) $A + 0 = 0 + A = A$

(b) $A - 0 = A$

(c) $A - A = A + (-A) = 0$

(d) $0A = 0$

(e) If $cA = 0$, then $c = 0$ or $A = 0$.

Properti dari Matriks Identitas

Square matrix dengan **1 pada diagonal utama** dan **0 di tempat lain** disebut **identity matrix**, dilambangkan I atau I_n untuk ukuran $n \times n$.

Contoh:

$$I_1 = [1], \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk setiap matriks A berukuran $m \times n$ berlaku:

$$AI_n = A, \qquad I_m A = A$$

Jika R adalah **reduced row echelon form** dari matriks A berukuran $n \times n$, maka R memiliki setidaknya satu row zero **atau** $R = I_n$.

Properti dari Matriks Inverse

Dalam aritmatika bilangan real, setiap $a \neq 0$ memiliki invers a^{-1} sehingga $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Analognya pada matriks:

Definisi: Matriks bujur sangkar (square matrix) A disebut *invertible* jika terdapat matriks B dengan ukuran sama sehingga

$$AB = BA = I$$

Maka $B = A^{-1}$, dan A disebut nonsingular. Jika tidak ada B, maka A singular.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad AB = BA = I$$

Jadi A dan B adalah invers satu sama lain.

Sifat-sifat:

Invers matriks unik. Jika B dan C invers dari A, maka $B = C$.

Untuk 2×2 matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, A invertible $\iff$ $ad - bc \neq 0$, dengan:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Jika A, B invertible, maka $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Powers of a Matrix

Untuk matriks persegi A:

$$A^0 = I, \quad A^n = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A \; (n \text{ factors})$$

Jika A invertible:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n$$

Laws of exponents:

$$A^r A^s = A^{r+s}, \quad (A^r)^s = A^{rs}$$

Properties (Theorem 1.4.7):
1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$
3. $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}, \quad k \neq 0$

Catatan:
1. $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$
2. Jika $AB = BA$, maka:
$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Polinomial Matriks

Jika A adalah matriks persegi $n \times n$ dan

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m,$$

maka didefinisikan:

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_m A^m$$

dengan I matriks identitas.

Contoh: Untuk $p(x) = x^2 - 2x - 5$ dan $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$:

$$p(A) = A^2 - 2A - 5I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Properties: Karena $A^r A^s = A^{r+s} = A^s A^r$, maka **powers** dari A komutatif. Akibatnya, setiap dua matrix polynomials $p_1(A)$ dan $p_2(A)$ juga komutatif:

$$p_1(A) p_2(A) = p_2(A) p_1(A)$$

Matriks Diagonal, Triangular, dan Simetrik

Matriks Diagonal

Definisi: Matriks persegi dengan semua elemen di luar *main diagonal* bernilai nol. Contoh:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bentuk Umum: $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$

Invers: D invertible $\iff$ $d_i \neq 0\ \forall i$.

$$D^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \ldots, \frac{1}{d_n}\right)$$

Pangkat:

$$D^k = \mathrm{diag}(d_1^k, d_2^k, \ldots, d_n^k)$$

Perkalian dengan matriks:

DA: setiap **row** dari A dikalikan oleh elemen diagonal D.
AD: setiap **column** dari A dikalikan oleh elemen diagonal D.

Triangular Matrices

Definisi:

Lower Triangular: semua elemen di atas *main diagonal* bernilai 0 ($a_{ij} = 0$ untuk $i < j$).
Upper Triangular: semua elemen di bawah *main diagonal* bernilai 0 ($a_{ij} = 0$ untuk $i > j$).
Jika matriks berbentuk salah satunya, disebut **Triangular**.
Catatan: **Diagonal Matrix** adalah sekaligus Upper dan Lower Triangular.

Sifat-sifat penting:

Transpose dari Lower Triangular adalah Upper Triangular, dan sebaliknya.
Hasil perkalian sesama Lower (atau Upper) Triangular tetap Triangular.
Matriks A Triangular invertible $\iff$ semua entri diagonal $\neq 0$.
Invers dari Lower (atau Upper) Triangular tetap Lower (atau Upper).

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ (Upper, invertible)}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (Upper, non-invertible)}$$

Matriks Simetrik

Definisi: Matriks A disebut **symmetric** jika $A = A^T$, atau setara dengan $(A)_{ij} = (A)_{ji}$.

Ciri visual: entri diagonal bebas, sedangkan entri di atas dan bawah *main diagonal* saling mencerminkan.

Contoh: $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

Sifat-sifat:

- A^T symmetric.
- $A \pm B$ symmetric, jika A dan B symmetric.
- kA symmetric (untuk skalar k).
- AB symmetric $\iff AB = BA$ (commute).
- Jika A symmetric dan invertible, maka A^{-1} juga symmetric.
- Produk AA^T dan A^TA selalu symmetric (dan invertible jika A invertible).

Daftar Pustaka I