ALJABAR LINEAR

Pertemuan ke-12 dan 13 - Koordinat, Basis, Dimensi dan Pergantian Basis

Oleh:

Annastya Bagas Dewantara, S.T., M.T.

(email: annastya.bagas@ui.ac.id)

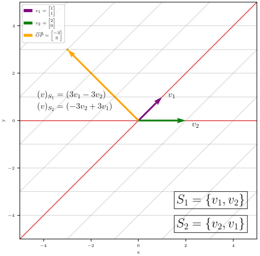
Fakultas Teknik

Universitas Indonesia

Daftar Paparan

Koordinat dan Basis

Introduksi



- Sistem koordinat dapat menggunakan basis yang **tidak harus orthogonal** (bisa miring/skewed)
- Setiap titik/vektor dapat dinyatakan sebagai **kombinasi linear** dari vektor basis
- **Linear independence** menjamin representasi yang unik - tidak ada redundansi
- Panjang vektor basis tidak perlu bernilai satu, dan panjang tersebut menentukan **skala/spacing** sistem koordinat

Toerema

Misalkan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah himpunan vektor pada vector space finite-dimensional V. S disebut *basis* untuk V jika memenuhi:

1. S **Spanning** terhadap V: Setiap vektor di V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear vektor-vektor di S
2. S **Linearly Independent**: Tidak ada vektor di S yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear vektor lainnya di S.

Mengidentifikasi basis pada $\mathbb{R}^3$ - Follows

Periksa apakah vektor dalam $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (0,0,1)$ pada $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ adalah basis dari $\mathbb{R}^3$:

Prosedur:

1 **Ubah ke bentuk $Ax = k$, cari $\mathrm{rank}(A)$, n, dan r**:
$r = 3, \quad n = dim(V) = 3$

2 **Nilai $\mathrm{rank}(A)$ (baris nonzero setelah A diubah ke REF/RREF):**

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 3$$

Spanning test:

$$k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) = (x_1, x_2, x_3)$$

Karena $r = n$, dan A adalah matriks persegi, maka:
$\det(A) = 1 \neq 0 \implies \boxed{\textbf{Spanning pada } V}$

Linear Independence test:

$$k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

Karena $r = n$, dan $\mathrm{rank}(A) = n$, maka:
$\boxed{\textbf{Tiap vektor pada } S \textbf{ Linear independent}}$

Mengidentifikasi basis pada $\mathbb{R}^3$ - Follows

Periksa apakah vektor dalam $v_1 = (2,2,0)$, $v_2 = (0,3,3)$, $v_3 = (5,0,5)$ pada $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ adalah basis dari $\mathbb{R}^3$:

Prosedur:

1 **Ubah ke bentuk $Ax = k$, cari $\operatorname{rank}(A)$, n, dan r**:
$r = 3, \quad n = dim(V) = 3$

2 **Nilai $\operatorname{rank}(A)$ (baris nonzero setelah A diubah ke REF/RREF):**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}}_{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}}_{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{R_1 \leftarrow \frac{R_1}{2} \\ R_2 \leftarrow \frac{R_2}{3} \\ R_3 \leftarrow \frac{R_3}{10}}} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{R_1 \leftarrow R_1 - \frac{5}{2} R_3 \\ R_2 \leftarrow R_2 - \frac{5}{3} R_3}} \implies \boxed{\operatorname{rank}(A) = 3}$$

Spanning test:

$$k_1(2,2,0) + k_2(3,3,0) + k_3(5,0,5) = (x_1, x_2, x_3)$$

Karena $r = n$, dan A adalah matriks persegi, maka:
$\det(A) = 1 \neq 0 \implies$ **Spanning pada V**

Linear Independence test:

$$k_1(2,2,0) + k_2(3,3,0) + k_3(5,0,5) = (0,0,0)$$

Karena $r = n$, dan $\operatorname{rank}(A) = n$, maka:
Tiap vektor pada S Linear independent

Mengidentifikasi basis pada ($M_{2\times 2}$) - Follows

Periksa apakah vektor dalam $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ adalah basis dari $M_{2\times 2}$:

Prosedur:

1. **Ubah ke bentuk $Ax = k$, cari $\mathrm{rank}(A)$, n, dan r**:
   $r = 4, \quad n = dim(M_{2\times 2}) = 4$

2. **Ubah ke bentuk $Ax = \mathbf{0}$, cari $\mathrm{rank}(A)$, n, dan r**:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{R_1 \leftarrow R_1 - R_2 \\ R_2 \leftrightarrow R_1}} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{R_3 \leftarrow R_3 - R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_3}} \rightarrow \boxed{\mathrm{rank}(A) = 4}$$

Spanning test:
Karena $r = n$, dan A adalah matriks persegi, maka:
$\det(A) = 1 \neq 0 \implies \boxed{\textbf{Spanning pada } V}$

Linear Independence test:
Karena $r = n$, dan $\mathrm{rank}(A) = n$, maka:
$\boxed{\textbf{Tiap vektor pada } S \textbf{ Linear independent}}$

Mengidentifikasi basis pada $\mathbb{R}^3$ - Follows

Periksa apakah vektor dalam $v_1 = (2, 2, 0)$, $v_2 = (0, 3, 3)$, $v_3 = (5, 0, 5)$ pada $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ adalah basis dari $\mathbb{R}^3$:

Prosedur:

1 **Ubah ke bentuk $Ax = k$, cari $\mathrm{rank}(A)$, n, dan r**:
$r = 3, \quad n = dim(V) = 3$

2 **Nilai $\mathrm{rank}(A)$ (baris nonzero setelah A diubah ke REF/RREF):**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}}_{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}}_{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{R_1 \leftarrow \frac{R_1}{2} \\ R_2 \leftarrow \frac{R_2}{3} \\ R_3 \leftarrow \frac{R_3}{10}}} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{R_1 \leftarrow R_1 - \frac{5}{2} R_3 \\ R_2 \leftarrow R_2 - \frac{5}{3} R_3}} \Longrightarrow \boxed{\mathrm{rank}(A) = 3}$$

Spanning test:

$$k_1(2, 2, 0) + k_2(3, 3, 0) + k_3(5, 0, 5) = (x_1, x_2, x_3)$$

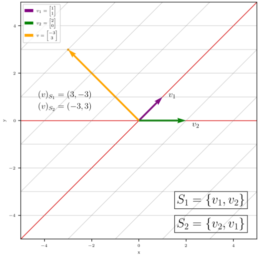
Karena $r = n$, dan A adalah matriks persegi, maka:
$\det(A) = 1 \neq 0 \implies$ $\boxed{\textbf{Spanning pada } V}$

Linear Independence test:

$$k_1(2, 2, 0) + k_2(3, 3, 0) + k_3(5, 0, 5) = (0, 0, 0)$$

Karena $r = n$, dan $\mathrm{rank}(A) = n$, maka:
$\boxed{\textbf{Tiap vektor pada } S \textbf{ Linear independent}}$

Koordinat Relatif



Toerema

Misalkan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah **ordered-basis** dari **vector space** V, dan $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n$ maka:

1. Skalar $c_1, c_2, \ldots, c_n$ disebut **koordinat dari** v **relatif terhadap** S.
2. Vektor $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ disebut *vektor koordinat* dari v relatif terhadap S, yang di notasikan sebagai: $(v)_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Contoh-1: Koordinat Relatif

Misalkan $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 9, 0)$, $v_3 = (3, 3, 4)$ membentuk basis untuk $\mathbb{R}^3$, dan $S = \{v_1, v_2, v_3\}$.

a. Tentukan vektor koordinat dari $v = (5, -1, 9)$ relatif terhadap S.

b. Tentukan $v \in \mathbb{R}^3$ jika $(v)_S = (-1, 3, 2)$.

(a) Proses mencari vektor coordinat, mirip dengan menentukan linear kombinasi:

$$Ac = v$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}_{c} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}}_{v}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}_{c} = \underbrace{\begin{pmatrix} -36 & 8 & 21 \\ 5 & -1 & -3 \\ 9 & -2 & -5 \end{pmatrix}}_{A^{-1},\ \det(A) \neq 0} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}}_{v}$$

Consistent dan Unique

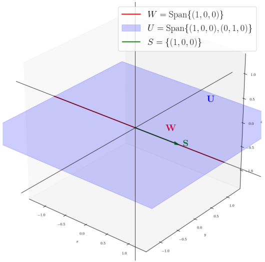
$$\underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}_{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{(v)_S = (1, -1, 2)}$$

(b) Jika $(v)_S = (-1, 3, 2)$, maka:

$$\begin{aligned} v &= -1v_1 + 3v_2 + 3v_3 \\ &= -1(1, 2, 1) + 3(2, 9, 0) + 3(3, 3, 4) \\ &= \boxed{(11, 31, 7)} \end{aligned}$$

Dimensi

Introduksi



- Pada materi sebelumnya, dapat diketahui jumlah basis vektor (r) dari S yang dapat **spanning** pada **vector space** V akan bernilai sama $r = \dim(V)$.

  $V = \mathbb{R}^3$ maka $r = 3 \implies \dim(\mathbb{R}^n) = n$
  $V = \mathbb{P}_2$ maka $r = 3 \implies \dim(\mathbb{P}_n) = n + 1$
  $V = M_{2\times}$ maka $r = 4 \implies \dim(M_{m\times n}) = m \times n$

- Tidak hanya **vector space** dari V yang dapat di **spanning**, namun bisa berlaku untuk **subspace** ataupun **solution space**, contoh gambar di samping:

  $V = \mathbb{R}^3, \dim(V) = 3 \implies$ **Vector Space**
  $S = (1,0,0),(0,1,0),\ U = \mathrm{Span}(S), \dim(U) = 2 \implies$ **Subspace**
  $S = (1,0,0),\ W = \mathrm{Span}(S), \dim(W) = 1 \implies$ **Subspace**

Teorema

Jika V adalah **finite-dimensional vector space** dengan vektor-vektor $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$ yang berada pada V ($n = \dim(V)$), maka:

a. Jika $r > n \implies S$ adalah **Linearly Dependant**.

b. Jika $r < n \implies S$ **Tidak Spanning** terhadap V.

Dimensi Solution Space

Teori

Sistem linear homogenous $Ax = 0$ dengan unknown vektor $x \in \mathbb{R}^n$ akan selalu membentuk subspace yang disebut **solution space**:

a. Jika sistem memiliki **unique solution**, maka solusi tersebut adalah solusi trivial $x = \mathbf{0}$; sehingga $W = \{\mathbf{0}\}$ dan $\dim(W) = 0$.

b. Jika sistem memiliki **Infinitely many solution**, maka terdapat $r \geq 1$ vektor linear-independen $v_1, \ldots, v_r$ sehingga subspace yang terbentuk:

$$W = \text{span}\{v_1, \ldots, v_r\}, \quad \dim(W) = n - \text{rank}(A)$$

Contoh: Dimensi Ruang Solusi

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0, \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= 0, \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 0, \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 0. \end{aligned} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{RREF}$$

Diperoleh:

$$\begin{aligned} x_1 &= -3r - 4s - 2t, & x_2 &= r, & x_3 &= -2s, \\ x_4 &= s, & x_5 &= t, & x_6 &= 0, \quad r, s, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dalam bentuk vektor:

$$(x_1, \ldots, x_6) = r(-3, 1, 0, 0, 0, 0) + s(-4, 0, -2, 1, 0, 0) + t(-2, 0, 0, 0, 1, 0).$$

Basis ruang solusi:

$$v_1 = (-3, 1, 0, 0, 0, 0), \quad v_2 = (-4, 0, -2, 1, 0, 0), \quad v_3 = (-2, 0, 0, 0, 1, 0), \quad S = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}, \quad Ax = b$$

Contoh: Dimensi Ruang Solusi

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{RREF}$$

$r = 3, \quad \mathrm{rank}(A) = 3$

Diketahui:
Solution Space (W) $\quad W \subseteq \mathbb{R}^6$

Dimensi:
$n_1 = \dim(V) = 6$
$n_2 = \dim(W) = 3$

Spanning Test
$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$

Uji Spanning test S pada V
$r < n_1$

$\boxed{S \implies \textbf{Tidak Spanning terhadap } V}$

Uji Spanning test S pada W
$r = n_2, \quad rank(A) = n_2$

$\boxed{S \implies \textbf{Spanning terhadap } W}$

Linear Independence
$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$

Diketahui:

$r \leq n_1, n_2, \quad \mathrm{rank}(A) = r$

Maka $S \implies$ $\boxed{\textbf{Linearly Independent}}$

Teorema Plus/Minus

[

Plus/Minus Theorem] Misalkan $S \subseteq V$ adalah himpunan vektor tak-kosong pada ruang vektor V.

a) Jika S **linearly independent** dan $v \in V$ tidak berada pada $\mathrm{span}(S)$, maka

$$S \cup \{v\} \quad \text{juga linearly independent.}$$

b) Jika $v \in S$ dapat diekspresikan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor lain dalam S, maka berlaku

$$\mathrm{span}(S) = \mathrm{span}(S - \{v\}).$$

Contoh: $v_1 = (2, 0, -1), v_2 = (4, 0, 7),$ dan $v_3 = (-1, 1, 4)$

Dimensi Subspace dan Vector Space

Subspace Dimension Theorem

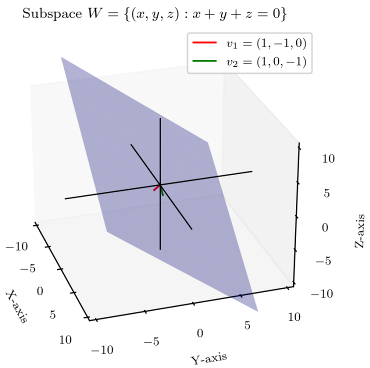
Jika W adalah subruang dari ruang vektor berhingga-dimensi V, maka berlaku:

a) W berhingga-dimensi.

b) $\dim(W) \leq \dim(V)$.

c) $W = V \iff \dim(W) = \dim(V)$.

Contoh: Dimensi Subspace dan Vector Space



Misalkan $V = \mathbb{R}^3$ dan

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

$V = \mathbb{R}^3$ memiliki $\dim(V) = 3$.

Subruang W ditentukan oleh satu persamaan linear, sehingga $\dim(W) = 2$.

Jelas $\dim(W) \leq \dim(V)$.

Karena $\dim(W) \neq \dim(V)$, maka $W \neq V$.

Basis: $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$ membentuk basis untuk W.

Kesimpulan: Teorema Subspace Dimension berlaku:

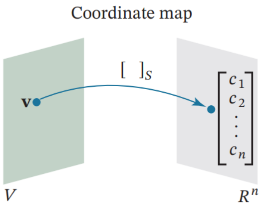
$$\dim(W) = 2 < 3 = \dim(V).$$

Dengan menambahkan vektor $u = (0, 0, 1)$ ke dalam S
$S \cup u$ dan $W = \text{span}(S \cup u)$, maka

$S \implies \boxed{\textbf{Dapat Spanning pada V}, \quad \dim(V) = \dim(W)}$

Pergantian Basis

Pergantian Basis: Masalah



Diberikan vektor v pada ruang vektor berdimensi hingga V, dengan basis lama $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ dan basis baru $B' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$.
Misalkan pada $\mathbb{R}^2$:

$$B = \{u_1, u_2\}, \quad B' = \{u'_1, u'_2\}, \quad [u_1]_{B'} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \ [u_2]_{B'} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}.$$

Maka:

$$u_1 = au'_1 + bu'_2, \quad u_2 = cu'_1 + du'_2.$$

Untuk vektor $v \in V$ yang merupakan kombinasi linear basis B:

$$v = k_1 u_1 + k_2 u_2, \quad [v]_B = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix},$$

Koordinat relatif terhadap basis baru B' diperoleh sebagai:

$$[v]_{B'} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} [v]_B = [[u_1]_{B'} \mid [u_2]_{B'}][v]_B = P_{B \to B'}[v]_B.$$

Pergantian Basis: Contoh $\mathbb{R}^2$ - 1

Diberikan $v = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, dengan basis lama $B = \left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ dan basis baru $B' = \left\{ u_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2' = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.
Koordinat basis lama:

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Cara mencari $[u_1]_{B'}$ dan $[u_2]_{B'}$:
Untuk mencari koordinat vektor basis lama (u_1 dan u_2) terhadap basis baru B', kita selesaikan:

$$u_1 = au_1' + bu_2' \quad \text{dan} \quad u_2 = cu_1' + du_2'$$

Untuk $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - b \\ a + 2b \end{bmatrix}$$

Solusi sistem:

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{3}, \quad b = -\frac{1}{3}$$

Jadi $[u_1]_{B'} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Pergantian Basis: Contoh $\mathbb{R}^2$ - 2

Untuk $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c - d \\ c + 2d \end{bmatrix}$$

Solusi sistem:

$$\begin{cases} c - d = 0 \\ c + 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{1}{3}, \quad d = \frac{1}{3}$$

Jadi $[u_2]_{B'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Matriks perubahan basis $B \to B'$ (kolom = vektor basis lama dalam basis baru):

$$P_{B \to B'} = \begin{bmatrix} [u_1]_{B'} & [u_2]_{B'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Koordinat relatif terhadap basis baru:

$$[v]_{B'} = P_{B \to B'} [v]_B = \begin{bmatrix} \frac{17}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Vektor aktual dalam basis baru:

$$\boxed{v = \frac{17}{3} u_1' + \frac{2}{3} u_2'}$$

Pergantian Basis: Contoh P_2 - 1

Ruang polinomial P_2, dengan basis lama

$$B = \{1, x, x^2\}, \quad B' = \{1 + x,\ x + x^2,\ 1 - x\}.$$

Mencari matriks transisi $P_{B \to B'}$:
Kolom matriks transisi adalah koordinat basis lama terhadap basis baru:

$[1]_{B'}$: selesaikan $1 = a(1 + x) + b(x + x^2) + c(1 - x)$

$$1 = (a + c) + (a + b - c)x + bx^2$$

Sistem:

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ a + b - c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = \tfrac{1}{2},\ b = 0,\ c = \tfrac{1}{2}.$$

Jadi $[1]_{B'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

$[x]_{B'}$: selesaikan $x = a(1 + x) + b(x + x^2) + c(1 - x)$

$$x = (a + c) + (a + b - c)x + bx^2$$

Sistem:

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + b - c = 1 \\ b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = \tfrac{1}{2},\ b = 0,\ c = -\tfrac{1}{2}.$$

Jadi $[x]_{B'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Pergantian Basis: Contoh P_2 - 2

$[x^2]_{B'}$: selesaikan $x^2 = a(1+x) + b(x+x^2) + c(1-x)$

$$x^2 = (a+c) + (a+b-c)x + bx^2$$

Sistem:

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + b - c = 0 \\ b = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = -\tfrac{1}{2},\ b = 1,\ c = \tfrac{1}{2}.$$

Jadi $[x^2]_{B'} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Matriks perubahan basis:

$$P_{B \to B'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Misal $p(x) = 2 + 3x - x^2$, koordinat dalam basis lama:

$$[p]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Konversi ke basis baru:

$$[p]_{B'} = P_{B \to B'}[p]_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Verifikasi:

$$p(x) = 3(1+x) + (-1)(x+x^2) + (-1)(1-x)$$

$$= (3+3x) + (-x-x^2) + (-1+x) = 2 + 3x - x^2$$

Daftar Pustaka

Daftar Pustaka I