ALJABAR LINEAR

Pertemuan ke-15 dan 16 - Eigenvalue, Eigenvector dan Diagonalisasi

Oleh:

Annastya Bagas Dewantara, S.T., M.T.

(email: annastya.bagas@ui.ac.id)

Fakultas Teknik

Universitas Indonesia

Daftar Paparan

Ujian Tengah Semester

Soal-1

Jika diberikan linear equation system dalam bentuk augmented matrix sebagai berikut, Tentukan nilai k untuk mendapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & \underbrace{k^2-4}_{z} & \underbrace{k-2}_{b_3} \end{bmatrix}$$

Infinitely Many Solutions
Terjadi ketika $z = 0$ dan $b_3 = 0$, maka:

$$k^2 - 4 = 0$$
$$(k+2)(k-2) = 0$$
$$k_1 = 2 \cup k_2 = -2$$
$$b_3 = k - 2$$
$$= (2) - 2 = 0, \quad \boxed{k = 2}$$
$$= (-2) - 2 = -4, \quad \boxed{k = -2}$$

Maka linear equation system memiliki **Infinitely Many Solutions** jika $k = 2$

No Solutions
Terjadi ketika $z = 0$ dan $b_3 \neq 0$, maka:

$$k^2 - 4 = 0$$
$$(k+2)(k-2) = 0$$
$$k_1 = 2 \cup k_2 = -2$$

Maka linear equation system adalah **No Solutions** jika $k = -2$

Unique Solutions
Terjadi ketika $z \neq 0$, maka:

$$k^2 - 4 \neq 0$$
$$(k+2)(k-2) \neq 0$$
$$k_1 \neq 2 \cup k_2 \neq -2$$

Maka linear equation system memiliki **Unique Solutions** jika $\{k \in \mathbb{R} \mid k \neq \{2, -2\}\}$

Soal-2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) **Minor**:

$$M = \begin{pmatrix} 14 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & -5 \\ -13 & 15 & 12 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 14 & 5 & -4 \\ -3 & 1 & 5 \\ -13 & -15 & 12 \end{pmatrix}.$$

(b) **Determinan**:

$$\det(A) = 3 \cdot C_{11} + (-1) \cdot C_{12} + 2 \cdot C_{13} = 3 \cdot 14 + (-1) \cdot 5 + 2 \cdot (-4) = 29.$$

(c) **Adjoint**:

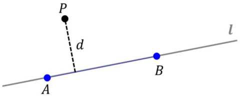
$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 14 & -3 & -13 \\ 5 & 1 & -15 \\ -4 & 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

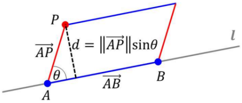
(d) **Invers**:

$$A^{-1} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 14 & -3 & -13 \\ 5 & 1 & -15 \\ -4 & 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

Soal-3

Diketahui sebuah garis L di $\mathbb{R}^3$ melalui titik-titik $A = (-1, 3, -5)$ dan $B = (0, 5, -3)$, dan terdapat sebuah titik lain $P = (-1, 10, 9)$. Hitung jarak (d) titik P ke garis L.





$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 2, 2)$$

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (0, 7, 14)$$

$$\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 7 & 14 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (7 \cdot 2 - 14 \cdot 2)\mathbf{i} - (0 \cdot 2 - 14 \cdot 1)\mathbf{j} + (0 \cdot 2 - 7 \cdot 1)\mathbf{k}$$

$$= (-14, 14, -7)$$

$$\left\|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-14)^2 + 14^2 + (-7)^2} = \sqrt{441} = 21$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$A = P \times d$$

$$\left\|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times d$$

$$d = \frac{\left\|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$$

$$d = \frac{21}{3}$$

Maka jarak dari titik P ke garis L adalah $\boxed{d = 7}$

Soal-4

Jika V adalah **set of ordered pairs** dari $V = \mathbb{R}^2$, dan mengikuti operasi penambahan dan perkalian pada $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$:

$$u + v = (u_1 + v_1, v_2), \quad ku = (ku_1,\ u_2).$$

Contoh:

$$u = (3,1), \quad v = (2,2), \quad w = (1,1), \quad k = 3,\ m = 2.$$

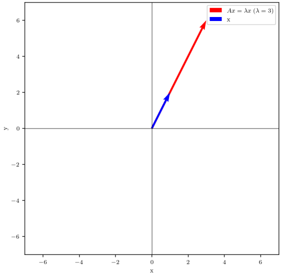
Verifikasi aksioma:

1. *Aksioma-1:* $u + v = (5,2) \in \mathbb{R}^2 \leftarrow \boxed{\textit{True}}$.
2. *Aksioma-6:* $ku = 3(3,1) = (9,1) \in \mathbb{R}^2 \leftarrow \boxed{\textit{True}}$.
3. *Aksioma-2:* $u + v = (5,2),\ v + u = (5,1),\ u + v \neq v + u \leftarrow \boxed{\textit{Violate}}$.
4. *Aksioma-4* $0 + u = (3,1), \quad u + 0 = (3,0) \leftarrow \boxed{\textit{Violate}}$.
5. *Aksioma-8* $(k + m)u = 5u = (15,1)$,
   $ku + mu = (9,1) + (6,1) = (15,1). \leftarrow \boxed{\textit{True}}$.

Kesimpulan: Karena model ini melanggar beberapa aksioma, maka V bukan Ruang Vektor.

Eigen Value dan Eigen Vector

Definisi Eigenvalue dan Eigenvector



Definisi 1

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor nonzero $x \in \mathbb{R}^n$ disebut **eigenvector** dari A jika:

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut **eigenvalue** dari A, dan x disebut eigenvector yang sesuai dengan λ.

Eigenvector:
Vektor hasil transformasi pasti **Collinear**.
Eigenvalue:
Besarnya perubahan vektor setelah transformasi, yaitu faktor skala (stretch/shrink).

Menghitung Eigenvector dan Eigenvalue

$$
\begin{aligned}
Ax &= \lambda x \\
Ax &= \lambda I x \\
(\lambda I - A)x &= 0
\end{aligned}
$$

Agar ada solusi non trivial $x \neq 0$, matriks $(\lambda I - A)$ harus **singular**. Jika tidak, maka:

$$
\begin{aligned}
(\lambda I - A)x &= 0 \\
(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)x &= (\lambda I - A)^{-1}0 \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

Sehingga syarat dari matriks $(\lambda I - A)$ singular dan juga persamaan karakteristik dari A adalah:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Jika $A = [a_{ij}]$, determinan dapat ditulis sebagai:

$$
\begin{vmatrix}
\lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\
-a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn}
\end{vmatrix} = 0
$$

Ketika $\det(\lambda I - A)$ di jabarkan, maka akan membentuk polinomial karakteristik, seperti:

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

Contoh 2 — Eigenvalue Matriks 2×2

Cari eigenvalue, jika diketahui A adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix},$$

Eigenvalue adalah solusi dari

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

Untuk A di atas:

$$\det\begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0.$$

Sehingga

$$\lambda = 3,\ -1.$$

Contoh 2 — Eigenvalue Matriks 3×3

Cari eigenvalue, jika diketahui A adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{pmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4.$$

Faktorisasi, persamaan tersebut menjadi:

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1).$$

Selesaikan kuadrat:

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Eigenvalue dari A:

$$\lambda = 4, \quad \lambda = 2 + \sqrt{3}, \quad \lambda = 2 - \sqrt{3}.$$

Menemukan Eigenvector dan Basis Eigenspace

Jika nilai eigenvalue λ dari A diketahui, maka nilai eigenvector bisa di dapatkan dengan menyelesaikan sistem linear

$$(\lambda I - A)x = 0.$$

Nilai eigenvector dari A terhadap λ, dapat ditemukan dari **solution space/eigenspace**, yang dapat dilihat sebagai:

1. Null space dari $\lambda I - A$. $\implies \mathrm{Null}(\lambda I - A)$
2. Kernel dari matriks transformasi. $\implies \ker(T_{\lambda I - A})$
3. Vektor yang memenuhi $Ax = \lambda x$. $\implies \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax = \lambda x\}$

Contoh 3 — Basis untuk Eigenspace

Tentukan eigenvector dan basis untuk eigenspace matriks

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -3 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda + 1) - 6 \\ &= \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3).\end{aligned}$$

Jadi $\lambda = 2$ dan $\lambda = -3$. ●

Pada $\lambda = 2$:

$$(2I - A) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned} \implies x_1 = x_2,\ x_2 = t$$

Basis eigenspace: $x = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$.

Pada $\lambda = -3$:

$$(-3I - A) = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad -2x_1 - 3x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\tfrac{3}{2}x_2.$$

$$\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 &= 0 \\ -2x_1 - 3x_2 &= 0 \end{aligned} \implies x_1 = \frac{-3}{2}x_2,\ x_2 = t$$

Ambil $x_2 = 2$ menghasilkan vektor $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Basis eigenspace:

$x = \left\{ t \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$.

Contoh 4 — Basis untuk Eigenspace

Cari basis eigenspace untuk

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$$

Maka eigenvalue berbeda: $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$.
Selesaikan $(2I - A)x = 0$:

$$(2I - A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dari eliminasi: $x_1 = -s,\ x_2 = t,\ x_3 = s$. Jadi

$$x = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Selesaikan $(1I - A)x = 0$:

$$(1I - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dari eliminasi: $x_1 = -2s,\ x_2 = s,\ x_3 = s$. Jadi semua vektor adalah

$$x = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Diagonalization

Introduksi

Diagonalisasi merupakan metode untuk menyederhanakan matriks A menjadi bentuk diagonal D melalui transformasi keserupaan dengan matriks invertibel P.

Contoh:
Ketimbang menghitung A^2 dan A^3 secara langsung untuk:

$$A^k = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

dapat menggunakan diagonalisasi $A^k = PD^kP^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} A^2 &= PD^2P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 34 & -9 \\ 18 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= PD^3P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 186 & -61 \\ 122 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Similarity Transformation

Jika basis dari **eigenvector** matriks A diketahui, maka representasi dari matriks A tersebut dalam basis tersebut adalah matriks diagonal D. Transformasi dari A ke D ini disebut **similarity transformation**.:

$$\boxed{D = P^{-1}AP}$$

Jika A memiliki n linearly independent eigenvectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

$$P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_n]$$

$$\begin{aligned} AP &= A[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_n] \\ &= [A\mathbf{v}_1 \ A\mathbf{v}_2 \ \cdots \ A\mathbf{v}_n] \\ &= [\lambda_1\mathbf{v}_1 \ \lambda_2\mathbf{v}_2 \ \cdots \ \lambda_n\mathbf{v}_n] \implies \boxed{A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i} \\ &= [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$AP = \underbrace{[\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2 \ \ \cdots \ \ \mathbf{v}_n]}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{D} \quad AP \quad =$$

$$P^{-1}AP = P^{-1}PD \implies \boxed{\times P^{-1}}$$

Maka di dapatkan persamaan akhir:

$$\boxed{P^{-1}AP = D}$$

Syarat Diagonalisasi

Teori

Jika kolom-kolom matriks $P = [p_1 \ \dots \ p_n]$ adalah n vektor eigen linier-independen dari A dan $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ memuat eigenvalue yang bersesuaian, maka

$$AP = PD \quad \Rightarrow \quad P^{-1}AP = D.$$

Dengan kata lain, A **diagonalizable** jika ada basis $\mathbb{R}^n$ yang seluruhnya terdiri dari eigenvector A.

Syarat antara lain:

1. Jika $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ adalah *eigenvalue berbeda* dari A dan $v_1, \dots, v_k$ vektor eigen bersesuaian, maka
$$\{v_1, \dots, v_k\} \text{ linier independen.}$$
2. Jika matriks $n \times n$ mempunyai n eigenvalue berbeda, maka matriks tersebut **diagonalizable**.
3. Jika tiap λ_i memiliki satu set vektor eigen linier-independen S_i, maka gabungan semua S_i juga linier-independen.

Prosedur Diagonalisasi & Contoh

Prosedur (singkat)

1. Cari basis setiap eigenspace; hitung total vektor. Jika total $= n$, maka diagonalizable.
2. Bentuk $P = [\, p_1 \;\; p_2 \;\; \cdots \;\; p_n \,]$ dari vektor basis tersebut.
3. Maka $P^{-1}AP$ adalah matriks diagonal dengan diagonal $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sesuai kolom P.

Contoh 1 — Diagonalisasi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Cari matriks P sehingga $P^{-1}AP$ diagonal.
Persamaan karakteristik: $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$. Basis eigenspace yang diperoleh:

$$\lambda = 2: \; p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \lambda = 1: \; p_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bentuk P dari kolom-kolom basis:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Maka

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh 2 — Matriks yang Tidak Diagonalizable

Tunjukkan bahwa matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

tidak diagonalizable.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ 3 & -5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$$

Jadi eigenvalue berbeda: $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$.

$$\lambda = 1 : \quad p_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda = 2 : \quad p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matriks A berukuran 3×3 tetapi hanya memiliki **dua** vektor basis eigen independen. Karena jumlah vektor eigen independen < 3, maka A **tidak diagonalizable**.

Pangkat Diagonalisasi Matriks

Jika A adalah matriks $n \times n$ yang diagonalizable dengan $A = PDP^{-1}$ dan

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

maka perhitungan pangkat A^k disederhanakan lewat D^k.

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= D \\
(P^{-1}AP)^2 &= D^2 \\
(P^{-1}AP)^2 &= P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}A^2P \implies \boxed{D^2 = P^{-1}A^2P}
\end{aligned}$$

Maka persamaan umumnya, dapat dinyatakan:

$$A^k = P \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}}_{D^k} P^{-1}$$

Contoh Pangkat Diagonalisasi Matriks

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} A^2 &= PD^2P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 34 & -9 \\ 18 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= PD^3P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 186 & -61 \\ 122 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tugas

Tugas ke-4

4.1 No. 4, 8, 10, 12, 14

4.2 No. 4, 7, 8, 12, 20

(Deadline: 18/11/2025 Offline di kelas, Portofolio)

Daftar Pustaka

Daftar Pustaka I