ALJABAR LINEAR

Pertemuan ke-12 - Row Space, Column Space, Null Space, Rank, Nulitas, dan Fundamental Matrix Spaces

Oleh:
Annastya Bagas Dewantara, S.T., M.T.
(email: annastya.bagas@ui.ac.id)

Fakultas Teknik
Universitas Indonesia

Daftar Paparan

Row Space, Column Space, dan Null Space

Matrix Space

Jika A adalah matriks $m \times n$, maka:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Row space:
$\mathrm{row}(A)$ adalah **subspace** dari $\mathbb{R}^n$ yang merupakan spanning dari **row vector** pada A.

$$r_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$
$$r_2 = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix}$$
$$r_m = \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$W = \mathrm{span}\left(\{r_1, r_2, \cdots r_m\}\right), \quad W \subseteq \mathbb{R}^n$$

Column space:
$\mathrm{col}(A)$ adalah **subspace** dari $\mathbb{R}^n$ yang merupakan spanning dari **row column** pada A.

$$c_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad c_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$W = \mathrm{span}\left(\{c_1, c_2, \cdots c_n\}\right), \quad W \subseteq \mathbb{R}^m$$

Null space:
$\mathrm{null}(A)$ adalah **solution space** dari **homogenous system** $Ax = 0$, yang merupakan **subspace** dari $\mathbb{R}^n$.

Sistem Persamaan Linear dan Column Vector

$$Ax = b$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x} = b$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b, \quad c_i = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}}_{\substack{\textbf{column vector} \\ \text{dari kolom ke-i}}}$$

$$\underbrace{x_1 c_1 + x_2 c_2 + \cdots + x_n c_n}_{Ax} = b$$

Given system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Solution:

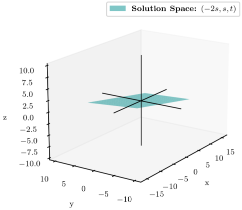
- Solve by Gaussian elimination: $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 3$
- Column vectors of A:

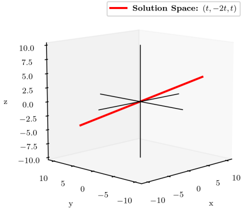
$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$2\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 + 3\mathbf{c}_3 = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Solusi dari $\boxed{Ax = b \textbf{ adalah consistent}}$, ketika b adalah **linear kombinasi** dari **column vector** pada A dan $b \in \mathbb{R}^m$.

Solution Space





Solution Space:

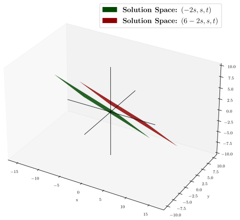
2 Free Variable Solution

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{\substack{\mathrm{rank}(A)=1 \\ \textbf{Free variable } = n - \mathrm{rank}(A) = 2}}, \quad \textbf{Solusi pada: } (-2s - 3t, s, t)$$

1 Free Variable Solution

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{\substack{\mathrm{rank}(A)=2 \\ \textbf{Free variable } = n - \mathrm{rank}(A) = 1}}, \quad \textbf{Solusi pada: } (t, -2t, t)$$

Relasi $Ax = 0$ dan $Ax = b$



Homogenous Linear Equation

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_h}$$

Non-Homogenous Linear Equation

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_h} + \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{x_0}$$

Homogenous Linear Equation

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \textbf{Solusi:} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - 3t \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

Non-Homogenous Linear Equation

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 4y + 6z = 12 \\ 3x + 6y + 9z = 18 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \textbf{Solusi:} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - 2s - 3t \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

General Solution of a Linear System

Misalkan $Ax = b$ adalah sistem persamaan linear yang **konsisten**, Jika x_0 adalah salah satu solusi dari $Ax = b$, dan $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ adalah basis untuk **null space** dari A, maka:

$$x = x_0 + c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

1. Semua solusi dari $Ax = b$ dapat di temukan dengan menggunakan kombinasi linear $x_1, c_2, \cdots, c_n$ dan x_0.
2. Solusi dari **Non Homogenous Linear System** adalah translasi dari solusi **Homogenous Linear System**

Teorema Basis dari Row Spaces, Column Spaces dan Null Spaces

Teorema

Misalkan A dan B adalah matriks yang *row equivalent*. Maka:

(a) A dan B memiliki **row space** yang sama:

$$\mathrm{row}(A) = \mathrm{row}(B).$$

$$\mathrm{span}\left(\left\{r_1^A, r_2^A, \cdots r_m^A\right\}\right) = \mathrm{span}\left(\left\{r_1^B, r_2^B, \cdots r_m^B\right\}\right)$$

(b) A dan B memiliki **null space** yang sama:

$$\mathrm{null}(A) = \mathrm{null}(B).$$

Teorema

Jika R adalah matriks dalam *row echelon form*, maka:

- Vektor baris **nonzero** dari R membentuk **basis** untuk **row space** matriks R.
- Vektor kolom yang berisi **leading** 1 membentuk **basis** untuk **column space** matriks R.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

B adalah ERO $R_2 \to R_2 - 2R_1$ dari A

Row space:

$$\mathrm{row}(A) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}$$
$$\mathrm{row}(B) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}$$

Null space:

$$(A\mathbf{x} = \mathbf{0}), \quad x + 2y = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$(B\mathbf{x} = \mathbf{0}), \quad x + 2y = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Row space basis

$$\mathrm{row}(R) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

Column space basis

$$\mathrm{col}(R) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

Row Equivalent

Suatu metriks A dan B dikatakan **Row Equivalent** jika salah satu matriks dapat diperoleh dari matriks lainnya dengan melakukan serangkaian **Elementary Row Operation**.

Elementary Row Operation
A → B

1. Baris dikali dengan nonzero constant c
2. Tukar dua baris
3. Menambahkan konstanta dikalikan satu baris dengan baris lainnya

Inverse Row Operation
B → A

1. Baris yang sama dikali dengan nonzero constant $\frac{1}{c}$
2. Tukar dua baris yang sama
3. Jika matriks B diperoleh dari A dengan operasi $R_j \to R_j + cR_i$, maka operasi invers adalah $R_j \to R_j - cR_i$

Contoh:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}}_{\textbf{Step 1: } R_1 \to 2R_1} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}}_{\textbf{Step 2: } R_2 \to R_2 - 3R_1} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & -7 & -12 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}}_{\textbf{Step 3: } R_2 \leftrightarrow R_3} \to B = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \\ -2 & -7 & -12 \end{bmatrix}}$$

$$B = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \\ -2 & -7 & -12 \end{bmatrix}}_{\textbf{Step 1: } R_2 \leftrightarrow R_3} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & -7 & -12 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}}_{\textbf{Step 2: } R_2 \to R_2 + 3R_1} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}}_{\textbf{Step 1: } R_1 \to \frac{1}{2} R_1} \to A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Bases from Row and Column Vectors

Teorema

Jika sebuah matriks A direduksi ke **row echelon form** R, maka:

- Basis untuk **row space** dapat diperoleh langsung dari baris **nonzero** R. Basis tersebut juga berlaku sebagai basis untuk $row(A)$.
- Basis untuk **column space** R **tidak selalu** menjadi basis untuk $col(A)$, karena **Elementary Row Operation (ERO)** dapat mengubah **column space**

Teorema

Jika A dan B adalah matriks yang **row equivalent**, maka:

1. Sekumpulan kolom dari A adalah **linearly independent** $\iff$ kolom terkait di B juga **linearly independent**.
2. Sekumpulan kolom dari A membentuk basis $col(A)$ $\iff$ kolom terkait di B membentuk basis $col(B)$.

Contoh: Basis untuk Column Space

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{RREF } (R)}$$

Column space dari R di dapatkan dari **column vector** yang memiliki **leading 1**

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sehingga basis dari **column space** A adalah:

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad c_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Contoh: Basis dari Row Space

Diberikan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Langkah-langkah:

Transpos matriks: A^T untuk mengubah row space menjadi column space:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 15 & 18 \\ 0 & -2 & 10 & 8 \\ 3 & 6 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Reduksi ke bentuk eselon baris:

$$\mathrm{RREF} \text{ dari } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kolom-kolom pivot pada A^T adalah 1, 2, 4. Kolom-kolom ini membentuk basis untuk $col(A^T)$:

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad c_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 18 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Transpos kembali untuk mendapatkan basis row space dari A:

$$r_1 = [1, -2, 0, 0, 3], \quad r_2 = [2, -5, -3, -2, 6], \quad r_4 = [2, 6, 18, 8, 6].$$

Maka

$$\mathcal{B}_{row(A)} = \{ r_1, r_2, r_4 \}, \quad \dim(row(A)) = 3.$$

Contoh : Basis dan Kombinasi Linear

Data:

$$v_1 = (1, -2, 0, 3),\ v_2 = (2, -5, -3, 6),$$

$$v_3 = (0, 1, 3, 0),\ v_4 = (2, -1, 4, -7),$$

$$v_5 = (5, -8, 1, 2).$$

Matriks kolom:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathrm{RREF}(A)}$$

Kolom pivot: $1, 2, 4 \Rightarrow \{v_1, v_2, v_4\}$ basis.

Linear Relation: Dari RREF:

$$w_3 = 2w_1 - w_2,\ w_5 = w_1 + w_2 + w_4$$

Translasi:

$$v_3 = 2v_1 - v_2, \quad v_5 = v_1 + v_2 + v_4.$$

Ringkasan:
Basis $= \{v_1, v_2, v_4\}$
Vektor lain dinyatakan sebagai kombinasi linear basis.

Rank, Nullity, dan Matrix Spaces

Example: Rank and Nullity Check

Diberikan

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}^{4\times 6} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jumlah kolom $= 6 \implies \text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = 6$ (Teorema Dimensi).

Dari hasil reduksi (lihat Contoh 1), diperoleh

$$\text{rank}(A) = 2, \quad \text{nullity}(A) = 4.$$

Verifikasi: $2 + 4 = 6$ ✓.

Kesimpulan: Teorema dimensi konsisten, ruang baris/kolom A berdimensi 2 dan ruang null berdimensi 4.

Tugas

Tugas

Tugas ke-3

3.1 No. 12

3.3 No. 27, 29

3.4 No. 20

3.5 No. 31

Tugas ke-4

4.1 No. 7, 9

4.2 No. 3

4.3 No. 9

4.9 No. 1

(Deadline: 04/11/2025 Offline di kelas, Portofolio, Tiap Tugas beda kertas)

Daftar Pustaka

Daftar Pustaka I