



# ALJABAR LINEAR

**Pertemuan ke-12** - Row Space, Column Space, Null Space, Rank, Nulitas, dan Fundamental Matrix Spaces

**Oleh:**

Annastya Bagas Dewantara, S.T., M.T.  
(email: [annastya.bagas@ui.ac.id](mailto:annastya.bagas@ui.ac.id))

**Fakultas Teknik**  
Universitas Indonesia

# Daftar Paparan

- 1 Row Space, Column Space, dan Null Space
- 2 Rank, Nullity, dan Matrix Spaces
- 3 Tugas
- 4 Daftar Pustaka

## Row Space, Column Space, dan Null Space

- 1 **Row Space, Column Space, dan Null Space**
  - 2 Rank, Nullity, dan Matrix Spaces
  - 3 Tugas
  - 4 **Daftar Pustaka**

# Matrix Space

Jika  $A$  adalah matriks  $m \times n$ , maka:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

**Row space:**

$\text{row}(A)$  adalah **subspace** dari  $\mathbb{R}^n$  yang merupakan spanning dari **row vector** pada  $A$ .

$$r_1 = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}]$$

$$r_2 = [a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}]$$

$$r_m = [a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}]$$

$$W = \text{span}(\{r_1, r_2, \cdots r_m\}), \quad W \subseteq \mathbb{R}^n$$

**Column space:**

$\text{col}(A)$  adalah **subspace** dari  $\mathbb{R}^m$  yang merupakan spanning dari **row column** pada  $A$ .

$$c_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad c_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$W = \text{span}(\{c_1, c_2, \cdots c_n\}), \quad W \subseteq \mathbb{R}^m$$

**Null space:**

$\text{null}(A)$  adalah **solution space** dari **homogenous system**  $Ax = 0$ , yang merupakan **subspace** dari  $\mathbb{R}^n$ .

# Sistem Persamaan Linear dan Column Vector

$$Ax = b$$
$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_x = b$$
$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b, \quad c_i = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{column vector} \\ \text{dari kolom ke-}i}}$$
$$\underbrace{x_1 c_1 + x_2 c_2 + \cdots + x_n c_n}_{Ax} = b$$

Given system  $Ax = b$ :

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Solution:

- Solve by Gaussian elimination:  
 $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 3$

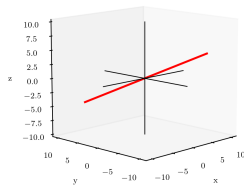
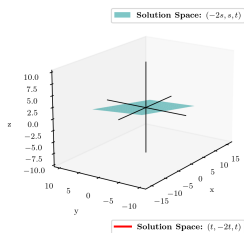
- Column vectors of  $A$ :

$$c_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$2c_1 - c_2 + 3c_3 = 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Solusi dari  $Ax = b$  adalah **consistent**, ketika  $b$  adalah **linear kombinasi** dari **column vector** pada  $A$  dan  $b \in \mathbb{R}^m$ .

# Solution Space



## Solution Space:

### 2 Free Variable Solution

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \text{Solusi pada: } (-2s - 3t, s, t)$$

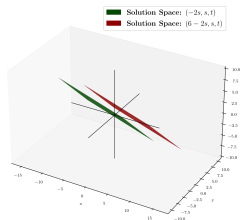
$\text{rank}(A)=1$   
Free variable  $= n - \text{rank}(A) = 2$

### 1 Free Variable Solution

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \text{Solusi pada: } (t, -2t, t)$$

$\text{rank}(A)=2$   
Free variable  $= n - \text{rank}(A) = 1$

# Relasi $Ax = 0$ dan $Ax = b$



## Homogenous Linear Equation

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Solusi: } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - 3t \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

## Non-Homogenous Linear Equation

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 4y + 6z = 12 \\ 3x + 6y + 9z = 18 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Solusi: } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - 2s - 3t \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

## Homogenous Linear Equation

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{x_h} + t \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_h}$$

## Non-Homogenous Linear Equation

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{x_h} + t \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_h} + \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{x_0}$$

## General Solution of a Linear System

Misalkan  $Ax = b$  adalah sistem persamaan linear yang **konsisten**. Jika  $x_0$  adalah salah satu solusi dari  $Ax = b$ , dan  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  adalah basis untuk **null space** dari  $A$ , maka:

$$x = x_0 + c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

- Semua solusi dari  $Ax = b$  dapat di temukan dengan menggunakan kombinasi linear  $x_1, c_2, \dots, c_n$  dan  $x_0$ .
- Solusi dari **Non Homogenous Linear System** adalah translasi dari solusi **Homogenous Linear System**

# Teorema Basis dari Row Spaces, Column Spaces dan Null Spaces

## Teorema

Misalkan  $A$  dan  $B$  adalah matriks yang *row equivalent*. Maka:

- (a)  $A$  dan  $B$  memiliki **row space** yang sama:

$$\text{row}(A) = \text{row}(B).$$

$$\text{span} \left( \{r_1^A, r_2^A, \dots, r_m^A\} \right) = \text{span} \left( \{r_1^B, r_2^B, \dots, r_m^B\} \right)$$

- (b)  $A$  dan  $B$  memiliki **null space** yang sama:

$$\text{null}(A) = \text{null}(B).$$

## Teorema

Jika  $R$  adalah matriks dalam *row echelon form*, maka:

- Vektor baris **nonzero** dari  $R$  membentuk **basis** untuk **row space** matriks  $R$ .
- Vektor kolom yang berisi **leading 1** membentuk **basis** untuk **column space** matriks  $R$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$B$  adalah ERO  $R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$  dari  $A$

**Row space:**

$$\text{row}(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{row}(B) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

**Null space:**

$$(Ax = 0), \quad x + 2y = 0 \Rightarrow x = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(Bx = 0), \quad x + 2y = 0 \Rightarrow x = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Row space basis**

$$\text{row}(R) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

**Column space basis**

$$\text{col}(R) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$



# Row Equivalent

Suatu matriks  $A$  dan  $B$  dikatakan **Row Equivalent** jika salah satu matriks dapat diperoleh dari matriks lainnya dengan melakukan serangkaian **Elementary Row Operation**.

## Elementary Row Operation

$$A \rightarrow B$$

1. Baris dikali dengan nonzero constant  $c$
2. Tukar dua baris
3. Menambahkan konstanta dikalikan satu baris dengan baris lainnya

## Inverse Row Operation

$$B \rightarrow A$$

1. Baris yang sama dikali dengan nonzero constant  $\frac{1}{c}$
2. Tukar dua baris yang sama
3. Jika matriks  $B$  diperoleh dari  $A$  dengan operasi  $R_j \rightarrow R_j + cR_i$ , maka operasi invers adalah  $R_j \rightarrow R_j - cR_i$

Contoh:

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\text{Step 1: } R_1 \rightarrow 2R_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Step 2: } R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & -7 & -12 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Step 3: } R_2 \leftrightarrow R_3} B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \\ -2 & -7 & -12 \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \\ -2 & -7 & -12 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\text{Step 1: } R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & -7 & -12 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Step 2: } R_2 \rightarrow R_2 + 3R_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Step 1: } R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# Bases from Row and Column Vectors

## Teorema

Jika sebuah matriks  $A$  direduksi ke **row echelon form**  $R$ , maka:

- Basis untuk **row space** dapat diperoleh langsung dari baris **nonzero**  $R$ . Basis tersebut juga berlaku sebagai basis untuk  $\text{row}(A)$ .
- Basis untuk **column space**  $R$  **tidak selalu** menjadi basis untuk  $\text{col}(A)$ , karena **Elementary Row Operation (ERO)** dapat mengubah **column space**

## Teorema

Jika  $A$  dan  $B$  adalah matriks yang **row equivalent**, maka:

1. Sekumpulan kolom dari  $A$  adalah **linearly independent**  $\iff$  kolom terkait di  $B$  juga **linearly independent**.
2. Sekumpulan kolom dari  $A$  membentuk basis  $\text{col}(A)$   $\iff$  kolom terkait di  $B$  membentuk basis  $\text{col}(B)$ .

## Contoh: Basis untuk Column Space

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{RREF}(R)}$$

Column space dari R di dapatkan dari **column vector** yang memiliki **leading 1**

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sehingga basis dari **column space** A adalah:

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad c_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

# Contoh: Basis dari Row Space

Diberikan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Langkah-langkah:

Transpos matriks:  $A^T$  untuk mengubah row space menjadi column space:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 15 & 18 \\ 0 & -2 & 10 & 8 \\ 3 & 6 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Reduksi ke bentuk eselon baris:

$$\text{RREF dari } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Maka

$$\mathcal{B}_{\text{row}(A)} = \{ r_1, r_2, r_4 \}, \quad \dim(\text{row}(A)) = 3.$$

Kolom-kolom pivot pada  $A^T$  adalah 1, 2, 4. Kolom-kolom ini membentuk basis untuk  $\text{col}(A^T)$ :

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad c_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 18 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Transpos kembali untuk mendapatkan basis row space dari  $A$ :

$$r_1 = [1, -2, 0, 0, 3], \quad r_2 = [2, -5, -3, -2, 6], \quad r_4 = [2, 6, 18, 8, 6].$$

# Contoh : Basis dan Kombinasi Linear

Data:

$$v_1 = (1, -2, 0, 3), \quad v_2 = (2, -5, -3, 6),$$

$$v_3 = (0, 1, 3, 0), \quad v_4 = (2, -1, 4, -7),$$

$$v_5 = (5, -8, 1, 2).$$

Matriks kolom:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{RREF}(A)}$$

Kolom pivot:  $1, 2, 4 \Rightarrow \{v_1, v_2, v_4\}$  basis.

Linear Relation: Dari RREF:

$$w_3 = 2w_1 - w_2, \quad w_5 = w_1 + w_2 + w_4$$

Translasi:

$$v_3 = 2v_1 - v_2, \quad v_5 = v_1 + v_2 + v_4.$$

**Ringkasan:**

Basis =  $\{v_1, v_2, v_4\}$

Vektor lain dinyatakan sebagai kombinasi linear basis.



## Example: Rank and Nullity Check

Diberikan

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}^{4 \times 6} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jumlah kolom = 6  $\implies$   $\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = 6$  (Teorema Dimensi).

Dari hasil reduksi (lihat Contoh 1), diperoleh

$$\text{rank}(A) = 2, \quad \text{nullity}(A) = 4.$$

Verifikasi:  $2 + 4 = 6$  ✓.

**Kesimpulan:** Teorema dimensi konsisten, ruang baris/kolom  $A$  berdimensi 2 dan ruang null berdimensi 4.





# Tugas

## Tugas ke-3

3.1 No. 12

3.3 No. 27, 29

3.4 No. 20

3.5 No. 31

## Tugas ke-4

4.1 No. 7, 9

4.2 No. 3

4.3 No. 9

4.9 No. 1

**(Deadline: 04/09/2025 Offline di kelas, Portofolio, Tiap Tugas beda kertas)**

## Daftar Pustaka

- 1 Row Space, Column Space, dan Null Space
  - 2 Rank, Nullity, dan Matrix Spaces
  - 3 Tugas
  - 4 **Daftar Pustaka**

# Daftar Pustaka I