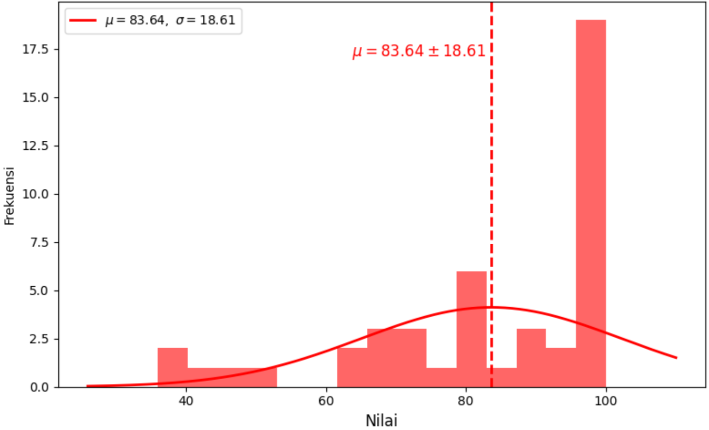
ALJABAR LINEAR

Pertemuan ke-4 dan 5 - Determinan dengan Ekspansi Kofaktor dan Evaluasi Determinan melalui Reduksi Baris

Oleh:
Annastya Bagas Dewantara, S.T., M.T.
(email: annastya.bagas@ui.ac.id)

Fakultas Teknik
Universitas Indonesia

Hasil Kuis ke-1



Perfect score: 16 orang (36%)
A $\geq$85: 25 orang (56%)
A- $\geq$80: 31 orang (69%)
B+ $\geq$75: 32 orang (71%)
B $\geq$70: 36 orang (80%)

Daftar Paparan

1. Determinan dengan Ekspansi Kofaktor
2. Determinan dengan Row Reduction
3. Properti Determinan
4. Daftar Pustaka

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor

1. Determinan dengan Ekspansi Kofaktor
2. Determinan dengan Row Reduction
3. Properti Determinan
4. Daftar Pustaka

Determinan Matriks

Teori

Matriks A adalah **invertible/bukan singular** jika $ad - bc \neq 0$, dan $ad - bc$ disebut sebagai **determinan** dari matriks A.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Kemudian inverse dari matriks A dapat di notasikan sebagai:

$$det(A) = ad - bc$$
$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix}$$

Minor dan Kofaktor - 1

Determinan dari matriks **Higher-Order** di bangun secara induktif menggunakan minor dan kofaktor:

1. Determinan dari Matriks 2×2 di bangun dari determinan matriks 1×1

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12}$$

2. Determinan dari Matriks 3×3 di bangun dari determinan matriks 2×2

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}.$$

3. Determinan dari Matriks 4×4 di bangun dari determinan matriks 3×3, dan seterusnya $\cdots$

Minor dan Kofaktor - 2

Teori

Jika A adalah **Square Matrix**, maka minor entri a_{ij} dilambangkan dengan M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan submatriks yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihapus dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dilambangkan dengan C_{ij} dan disebut kofaktor entri a_{ij}

$M_{ij} \rightarrow$ **Minor entri** a_{ij}
$C_{ij} \rightarrow$ **Kofaktor entri** a_{ij}

$$C_{ij} = \underbrace{(-1)^{i+j}}_{+/-} M_{ij} \quad \underbrace{\longrightarrow}_{\text{Contoh pada Matriks } 4\times 4} \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

Contoh:
Determinan matriks A dengan ukuran 3×3 di bangun menggunakan matriks ukuran 2×2, sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 3$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 24 = 16$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1 \cdot 16 = 16$$

Ekspansi Kofaktor

Teori

Determinan suatu matriks A berukuran $n \times n$ dapat diperoleh dengan memilih baris atau kolom mana pun, mengalikan setiap entri dengan kofaktornya yang sesuai, dan menjumlahkan hasilnya.

Ekspansi Kofaktor sepanjang baris ke-i:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, C_{ij}$$

Ekspansi Kofaktor sepanjang kolom ke-j:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, C_{ij}$$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Menggunakan Baris ke-1:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = a_{11}\, C_{11} + a_{12}\, C_{12} + a_{13}\, C_{13}$$

$$= 3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

Menggunakan Kolom ke-1:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = a_{11}\, C_{11} + a_{12}\, C_{12} + a_{13}\, C_{13}$$

$$= 3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (-2) \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

Strategi dalam Ekspansi Kofaktor

Strategi dalam melakukan **Ekspansi Faktor** adalah dengan **memilih baris atau kolom** yang **memiliki entri zero paling banyak**.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = ?$$

Dalam menentukan $\det(A)$, menggunakan Ekspansi Kofaktor menggunakan kolom ke-2, maka:

$$\det(A) = a_{12}\,C_{12} + a_{22}\,C_{22} + a_{32}\,C_{32} + a_{42}\,C_{42}$$

$$= 0 \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Lakukan Ekspansi Kofaktor kembali menggunakan kolom ke-2:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (1 - (-2)) = -6$$

Determinan Pada Matriks Triangular

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} \begin{vmatrix} a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

Teori

Sehingga jika matriks **A** adalah **Triangular Matrix** $n \times n$ (Upper Triangular, Lower Triangular, or Diagonal), maka $\det(A)$ adalah hasil kali entri-entri pada diagonal utama matriks tersebut yaitu:

$$\boxed{\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}}$$

Aturan Saarus

Aturan Saarus merupakan metode untuk menentukan determinan menggunakan arah panah diagonal sebagai penambahan atau pengurangan dari multiplikasi produk:

Pada matriks 2×2, terdapat 2! permutasi, sehingga 2 operasi dan 2 arah panah :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Pada matriks 3×3, terdapat $3! = 6$ permutasi, sehingga 6 operasi dan 6 arah panah:

$$\left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Metode ini hanya dapat digunakan pada matriks 2×2 dan 3×3, dan **Teknik ini tidak berlaku** pada matriks dengan ukuran $n \geq 4$. Contoh pada matriks 4×4 membutuhkan $4! = 24$ permutasi, namun arah panah yang dihasilkan hanya 8 arah panah.

Determinan dengan Row Reduction

1. Determinan dengan Ekspansi Kofaktor
2. **Determinan dengan Row Reduction**
3. Properti Determinan
4. Daftar Pustaka

Teorema Dasar

1. Baris Nol atau Kolom Nol
Jika **A** adalah **Square matrix** dengan ukuran $n \times n$, dan jika **A** memiliki baris nol atau kolom nol, maka $\det(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 0 \cdot C_{21} + 0 \cdot C_{22} + 0 \cdot C_{23} = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = 0 \cdot C_{11} + 0 \cdot C_{21} + 0 \cdot C_{31} = 0$$

2. Baris Nol atau Kolom Nol
Jika **A** adalah **Square matrix** dengan ukuran $n \times n$, maka $\det A = \det(A^T)$, contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (1)(4) - (2)(3) = 4 - 6 = -2$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^T) = (1)(4) - (3)(2) = 4 - 6 = -2$$

Elementary Row Operation

Jika A adalah matriks $n \times n$.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Jika **satu baris atau kolom** di kalikan dengan skalar **k** ($R_i \to kR_i$), maka:

$$\det(B) = k\det(A)$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Jika **dua baris atau dua kolom** di tukar **k** ($R_i \leftrightarrow R_j$), maka:

$$\det(B) = -\det(A)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Jika hasil dari menambahkan atau mengurangi konstanta dikalikan satu baris terhadap baris lainnya ($R_i \to R_i + kR_j$), maka:

$$\det(B) = \det(A)$$

Matriks Elementer

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Jika E diperoleh dari perkalian baris I_n dengan bilangan bukan nol k, maka :
$\det(E) = k$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Jika E diperoleh dari pertukaran dua baris I_n, maka:

$$\det(E) = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Jika E diperoleh dari penjumlahan kelipatan satu baris I_n dengan baris lainnya, maka:

$$\det(E) = 1$$

Matriks dengan Baris atau Kolom Proporsional

Teori

Jika matriks persegi A memiliki dua baris atau dua kolom yang saling proporsional, maka nilai determinannya bernilai nol.

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \end{vmatrix} = 0$$

Determinan dengan Row Operation

Mencari Determinan menggunakan Elementary Row Operation dapat dilakukan untuk mempermudah perhitungan:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det(B)=-\det(A)]{R_1 \leftarrow R_2}$$

$$= (-1) \cdot (3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det(B)=k\det(A)]{R_1 \leftarrow \frac{1}{3} R_1}$$

$$= (-1) \cdot (3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det(B)=\det(A)]{R_3 \leftrightarrow R_3 - 2R_1}$$

$$= (-1) \cdot (3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det(B)=\det(A)]{R_3 \leftarrow R_3 - 10R_2}$$

$$= (-1) \cdot (3) \cdot (1) \cdot (1) \cdot (-55) \xrightarrow[\det(A)=a_{111} \ldots a_{333}]{TriangularForm}$$

$$= 165$$

Determinan dengan Column Operation

Teori

Mencari Determinan menggunakan Elementary Column Operation dapat dilakukan untuk mempermudah perhitungan, namun teknik ini **tidak dapat digunakan untuk Augmented Matrix**, dan hanya digunakan untuk **Square Matriks** dengan ukuran $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det(B)=\det(A)]{C_4 \leftarrow C_4 - 3C_1}$$

$$= (1) \cdot (7) \cdot (3) \cdot (-26) \xrightarrow[\det(A)=a_{1111}a_{2222}\dots a_{4444}]{TriangularForm}$$

$$= -546$$

Strategi dalam Ekspansi Kofaktor dengan Elementary Row Operation

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = ?$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 - 3R_2 \\ \det(B) = \det(A) \end{array}$$

$$= a_{11}\,C_{11} + a_{21}\,C_{21} + a_{31}\,C_{31} + a_{41}\,C_{41} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{Ekspansi Kofaktor} \\ \text{dengan kolom ke-1} \end{array}$$

$$= 0 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \\ \det(B) = \det(A) \end{array}$$

$$= -\left(a_{11}\,C_{11} + a_{21}\,C_{21} + a_{31}\,C_{31}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} \text{Ekspansi Kofaktor} \\ \text{dengan kolom ke-1} \end{array}$$

$$= -\left(-1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}\right) = -\left(-1 \cdot (3 \cdot 3 - 3 \cdot 9)\right) = \boxed{-18}$$

Properti Determinan

1 Determinan dengan Ekspansi Kofaktor

2 Determinan dengan Row Reduction

3 Properti Determinan

4 Daftar Pustaka

Properti Dasar

$$\det(\mathbf{kA}) = \mathbf{k^n} \det(\mathbf{A})$$

$$k = 2, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 8 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot (1 \cdot 1 - 3 \cdot 0) - 2 \cdot (0 \cdot 1 - 3 \cdot 4) + 0 \\ &= 1 - 2(-12) \\ &= 25 \\ \det(2A) &= 2 \cdot (2 \cdot 2 - 6 \cdot 0) - 4 \cdot (0 \cdot 2 - 6 \cdot 8) + 0 \\ &= 8 - 4(-48) \\ &= 200 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(2A) &= 2^3 \det(A) = 8 \cdot 25 \\ &= 200 \end{aligned}$$

$$\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 1$
$\det(B) = 1$
$\det(A) + \det(B) = 2$
$\det(A+B) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

$$\det(\mathbf{AB}) \neq \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\det(AB) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
$\det(A) = 1$
$\det(B) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ $\det(A)\det(B) = 6$

Menguji Invertibilitas Matriks

Teori

Suatu matriks A berukuran $n \times n$ dikatakan inverse jika $\det(A) \neq 0$.

Dalam menguji apakah matriks A dengan ukuran $n \times n$ dapat dilakukan inverse adalah dengan mengidentifikasi nilai determinan nya.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Karena matriks A **memiliki baris yang proporsional** satu sama lain, yakni pada R_1 dan R_3, maka $\det(A) = 0$, sehingga **matriks A tidak invertible**.

Kofaktor dari Baris/Kolom yang berbeda

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} C_{11} = 12 & C_{12} = 6 & C_{13} = -16 \\ C_{21} = 4 & C_{22} = 2 & C_{23} = 16 \\ C_{31} = 12 & C_{32} = -10 & C_{33} = 16 \end{matrix}$$

Nilai determinan akan selalu sama terlepas dari baris atau kolom mana yang di pilih untuk Ekspansi kofaktor:

$\det(A) = 3C_{11} + 2C_{12} + (-1)C_{13} = 36 + 12 + 16 = 64$
$\det(A) = 3C_{11} + 1C_{21} + 2C_{31} = 36 + 4 + 24 = 64$

Perkalian kofaktor pada baris atau kolom yang berbeda akan menghasilkan jumlah produk bernilai nol:

1. Terhadap Baris yang berbeda
$3C_{21} + 2C_{22} + (-1)C_{23} = 12 + 4 - 16 = 0$

2. Terhadap Kolom yang berbeda
$3C_{12} + 1C_{22} + 2C_{32} = 18 + 2 - 20 = 0$

Notasi untuk **Matriks Kofaktor** dari matriks A adalah:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Serta notasi untuk **Transpose Matriks Kofaktor** atau **Matriks Adjoint** dari matriks A adalah:

$$adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Matriks Inverse

$$A\ adj(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan perkalian kofaktor sebelumnya, di dapatkan:

Ketika $i = k$:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{kj} = \det(A)$

Ketika $i \neq k$:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{kj} = 0$

Atau:

$$\big(A\ \mathrm{adj}(A)\big)_{ik} = \begin{cases} \det(A), & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$$

Sehingga:

$$A\ adj(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)\ I_n$$

$$A\ adj(A) = \det(A)\ I_n \longrightarrow \text{kedua sisi dikalikan } \times \frac{1}{\det(A)}$$

$$\frac{1}{\det(A)}\ A\ adj(A) = I_n \longrightarrow \text{kedua sisi dikalikan } \times A^{-1}$$

$$\frac{A^{-1}}{\det(A)}\ A\ adj(A) = A^{-1} \rightarrow \boxed{\frac{1}{\det(A)}\ I_n\ adj(A) = A^{-1}}$$

Aturan Cramer-1

Jika sistem linear dengan dengan **n**-unknown, dan $\det(A) \neq 0$ serta sistem memiliki **Unique Solution**, maka solusi dari tiap unknown adalah:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \cdots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

$$\begin{aligned} x &= A^{-1}b \\ &= \frac{1}{\det(A)} adj(A)b \\ &= \frac{1}{\det(A)} adj(A) \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1C_{11} + b_2C_{21} + \cdots + b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} + b_2C_{22} + \cdots + b_nC_{n2} \\ \vdots \\ b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj} \\ \vdots \\ b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \cdots + b_nC_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1C_{11} + b_2C_{21} + \cdots + b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} + b_2C_{22} + \cdots + b_nC_{n2} \\ \vdots \\ b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj} \\ \vdots \\ b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \cdots + b_nC_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x_j = \frac{b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj}}{\det(A)} = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}}$$

Aturan Cramer-2

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow$$

A_j adalah matriks A dengan mengganti kolom ke-j dengan matriks b

Menggunakan Ekspansi Kofaktor pada kolom ke-j, di dapatkan:

$$\det(A_j) = b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \cdots + b_n C_{nj}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot (-1) \cdot (1) + 0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot (1) = -1 + 0 - 1 = -2 \\ \det(A_1) &= 5 \cdot 1 \cdot (-2) + 4 \cdot (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot (1) \cdot 2 = -10 + 8 + 6 = 4 \\ \det(A_2) &= 5 \cdot (-1) \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \cdot 1 = -5 + 8 - 3 = 0 \\ \det(A_3) &= 5 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 5 - 8 - 3 = -6 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{4}{-2} = -2, \qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{0}{-2} = 0, \qquad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-6}{-2} = 3.$$

Daftar Pustaka

1. Determinan dengan Ekspansi Kofaktor
2. Determinan dengan Row Reduction
3. Properti Determinan
4. Daftar Pustaka

Daftar Pustaka I