ALJABAR LINEAR

Pertemuan ke-1 - Pengantar Sistem Persamaan Linear dan Eliminasi Gauss

Oleh:

Annastya Bagas Dewantara, S.T., M.T.

(email: annastya.bagas@ui.ac.id)

Fakultas Teknik

Universitas Indonesia

Daftar Paparan

Pengantar Aljabar Linear

Aljabar



Sebelum mempelajari Aljabar Linear, penting untuk mempelajari apa itu Aljabar.

Apa itu Aljabar?
Aljabar merupakan Cabang matematika yang menggunakan simbol. huruf, dan angka untuk merepresentasikan suatu hubungan dan menyelesaikan permasalahan.

Linear Equation

1. $2x + 3y - z = 7$
2. $x - 4y + 2z = 10$
3. $5x + 2y - 3z = 0$

Non-linear Equation

1. $x^2 + y = 5$
2. $xy + 3 = 10$
3. $x^3 - 2y^2 + z = 0$
4. $\sin(x) + y^2 = 1$

Aljabar Linear

Contoh persamaan tersebut merupakan **sistem persamaan linear** tiga variabel, yang dapat di representasikan ke dalam **matriks/vektor** dimana A adalah **coefficient matrix**, **x** adalah **vektor variabel**, dan **b** adalah **vektor konstan**.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 7 \\ x - 4y + 2z = 10 \\ 5x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Matrix:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Augmented matrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 1 & -4 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

Persamaan linear pada contoh dapat di representasikan ke dalam bentuk matriks dan vektor.

Motivasi

Mengapa lebih baik menggunakan pendekatan **metriks/vektor** ketimbang pendekatan **algebra biasa**?

a. **Scalability:**
   Menggunakan beban komputasi yang lebih ringan pada variabel yang besar.
b. **Compact Notation:**
   Penambahan, multiplikasi dan transformasi matriks dapat dilakukan pada satu baris, sehingga lebih rapih.
c. **Error Analysis:**
   Lebih mudah di identifikasi apabila terjadi kesalahan dalam perhitungan.

Pembuktian terhadap statement dapat terlihat dari contoh slide berikutnya.

Metode Eliminasi dan Subtitusi - 1

System:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 5 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 7 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 12 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 8 \end{cases}$$

Step 1: Solve the first equation for x_1:

$$x_1 = 10 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5$$

Step 2: Substitute x_1 into the remaining equations

$$\begin{aligned} 2(10 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5) - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 &= 5 \\ -(10 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5) + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 &= 7 \\ 3(10 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5) - x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 &= 12 \\ 2(10 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5) + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 &= 8 \end{aligned}$$

Step 3: Expand each equation

$$\begin{aligned} 20 - 4x_2 + 2x_3 - 6x_4 + 2x_5 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 &= 5 \\ -10 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 &= 7 \\ 30 - 6x_2 + 3x_3 - 9x_4 + 3x_5 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 &= 12 \\ 20 - 4x_2 + 2x_3 - 6x_4 + 2x_5 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 &= 8 \end{aligned}$$

Metode Eliminasi dan Subtitusi - 2

Step 4: Combine like terms

$$\begin{cases} -5x_2 + 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 20 = 5 \quad \Rightarrow \quad -5x_2 + 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 = -15 \\ 5x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_5 - 10 = 7 \quad \Rightarrow \quad 5x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 17 \\ -7x_2 + 4x_3 - 7x_4 + 7x_5 + 30 = 12 \quad \Rightarrow \quad -7x_2 + 4x_3 - 7x_4 + 7x_5 = -18 \\ -3x_2 + 0x_3 - 3x_4 + 3x_5 + 20 = 8 \quad \Rightarrow \quad -3x_2 - 3x_4 + 3x_5 = -12 \end{cases}$$

Step 5: Solve the simplest equation for x_2 or x_3 (pick the last one)

$$-3x_2 - 3x_4 + 3x_5 = -12 \quad \Rightarrow \quad x_2 + x_4 - x_5 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4 - x_4 + x_5$$

Step 6: Substitute $x_2 = 4 - x_4 + x_5$ into other equations

$$\begin{aligned} -5(4 - x_4 + x_5) + 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 &= -15 \\ 5(4 - x_4 + x_5) + x_3 + 4x_4 - 2x_5 &= 17 \\ -7(4 - x_4 + x_5) + 4x_3 - 7x_4 + 7x_5 &= -18 \end{aligned}$$

Step 7: Expand and simplify

$$\begin{aligned} -20 + 5x_4 - 5x_5 + 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 = -15 \quad &\Rightarrow \quad 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 5 \\ 20 - 5x_4 + 5x_5 + x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 17 \quad &\Rightarrow \quad x_3 - x_4 + 3x_5 = -3 \\ -28 + 7x_4 - 7x_5 + 4x_3 - 7x_4 + 7x_5 = -18 \quad &\Rightarrow \quad 4x_3 = 10 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{10}{4} = 2.5 \end{aligned}$$

Metode Eliminasi dan Subtitusi - 3

Step 8: Substitute $x_3 = 2.5$ into the other two equations

$$5(2.5) - 2x_4 - x_5 = 5 \quad \Rightarrow \quad 12.5 - 2x_4 - x_5 = 5 \quad \Rightarrow \quad 2x_4 + x_5 = 7.5$$
$$2.5 - x_4 + 3x_5 = -3 \quad \Rightarrow \quad -x_4 + 3x_5 = -5.5 \quad \Rightarrow \quad x_4 - 3x_5 = 5.5$$

Step 9: Solve the two-variable system for x_4 and x_5

$$\begin{cases} 2x_4 + x_5 = 7.5 \\ x_4 - 3x_5 = 5.5 \end{cases}$$

Multiply second equation by 2 and subtract:

$$2x_4 + x_5 - 2(x_4 - 3x_5) = 7.5 - 11 \quad \Rightarrow \quad 7x_5 = -3.5 \quad \Rightarrow \quad x_5 = -0.5$$

$$x_4 = 5.5 + 3(-0.5) = 4$$

Step 10: Back-substitute to find x_2

$$x_2 = 4 - x_4 + x_5 = 4 - 4 - 0.5 = -0.5$$

Step 11: Back-substitute to find x_1

$$x_1 = 10 - 2(-0.5) + 2.5 - 3(4) + (-0.5) = 10 + 1 + 2.5 - 12 - 0.5 = 1$$

Solution:

$$\boxed{x_1 = 1, \; x_2 = -0.5, \; x_3 = 2.5, \; x_4 = 4, \; x_5 = -0.5}$$

Metode Aljabar Linear-1

Original Augmented Matrix:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & -1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 4 & 12 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

Langkah 1: eliminasi kolom 1 (pakai R_1 sebagai pivot)

$$\begin{aligned} R_2 &\to R_2 - 2R_1 \\ R_3 &\to R_3 + R_1 \\ R_4 &\to R_4 - 3R_1 \\ R_5 &\to R_5 - 2R_1 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 4 & -15 \\ 0 & 5 & 1 & 4 & -2 & 17 \\ 0 & -7 & 4 & -7 & 7 & -18 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 3 & -12 \end{array}\right]$$

Langkah 2: buat pivot di baris 2 (kolom 2)

$$\begin{aligned} R_2 &\to \frac{1}{-5} R_2 \\ R_1 &\to R_1 - 2R_2 \\ R_3 &\to R_3 - 5R_2 \\ R_4 &\to R_4 + 7R_2 \\ R_5 &\to R_5 + 3R_2 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{7}{5} & -\frac{4}{5} & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{51}{20} & \frac{47}{30} & \frac{19}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{19}{20} & \frac{23}{30} & -\frac{17}{6} \end{array}\right]$$

Metode Aljabar Linear-2

Langkah 3: buat pivot di kolom 3 (baris 3)

$$R_3 \rightarrow \tfrac{1}{6} R_3$$

$$R_1 \rightarrow R_1 - R_3$$
$$R_2 \rightarrow R_2 + R_3$$
$$R_4 \rightarrow R_4 + \tfrac{1}{2} R_3$$
$$R_5 \rightarrow R_5 + \tfrac{1}{2} R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & \frac{4}{15} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{10} & -\frac{7}{15} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{51}{20} & \frac{47}{30} & \frac{19}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{19}{20} & \frac{23}{30} & -\frac{17}{6} \end{array}\right]$$

Langkah 4: habiskan kolom 3 (baris 4 dan 5)

$$R_4 \rightarrow R_4 + \tfrac{5}{2} R_3$$
$$R_5 \rightarrow R_5 + \tfrac{5}{2} R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & \frac{4}{15} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{10} & -\frac{7}{15} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{10} & \frac{12}{5} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{10} & \frac{8}{5} & -2 \end{array}\right]$$

Metode Aljabar Linear-3

Langkah 5: pivot kolom 4 (baris 4)

$$R_4 \to \tfrac{10}{13} R_4$$

$$R_1 \to R_1 - \tfrac{7}{10} R_4$$
$$R_2 \to R_2 - \tfrac{9}{10} R_4$$
$$R_3 \to R_3 + \tfrac{1}{2} R_4$$
$$R_5 \to R_5 + \tfrac{3}{10} R_4$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{40}{39} & \frac{59}{39} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{83}{39} & \frac{22}{39} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{49}{39} & \frac{73}{39} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{24}{13} & \frac{40}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{28}{13} & -\frac{14}{13} \end{array}\right]$$

Langkah 6: pivot kolom 5 (baris 5) $\Rightarrow$ RREF

$$R_5 \to \tfrac{13}{28} R_5$$

$$R_1 \to R_1 + \tfrac{40}{39} R_5$$
$$R_2 \to R_2 + \tfrac{83}{39} R_5$$
$$R_3 \to R_3 - \tfrac{49}{39} R_5$$
$$R_4 \to R_4 - \tfrac{24}{13} R_5$$

Hasil (RREF):

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\boxed{x_1 = 1,\ x_2 = -0.5,\ x_3 = 2.5,\ x_4 = 4,\ x_5 = -0.5}$$

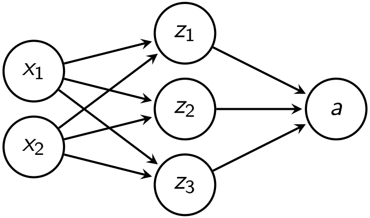
Neural Networks

$$\mathbf{z} = W\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} = f(\mathbf{z})$$

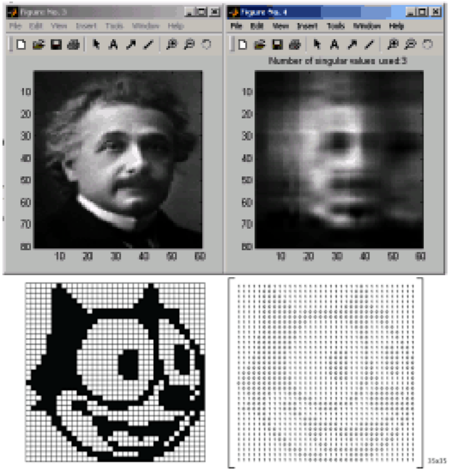
Example: 2 inputs, 3 neurons

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \\ w_{31} & w_{32} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + b_1 \\ w_{21}x_1 + w_{22}x_2 + b_2 \\ w_{31}x_1 + w_{32}x_2 + b_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} f(z_1) \\ f(z_2) \\ f(z_3) \end{bmatrix}$$

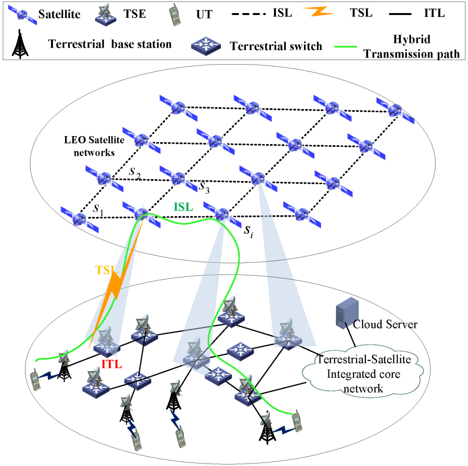


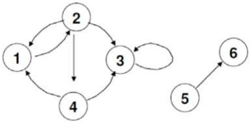
Kompresi Gambar



Gambar dapat direpresentasikan sebagai matriks, dengan tiap elemen merepresentasikan RGB. Beberapa pendekatan seperti **SVD** telah dilakukan untuk **mengurangi ukuran gambar**.

Jalur Perutean Drone dan Satellite





	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	0	0
2	1	0	1	1	0	0
3	0	0	1	0	0	0
4	1	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0

Perancangan jalur **drone dan Satellite** untuk mencapai tujuan tertentu berdasarkan informasi **baterai, sinyal, jarak** etc [1].

Pengantar Sistem Persamaan Linear

Sistem Persamaan Linear

Persamaan linear equation di notasikan dengan:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

a_n: koefisien ke-n
b: konstanta
x_n: variabel/unknown ke-n

Apabila $b = 0$, maka persamaan tersebut disebut **Homogenous Linear Equation**:
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

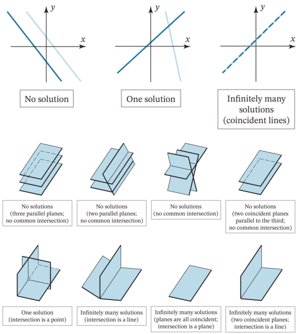
Himpunan terbatas dari linear equation disebut sebagai **sistem persamaan linear**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Solusi dari sistem linear pada n-unknown disebut sebagai **orederd n-tuple**

$$(s_1, s_2, \cdots, s_n)$$
$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, \cdots, x_n = s_n$$

Solusi



Sistem persamaan linear dikatakan **memiliki solusi**, jika memenuhi seluruh persamaan secara simultan.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \forall i = 1, 2, \cdots, m$$

Terdapat tiga jenis solusi pada sistem persamaan linear:

1. **Unique Solution:**
   Seluruh persamaan berpotongan pada satu titik.
2. **Infinitely many Solution:**
   Persamaan berpotongan pada satu garis/bidang.
3. **No Solution:**
   Tidak ada persamaan yang saling berpotongan satu sama lain

Sistem Persamaan Linear dikatakan:

Consistent: Jika memiki 1 solusi atau infinit solusi.

Inconsistent: Tidak memiliki solusi.

Jika SPL memiliki **Infinitely many Solution**, maka **solutions** perlu di ekspresikan menggunakan **parameteric equation** sebagai **general solution**

Augmented Metrices

Metode terdasar dalam menyelesaikan persamaan linear menggunakan aljabar linear adalah dengan meniru operasi aljabar dasar:

Algebraic Operation

1. Persamaan dikali dengan nonzero constant
2. Tukar dua Persamaan
3. Menambahkan konstanta dikalikan satu persamaan dengan persamaan lainnya

Elementary Row Operation

1. Baris dikali dengan nonzero constant
2. Tukar dua baris
3. Menambahkan konstanta dikalikan satu baris dengan baris lainnya

Elementary Row Operation

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Step 1: Eliminate x from rows 2 and 3

$$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$$
$$R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$$

Step 2: Make pivot in row 2 equal to 1

$$R_2 \rightarrow \frac{1}{2}R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$$

Step 3: Eliminate y from rows 1 and 3

$$R_1 \rightarrow R_1 - R_2$$
$$R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right]$$

Step 4: Make pivot in row 3 equal to 1

$$R_3 \rightarrow -2R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Step 5: Eliminate z from rows 1 and 2

$$R_1 \rightarrow R_1 - \frac{11}{2}R_3$$

$$R_2 \rightarrow R_2 + \frac{7}{2}R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Solution

$$\boxed{x = 1, \ y = 2, \ z = 3}$$

Eliminasi Gauss

Properti dari Echelon Form

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Row Echelon Form (REF)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Reduced Row Echelon Form (REF)

Row Echelon Form (REF)

1. Jika seluruh elemen pada satu baris tidak bernilai nol, maka nilai nonzero pertama pada baris tersebut adalah 1 (**leading 1**)
2. Jika seluruh elemen pada satu baris bernilai nol, maka baris tersebut diletakkan di dasar matriks.
3. (**Leading 1**) pada baris berikutnya mengikuti pola anak tangga.

Reduced Row Echelon Form (RREF)

4. Tiap kolom yang memiliki **leading 1** harus memiliki nilai zero selain **leading 1** tersebut.

Fakta Terhadap Echelon Forms

1. Tiap matriks memiliki **Reduced Row Echelon Form (RREF)** yang **unique**, terlepas dari metode eliminasi yang digunakan.
2. **Row Echelon Form (REF)** memiliki sifat **tidak unique**, tiap **Elementary Row Operation** berbeda yang di gunakan dapat menghasilkan REF yang berbeda-beda.
3. Walaupun **Row Echelon Form (REF)** memiliki sifat **tidak unique**, **jumlah nonzero row dan posisi leading 1 selalu sama (pivot position)** .

Metode Eliminasi

Metode eliminasi terbagi atas dua fase, yakni **Forward Phase** dan **Backward Phase**.

1. **Forward Phase**
   Proses untuk mengubah augmented metrices menjadi upper triangular form.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

2. **Backward Phase**
   Proses untuk mendapatkan nilai unknown dari upper triangular form ke Reduced Row Echelon Form.

Pada **Backward Phase**, **Gauss Elimination** mereduksi Upper Triangular Form menggunakan **back substitution** untuk mendapatkan nilai unknown/variable, sedangkan **Gauss-Jordan** mereduksi Upper Triangular Form ke **Reduced Row Echelon Form** untuk mendapatkan nilai unknown/variable.

Homogenous Linear Equation

Suatu sistem dikatakan **Homogenous**, jika $b_1 = 0, b_2 = 0, \cdots, b_m = 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Tiap **System of Homogenous Linear Equation** adalah **Consistent**, dan memiliki dua kemungkinan terhadap solusinya:

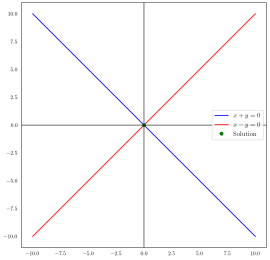
a. **Trivial Solution**
   Memiliki solusi pada $x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$

b. **Non Trivial Solution**
   Memiliki solusi tambahan dari **Trivial Solution**

Visualisasi

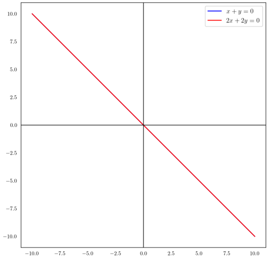
Trivial Solution

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$



Non Trivial Solution

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$



Non Trivial Homogenous System

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = 0 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 0 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Setiap **System of Linear Equation** yang **consistent**, dan memiliki setidaknya satu **free variable**. Pasti memiliki solusi berjenis **infinitely many solution**, dengan **Free variable** adalah variabel yang tidak memiliki **leading 1** yang merepresentasikan variabel-nya.

Free variable $= n - r$
n = number of unknown
m = number of equation
r = nonzero row

Existence and Uniqueness of Solutions

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Identifikasi mana yang:

a **Consistent**

    Unique
    Infinitely many solution

b **Inconsistent**

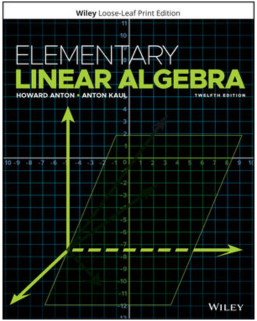
    No solution

Pengantar Mata Kuliah

Referensi dan Acuan

Buku:

Elementary Linear Algebra, 12th Edition By Howard Anton, Anton Kaul



Bahasa Pemrograman:

Python dan MATLAB

MATLAB®

Course:

MIT-OpenCourseWare:
Linear Algebra by Prof. Gilbert Strang

Contoh Program:
Linear-Algebra-With-Python

Komponen Penilaian

Sembilan Nilai Dasar Universitas Indonesia

1. KEJUJURAN
2. KEADILAN
3. KEPERCAYAAN
4. KEMARTABATAN
5. TANGGUNG JAWAB
6. KEBERSAMAAN
7. KETERBUKAAN
8. KEBEBASAN AKADEMIK
9. KEPATUHAN PADA PERATURAN

BOBOT	SCPMK 1	SCPMK 2	SCPMK 3	SCPMK 4	Total
	20%	**30%**	**30%**	**20%**	
Tugas	6%	9%	9%	6%	30%
Kuis	4%	6%	6%	4%	20%
UTS	10%	15%	–	–	25%
UAS	–	–	15%	10%	25%
Total	**20%**	**30%**	**30%**	**20%**	**100%**

Khusus untuk tugas, terdapat perbaikan dengan mengerjakan $n - perbaikan$ terkait tugas yang dikerjakan dengan tiap 1 perbaikan berjumlah 100 soal, contoh:
Nilai Tugas = 70
$n - perbaikan = 4$

$$\text{Nilai tugas akhir} = \frac{70 + n \times 100}{n+1} = \frac{70 + 4 \times 100}{5+1} = 94$$

Tugas dikerjakan tulis tangan pada **kertas Folio bergaris**, dan memasukkan **NAMA, NIM, PRODI,** dan **TUGAS PADA BAB BERAPA**.

Materi Kuliah

Sistem Persamaan Linear dan Matriks
- Sistem Persamaan Linear
- Eliminasi Gauss
- Operasi Matriks, Invers dan Properti Aljabar Matriks
- Matriks Diagonal, Segitiga, dan Simetris
- Matriks Elementer dan A^{-1}
- Matriks Invertibel

Determinan
- Ekspansi Kofaktor
- Reduksi Baris
- Properti Determinan
- Aturan Cramer

Ruang Vektor Euclid
- Vektor dalam $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^n$ Norma, Perkalian Titik, dan Jarak dalam $\mathbb{R}^n$
- Ortogonalitas
- Geometri Sistem Linear
- Perkalian Silang

Ruang Vektor Umum
- Ruang Vektor Nyata
- Subruang; Himpunan Span; Kebebasan Linier
- Koordinat, Basis, Dimensi
- Perubahan Basis
- Ruang Baris, Ruang Kolom, dan Ruang Null; Rank, Nulitas, dan Ruang Matriks Fundamental

Nilai Eigen & Vektor Eigen
- Nilai Eigen dan Vektor Eigen
- Diagonalisasi

Ruang Hasil Kali Dalam
- Produk Hasil Kali Dalam
- Ortogonalitas dalam Ruang Produk Hasil Kali Dalam
- Dekomposisi QR
- Proses Gram-Schmidt

Matriks Ortogonal dan Diagonalisasi
- Matriks Ortogonal
- Diagonalisasi Ortogonal

Transformasi Linear Umum
- Pengantar Transformasi Linier
- Transformasi Linier Umum
- Komposisi dan Transformasi Invers
- Isomorfisme
- Matriks untuk Transformasi Linear Umum
- Similaritas

Rencana Perkuliahan

Sub-CPMK	**Topik**	**Bab Acuan**	Pertemuan	Tugas
SCPMK-1	Sistem Persamaan Linear dan Matriks	1.1-1.7, 1.10	1-3	**Tugas-1**: 23:59, 16/09/2025
	Determinants	2.1-2.3	4-5	**Tugas-2**: 23:59, 23/09/2025
	Kuis-1 (23:59 09/10/2025)			
SCPMK-2	Ruang Vektor Euclid	3.1-3.5	6-9	**Tugas-3**: 23:59 07/10/2025
	Ruang Vektor Umum	4.1-4.9	10-14	**Tugas-4**: 23:59 27/10/2025
	Kuis-2 (23:59 09/11/2025)			
Ulangan Tengah Semester: 13-25/10/2025				
SCPMK-3	Nilai dan Vektor Eigen	5.1-5.2	15-16	**Tugas-5**: 23:59 06/11/2025
	Inner Products	6.1-6.3	17-20	**Tugas-6**: 23:59 27/11/2025
	Diagonalisasi	7.1-7.2	21-22	**Tugas-7**: 23:59 07/12/2025
	Kuis-3 (20/11/2025)			
SCPMK-4	Transformasi Linear Umum	1.8-1.9, 8.1-8.5	23-28	**Tugas-8**: 23:59 25/12/2025
	Kuis-4 (11/12/2025)			
Ulangan Akhir Semester: 15-20/12/2025				

Jadwal diatas bersifat tentatif dan dapat berubah!

Daftar Pustaka

Daftar Pustaka I

[1] F. Zandieh, S. F. Ghannadpour, and M. M. Mazdeh, "New integrated routing and surveillance model with drones and charging station considerations," *European Journal of Operational Research*, vol. 313, no. 2, pp. 527–547, 2024.