ALJABAR LINEAR

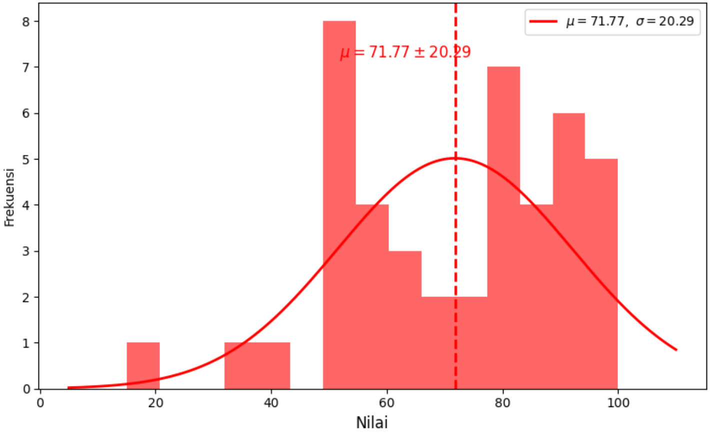
Pertemuan ke-11 - Subspace, Span dan Linear Independence

Oleh:
Annastya Bagas Dewantara, S.T., M.T.
(email: annastya.bagas@ui.ac.id)

Fakultas Teknik
Universitas Indonesia

Daftar Paparan

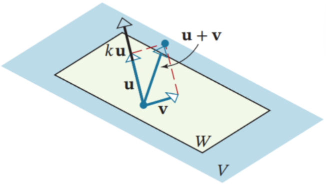
Hasil Kuis ke-1



Perfect score: 16 orang (36%)
Perfect score: 5 orang — 0.11 A
¿85: 15 orang — 0.33 A- ¿80: 17 orang — 0.38 B+ ¿75: 23 orang — 0.51 B ¿70: 26 orang — 0.58

Subspace

Introduksi



Definisi

$W \subseteq V$ adalah *subspace* jika W merupakan ruang vektor dengan operasi dari V, dengan V adalah vektor space.

Tidak perlu memverifikasi semua 10 aksioma, karena subspace W diwarisi dari V, namun ada aksioma yang perlu di verifikasi kembali, yakni:

1. (**Axiom-1**) Closure under scalar addition.
2. (**Axiom-4**) Elemen nol
3. (**Axiom-5**) Inverse.
4. (**Axiom-6**) Closure under scalar multiplication.

Contoh: Subspace Test pada $\mathbb{R}^3$ Follows the Axioms

Himpunan: Jika $V \in \mathbb{R}^3,\ W \subseteq V,\ W = \{(a, 0, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Verifikasi aksioma:

1. (**Axiom-1**) Closure under addition:
   $(a, 0, 0) + (b, 0, 0) = (a + b, 0, 0) \in W$.
2. (**Axiom-4**) Zero element:
   $(0, 0, 0) \in W$.
3. (**Axiom-5**) Inverse:
   Untuk $(a, 0, 0) \in W$, inversnya adalah $(-a, 0, 0) \in W$.
4. (**Axiom-6**) Closure under scalar multiplication:
   $k(a, 0, 0) = (ka, 0, 0) \in W$.

Kesimpulan: Semua aksioma terpenuhi. $\Rightarrow$ W adalah subspace dari $\mathbb{R}^3$.

Contoh: Subspace Test pada $\mathbb{R}^3$ Violates the Axioms

Himpunan: Jika $V \in \mathbb{R}^3, \; W \subseteq V, \; W = \{(a, 1, 1) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Verifikasi aksioma:

1. (**Axiom-1**) Closure under addition:
   $(a, 1, 1) + (b, 1, 1) = (a + b, 2, 2) \notin W$.
   $\Rightarrow$ Gagal.
2. (**Axiom-4**) Zero element:
   $(0, 0, 0) \notin W$.
   $\Rightarrow$ Gagal.

Kesimpulan: Tidak semua aksioma terpenuhi. $\Rightarrow$ W **bukan** subspace dari $\mathbb{R}^3$.

Contoh: Subspace Test pada $M_{n\times n}$ Follows the Axioms

The set of all diagonal $n \times n$ matrices **Himpunan:** $V = M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $W = \{D \in V \mid D \text{ diagonal}\}$.

Verifikasi aksioma:

1. (**Axiom-1**) Closure under addition:
   Jika $D_1 = \text{diag}(d_{11}, \ldots, d_{1n})$ dan $D_2 = \text{diag}(d_{21}, \ldots, d_{2n})$, maka $D_1 + D_2 = \text{diag}(d_{11} + d_{21}, \ldots, d_{1n} + d_{2n})$ — tetap diagonal, sehingga $\in W$.
2. (**Axiom-4**) Elemen nol:
   Nol matriks $0_{n\times n} = \text{diag}(0, \ldots, 0) \in W$.
3. (**Axiom-5**) Inverse aditif:
   Untuk $D = \text{diag}(d_1, \ldots, d_n) \in W$, $-D = \text{diag}(-d_1, \ldots, -d_n) \in W$.
4. (**Axiom-6**) Closure under scalar multiplication:
   Untuk skalar k dan $D = \text{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, $kD = \text{diag}(kd_1, \ldots, kd_n) \in W$.

Kesimpulan: Semua aksioma terpenuhi. $\Rightarrow$ W adalah **subspace** dari $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Contoh: Subspace Test pada $M_{n\times n}$ Violates the Axioms

Himpunan (asumsi): $V = M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $W = \{A \in V \mid \det(A) = 0\}$ (matriks singular).

Verifikasi aksioma (cek penting):

1. (**Axiom-1**) Closure under addition:
   Gagal in general. Contoh konkret di $M_{2\times 2}$:
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
   $\det(A) = 0$, $\det(B) = 0$ tetapi
   $$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2, \quad \det(A+B) = 1 \neq 0.$$
   Jadi $A, B \in W$ tetapi $A + B \notin W$.
2. (**Axiom-4**) Elemen nol:
   Nol matriks 0 punya $\det(0) = 0 \Rightarrow 0 \in W$ (terpenuhi).
3. (**Axiom-5**) Inverse aditif:
   Jika $\det(A) = 0$ maka $\det(-A) = (-1)^n \det(A) = 0$, sehingga $-A \in W$ (terpenuhi).
4. (**Axiom-6**) Closure under scalar multiplication:
   Untuk skalar k, $\det(kA) = k^n \det(A)$. Jika $\det(A) = 0$ maka $\det(kA) = 0$, sehingga $kA \in W$ (terpenuhi).

Kesimpulan: Hanya Axiom-4, Axiom-5, dan Axiom-6 terpenuhi; Axiom-1 (closure under addition) gagal. $\Rightarrow$ W **bukan subspace** dari $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Contoh: Subspace Test pada $\mathbb{P}_3$ Follows the Axioms

Himpunan:
$V = \mathbb{P}_3, \qquad W = \{\, p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0 = 0\,\}.$

Verifikasi aksioma:

1. (**Axiom-1**) Closure under addition:
   Ambil $p(x) = 0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3,\; q(x) = 0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \in W$.
   Maka $p + q = 0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3$ sehingga koefisien konstanta $= 0 \Rightarrow p + q \in W$.
2. (**Axiom-4**) Elemen nol:
   Nol polinom $0(x) = 0$ memiliki koefisien konstanta 0, jadi $0 \in W$.
3. (**Axiom-5**) Inverse aditif:
   Jika $p(x) = 0 + a_1x + \cdots \in W$ maka $-p(x) = 0 - a_1x + \cdots$ juga mempunyai a_0 $= 0$, jadi $-p \in W$.
4. (**Axiom-6**) Closure under scalar multiplication:
   Untuk skalar k dan $p(x) \in W$, $kp(x) = k \cdot 0 + ka_1x + \cdots$ sehingga koefisien konstanta masih 0
   $\Rightarrow kp \in W$.

Kesimpulan: Semua empat aksioma terpenuhi. $\Rightarrow W$ adalah **subspace** dari $\mathbb{P}_3$.

Contoh: Subspace Test pada $\mathbb{P}_3$ Violates Axioms

Himpunan:
$V = \mathbb{P}_3, \qquad W = \{\, p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0 = 1 \,\}.$

Verifikasi aksioma:

1. (**Axiom-1**) Closure under addition:
   Ambil $p(x) = 1 + x,\ q(x) = 1 + 2x \in W$.
   $p + q = 2 + 3x$ sehingga koefisien konstanta $= 2 \neq 1$.
   $\Rightarrow p + q \notin W$ — **gagal**.
2. (**Axiom-4**) Elemen nol:
   Nol polinom $0(x) = 0$ mempunyai koefisien konstanta $0 \neq 1$.
   $\Rightarrow 0 \notin W$ — **gagal**.
3. (**Axiom-5**) Inverse aditif:
   Untuk $p(x) = 1 + x \in W$, $-p(x) = -1 - x$ memiliki $a_0 = -1 \neq 1$.
   $\Rightarrow -p \notin W$ — **gagal**.
4. (**Axiom-6**) Closure under scalar multiplication:
   Ambil skalar $k = 2$, $2p(x) = 2 + 2x$ sehingga $a_0 = 2 \neq 1$.
   $\Rightarrow 2p \notin W$ — **gagal**.

Kesimpulan: Hampir semua aksioma yang diperlukan gagal. $\Rightarrow W$ **bukan** subspace dari $\mathbb{P}_3$.

Solution Spaces of Homogeneous Systems

Sistem homogen: $A\mathbf{x} = 0$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Teorema: Himpunan solusi dari $A\mathbf{x} = 0$ adalah subspace dari $\mathbb{R}^n$.

(**Axiom-1**) Closure under scalar addition.
(**Axiom-4**) Elemen nol
(**Axiom-5**) Inverse.
(**Axiom-6**) Closure under scalar multiplication.

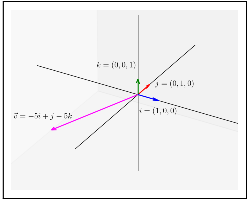
Contoh:

a. Plane through origin, normal $\mathbf{n} = (1, -2, 3)$.
b. Line through origin, parallel to $(-5, -1, 1)$.
c. Only trivial solution $\{\mathbf{0}\}$.

Catatan: Solusi sistem *nonhomogen* tidak membentuk subspace.

Linear Kombinasi

Introduksi



Definisi 1

Jika $\vec{w}$ adalah vektor dalam **vector space** V. Vektor $\vec{w}$ dikatakan **linear combination** dari vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$ dan $\vec{w}$ dapat ditulis sebagai:

$$\vec{w} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r,$$

dengan $k_1, k_2, \ldots, k_r$ ($k_i \in \mathbb{R}$) adalah skalar yang disebut **koefisien linear combination**.

Ruang vektor V dapat diekspresikan dalam **subset kecil** S, dimana $S \subseteq V$. Vektor-vektor dalam S dapat dianggap sebagai **building blocks** dalam membentuk semua vektor dalam V.

Spanning Sets

Jika $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ adalah himpunan tak kosong dari vektor-vektor dalam ruang vektor V, dengan $S \subseteq V$, maka:

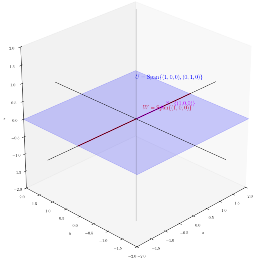
a. Himpunan W dari semua linear combinations vektor-vektor dalam S adalah sebuah **subspace** dari V, yaitu

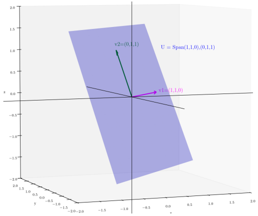
$$W = \text{span}(S) = \{k_1 w_1 + k_2 w_2 + \cdots + k_r w_r \mid k_i \in \mathbb{F}\}.$$

b. Himpunan W pada bagian (a) merupakan **subspace terkecil** dari V yang memuat semua vektor di S, artinya setiap subspace lain yang memuat vektor-vektor tersebut juga memuat W.

$$S \subseteq W, \quad \text{dan jika } U \text{ adalah subspace dengan } S \subseteq U, \text{ maka } W \subseteq U.$$

Contoh-1: Spanning Sets





Contoh 1:

$$V = \mathbb{R}^3,$$
$$S = \{(1,0,0)\}$$
$$W = \text{span}(S) = \{k(1,0,0) \mid k \in \mathbb{R}\},$$
$$U = \text{span}\{(1,0,0),(0,1,0)\} = \{(a,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\}.$$

Contoh 2:

$$V = \mathbb{R}^3,$$
$$S = \{(1,1,0),(0,1,1)\},$$
$$W = \text{span}(S)$$
$$= \{k_1(1,1,0) + k_2(0,1,1) \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$$

Contoh-2: Spanning Sets

Polinomial:

Jika P_2 adalah vector space dari polinomial derajat 2.

$$S = \{1,\ x,\ x^2\}, \quad W = \text{span}(S) = \{k_0 + k_1 x + k_2 x^2 \mid k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Matriks:

Jika vector space dari $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$W = \text{span}(S) = \left\{ k_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \, k_0, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Mengidentifikasi Linear Kombinasi

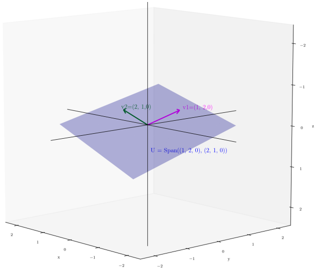
Goal: Jika terdapat $v_1, \ldots, v_r$ dan hasil linear combination dari vektor tersebut w adalah:

$$w = k_1 v_1 + \cdots + k_r v_r$$

Maka untuk memastikan, bahwa w adalah linear kombinasi dari vektor $v_1, \ldots, v_r$, kita perlu:

1. Ubah vektor $v_1, \ldots, v_r$ dan w ke dalam sistem persamaan linear.
2. Identifikasi apakah sistem persamaan linear memiliki solusi (**consistent**) atau tidak memiliki solusi **inconsistent**.
3. Jika solusi dari sistem persamaan linear adalah solusi (**consistent**), maka w adalah linear kombinasi dari vektor-vektor tersebut.
   a. **Unique solution** $\Rightarrow$ w **Linear Kombinasi**.
   b. **Infinitely many solutions** $\Rightarrow$ w **Linear Kombinasi**

Contoh-1: Linear Combination dari Unique Solution



Example: Apakah $w = (4, 7)$ adalah linear kombinasi dari $v_1 = (1, 2)$ dan $v_2 = (2, 1)$?
Bentuk sistem:

$$k_1(1, 2) + k_2(2, 1) = (4, 7)$$

atau

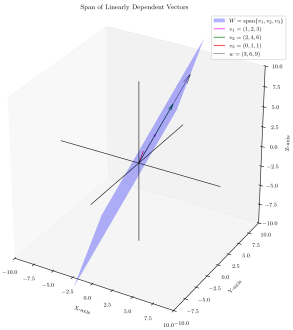
$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 = 4 \\ 2k_1 + k_2 = 7 \end{cases}, \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

Eliminasi baris:

$k_1 = \frac{10}{3}$, $k_2 = \frac{1}{3}$.

Kesimpulan:
Sistem memiliki **solusi unik**, sehingga w adalah linear kombinasi dari v_1, v_2.

Contoh-2: Linear Combination dari Infinitely Many Solutions



Example: Apakah $w = (3,6,9)$ adalah linear kombinasi dari $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (2,4,6)$, $v_3 = (0,1,1)$? Bentuk sistem:

$$k_1(1,2,3) + k_2(2,4,6) + k_3(0,1,1) = (3,6,9)$$

Matriks augmentasi:

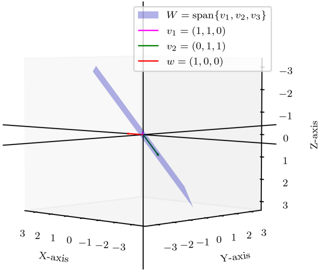
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -15 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Solusi dari sistem persmaan linearl:

$k_1 = -15 - t,\ k_2 = 9 - t,\ k_3 = t.$

Kesimpulan:
Sistem memiliki **Infinitely many solutions**, w adalah linear kombinasi.

Contoh-3: Linear Combination dari Inconsistent Solution



Example: Apakah $w = (1, 0, 0)$ adalah linear kombinasi dari $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1)$?
Bentuk sistem:

$$k_1(1, 1, 0) + k_2(0, 1, 1) = (1, 0, 0)$$

atau

$$\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 = 0 \end{cases}, \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Kesimpulan:
Sistem **inconsistent**, sehingga w bukan linear kombinasi dari v_1, v_2.

Span

Mengidentifikasi S sebagai Spanning Set

Jika $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ adalah himpunan vektor di dalam V, dan x adalah **arbitrary vector** di V, prosedurnya adalah:

1. Susun **augmented matriks** dari sistem linear yang diperoleh dengan menyamakan komponen-komponen yang bersesuaian:

$$A = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1r} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{nr} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A\mathbf{k} = \mathbf{b}.$$

2. Periksa konsistensi sistem:
   - i. Jika sistem **selalu konsisten** untuk setiap $x \in V$, maka $S \implies$ **spanning set** dari V.
   - ii. Jika ada x untuk sistem menjadi **inkonsisten**, maka $S \implies$ **bukan spanning set** dari V.
   - iii. Jika $r < n$, maka $S \implies$ **bukan spanning set** dari V.
   - iv. Jika $r > n$, maka periksa **rank** dari A:
     - a. Jika $\text{rank}(A) = n$, maka sistem consistent dan $S \implies$ **spanning set** dari V.
     - b. Jika $\text{rank}(A) < n$, maka sistem inconsistent dan $S \implies$ **bukan spanning set** dari V.
   - v. Jika $r = n$, maka A dan matriks persegi:
     - a. Jika $\det(A) \neq 0$, maka $S \implies$ **spanning set** dari V.
     - b. Jika $\det(A) = 0$, maka $S \implies$ **bukan spanning set** dari V.

Notasi:

$$(n = \dim(V), \quad r = \text{banyak vektor dalam } S, \quad \text{rank}(A) = \text{jumlah baris nonzero setelah REF})$$

Spanning Test pada $\mathbb{R}^3$ (Spanning)

Let $S = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Check if S spans $\mathbb{R}^3$ by solving

$$k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) = (x_1, x_2, x_3)$$

or

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

- Determinant $\det(A) = 1 \neq 0 \rightarrow$ system always consistent.
- Yes S spans $\mathbb{R}^3$.

Spanning Test pada $\mathbb{R}^3$ (Not Spanning)

Let $S = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,2)\} \subset \mathbb{R}^3$. Solve

$$k_1(1,0,1) + k_2(0,1,1) + k_3(1,1,2) = (x_1, x_2, x_3)$$

or

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

- Determinant $\det(A) = 0 \rightarrow$ system may not be consistent for all x.
- Not S does not span $\mathbb{R}^3$.

Spanning Test in P_2 (Spanning)

Let $S = \{1, t, t^2\} \subset P_2$. Take arbitrary $p(t) = a + bt + ct \in P_2$ and solve

$$k_1(1) + k_2(t) + k_3(t^2) = a + bt + ct^2$$

Coefficient comparison gives

$$\begin{cases} k_1 = a \\ k_2 = b \\ k_3 = c \end{cases}$$

- System always consistent $\to$ S spans P_2.

Spanning Test pada P_2 (Not Spanning)

Let $S = \{1 + t, t + t^2\} \subset P_2$. Solve

$$k_1(1 + t) + k_2(t + t^2) = a + bt + ct^2$$

Coefficient comparison gives

$$\begin{cases} k_1 = a \\ k_1 + k_2 = b \\ k_2 = c \end{cases}$$

- $(r = 2 < \dim(P_2)) \Rightarrow$ system cannot be consistent for all $p(t)$.
- Not S does not span P_2.

Spanning Test in $M_{2\times 2}$ (Spanning)

Let

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \subset M_{2\times 2}.$$

For arbitrary

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad X = k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 M_3 + k_4 M_4$$

- Solution: $k_1 = a, k_2 = b, k_3 = c, k_4 = d \to$ always consistent.
- Yes S spans $M_{2\times 2}$.

Spanning Test pada $M_{2\times 2}$ (Not Spanning)

Let

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset M_{2\times 2}.$$

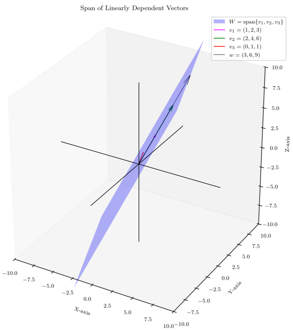
Check arbitrary

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 M_3$$

- Bottom row (c, d) cannot be formed $\rightarrow$ system inconsistent for some X.
- Not S does not span $M_{2\times 2}$.

Linear Independence

Linear Independence



Definisi

Himpunan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ dalam ruang vektor V dikatakan **linear independent** jika tidak ada vektor dalam S yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear vektor lain. Jika tidak, dikatakan **linear dependent**.

1. Himpunan tak kosong $S = \{v_1, \ldots, v_r\} \subset V$ adalah **linear independent** *jika dan hanya jika* satu-satunya solusi untuk

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r = 0$$

   adalah

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$$

2. Jika S hanya berisi satu vektor, maka S adalah **linear independent** jika dan hanya jika vektor tersebut bukan nol.

Follows: $S = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$
Violates: $S = ((1, 2, 3), (2, 4, 6), (0, 1, 1))$

Mengidentifikasi Linear Independence S

Misalkan V adalah ruang vektor berdimensi n dan $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\} \subset V$. Tuliskan setiap w_j sebagai vektor kolom sehingga diperoleh matriks koefisien. (r-banyak vektor dalam S, n-dim(V))

$$A = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1r} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{nr} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\mathbf{k} = \mathbf{b}.$$

Prosedur umum (dua tujuan):

1. Lakukan eliminasi baris (Gaussian / Gauss–Jordan) pada A hingga REF atau RREF.
2. Tentukan $\operatorname{rank}(A) =$ jumlah pivot (atau jumlah baris bukan nol pada REF/RREF).

Menentukan Linear Independence:

Jika $r = 1$: $\{w_1\}$ dan $w_1 \neq \mathbf{0}$, maka $\Rightarrow$ **Linearly Independent**.

Jika $r > n$ maka S pasti (lebih banyak vektor daripada dimensi), maka $\Rightarrow$ **Linearly Dependant**..

Jika $r \leq n$:

a. $\operatorname{rank}(A) = r \Rightarrow$ **Linearly Independent**.
b. $\operatorname{rank}(A) < r \Rightarrow$ **Linearly Dependent**.

Linear Independence in $\mathbb{R}^3$

Independent Example:

$$S_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

Check: Solve $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$:

$$k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

$\Rightarrow S_1$ is **linearly independent**.

Dependent Example:

$$S_2 = \{(1,2,3),(2,4,6),(0,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

Check: Solve $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$:

$$k_1(1,2,3) + k_2(2,4,6) + k_3(0,1,1) = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = -2k_2,\ k_3 = 0 \text{ (nontrivial solution exists)}$$

$\Rightarrow S_2$ is **linearly dependent**.

Linear Independence in P_2 (polynomials degree ≤ 2)

Independent Example:

$$S_1 = \{1, x, x^2\} \subset P_2$$

Check: Solve $k_1(1) + k_2(x) + k_3(x^2) = 0$ (zero polynomial)

$$k_1 + k_2 x + k_3 x^2 = 0 \implies k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

$\Rightarrow$ S_1 is **linearly independent**.

Dependent Example:

$$S_2 = \{1 + x, 2 + 2x, x^2\} \subset P_2$$

Check: Solve $k_1(1 + x) + k_2(2 + 2x) + k_3 x^2 = 0$

$$(k_1 + 2k_2) + (k_1 + 2k_2)x + k_3 x^2 = 0$$

$\Rightarrow k_1 = -2k_2, k_3 = 0 \Rightarrow$ nontrivial solution $\Rightarrow S_2$ is **linearly dependent**.

Linear Independence in $M_{2\times 2}$ (2x2 matrices)

Independent Example:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Check: Solve $k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3 + k_4A_4 = 0$

$$\Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$$

$\Rightarrow S_1$ is **linearly independent**.

Dependent Example:

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Check: Solve $k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3 = 0$

$$k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3 = 0 \implies k_2 = -\tfrac{1}{2}k_1, k_3 = 0 \text{ (nontrivial solution)}$$

$\Rightarrow S_2$ is **linearly dependent**.

Linear Independence in $\mathbb{R}^3$

Independent Example:

$$S_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

Check: Solve $k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = 0$:

$$k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

$\Rightarrow S_1$ is **linearly independent**.

Dependent Example:

$$S_2 = \{(1,2,3),(2,4,6),(0,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

Check: Solve $k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = 0$:

$$k_1(1,2,3) + k_2(2,4,6) + k_3(0,1,1) = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = -2k_2,\ k_3 = 0 \text{ (nontrivial solution exists)}$$

$\Rightarrow S_2$ is **linearly dependent**.

Daftar Pustaka

Daftar Pustaka I