

Introduction au WEB Sémantique

Cours 4 : Reasonner avec une ontologie : raisonner en logique de description

Odile PAPINI

POLYTECH

Université d'Aix-Marseille

odile.papini@univ-amu.fr

<http://odile.papini.perso.luminy.univ-amu.fr/sources/WEBSEM.html>

Plan du cours

- 1 Introduction
- 2 Raisonnement sur les TBox
- 3 Raisonnement sur les ABox
- 4 Méthode des tableaux en logique de description
- 5 Complexité du raisonnement

Bibliographie I



Supports de cours :

F. Baader, F. Calvanese & al

The Description Logic Handbook : Theory, Implementation and Applications. Cambridge university press. 2002



Amedeo Napoli INRIA Nancy

Une introduction aux logiques de description Rapport INRIA 3314. 1997

[http ://hal.inria.fr/inria-00073375/en/](http://hal.inria.fr/inria-00073375/en/)



Michel Gagnon

Logiques descriptives et OWL

[http ://www.cours.polymtl.ca/inf6410/Documents/logique_descriptive.pdf](http://www.cours.polymtl.ca/inf6410/Documents/logique_descriptive.pdf)



Tutoriaux

[http ://dl.kr.org/courses.html](http://dl.kr.org/courses.html)

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox

- satisfaisabilité
- subsomption
- équivalence
- exclusion mutuelle

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : satisfaisabilité

- Un concept est **satisfaisable** par rapport à \mathcal{T} ssi il existe \mathcal{I} un modèle de \mathcal{T} tel que $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$
- si il existe \mathcal{I} un modèle de \mathcal{T} tel que $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ alors \mathcal{I} est un modèle de C
- Un concept est **insatisfaisable** par rapport à \mathcal{T} ssi pour tout \mathcal{I} un modèle de \mathcal{T} on a $C^{\mathcal{I}} = \emptyset$

exemples

- satisfaisabilité : *Homme* \sqcap \neg *Homme*?
- modèle de \mathcal{T} : $\Delta\{a, b, c\}$, *Homme* $^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$,
aEnfant $^{\mathcal{I}} = \{(a, b), (a, c)\}$
 satisfaisabilité : *Homme*?, *Femme*?, *aEnfant*?

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : satisfaisabilité

- Un concept est **satisfaisable** par rapport à \mathcal{T} ssi il existe \mathcal{I} un modèle de \mathcal{T} tel que $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$
- si il existe \mathcal{I} un modèle de \mathcal{T} tel que $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ alors \mathcal{I} est un modèle de C
- Un concept est **insatisfaisable** par rapport à \mathcal{T} ssi pour tout \mathcal{I} un modèle de \mathcal{T} on a $C^{\mathcal{I}} = \emptyset$

exemples

- satisfaisabilité : $(\text{Homme} \sqcap \neg \text{Homme})^{\mathcal{I}} = \emptyset$
- modèle de \mathcal{T} : $\Delta = \{a, b, c\}$, $\text{Homme}^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$,
 $a\text{Enfant}^{\mathcal{I}} = \{(a, b), (a, c)\}$
 satisfaisabilité : $\text{Homme}^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$, $\text{Femme}^{\mathcal{I}} = \{c\}$

Raisonnement

Exemple (cours Logiques de description)

TBox \mathcal{T} :

$Femme \equiv \neg Homme$,

$Mere \equiv Femme \sqcap \exists aEnfant.\top$

$Pere \equiv Homme \sqcap \exists aEnfant.\top$

$Celibataire \equiv \forall marieAvec.\bot$

modèle de \mathcal{T} :

$\Delta = \{a, b, c, d\}$, $Homme^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$, $Femme^{\mathcal{I}} = \{c, d\}$,

$aEnfant^{\mathcal{I}} = \{(b, a), (b, c), (d, a), (d, c)\}$

$Pere^{\mathcal{I}} = \{b\}$, $Mere^{\mathcal{I}} = \{d\}$,

$EstmarieAvec^{\mathcal{I}} = \{(b, d), (d, b)\}$, $Celibataire^{\mathcal{I}} = \{a, c\}$

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : subsumption

- Un concept C est **subsumé** par D par rapport à \mathcal{T} ssi pour tout \mathcal{I} modèle de \mathcal{T} on a $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$
- on écrit : $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$

exemples

- axiome de \mathcal{T} : $Mere \equiv \exists aEnfant.T$
subsumption : $Mere \sqsubseteq Femme?$

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : subsumption

- Un concept C est **subsumé** par D par rapport à \mathcal{T} ssi pour tout \mathcal{I} modèle de \mathcal{T} on a $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$
- on écrit : $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$

exemples

- axiome de \mathcal{T} : $Mere \equiv \exists aEnfant. \top$
subsumption : $Mere \sqsubseteq Femme$
car $Mere^{\mathcal{I}} = \{d\}$ et $Femme^{\mathcal{I}} = \{c, d\}$

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : équivalence

- Deux concepts C et D sont **équivalents** par rapport à \mathcal{T} ssi pour tout \mathcal{I} modèle de \mathcal{T} on a $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$
- on écrit : $\mathcal{T} \models C \equiv D$

exemple

- équivalence : $Pere \equiv Homme \sqcap \exists aEnfant. \top ?$

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : équivalence

- Deux concepts C et D sont **équivalents** par rapport à \mathcal{T} ssi pour tout \mathcal{I} modèle de \mathcal{T} on a $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$
- on écrit : $\mathcal{T} \models C \equiv D$

exemples

- équivalence : $Pere \equiv Homme \sqcap \exists aEnfant.\top$
car $Pere^{\mathcal{I}} = \{b\}$, $Homme^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$ et $\exists aEnfant.\top^{\mathcal{I}} = \{b, d\}$

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : exclusion mutuelle

- Deux concepts C et D sont **disjoints** par rapport à \mathcal{T} ssi pour tout \mathcal{I} modèle de \mathcal{T} on a $C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} = \emptyset$
- on écrit : $\mathcal{T} \models C \sqcap D \sqsubseteq \perp$

exemples

- disjoints : *Pere* et *Mere* ?
- disjoints : *Celibataire* et *Pere* ?

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : exclusion mutuelle

- Deux concepts C et D sont **disjoints** par rapport à \mathcal{T} ssi pour tout \mathcal{I} modèle de \mathcal{T} on a $C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} = \emptyset$
- on écrit : $\mathcal{T} \models C \sqcap D \sqsubseteq \perp$

exemples

- disjoints : *Pere* et *Mere* car $Pere^{\mathcal{I}} = \{b\}$ et $Mere^{\mathcal{I}} = \{d\}$
- disjoints : *Celibataire* et *Pere* car $Celibataire^{\mathcal{I}} = \{a, c\}$ et $Pere^{\mathcal{I}} = \{b\}$

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : réduction à l'insatisfaisabilité

- Le concepts C est **subsumé** par le concept D par rapport à \mathcal{T} ssi $C \sqcap \neg D$ est insatisfaisable
- Deux concepts C et D sont **équivalents** par rapport à \mathcal{T} ssi $C \sqcap \neg D$ et $\neg C \sqcap D$ sont insatisfaisables
- Deux concepts C et D sont **disjoints** par rapport à \mathcal{T} ssi $C \sqcap D$ est insatisfaisable

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : élimination de la TBox

- procédure de preuve : utilisation de formules indépendantes de toute terminologie
- remplacer tous les termes de la formule par leur définition dans la terminologie

- exemple : $TBox : \textit{Femme} \equiv \textit{Personne} \sqcap \textit{Feminin}$,
 $\textit{Homme} \equiv \textit{Personne} \sqcap \neg \textit{Femme}$
- démontrer l'insatisfaisabilité de : $\textit{Femme} \sqcap \textit{Homme} ?$

- 1) $\textit{Femme} \sqcap \textit{Homme}$
- 2) $\textit{Personne} \sqcap \textit{Feminin} \sqcap \textit{Personne} \sqcap \neg \textit{Femme}$
- 3) $\textit{Personne} \sqcap \textit{Feminin} \sqcap \textit{Personne} \sqcap \neg (\textit{Personne} \sqcap \textit{Feminin})$

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : élimination de la TBox

- exemple : $TBox : \text{Femme} \equiv \text{Personne} \sqcap \text{Feminin}$,
 $\text{Homme} \equiv \text{Personne} \sqcap \neg \text{Femme}$
- démontrer l'insatisfaisabilité de : $\text{Femme} \sqcap \text{Homme}$

1) $\text{Femme} \sqcap \text{Homme}$

2) $\text{Personne} \sqcap \text{Feminin} \sqcap \text{Personne} \sqcap \neg \text{Femme}$

3) $\text{Personne} \sqcap \text{Feminin} \sqcap \text{Personne} \sqcap \neg (\text{Personne} \sqcap \text{Feminin})$

4) $\text{Personne} \sqcap \text{Feminin} \sqcap \neg (\text{Personne} \sqcap \text{Feminin})$ par idempotence

5) $\text{Personne} \sqcap \text{Feminin} \sqcap (\neg \text{Personne} \sqcup \neg \text{Feminin})$ par distributivité

6) $(\text{Personne} \sqcap \text{Feminin} \sqcap \neg \text{Personne}) \sqcup (\text{Personne} \sqcap \text{Feminin} \sqcap \neg \text{Feminin})$

Or $(\text{Personne} \sqcap \text{Feminin} \sqcap \neg \text{Personne})^{\mathcal{I}} = \emptyset$ et $(\text{Personne} \sqcap \text{Feminin} \sqcap \neg \text{Feminin})^{\mathcal{I}} = \emptyset$

Raisonnement

Raisonnement sur les ABox

- cohérence (consistency)
- validation d'instances (instance checking)

Raisonnement

Raisonnement sur les ABox : cohérence

- \mathcal{A} une ABox est **cohérente** par rapport à \mathcal{T} ssi il existe \mathcal{I} un modèle de \mathcal{T} qui satisfait \mathcal{A}

exemple

- TBox : $Femme \equiv Personne \sqcap Feminin$,
 $Homme \equiv Personne \sqcap \neg Femme$
- ABox : $\mathcal{A} = \{Homme(anne), Femme(anne)\}$
- cohérence de \mathcal{A} ?

Raisonnement

Raisonnement sur les ABox : cohérence

exemple

- $TBox : \textit{Femme} \equiv \textit{Personne} \sqcap \textit{Feminin}$,
 $\textit{Homme} \equiv \textit{Personne} \sqcap \neg \textit{Femme}$
- $ABox : \mathcal{A} = \{\textit{Homme}(\textit{anne}), \textit{Femme}(\textit{anne})\}$
- cohérence de \mathcal{A} ?

modèle de \mathcal{T} :

$\Delta = \{\textit{paul}, \textit{jean}, \textit{anne}, \textit{marie}\},$

$\textit{Personne}^{\mathcal{I}} = \{\textit{paul}, \textit{jean}, \textit{anne}, \textit{marie}\}, \textit{Feminin}^{\mathcal{I}} = \{\textit{anne}, \textit{marie}\},$

$\textit{Femme}^{\mathcal{I}} = \{\textit{anne}, \textit{marie}\}, \textit{Homme}^{\mathcal{I}} = \{\textit{paul}, \textit{jean}\},$

incohérence de \mathcal{A} car $\textit{anne} \notin \textit{Homme}^{\mathcal{I}}$

Raisonnement

Raisonnement sur les ABox : validation d'instances

- $\mathcal{A} \models C(a)$ ssi toute interprétation \mathcal{I} qui satisfait \mathcal{A} satisfait aussi $C(a)$
- $\mathcal{A} \models C(a)$ ssi $\mathcal{A} \cup \neg C(a)$ est incohérent

exemple

- TBox : $Femme \equiv Personne \sqcap Feminin$
- ABox : $\mathcal{A} = \{Femme(anne)\}$
- $\mathcal{A} \models Feminin(anne)$?
- $\mathcal{A} \cup \neg Feminin(anne)$ incohérent ?

Raisonnement

Raisonnement sur les ABox : validation d'instances

exemple

- $TBox : Femme \equiv Personne \sqcap Feminin$
- $ABox : \mathcal{A} = \{Femme(anne)\}$
- $\mathcal{A} \models Feminin(anne) ?$
- $\mathcal{A} \cup \neg Feminin(anne)$ incohérent ?

modèle de \mathcal{T} :

$\Delta = \{paul, jean, anne, marie\},$

$Personne^{\mathcal{I}} = \{paul, jean, anne, marie\}, Feminin^{\mathcal{I}} = \{anne, marie\},$

$Femme^{\mathcal{I}} = \{anne, marie\}, (\neg Feminin)^{\mathcal{I}} = \{paul, jean\},$

$\mathcal{A} \cup \neg Feminin(anne)$ incohérent car $anne \in Femme^{\mathcal{I}}$ et $anne \notin (\neg Feminin)^{\mathcal{I}}$

Raisonnement : Monde fermé, Monde ouvert

hypothèse du monde fermé (clos)

- limitation à ce qui est énoncé
- exemple : $ABox : aEnfant(anne, paul)$
- *anne* a un seul enfant c'est *paul*

Logiques de Description : hypothèse du monde ouvert

- monde ouvert : pas de limitation à ce qui est énoncé
- exemple : $ABox : aEnfant(anne, paul)$
- rien n'exclut que *anne* ait d'autres enfants que *paul*
- spécifier que *anne* a un seul enfant : $(\leq 1aEnfant)(anne)$

Raisonnement

Inférence par méthode des tableaux

- prouver $C \sqsubseteq D$
- $C \sqsubseteq D$ ssi $C \sqcap \neg D$ est insatisfaisable

un exemple introductif

- prouver :
 $\exists \text{possede.}(\text{Livre} \sqcap \text{Antiquite}) \sqsubseteq (\exists \text{possede.} \text{Livre} \sqcap \exists \text{possede.} \text{Antiquite})$
- démontrer l'insatisfaisabilité de :
 $\exists \text{possede.}(\text{Livre} \sqcap \text{Antiquite}) \sqcap \neg(\exists \text{possede.} \text{Livre} \sqcap \exists \text{possede.} \text{Antiquite})$

Raisonnement : exemple introductif

démontrer l'insatisfaisabilité de :

$\exists \text{possede} . (\text{Livre} \sqcap \text{Antiquite}) \sqcap \neg (\exists \text{possede} . \text{Livre} \sqcap \exists \text{possede} . \text{Antiquite})$ ssi

$\exists \text{possede} . (\text{Livre} \sqcap \text{Antiquite}) \sqcap (\forall \text{possede} . \neg \text{Livre} \sqcup \forall \text{possede} . \neg \text{Antiquite})$

On suppose q'un individu **a** est membre ce concept

1) $\exists \text{possede} . (\text{Livre} \sqcap \text{Antiquite}) \sqcap (\forall \text{possede} . \neg \text{Livre} \sqcup \forall \text{possede} . \neg \text{Antiquite})(a)$

On a

2) $\exists \text{possede} . (\text{Livre} \sqcap \text{Antiquite})(a)$

3) $\forall \text{possede} . \neg \text{Livre} \sqcup \forall \text{possede} . \neg \text{Antiquite}(a)$

Il existe un objet **b**

4) $\text{possede}(a, b)$

5) $\text{Livre} \sqcap \text{Antiquite}(b)$

donc

6) $\text{Livre}(b)$

7) $\text{Antiquite}(b)$

Raisonnement

démontrer l'insatisfaisabilité de :

1) $\exists \text{possede} . (\text{Livre} \sqcap \text{Antiquite}) \sqcap (\forall \text{possede} . \neg \text{Livre} \sqcup \forall \text{possede} . \neg \text{Antiquite})(a)$

On a

2) $\exists \text{possede} . (\text{Livre} \sqcap \text{Antiquite})(a)$

3) $\forall \text{possede} . \neg \text{Livre} \sqcup \forall \text{possede} . \neg \text{Antiquite}(a)$

donc

8) $\forall \text{possede} . \neg \text{Livre}(a)$

9) $\forall \text{possede} . \neg \text{Antiquite}(a)$

Par 4) a possède un objet b

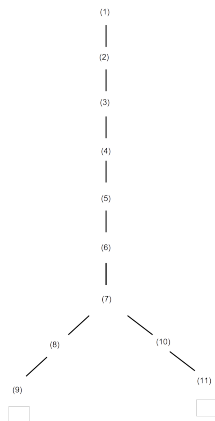
10) $\neg \text{Livre}(b)$ contradiction avec 6)!!!!

11) $\neg \text{Antiquite}(b)$ contradiction avec 7)!!!!

Raisonnement : exemple introductif

- Représentation sous forme d'arbre
- noeuds étiquetés par des concepts
- chemin ensemble de noeuds de la racine vers une feuille
- si contradiction ajout de \square au chemin

Dans l'exemple Les 2 chemins
contiennent \square



Raisonnement : Méthode des tableaux

Méthode des tableaux

Pour prouver F : construction d'un arbre dont

- la racine est étiquetée par $\neg F$
- les noeuds sont étiquetés par des concepts
- les successeurs des noeuds sont produits par des règles d'expansion.
- on ajoute \Box à la fin d'un chemin \mathcal{A} si :
 - $C(x) \in \mathcal{A}$ et $\neg C(x) \in \mathcal{A}$
 - $C(x) \in \mathcal{A}$ et $\neg C(x) \in \mathcal{A}$ et $(x = y$ ou $y = x)$
 - $\perp(x) \in \mathcal{A}$

Il existe plusieurs règles d'expansion pour construire les chemins

Raisonnement : Méthode des tableaux

\mathcal{A} : chemin

Règles pour la logique de description \mathcal{ALCN}

règle- \sqcap

condition :

\mathcal{A} contient $(C_1 \sqcap C_2)(x)$ et ne contient pas déjà $C_1(x)$ et $C_2(x)$

action :

prolongation : $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{C_1(x), C_2(x)\}$

Raisonnement : Méthode des tableaux

\mathcal{A} : chemin

Règles pour la logique de description \mathcal{ALCN}

règle- \sqcup

condition :

\mathcal{A} contient $(C_1 \sqcup C_2)(x)$ et ne contient aucun des $C_1(x)$ et $C_2(x)$

action :

branchement : $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{C_1(x)\}$ et $\mathcal{A}'' = \mathcal{A} \cup \{C_2(x)\}$

Raisonnement sur les *TBox* : Tableaux

Exercice

TBox : $A \equiv B \sqcap C$ $B \equiv D \sqcup E$ $C \equiv F \sqcup \neg E$

Prouver par la méthode des tableaux l'axiome :

$$A \sqsubseteq D \sqcup F$$

Raisonnement : Méthode des tableaux

\mathcal{A} : chemin

Règles pour la logique de description \mathcal{ALCN}

règle- \exists

condition :

\mathcal{A} contient $(\exists R.C)(x)$ et il n'existe aucun individu z tel que $R(x, z)$ et $C(z)$ sont aussi dans \mathcal{A}

action :

$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{R(x, y), C(y)\}$ où y est un nom d'individu qui n'existe pas déjà dans \mathcal{A}

Raisonnement : Méthode des tableaux

\mathcal{A} : chemin

Règles pour la logique de description \mathcal{ALCN}

règle- \forall

condition :

\mathcal{A} contient $(\forall R.C)(x)$ et $R(x, y)$ mais ne contient pas $C(y)$

action :

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{C(y)\}$$

Raisonnement sur les *TBox* : Tableaux

Exercice

Prouver par la méthode des tableaux l'axiome :

$$\exists R.(A \sqcap B) \sqsubseteq \exists R.A \sqcap \exists R.B$$

Raisonnement : Méthode des tableaux

\mathcal{A} : chemin

Règles pour la logique de description \mathcal{ALCN}

règle- $\geq n$

condition :

\mathcal{A} contient $(\geq n R.C)(x)$ et il n'y a pas dans \mathcal{A} des individus z_1, \dots, z_n qui sont tous distincts et qui sont tels que \mathcal{A} contient $R(x, z_i)$ pour tous les individus $(1 \leq i \leq n)$

action :

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{R(x, y_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i \neq y_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

Raisonnement : Méthode des tableaux

\mathcal{A} : chemin

Règles pour la logique de description \mathcal{ALCN}

règle- $\leq n$

condition :

\mathcal{A} contient $(\leq n R.C)(x)$ et les énonçés $R(x, y_1), \dots R(x, y_{n+1})$. Il n'existe aucune identité $y_i = y_j$ dans \mathcal{A} pour $(1 \leq i \leq n+1)$,
 $(1 \leq j \leq n+1), i \neq j$

action :

Pour chaque paire possible (y_i, y_j) d'individus parmi y_i, y_{n+1} on ajoute une nouvelle branche avec $y_i = y_j$

Raisonnement : Méthode des tableaux

Méthode des tableaux

exercice

$TBox : Parent \equiv \exists aEnfant.T$

Montrer par la méthode des tableaux :

$\geq 2aEnfant \sqsubseteq Parent$

Raisonnement : Méthode des tableaux

Méthode des tableaux

Résultats théoriques

propriétés

- terminaison
- correction
- complétude

Raisonnement en logique de description

complexité du problème de satisfaisabilité

complexité	logique de description
PTIME	AL, ALN
NP-complet	$ALU, ALUN$
coNP-complet	ALE
PSPACE-complet	$ALC, ALCN, ALCQI$
EXP-TIME	$SHIQ, SHIF$
NEXP-TIME	$SHOIQ, SHOIN$