Examen du module de raisonnement dans l'incertain

Durée : 1 heure 30

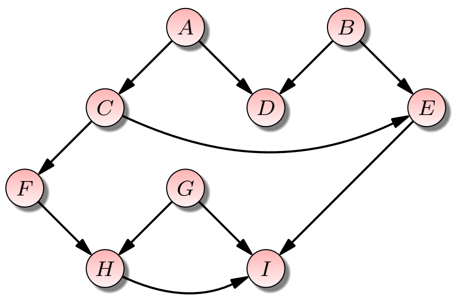
Documents autorisés : 1 feuille A4 recto-verso

Exercice 1 (3 pts) — *Les deux urnes*

Soit deux urnes A et B emplies de boules rouges et noires. L'urne A contient 20 boules rouges et 30 boules noires ; l'urne B contient 10 boules rouges et 10 boules noires. On sélectionne au hasard une des deux urnes (tirage équiprobable) et, dans cette urne, on tire une boule au hasard. La boule est rouge. Déterminez la probabilité que la boule provienne de l'urne A.

Exercice 2 (4 points) — *Séparations*

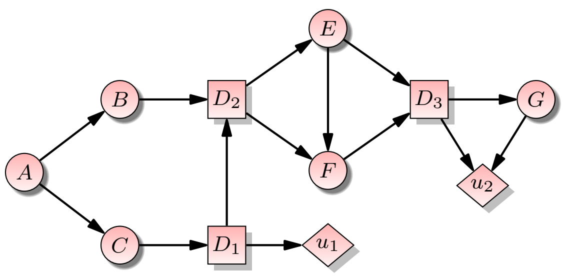
On considère le réseau bayésien suivant, de structure $\mathcal{G}$:



Qu'est-ce que le critère de d-séparation permet d'affirmer concernant les propriétés suivantes :
$\langle F \perp_{\mathcal{G}} E \rangle$? $\langle F \perp_{\mathcal{G}} E | D \rangle$? $\langle F \perp_{\mathcal{G}} E | \{C, D\} \rangle$ $\langle F \perp_{\mathcal{G}} E | \{C, D, H\} \rangle$ $\langle F \perp_{\mathcal{G}} E | \{C, H, I\} \rangle$?
Vous justifierez brièvement vos réponses.

Exercice 3 (3 points) — *Influences*

On considère le diagramme d'influence de structure $\mathcal{G}$ suivant :



Q 3.1 Déterminez un ordre partiel temporel des variables du diagramme d'influence, puis un ordre total compatible, sachant que les décisions sont prises dans l'ordre D_1, D_2, D_3.

Q 3.2 En utilisant l'ordre total précédent, créez un « strong junction tree ». Vous préciserez dans quelles cliques vous stockerez les probabilités et les utilités du diagramme d'influence.

Exercice 4 (5 points) — *Faut pas dérailler*

Un vendeur de bicyclettes peut acheter (décision A) ou non (décision $\overline{A}$) à un grossiste un ensemble de 1000 dérailleurs pour vélo tout-terrain (VTT) qui peut se révéler, après achat :

— soit être de bonne qualité (événement B), auquel cas la revente des VTT lui rapportera un bénéfice net de 350K€,

— soit être de mauvaise qualité (événement M), auquel cas il perdra 200K€ car les VTT ne se vendront pas.

Le vendeur accorde aux événements B et M les probabilités a priori :

$$P(B) = 0,7 \qquad \text{et} \qquad P(M) = 0,3.$$

Avant l'achat, il a la possibilité de réaliser un test de qualité par prélèvement aléatoire de 10 dérailleurs dans le lot. Le test, qui conclura $b =$ « B vrai » ou $m =$ « M vrai » n'est pas sûr à 100%. Le décideur accorde aux réponses possibles les probabilités :

$$P(b|B) = 0,8 \qquad P(m|B) = 0,2 \qquad P(b|M) = 0,1 \qquad P(m|M) = 0,9.$$

Le coût du test par un expert est de 30K€. Le critère de décision du vendeur est le maximum d'espérance d'utilité et son utilité de von Neumann-Morgenstern (utilité sur les conséquences) est une fonction $u(\cdot)$ de son bénéfice.

Q 4.1 Tracez l'arbre de décision du problème, en indiquant les probabilités des arêtes sortantes des nœuds de chance (vous donnerez leur expression ainsi que leur valeur numérique, par exemple $P(Z|Y) = 0.2$).

Q 4.2 En supposant que la fonction d'utilité de von-Neumann-Morgenstern du vendeur sur les bénéfices est $u(x) = x$, quelle est la stratégie optimale ?

Exercice 5 (5 points) — *Apprentissage*

Soit trois variables aléatoires booléennes A, B, C dont on a observé les occurrences suivantes :

A	B	C
a_1	b_1	c_1
a_1	b_1	c_1
a_1	b_1	c_1
a_1	b_1	c_2
a_1	b_2	c_1
a_1	b_2	c_2
a_2	b_1	c_2
a_2	b_1	c_2
a_2	b_1	c_2
a_2	b_1	c_1
a_2	b_2	c_2
a_2	b_2	c_2

On suppose ici que toute probabilité conditionnelle portant sur les variables A, B, C se déduit par normalisation des fréquences observées dans la base, c'est-à-dire qu'en multipliant ces fréquences par une constante de telle sorte qu'elles somment à 1, on obtient des probabilités. Par exemple, on observe 6 instances de a_1 et 6 instances de a_2. Par conséquent, $P(A = a_1) = P(A = a_2) = 6 \times k$, avec la constante $k = 1/12$ afin d'obtenir $P(A = a_1) + P(A = a_2) = 1$.

Q 5.1 En utilisant des tests d'indépenance conditionnels fondés sur les probabilités, appliquez l'algorithme PC pour apprendre le squelette du réseau bayésien ayant généré cette base.

Q 5.2 Appliquez les règles R1, R2, R3 de PC. Quel CPDAG obtient-on ?