Catalan 问题

问题：

1. n 个节点的二叉树的所有可能形态个数为 C_n

2. n 个数以此入栈后的所有可能出栈顺序个数为 C_n

分析：

1.对于问题 1 考虑以节点 i 为根的二叉树 $root$，则它的左、右子树的个数分别为 $i-1$、$n-i$，递归对这两个子树求解二叉树可能的形态数，那么 $root$ 的可能的形态数为 $C_i C_{n-i}$，现在我们对 i 从 1 取到 n，得到

$$C_i = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} C_{n-i}$$

2. 对于问题 2 考虑出栈元素编号为 i，应用上面的方法同样可以得到

$$C_i = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} C_{n-i}$$

求解递推式：

对于上面的问题，我们根据递推表达式可以想到利用记忆化方法高效的编程解决。在数学中由上面的递推式得到的数叫 $Catalan$ 数，得不到表达式总是不满意的，现在考虑怎么得到它的表达式。

在组合学中第 n 个 $Catalan$ 数 C_n 定义为一个长度为 $2n$ 的特殊序列的个数，这个序列由 n 个 0 与 n 个 1 组成，且在任意起始序列中，0 的个数大于或等于 1 的个数，称这样的序列为 $n-Catalan$ 序列，满足递推关系

$$C_i = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} C_{n-i}$$

现在我们尝试用构造补集的方法求解它，我们知道把 n 个 0 与 n 个 1 不加限制的排在一起可以组成 $\binom{2n}{n}$ 个长度为 $2n$ 的序列，那么其中有 C_n 个 $n-Catalan$ 序列，其他的称作它的补序列。

对于任意的补序列 $u = u_1 u_2 \cdots u_{2n}$，存在一个最小的 k $(1 \le k \le 2n-1)$，使得 k 位置是第一个满足 1 的个数超过 0 的个数的位置，则 u_1 到 u_{k-1} 之间 1 和 0 的个数相同。定义 $\varphi(u) = v = v_1 v_2 \cdots v_{2n}$，其中

$$v_i = \begin{cases} 1-u_i, & i \le k \\ u_i, & i > k \end{cases}$$

易知 u_1 到 u_k 之间 1 的个数为 $\frac{k+1}{2}$，0 的个数为 $\frac{k-1}{2}$，从而 v 中 0 的个数为 $\frac{k+1}{2} + n - \frac{k-1}{2} = n+1$，则 v 是由 $n+1$ 个 0 和 $n-1$ 个 1 组成的序列，φ 是将补序列映到由 $n+1$ 个 0 和 $n-1$ 个 1 组成的序列的映射，由 $n+1$ 个 0 和 $n-1$ 个 1 组成的序

列共有$\binom{2n}{n+1}$个。

由φ的定义知道它肯定是一个双射，对每一个序列v，自然存在一个最小的k $(1 \le k \le 2n-1)$，使得k位置是第一个满足 0 的个数超过 1 的个数的位置，我们可以得到一个从v到u的一一对应的转换方法，即把前k个位置的 0 和 1 互换，所以u共有$\binom{2n}{n+1}$个，至此可以得到C_n的表达式为

$$Cn = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$