



Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Факультет компьютерных наук  
Магистерская программа математических методов оптимизации и стохастики

Курсовая работа

**Выделение пересекающихся сообществ  
во взвешенных графах  
-| ЧЕРНОВИК |-**

**Выполнил:**  
студент группы м15МОС  
Славнов Константин Анатольевич

**Научный руководитель:**  
к.ф.-м.н.  
Панов Максим Евгеньевич

Москва, 2016

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>2</b>
§2.1	Cluster Affiliation Model for Big Networks (BigClam) . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Инициализация</b>	<b>6</b>
§3.1	Оригинальный подход . . . . .	6
§3.2	Новый подход. . . . .	7
§3.3	Эксперименты. . . . .	8
<b>4</b>	<b>Новые модели для взвешенных графов.</b>	<b>10</b>
§4.1	Гамма Модель . . . . .	11
§4.2	Разреженная Гамма модель. . . . .	14
<b>5</b>	<b>Эксперименты</b>	<b>15</b>
§5.1	Функционалы качества . . . . .	15
§5.2	Данные . . . . .	15
§5.3	Результаты экспериментов . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Результаты работы</b>	<b>15</b>
<b>7</b>	<b>Список литературы</b>	<b>16</b>

# 1 Введение

-| Общие слова про тему — выделение пересекающихся сообществ.  
 Актуальность — зачем выделение сообществ, для каких задач надо.  
 Зачем пересекающиеся, про новизну анализа взвешенных графов.  
 Про ключевые результаты работы. |-

В данной работе будет рассмотрена задача выделения сообществ — группы вершин в графе, плотно связанных между собой. На текущий момент известно множество подходов и методов для выделения непересекающихся сообществ [1]. Гораздо меньше внимания уделено случаю пересекающихся групп. В данной работе будет предложен новый метод решения задачи в случае взвешенных графов. Метод основан на алгоритме BigClam [2], который создан для не взвешенных графов. Можно сказать, что новый метод является обобщением модели BigClam на взвешенный случай.

Работа начинается с постановки задачи и подробного описания метода BigClam. Особое внимание уделено методу инициализации. Будет показано, как небольшими усилиями можно улучшить предложенный метод инициализации по начальному значению функционала, что ускоряет и немного уточняет итоговый результат.

Далее речь пойдет о подходах обобщения метода на случай взвешенного графа. В начале рассмотрено самое простое и интуитивное обобщение, после чего предложена усложненная модель. Заканчивается работа экспериментами на модельных и реальных данных. К сожалению, реальных взвешенных графов с известным разбиением на пересекающиеся сообщества не удалось найти. Поэтому основные выводы работы будут по экспериментам с модельными данными.

-| Добавить выводы в общих словах, когда они будут сформулированы. |-

# 2 Постановка задачи

-| Описание общего подхода и принципа. |-

Общий метод базируется на следующем очевидном наблюдении, что чем в большее количество сообществ входят одновременно две вершины, тем больше вероятность, что они будут соединены ребром, что подтверждается на реальных данных [2]. Наша модель должна учитывать этот факт.

Представим, что каждая вершина графа  $v$  взаимодействует с сообществом  $A$  с некоторой силой  $F_{vA}$ . Нулевая сила означает отсутствие взаимодействия. Такую модель можно представить как двусвязный граф, из вершин исходного графа в первой компоненте и вершин-сообществ во второй (рис. 1). Отметим, что подобная концепция позволяет отразить не только идею пересекающихся сообществ, но и вложенных.

Теперь можно определить силу взаимодействия  $X_{uv}$  между вершинами  $u$  и  $v$ , которая будет определять вероятность появления ребра между вершинами:  $X_{uv} = F_u \cdot F_v^T$ , где  $F_u$  — вектор-строка, составленная из  $F_{uA}$  — сил взаимодействия вершин с сообществами графа.

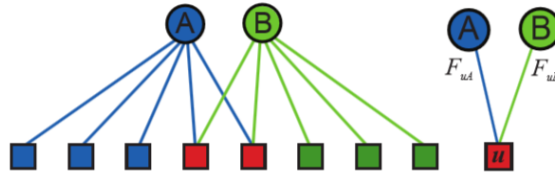


Рис. 1. Двусвязный граф модели BigClam. Сверху вершины-сообщества, снизу вершины исходного графа. Вершины и сообщества взаимодействуют с неотрицательной силой  $F_{vA}$ . Ребра, которые соответствуют нулевым весам опущены для большей наглядности.

Таким образом, получено желаемое свойство: чем больше общих сообществ разделяют вершины, тем сильнее они связаны. Определим вероятность появления ребра  $(u, v)$  как  $p(u, v) = 1 - \exp(-X_{uv})$ . Т.е. чем сильнее связаны вершины, тем вероятнее появление ребра между ними. Таким образом получена вероятностная модель. Предполагается, что наблюдаемый нами граф сгенерирован изменено из нее.

Итак, кратко опишем оригинальный метод, его основные предположения.

## §2.1 Cluster Affiliation Model for Big Networks (BigClam)

-| Постановка задачи,  
предположения,  
вывод формул,  
схема оптимизации,  
примерно как в нутбуке Math Models.  
Про AGM модель и ее релаксацию.  
Рассказ про NMF с не квадратичной функцией потерь.  
|-

Опишем предположения полученной вероятностной модели формально.

**Основные обозначения.** Введем основные обозначения, которые будут использоваться на протяжении всей работы.

-  толстые линии  -	
Обозначение	Описание
$G = (V, E)$	граф
$A \in \mathbb{R}_+^{N \times N}$	матрица смежности
$F \in \mathbb{R}_+^{N \times K}$	матрица силы принадлежности к сообществам
$K$	количество сообществ
$C$	множество сообществ
$p(u, v)$	вероятность появления ребра $(u, v)$
$p((u, v)   c)$	вероятность появления ребра $(u, v)$ при условии, что $u$ и $v$ принадлежат сообществу $c$
$l(F)$	логарифм функции правдоподобия
$\mathcal{N}(u)$	1-окрестность вершины $u$ (соседи вершины)
$w_{uv}$	вес ребра $(u, v)$ для взвешенного графа

### Предположения.

1. Каждая вершина  $v \in V$  относится к сообществу  $c \in C$  с некоторой силой

$$F_{vc} \geq 0.$$

2. Вероятность появления ребра  $(u, v)$ , при условии, что вершины  $u, v$  находятся в одном сообществе  $c$  определяется по формуле

$$P((u, v) \mid c) = 1 - \exp(-F_{uc} \cdot F_{vc}).$$

3. Каждое сообщество  $c$  генерирует ребра независимо друг от друга, а значит, что вероятность появления ребра можно посчитать по формуле полной вероятности. Получим

$$P(u, v) = 1 - \exp\left(-\sum_{c \in C} F_{uc} F_{vc}\right) = 1 - \exp(-F_u F_v^T),$$

$$F = \{F_u\} = \{F_{uc}\} \in \mathbb{R}^{N \times K}.$$

**Вероятностная интерпретация.** Предложенная модель имеет простую вероятностную интерпретацию. Предположим, что существуют скрытые случайные переменные  $X_{uv}$ , которые определяют силу взаимодействия вершин, а ребро появляется если  $X_{uv} > 0$ . Каждое сообщество графа дает свой независимый вклад  $X_{uv}^{(c)}$  в  $X_{uv}$ . Предположим, что  $X_{uv}^{(c)} \sim \text{Pois}(F_{uc} \cdot F_{vc})$ , где  $F_{vc} \geq 0$  сила взаимодействия вершины  $v$  и сообщества  $c$ . Значит, что

$$X_{uv} \sim \text{Pois}\left(\sum_c F_{uc} \cdot F_{vc}\right) = \text{Pois}(F_u \cdot F_v^T).$$

Вероятность появления ребра равна

$$p(u, v) = \mathbb{P}(X_{uv} > 0) = 1 - \exp(-F_u F_v^T),$$

что соответствует формулам, полученным выше.

**Метод и Схема оптимизации** Для восстановления матрицы  $F$  предлагается использовать метод максимизации правдоподобия. Из приведенных выше формул не сложно вывести, что правдоподобие  $l(F)$  определяется как

$$\begin{aligned} l(F) &= \log(\mathbb{P}(A \mid F)) \\ &= \sum_{(u,v) \in E} \log(1 - \exp(-F_u F_v^T)) - \sum_{(u,v) \notin E} F_u F_v^T. \end{aligned}$$

$$\hat{F} = \arg \min_{F \geq 0} D(A, f(F F^T)),$$

$$\text{где } D = -l(F), \quad f(x) = 1 - \exp(-x).$$

Для оптимизации используется блочный координатный спуск с методом проекции градиента на каждом шаге. Фиксируем  $F_v$ , оптимизируем по  $F_u$ ,  $u \neq v$ . Задача становится выпуклой.

$$\forall u : \arg \max_{F_u \geq 0} l(F_u),$$

$$l(F_u) = \sum_{v \in \mathcal{N}(u)} \log(1 - \exp(-F_u F_v^T)) - \sum_{v \notin \mathcal{N}(u)} F_u F_v^T,$$

где  $\mathcal{N}(u)$  — соседи вершины  $u$ .

$$\nabla l(F_u) = \sum_{v \in \mathcal{N}(u)} F_u \frac{\exp(-F_u F_v^T)}{1 - \exp(-F_u F_v^T)} - \sum_{v \notin \mathcal{N}(u)} F_v^T.$$

Основная сложность формулы (линейная по размеру графа) во втором слагаемом. Заметим, что

$$\sum_{v \notin \mathcal{N}(u)} F_v^T = \sum_v F_v - F_u - \sum_{v \in \mathcal{N}(u)} F_v.$$

Получаем сложность одной итерации  $O(\mathcal{N}(u))$ . В этом значимое отличие рассматриваемого метода от остальных. Такая сложность позволяет обчитывать графы с количеством вершин до  $10^5$  за приемлемое время.

Для подбора градиентного шага используется backtracking line search.

**Связь с матричными разложениями** Подобная постановка задачи, позволяет рассмотреть задачу выделения пересекающихся сообществ, как задачу неотрицательного матричного разложения с общим функционалом. То есть необходимо найти такую низкоранговую матрицу  $F \in \mathbb{R}_+^{N \times K}$ , что она наилучшим образом приближает матрицу  $A$  в смысле некоторого функционала  $D$ :

$$F = \arg \min_{F \geq 0} D(A, f(F F^T)).$$

В данном случае  $D = -l(F)$  — значение правдоподобия, а  $f(x) = 1 - \exp(-x)$  — функция, которая преобразует силы взаимодействия вершин в вероятности появления ребра (link function). Как показывают эксперименты такая постановка оправдана, т.к.  $l_2$ -норма плохо подходит для восстановления бинарных матриц [2]. - [Возможно, другая ссылка](#) -

Такое наблюдение позволяет смотреть на задачу выделения пересекающихся сообществ с более общих формулировок.

**Восстановление структуры сообществ** После того, как метод оптимизации сошелся к некоторому значению матрицы  $F$ , осталось предложить некоторый переход к сообществам. Для того, чтобы восстановить исходную структуру сообществ  $\mathcal{C}$  сравним значение матрицы  $F$  с порогом  $\delta$ , который определим далее. Если  $F_{vc} > \delta$ , то  $v \in \mathcal{C}$ .

Обозначим за  $\varepsilon$  вероятность появления ребра в графе (если бы все ребра появлялись равномерно):  $\varepsilon = \frac{2|V|}{|E| \cdot (|E| - 1)}$ . Возьмем  $\delta$  так, чтобы две вершины принадлежали одному сообществу, если модельная вероятность появления ребра между

ними выше чем  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon \leq 1 - \exp(-\delta^2).$$

А значит

$$\delta = \sqrt{-\log(1 - \varepsilon)}.$$

**$\varepsilon$ -сообщество** Предложенная модель имеет недостаток. Если две вершины не разделяют хотя бы одного общего сообщества, между ними не может быть ребра. Очевидно, что в настоящих сетях такого свойства нет. Поэтому введем так называемое  $\varepsilon$ -сообщество. Предполагаем, что все вершины относятся к единому  $\varepsilon$ -сообществу с малой силой  $\delta$ , определенной выше. То есть дополнительно предполагается, что ребро могло возникнуть случайно с вероятностью, которая равна доле существующих ребер в графе:

$$p((u, v) \mid \varepsilon) = \frac{2|V|}{|E| \cdot (|E| - 1)}.$$

### 3 Инициализация

-| Про Conductance и инициализацию в BigClam.  
про ее не совершенство. Идеи по улучшению. Раз, два, три. Тестирование на модельных данных. Тестирование на реальных данных.  
Выводы. |-

#### §3.1 Оригинальный подход

Так как задача не является выпуклой большое внимание необходимо уделить методам инициализации. В данном методе используется подход, описанный в статье [3].

Введем метрику на подмножестве множества вершин  $S \subset V$ .

$$\varphi(S) = \frac{\text{cut}(S)}{\min(\text{vol}(S), \text{vol}(\bar{S}))}, \text{ где}$$

$$\text{cut}(S) = \text{cut}(S, \bar{S}) = \sum_{\substack{(v,u) \in E \\ v \in S, u \in \bar{S}}} a_{vu},$$

$$\text{vol}(S) = \sum_{(v,u) \in S} a_{vu}.$$

Величина  $\varphi(S)$  называется проводимостью (Conductance) и очень похоже на взвешенный разрез. Утверждается, что эго-графы (вершина с ее 1-окрестностью), которые достигают локального значения функционала  $\varphi(S)$  являются хорошими сообществами и могут использоваться в качестве инициализации для других методов. Локальность понимается в смысле графа. Значение проводимости эго-графа любой соседней вершины должно быть больше, чем в данной.

В качестве инициализации предлагается выбирать необходимое количество эго-графов, которые достигают локального максимума, упорядоченных по возрастанию. Т.е. для  $S_1, \dots, S_K, i \in V$

$$F_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in S_j; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

**Недостатки.** Опишем минусы такого подхода. Матрица  $F$  получается детерминирована, а значит метод бессмысленно перезапускать для улучшения результата.  $F$  состоит всего из двух значений 0 и 1, при чем подавляющее большинство нули. Ноль является плохой точкой для старта, т.к.  $F = 0$  — точка локального минимума. То есть модель потенциально может сойтись к плохому значению функционала. Помимо этого, часто так получается, что 2 или большее количество значений среди  $S_1, \dots, S_K$  соответствуют одному сообществу. Продemonстрируем последний недостаток на следующем модельном примере. Рассмотрим матрицу  $F$  как на рис. 2. Сгенерируем из нее модельный граф согласно модели BigClam. И найдем 3 вершины, эго-графы которых будут образовывать начальное приближение матрицы  $F$ . На рис. 3 изображен семплированный граф и слева 3 найденные вершины отмечены красным цветом.

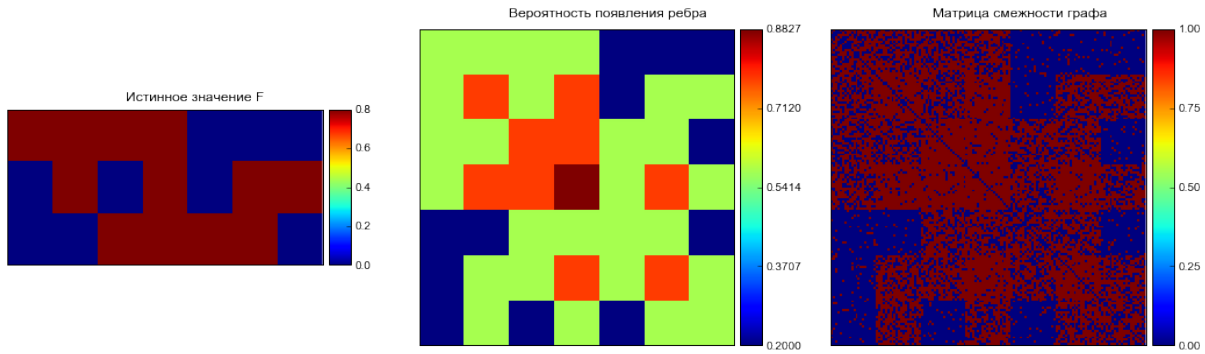


Рис. 2. Модельный пример графа из трех пересекающихся сообществ. Всего в графе 140 вершин. Описания изображений слева направо: 1) Матрица  $F$  размера 3 на 140; 2) Матрица  $1 - \exp(-FF^T)$  — определяет вероятность появления ребра согласно модели BigClam; 3) Случайная семплированная матрица смежности.

Видно, что 2 вершины являются представителями одного и того же сообщества. И это не единичный случай, такая ситуация часто встречалась и на реальных графах. Находились такие  $i, j \in 1, \dots, K$ , что  $F_{\bullet i}^T F_{\bullet j} \gg 0$ , а значит эго-графы вершин значительно пересекаются, вершины лежат рядом и велика вероятность того, что принадлежат одному и тому же сообществу.

### §3.2 Новый подход.

Решением такой проблемы может послужить дополнительная пенализация за близкое расположение к уже взятым в качестве инициализации вершинам. То есть при выборе следующего вектор-столбца  $F_{\bullet j}$  матрицы  $F$  к значению проводимости  $C_i$  эго-графа  $i$  вершины добавим штраф, равный

$$R = \gamma \cdot F_{\text{selected}}^T F_{\text{ego}_i},$$

где  $F_{\text{selected},l} = 1$  в вершинах, которые уже входят в инициализацию ( $\exists k : F_{lk} = 1$ ), а  $F_{\text{ego}_i,l} = 1$ , если  $l$  лежит в эго-графе  $i$  вершины ( $l \in \mathcal{N}(i)$ ),  $\gamma = 1/\sum_l F_{\text{selected},l}$  —



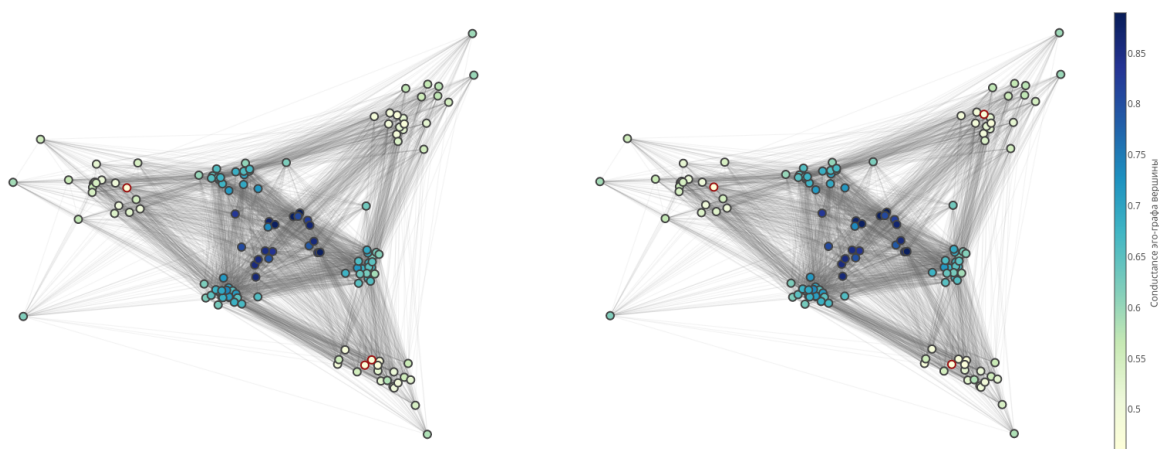


Рис. 3. Граф, сгенерированный из матрицы  $F$  на рис. 2. Красным цветом обозначены вершины, эго-графы которых образуют начальное приближение матрицы  $F$ . **Слева:** оригинальный метод. 3 вершины с минимальной проводимостью, которые достигают локального минимума в окрестности вершины. Видно, что две вершины попали в один кластер, что портит начальное приближение. **Справа:** новый метод. 3 вершины с минимальной пенализованной проводимостью, которые достигают локального минимума в окрестности вершины. Видно, что все 3 вершины лежат в своих кластерах, что улучшает качество инициализации.

нормировка. То есть  $R$  — доля уже выбранных вершин, которые попали в рассматриваемый эго-граф.

Результат работы метода на текущем примере отражен на правой части рис. 3. Желаемый результат достигнут. Для большей общности можно было бы ввести коэффициент пенализации, но было решено этого не делать и учитывать 2 критерия (проводимость и коррелированность) с одинаковым весом.

Таким образом мы избавились от одной описанной выше проблемы. Проблема нулей и детерминированности решается простым добавлением равномерного шума в диапазоне  $[0; 0, 1]$ . Константа 0,1 подобрана экспериментально.

Дополнительно возникла идея, что вершины соседние к эго-графу имеют большую вероятность принадлежать к тому же сообществу, чем остальные. Значит можно вокруг найденного с помощью проводимости начального приближения "распространить" его на соседние вершины. Т.е. дать половину веса (0.5) всем вершинам, соседним к найденному эго-графу.

### §3.3 Эксперименты.

По итогам исследования появилось целое семейство методов инициализации. В ходе экспериментов было изучено поведение правдоподобия на модельных и реальных данных. Т.к. инициализация не основной предмет работы, было решено посмотреть есть ли улучшение качества буквально на нескольких примерах. Более детальное изучение предложенных методов предстоит изучить в дальнейшей работе.

Модельный пример был описан ранее, реальные данные представляют собой набор из 4 небольших эго-графов знакомых автора работы из социальной сети.

На рис. 4 и 5 приведено поведение правдоподобия в зависимости от номера итерации для модельных и реальных данных соответственно. В таблице ниже приведено описание исследуемых методов инициализации:

-| Жирные линии |-

Обозначение	Описание
<i>rand</i>	Инициализация равномерным шумом от 0.75 до 1.25
<i>cond</i>	Инициализация в локальных максимумах проводимости (стандартный метод)
<i>cond_new</i>	Новый метод со штрафом за пересечение с уже выбранными вершинами
<i>cond_randz</i>	Дополнительно заменяем нули из метода <i>*cond*</i> на значения от 0 до 0.1
<i>cond_new_randz</i>	Дополнительно заменяем нули из метода <i>*cond_new*</i> на значения от 0 до 0.1
<i>cond_randz_spr</i>	Применяем метод <i>cond</i> . Соседние с найденными эго-графами вершины получают половину его веса. Затем заменяем нули матрицы $F$ на значения от 0 до 0.1
<i>cond_new_randz_spr</i>	Применяем метод <i>cond_new</i> . Соседние с найденными сообществами вершины получают половину его веса. Затем заменяем нули матрицы $F$ на значения от 0 до 0.1

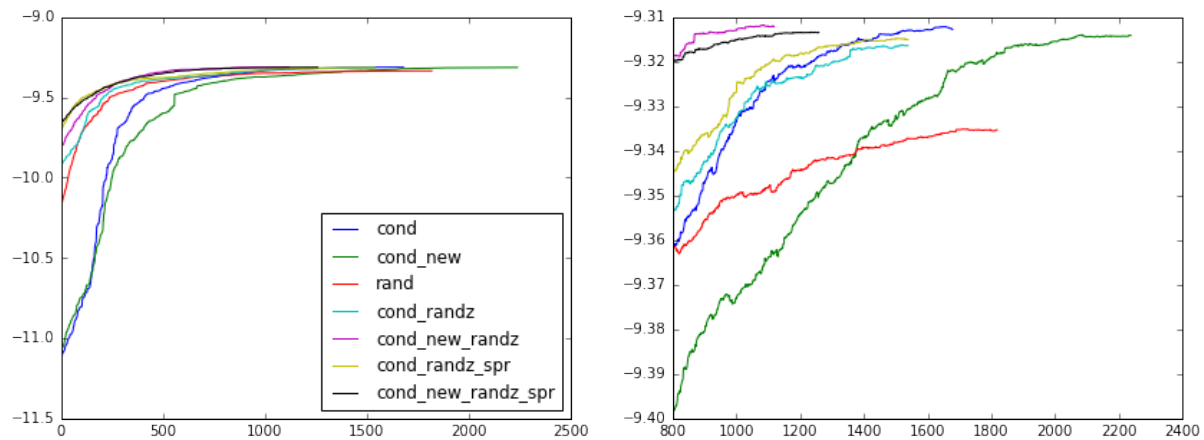


Рис. 4. Поведение минус логарифма правдоподобия в зависимости от номера итерации для различных начальных приближений из таблицы выше. **Слева:** общий план. **Справа:** увеличенный участок с 800 итерации. Лучше всех себя показывает новые методы *cond\_new\_randz* и *cond\_new\_randz\_spr*.

**Выводы.** Итак, по итогам тестов, можно сказать, что предложенные методы инициализации демонстрируют лучший результат. Методы стартуют из лучших по правдоподобию начальных приближений, сходятся быстрее и к немного лучшим значениям функционала. Если на модельных примерах преимущество было не столь значительным, на реальных данных оно очевидно.

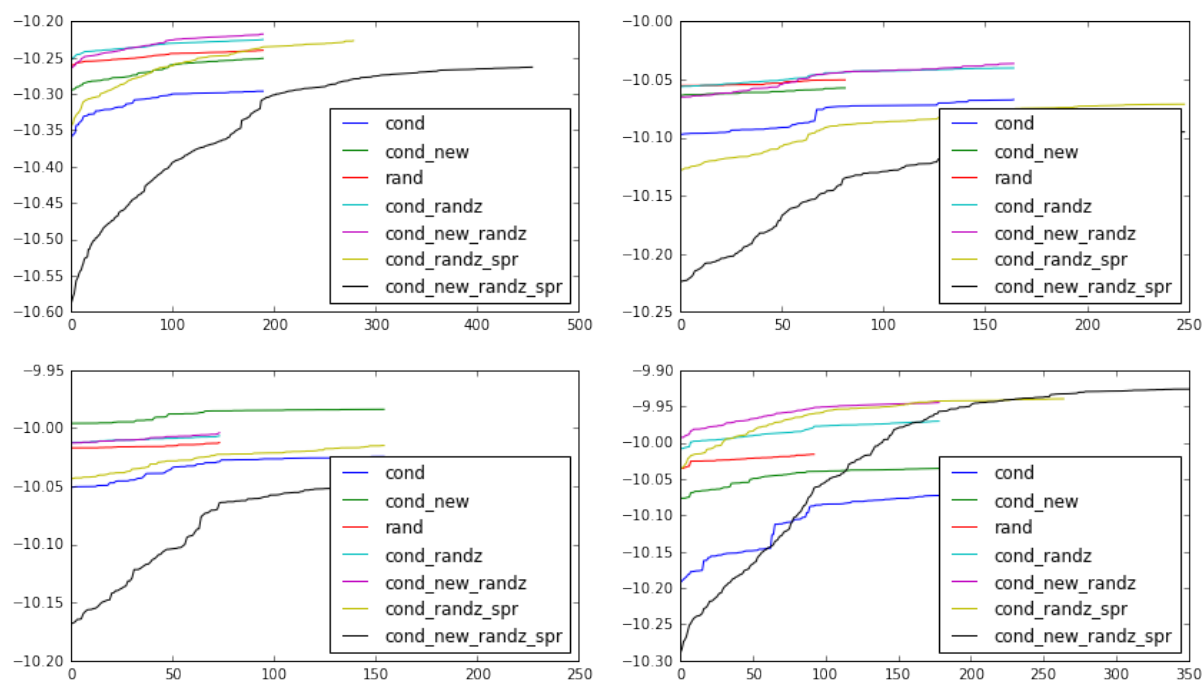


Рис. 5. Поведение минуса логарифма правдоподобия в зависимости от номера итерации для различных начальных приближений для четырех реальных графов. Показан конец оптимизационной процедуры и 0 по горизонтальной оси соответствует 250 итерации. Во всех четырех случаях лидируют новые методы, только в одном метод без пенализации.

Отметим, что все примеры имели достаточно небольшой размер и маленький диаметр графа, поэтому методы с приставкой *\_spr* проявили себя незначительно, т.к. почти все вершины оказывались соседними к выбранным для инициализации эго-графам. В дальнейшей работе эксперименты будут повторно проведены с большим диаметром графа.

## 4 Новые модели для взвешенных графов.

-| Наивный переход к взвешенному варианту (деление на вес ребра).  
 Что-то рассказать про него (?). |-

Перейдем к основной теме данной работы: выделение пересекающихся сообществ в взвешенном графе. Такие методы полезны тем, что позволяют учесть дополнительную информацию, которая часто дополняет матрицу смежности, но не может напрямую использоваться в методах, работающих с бинарной матрицей смежности, как BigClam.

-| Нормально написать, структуру дальнейшего текста |- Приведем описание предлагаемых методов. Затем будут описаны метрики для сравнения получаемых результатов и проведены тесты на модельных и реальных ( -| Убрать, если тесты только на модельных данных |- ) данных.

Начнем с самого простого и интуитивного обобщения метода BigClam. Вес ребра  $(u, v)$  обозначим за  $w_{uv}$ . Для обработки взвешенных ребер изменим функционал качества следующим образом:

$$l(F) = \sum_{(u,v) \in E} \log \left( 1 - \exp \left( -\frac{F_u F_v^T}{w_{uv}} \right) \right) - \sum_{(u,v) \notin E} F_u F_v^T.$$

Тем самым получается, что чем больше вес  $w_{uv}$ , тем больше должно быть значение сил  $F_u$  и  $F_v$ , которые его объясняют, а значит вероятность того, что вершины лежат в одном сообществе повышается.

Т.е. исходное предположение, что вероятность появления ребра  $(u, v)$ , при условии, что вершины  $u, v$  находятся в одном сообществе  $c$  определяется как

$$P((u, v) \mid c) = 1 - \exp(-F_{uc} F_{vc}),$$

заменяется на предположение, что вероятность появления ребра  $(u, v)$  с весом  $w_{uv}$ , при условии, что вершины  $u, v$  находятся в одном сообществе  $c$  есть

$$P((u, v) \mid c, w_{uv}) = 1 - \exp \left( -\frac{F_{uc} F_{vc}}{w_{uv}} \right).$$

Однако, такой подход теряет некоторую симметричность, которая была в оригинальной модели. Наличие или отсутствие ребра вносят разный вклад в функционал. Нельзя предложить похожей красивой вероятностной интерпретации для сил взаимодействия вершин типа

$$X_{uv}^{(c)} \sim \text{Pois} \left( \frac{F_{uc} \cdot F_{vc}}{w_{uv}} \right),$$

так как в случае отсутствия ребра параметр распределения будет бесконечен. Если рассматривать 2 случая: наличия, либо отсутствия ребра, получается, что в модели необходимо изначально задать какие ребра присутствуют, а какие нет, иначе из такой модели нельзя будет сгенерировать рассматриваемый граф. Дополнительно в модель изначально заложены ожидаемые веса на ребрах. Все эти наблюдения крайне обременительные. -| Сверить с научником |- .

Простые тесты подтверждают работоспособность модели, и она имеет право на существование. Однако, описанные сложности в интерпретации такой модели мотивируют искать другие способы работы с взвешенными данными.

-| Добавить прогон на игрушечном примере. |-

## §4.1 Гамма Модель

-| Переход к Гамма моделям.

Первоначальный вариант.

Проблема разреженных данных.

Очень долгая сходимость.

Переход к Разреженной Гамма модели.

|-

Попробуем построить новую модель по типу BigClam. Если мы посмотрим на оригинальный метод, то увидим, что все определяется распределением на скрытых

переменных  $X_{uv}$ , которые распределены по Пуассону. Если выпало что угодно кроме нуля — в графе есть ребро.

Такая модель легко обобщается на случай целочисленных весов. Просто убираем последнее утверждение, получаем пуассоновскую модель. Для случая непрерывных весов такая модель не подойдет. Значит необходимо подобрать непрерывный аналог распределения Пуассона.

Самое главное свойство, которые использовались при выводе оригинального метода — мультипликативность **-| правильный ли термин? |-** распределения. То есть сумма независимых случайных величин из этого распределения не должна выводить за его пределы.

В качестве непрерывного аналога распределения Пуассона рассмотрим гамма распределение. Их сумма (с одинаковым коэффициентом масштаба) не выводит из заданного класса.

Обозначим за  $\Gamma(k, \theta)$  гамма распределение. Аналогично BigClam, выпишем базовые предположения, которые используются в гамма модели.

## Предположения

1. Вероятность появления ребра с весом  $w_{uv}^c$ , при условии, что вершины принадлежат сообществу  $c$  определяется как

$$p(w_{uv}^c | c) \sim \Gamma(k = F_u F_v^T + 1, \theta = 1).$$

2. Каждое сообщество  $c$  генерирует ребра независимо друг от друга, а значит, что вес ребра

$$w_{uv} = \sum_c w_{uv}^c \sim \Gamma\left(\sum_c F_{uc} F_{vc} + 1, 1\right) = \Gamma(F_u F_v^T + 1, 1)$$

Поясним почему беремся именно  $F_u F_v^T + 1$ , а не  $F_u F_v^T$ . При  $F_u F_v^T = 0$  вероятность появления ребра между вершинами должна быть минимальной.  $\Gamma(0, 1)$  является экспоненциальным распределением. Если в графе не существует сообществ, именно это распределение будет объяснять возникающие ребра между вершинами графа, которое является самым естественным для социальных графов.

Для большей наглядности рассуждений везде далее будем опускать параметр  $\theta$  и обозначим за  $K_{uv} = F_u F_v^T + 1$ . Выведем формулу правдоподобия данной модели.

## Модель

$$\begin{aligned} l(F) &= \log(\mathbb{P}(A | F)) = \sum_{w_{uv}} \log p(w_{uv}) \\ &= \sum_{w_{uv}} \left[ -\log \Gamma(K_{uv}) - K_{uv} \log \theta + (K_{uv} - 1) \cdot \log w_{uv} - \frac{w_{uv}}{\theta} \right] = [\theta = 1] = \\ &= \sum_{w_{uv}} [-\log \Gamma(K_{uv}) + (K_{uv} - 1) \cdot \log w_{uv} - w_{uv}] \\ &= \sum_{w_{uv}} [-\log \Gamma(F_u F_v^T + 1) + F_u F_v^T \cdot \log w_{uv} - w_{uv}] \rightarrow \max_{F \geq 0}. \end{aligned}$$

**Схема оптимизации** Схема оптимизации используется та же самая, что и в BigCLAM.

Для того, чтобы посчитать градиент, понадобится дигамма функция:

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx} \log(\Gamma(x)).$$

Тогда градиент можем записать как

$$\frac{dl(F)}{dF_u} = - \sum_v F_v \Psi(F_u F_v^T + 1) - F_v \log w_{uv}.$$

Ко всем весам прибавляется небольшое  $\varepsilon$ , чтобы избежать нулей под логарифмом.

По сравнению с оригинальным методом, из-за того, что сумма взвешенная, провести трюк с упрощением сложности вычисления градиента не получится. Для каждого шага, для каждого  $F_u$  придется пересчитывать сумму целиком. Получается линейная сложность. Поэтому для подбора шара нецелесообразно использовать backtraking. Используется обычный убывающий шаг.

**Эксперименты** -| **Добавить картинки для экспериментов.** |- В ходе экспериментов было рассмотрено 2 варианта моделирования матрицы смежности взвешенного графа. 1 модель была взята прямо из предположений, описанных выше: задается матрица  $F$ , веса генерируются из гамма распределения. На таких данных оптимизационная схема надежно работает и сходится из любого, даже случайного приближения.

Однако, такая модель данных не соответствует реальным графам, т.к. в настоящие социальные графы разреженные. Вторая модель данных учитывала этот факт. Сначала генерировалась структура графа (есть ребро или нет), затем, только для проявившихся ребер генерируется его вес. Ниже приведен алгоритм генерации:

1. Задается матрица  $F$  и параметр  $\gamma$ .
2.  $\forall u \in V, v \in V$  С вероятностью  $1 - \exp(-\gamma F_u F_v^T)$  в графе создается ребро  $(u, v) \in E$ .
3.  $\forall (u, v) \in E$  — созданных ребер генерируется вес  $w_{uv} \sim \Gamma(\sum_c F_{uc} F_{vc} + 1, 1)$ .

Появился дополнительный параметр модели  $\gamma$ . Чем меньше его значение, тем более разреженной является результирующая матрица смежности  $A$ .

**Анализ.** Оказалось, что предложенная Гамма модель не может объяснить большое количество нулей в подобного рода данных и оптимизация не приводит ни к какому адекватному результату даже из хорошего начального приближения. Необходимо дополнительно учитывать возникающие в данных нули.

Поэтому было решено отказаться от дальнейшего рассмотрения этой модели и перейти к следующей. Единственное, что стоит отметить, что в данных с малым количеством нулей или полным их отсутствием такой подход может оправдать себя. Например, для решения задачи кластеризации.

## §4.2 Разреженная Гамма модель.

-| Введение разреженной составляющей.  
 Вывод формул.  
 Анализ: Композиция оригинального метода и Гамма модели.  
 Игрушечные примеры.  
 |-

**Предположения.** Все предположения о природе данных возьмем из описанной в предыдущем параграфе процедуры генерации данных. Собственно, именно эта генеративная модель и привела созданию данного метода.

**Модель.** Обозначим как и раньше вес ребра за  $w_{uv}$ , а бинаризованную матрицу смежности за  $a_{uv}$ . То есть  $a_{uv} = \mathbb{I}[w_{uv} \neq 0]$ .

Заметим, что вес ребра  $w_{uv}$  отличен от 0 только если  $a_{uv} \neq 0$ , а значит, что

$$p(w_{uv} = 0 \mid a_{uv} = 0) = 1.$$

Теперь, с учетом замечаний, выведем формулу логарифма правдоподобия.

$$\begin{aligned} l(F) &= \sum_{\forall (u,v)} \log p(w_{uv}) = \sum_{u,v} \log p(w_{uv} \mid a_{uv}) + \log p(a_{uv}) \\ &= \sum_{(u,v) \in E} \log p(w_{uv} \mid a_{uv} = 1) + \log p(a_{uv} = 1) + \sum_{(u,v) \notin E} \log p(w_{uv} = 0 \mid a_{uv} = 0) + \log p(a_{uv} = 0) \\ &= \sum_{(u,v) \in E} \log p(w_{uv} \mid a_{uv} = 1) + \log p(a_{uv} = 1) + \sum_{(u,v) \notin E} \log p(a_{uv} = 0) \\ &= \sum_{(u,v) \in E} \log P_{\Gamma}(w_{uv}) + \sum_{(u,v) \in E} \log(1 - \exp(-\gamma F_u F_v^T)) - \gamma \sum_{(u,v) \notin E} F_u F_v^T. \end{aligned}$$

Первое слагаемое — это правдоподобие предыдущей гамма модели на ребрах с ненулевыми весами, а последние 2 слагаемых это оригинальная BigClam модель для матрицы  $\sqrt{\gamma}F$ !

Значит, получившаяся модель, является их комбинацией. Модель сохраняет все преимущества BigClam-модели, в том числе скорость вычисления производной, но при этом учитывает взвешенные ребра и имеет дополнительный параметр  $\gamma$ , который связывает матрицы для гамма и оригинальной модели.

**Схема оптимизации.** Поскольку модель является комбинацией двух других, для вычисления градиента необходимо просто сложить градиенты из исходных методов. Отметим только, что в гамма модели сумму необходимо взять не по всем вершинам, а только по соседним к  $u$ .

Используется схема оптимизации с убывающим шагом, так как backtracking приводил модель к плохим локальным минимумам и оказался неэффективен

**Эксперименты.** На аналогичных модельных экспериментах, на которых простая гамма модель не сумела восстановить матрицу  $F$ , был запущен новый метод

-| рисунок |- .

Новый метод без труда восстанавливает истинное значение матрицы  $F$ , даже если значение параметра  $\gamma$  задано не точно.

**Выводы.** Данный метод является главным результатом текущей работы. Метод без существенных затрат обобщает оригинальный bigClam на случай взвешенного графа и имеет под собой понятные и простые вероятностные предположения.

## 5 Эксперименты

### §5.1 Функционалы качества

-| Про случай пересекающихся сообществ — немного специфики. |-

Оценивать качество получаемых результатов будем по трем функционалам: Модулярности, нормализованной общей информации (Normalized Mutual Information) и среднему значению проводимости (Conductance) сообществ. Первые два функционала изначально рассматриваются в случае непересекающихся сообществ, поэтому необходимо взять некоторые обобщения предложенных функционалов.

**Модулярность** Модулярность <http://arxiv.org/pdf/1110.5813.pdf>

**Conductance** Conductance

**Normalized Mutual Information** NMI <http://arxiv.org/pdf/0802.1218.pdf>

### §5.2 Данные

**Модельные Данные** Про модель генерации пары слов. <http://arxiv.org/pdf/0904.3940.pdf>

**Реальные Данные** Рассказ про то, что мало таких данных с истинным разбиением на сообщества.

Метрики Модулярность и Conductance.

Данные раз.

Данные два.

Данные три.

### §5.3 Результаты экспериментов

Общее описание.

С какими методами сравниваемся еще.

COPRA - <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0910/0910.5516.pdf>

**Эксперименты на модельных данных** Описание. Выводы.

**Эксперименты на реальных данных** Описание. Выводы.



## 6 Результаты работы

Выводы.

Что нового сделано.

Направление дальнейших разработок.

---

## 7 Список литературы

- [1] Santo Fortunato. Community detection in graphs. *Physics Reports*, 486(3):75–174, 2010.  
<http://www.arxiv.org/abs/0906.0612>.
- [2] Jaewon Yang and Jure Leskovec. Overlapping community detection at scale: a nonnegative matrix factorization approach. In *Proceedings of the sixth ACM international conference on Web search and data mining*, pages 587–596. ACM, 2013.
- [3] David Gleich and C Seshadhri. Neighborhoods are good communities. *arXiv preprint arXiv:1112.0031*, 2011.  
<http://arxiv.org/abs/1112.0031>.