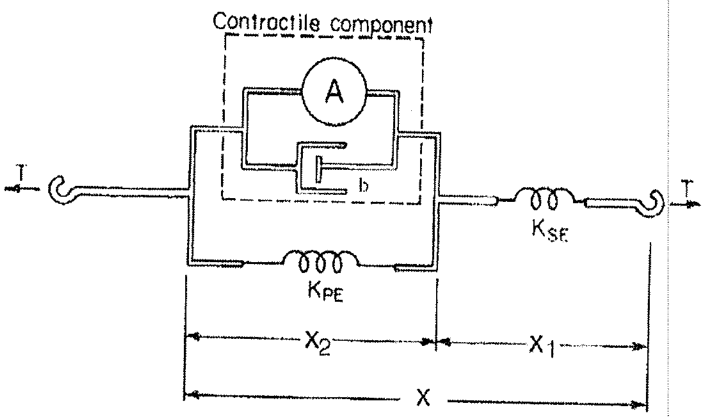
1. Consider the Hill's muscle model.



The governing equation for the muscle is given as follows:

$$\dot{T} = \frac{K_{SE}}{b}\left[K_{PE}\Delta x + b\dot{x} - \left(1 + \frac{K_{PE}}{K_{SE}}\right)T + A\right]$$

Here, K_{SE} = 136 g/cm, K_{PE} = 75 g/cm, and b = 50 gs/cm.

a) The muscle is held in an isometric condition. For a single twitch, the active force A is given as:

$$A(t) = 48144\exp(-t/0.0326) - 45845\exp(-t/0.034)$$

Derive the twitch force T(t) produced by the active force given above.

In an isometric condition. ⇒ length = constant

$\therefore \Delta x = 0, \ \dot{x} = 0$ (길이의 변화량 / 변화율 = 0)

따라서 주어진 governing equation은 다음과 같이 간략화된다

$$\dot{T} = -\frac{K_{SE}}{b}\left(1 + \frac{K_{PE}}{K_{SE}}\right)T + \frac{K_{SE}}{b}A$$

$$\therefore \dot{T}(t) + \frac{1}{b}(K_{SE} + K_{PE})T(t) = \frac{K_{SE}}{b}A(t)$$

⇒ The first order differential equation !!

*general method to solve "제 1차 선형미분 방정식"

제 1차 선형 미분 방정식의 일반적인 형태. $y' + p(x)y = g(x)$

이를 풀기위해서 integral factor를 사용한다.

⇒ integral factor $v = e^{\int p(x)dx}$

integral factor를 미분방정식의 양변에 곱하여 식을 정리하면 곱의미분 형태가 된다

$$e^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx} + p(x)e^{\int p(x)dx}y = e^{\int p(x)dx}g(x)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx}y\right] = e^{\int p(x)dx}g(x)$$

$$\therefore e^{\int p(x)dx}y = \int e^{\int p(x)dx}g(x)\,dx$$

governing equation $\mathring{T} + \frac{1}{b}(K_{SE}+K_{PE})T = \frac{K_{SE}}{b}A(t)$.

주어진 active force 까지 적용한 뒤 식을 정리하면 다음과 같다

$$\mathring{T} + \frac{1}{b}(K_{SE}+K_{PE})T = \frac{K_{SE}}{b}\left(48144\exp(-t/0.0326) - 45845\exp(-t/0.034)\right)$$

$$\Rightarrow \mathring{T} + K_3 T = K_1 e^{-a_1 t} - K_2 e^{-a_2 t}$$

여기에서. $K_1 = 48144 \times \frac{K_{SE}}{b}$ $\quad a_1 = \frac{1}{0.0326}$

$K_2 = 45845 \times \frac{K_{SE}}{b}$ $\quad a_2 = \frac{1}{0.034}$

$K_3 = \frac{K_{SE}+K_{PE}}{b}$

* integral factor $v = e^{\int K_3 dt} = e^{K_3 t}$

$$e^{K_3 t}\frac{dT}{dt} + K_3 e^{K_3 t} T = e^{K_3 t}\left(K_1 e^{-a_1 t} - K_2 e^{-a_2 t}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{K_3 t} T\right] = K_1 e^{(K_3 - a_1)t} - K_2 e^{(K_3 - a_2)t}$$

$$\Rightarrow \int d\left[e^{K_3 t} T\right] = \int \left[K_1 e^{(K_3-a_1)t} - K_2 e^{(K_3-a_2)t}\right] dt$$

$$\Rightarrow e^{K_3 t} T = \frac{K_1}{K_3 - a_1} e^{(K_3-a_1)t} - \frac{K_2}{K_3 - a_2} e^{(K_3-a_2)t} + C$$

$$\therefore T(t) = \frac{K_1}{K_3 - a_1} e^{-a_1 t} - \frac{K_2}{K_3 - a_2} e^{-a_2 t} + C e^{-K_3 t}$$

Muscle은 $t=0$, 일때 resting state 이므로 $T(0)=0$ 으로 두고 constant C 를 도출한다

$$T(0) = \frac{K_1}{K_3 - a_1} - \frac{K_2}{K_3 - a_2} + C = 0$$

$$\therefore C = -\frac{K_1}{K_3 - a_1} + \frac{K_2}{K_3 - a_2}$$

과정 중 발생한 상수들을 정리하면 다음과 같다

$K_1 = 1.3095 \times 10^5$ $\quad \frac{K_1}{K_3 - a_1} = -4950$

$K_2 = 1.2470 \times 10^5$ $\quad \frac{K_2}{K_3 - a_2} = -4950$

$K_3 = 4.22$

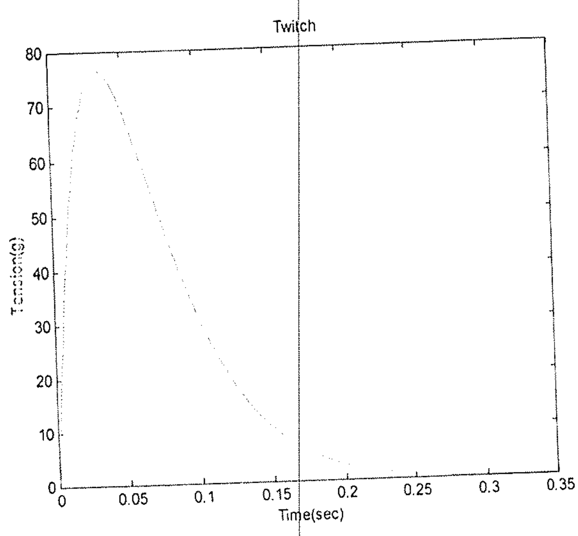
$C = 0$

$$\therefore T(t) = -4950 \cdot e^{-\frac{t}{0.0326}} + 4950 \cdot e^{-\frac{t}{0.034}}$$

$$\therefore T(t) = 4950\left(e^{-\frac{t}{0.034}} - e^{-\frac{t}{0.0326}}\right)$$

b) Using the twitch force T(t) derived in (a), simulate the unfused and fused tentanus. Discuss at what frequency you can find the fused tentanus.

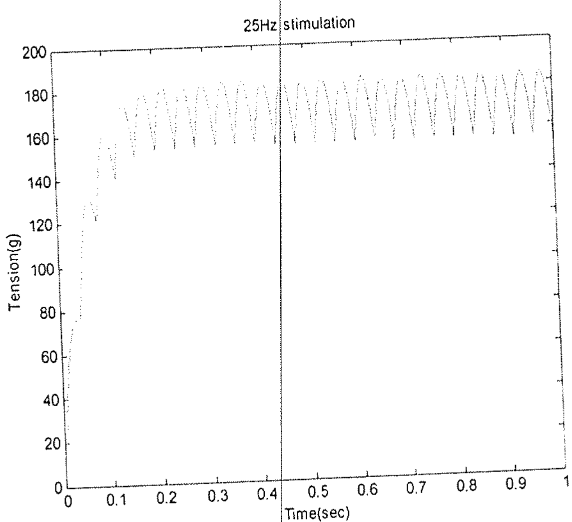
```
clc;clear;

%% constants
Kse=136;     % g/cm
Kpe=75;      % g/cm
b=50;        % gs/cm
k1=Kse*48144/b;
k2=Kse*45845/b;
k3=(Kse+Kpe)/b;
a1=1/0.0326;
a2=1/0.034;
c=-(k1/(k3-a1))+(k2/(k3-a2));

%% Twitch 확인
t=[0:0.0001:1];      %time range
v=exp(k3*t);         % integral factor

T=(k1/(k3-a1))*exp(-a1*t)-(k2/(k3-a2))*exp(-a2*t)+c./v;

figure(1), plot(t,T)
title('Twitch'), xlabel('Time(sec)'), ylabel('Tension(g)')
axis([0 0.35 0 80])

%% fused tentanus 확인

w = 25;           % adjusted frequency (25~ Hz)
Tension = 0;      % total tension

for i=1:w
    m = t-(i-1)/w;
    Tadd = heaviside(m).*(k1/(k3-a1)*exp(-a1*(m))...
        -k2/(k3-a2)*exp(-a2*(m))+c*exp(-k3*(m)));
    Tension = Tension + Tadd;
end

figure(2)
plot(t,Tension)
hold on
```

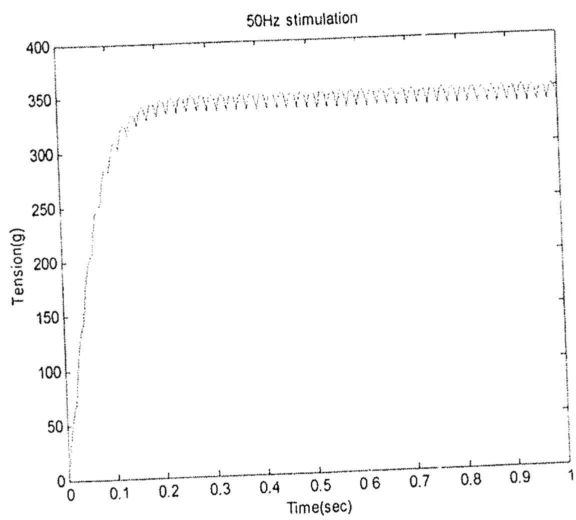


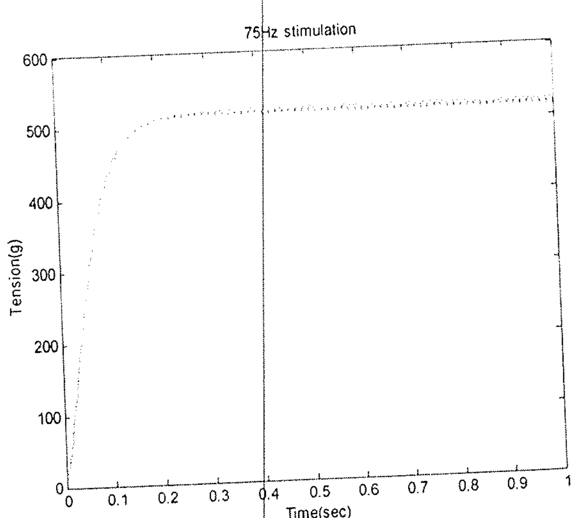
unfused tentanus 와 fused tentanus를 simulation 하기 위해 우선 (a)에서 도출한 single twitch 를 plot 하였다

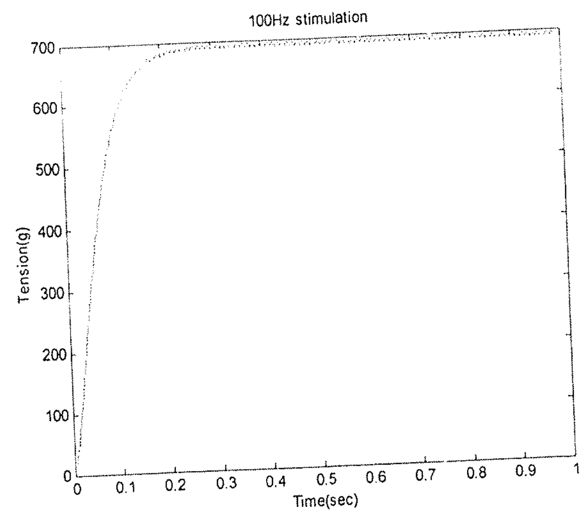
이를 중첩하여 tentanus 를 plot 하게 된다

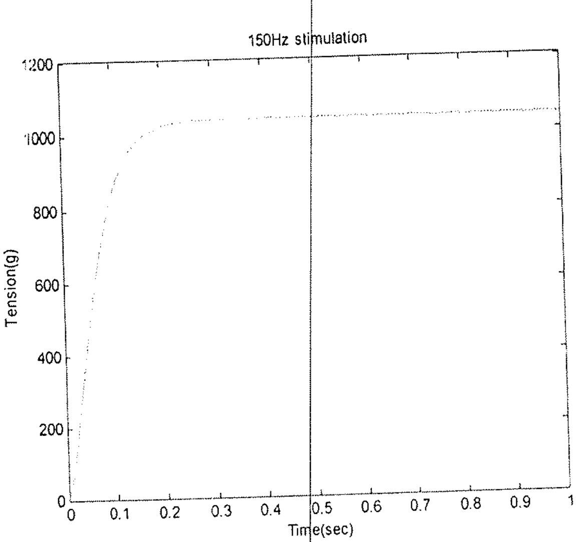
twitch를 중첩하여 plot 한 결과는 아래 그래프들과 같다
25Hz 부터 시작하여 delay 시간을 빠르게 해본 결과 대략적으로 fused tentanus에 도달하는 freq를 확인할 수 있었다

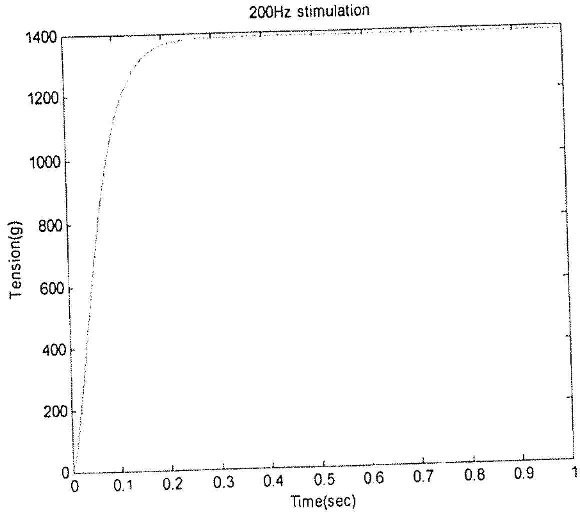






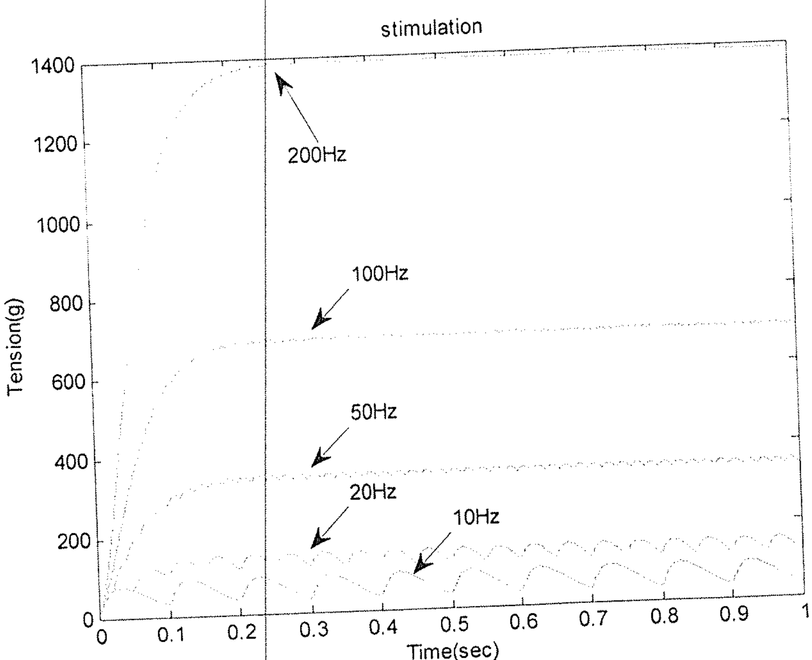


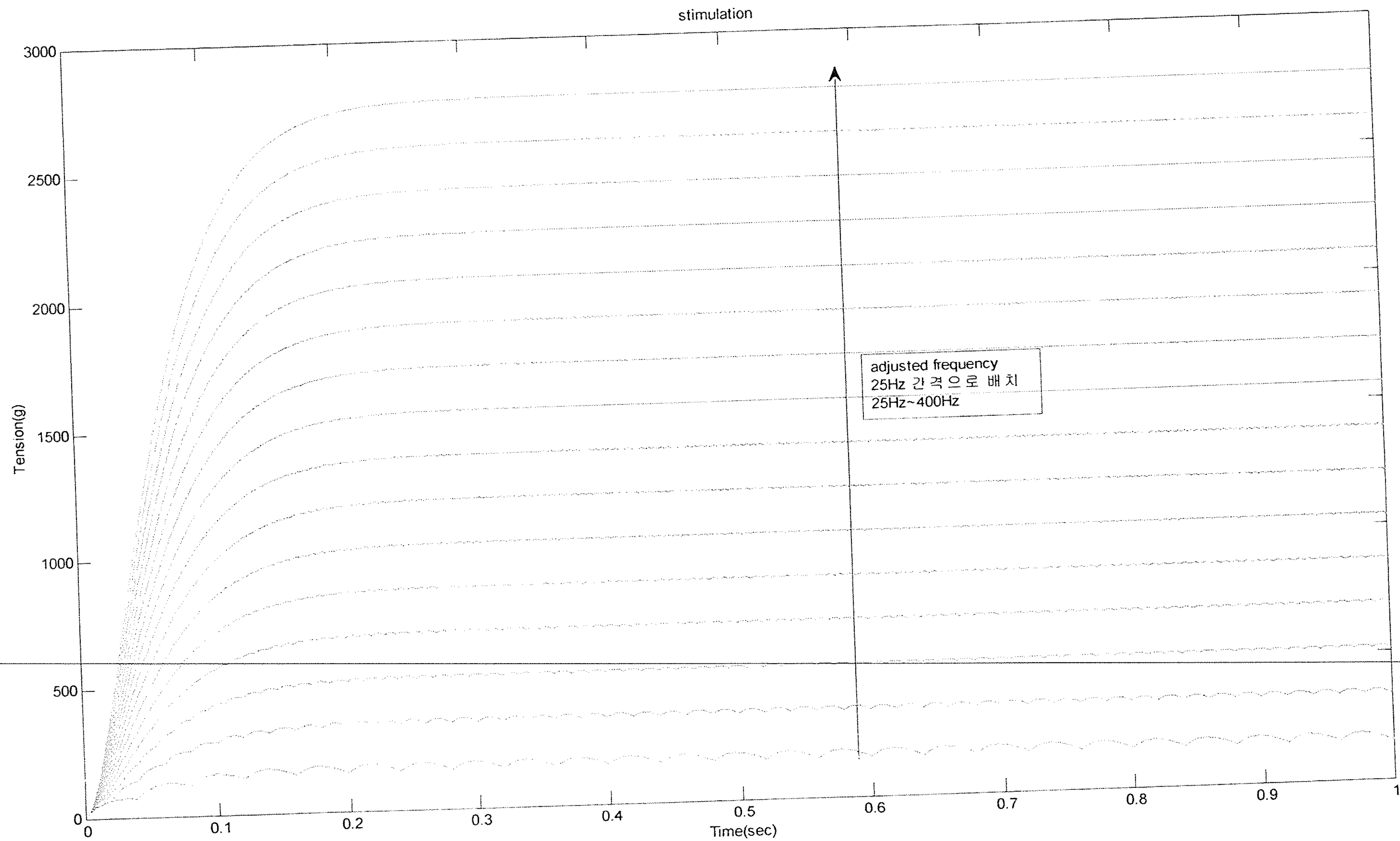




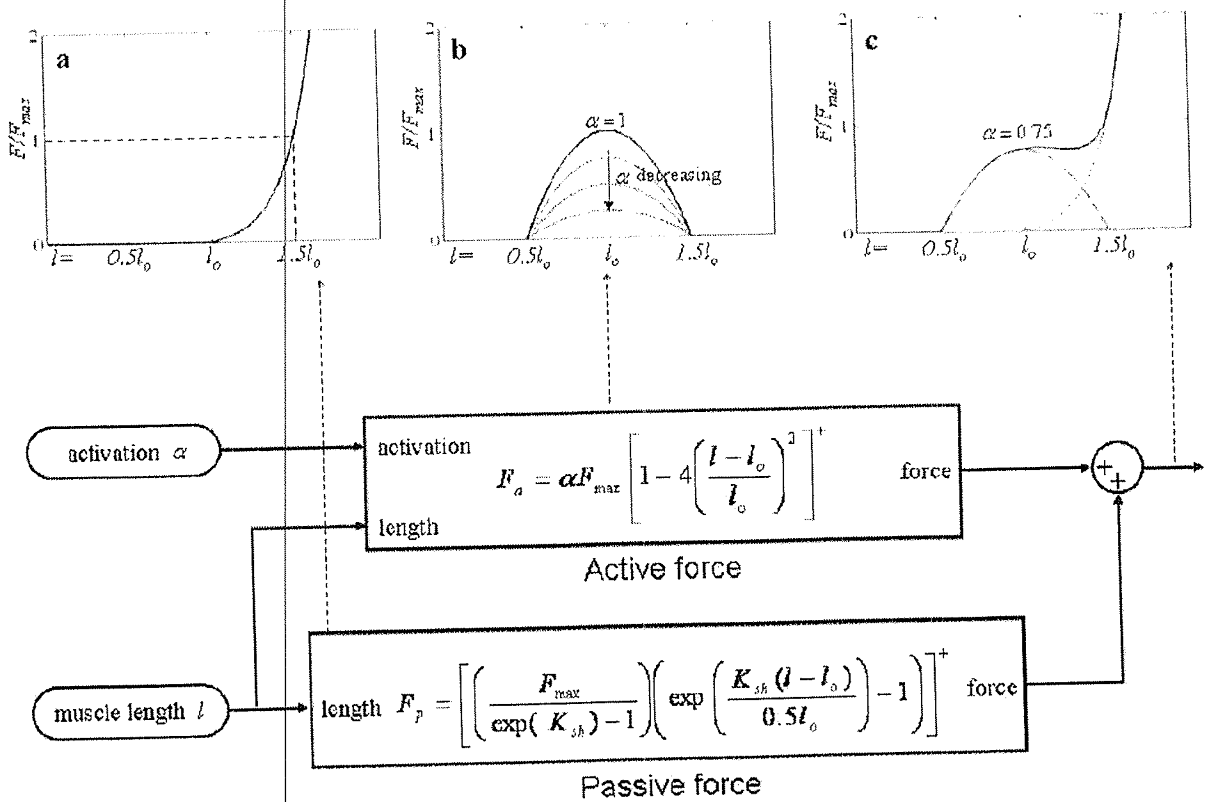
~ 150 Hz ~ 정도가 되면 어느정도 fused tentanus 에 도달했다고 판단할수 있다
아래에는 여러가지 frequency를 함께 plot하여 대략적인 fused 정도를 확인해보았다.
여기에서도 100 ~ 200Hz 사이 정도에서 fused tentanus 된다고 볼수 있었다.

다수 frequency 에서의 simulation




stimulation
adjusted frequency
25Hz 간격으로 배치
25Hz~400Hz
Tension(g)
Time(sec)
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

2. Consider the following Hill-type muscle model.



The active component of the muscle force Fa is given as:

$$F_a = \alpha F_{\max}\left[1-4\left(\frac{l-l_0}{l_0}\right)^2\right]^+ \quad \text{where, } [u]^+ = \max[u, 0]$$

The passive component of the muscle force Fp is given as:

$$F_p = \left[\left(\frac{F_{\max}}{\exp(K_{sh})-1}\right)\left(\exp\left(\frac{K_{sh}(l-l_0)}{0.5l_0}\right)-1\right)\right]^+ \quad \text{for } l \geq l_0, \text{ otherwise } F_p = 0.$$

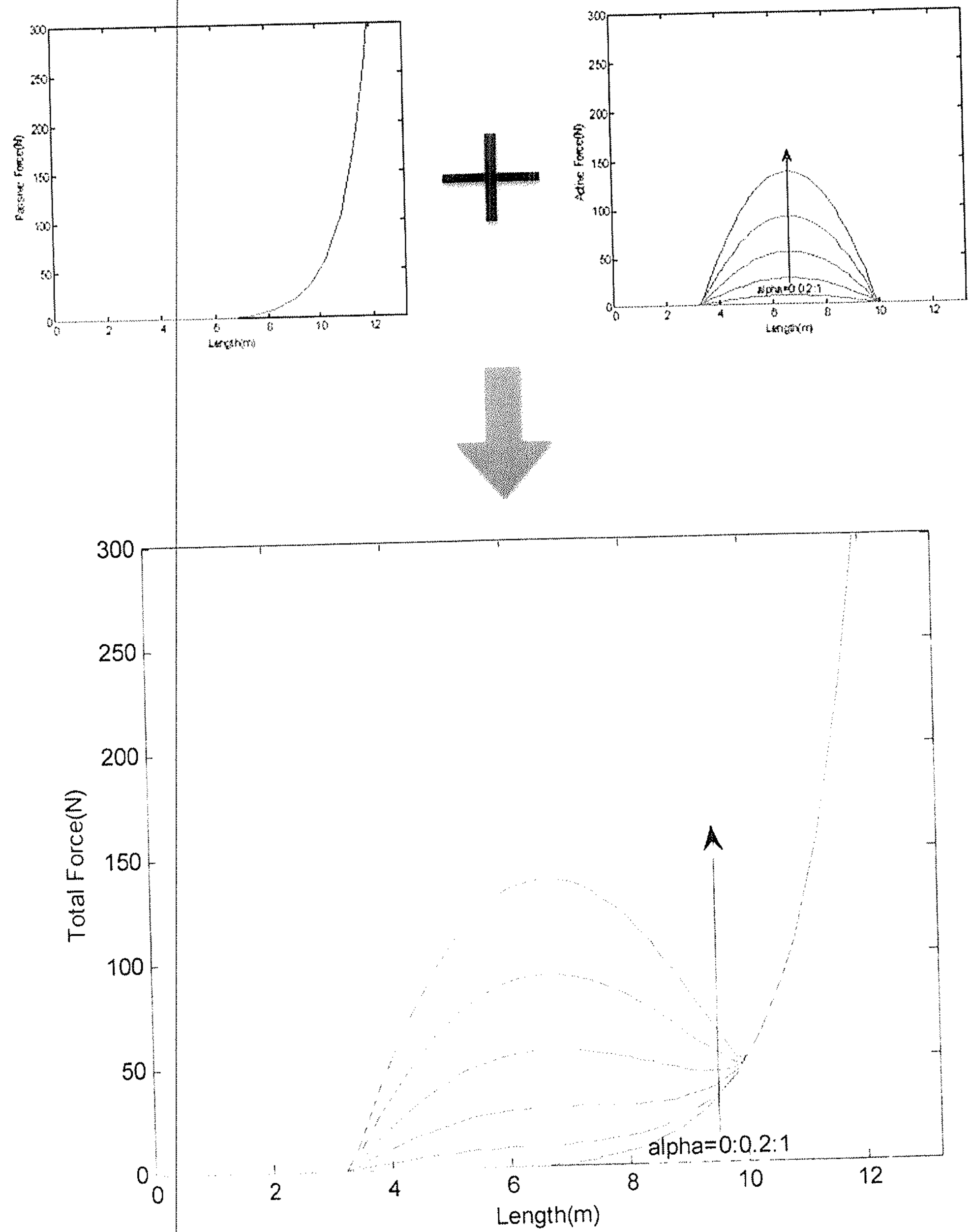
The total muscle force is the sum of active and passive components(F_{total} = F_a + F_p).

a) Plot the force-length curve by changing the muscle activation a from 0 to 1. Here, let F_{max}=45.7N, l_o=6.6cm, and K_{sh}=3.

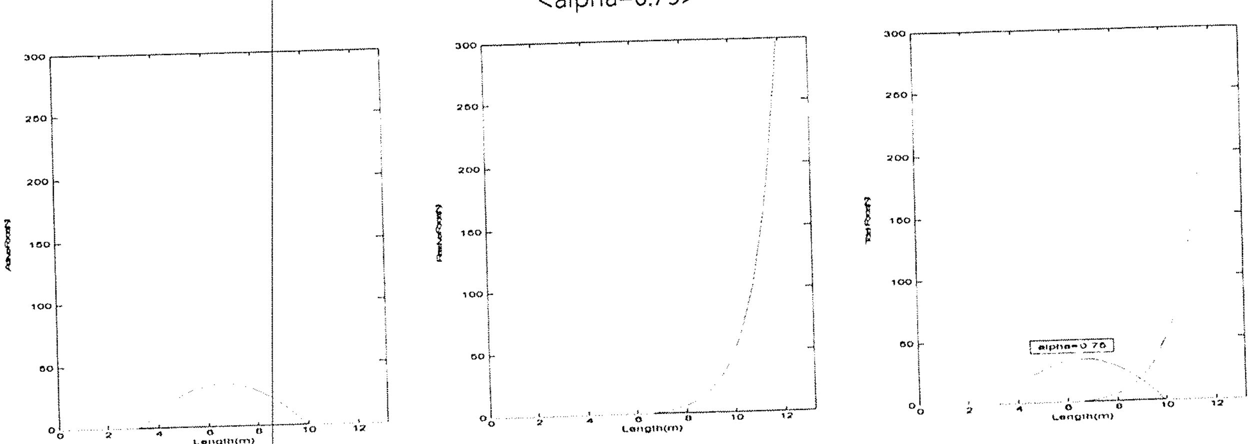
```
clc;clear all,close all

%% constants

Fmax=45.7;                % N
L0=6.6;                   % cm
Ksh=3;
alpha=0;n=0;              % initializing constants

%% force curves

for n=0:1:5

    alpha=alpha+0.2*n;
    L=0:0.2:2*L0;
    %% Active force
    Fa=alpha*Fmax*max(1-4*(((L-L0)/L0).^2),0);

    figure(1),plot(L,Fa)
    xlabel('Length(m)'),ylabel('Active Force(N)'),axis([0 2*L0 0 300])
    hold on

    %% Passive force
    Fp=max((Fmax/(exp(Ksh)-1))*(exp((Ksh*(L-L0))/(0.5*L0))-1),0);

    figure(2),plot(L,Fp)
    xlabel('Length(m)'),ylabel('Passive Force(N)'),axis([0 2*L0 0 300])
    hold on

    %% Total force
    Ftotal=Fa+Fp;
    figure(3),plot(L,Ftotal)
    xlabel('Length(m)'),ylabel('Total Force(N)'),axis([0 2*L0 0 300])
    hold on
end

hold off
```

```
%% representative case alpha=0.75

alpha_r=0.75;

Fa=alpha_r*Fmax*max(1-4*(((L-L0)/L0).^2),0);
Fp=max((Fmax/(exp(Ksh)-1))*(exp((Ksh*(L-L0))/(0.5*L0))-1),0);
Ftotal=Fa+Fp;

figure(4)

subplot(1,3,1),plot(L,Fa)
xlabel('Length(m)'), ylabel('Active Force(N)'),axis([0 2*L0 0 300])


subplot(1,3,2),plot(L,Fp)
xlabel('Length(m)'),ylabel('Passive Force(N)'),axis([0 2*L0 0 300])

subplot(1,3,3)
plot(L,Fa,'-.'),hold on
plot(L,Fp,'--'),hold on
plot(L,Ftotal,'r'),hold on
xlabel('Length(m)'),ylabel('Total Force(N)'),axis([0 2*L0 0 300])
```

<Passive force+Active force=Total force>



<alpha=0.75>



b) Now, consider a model with velocity-dependence in addition to the muscle model introduced in Problem 1, as follows:

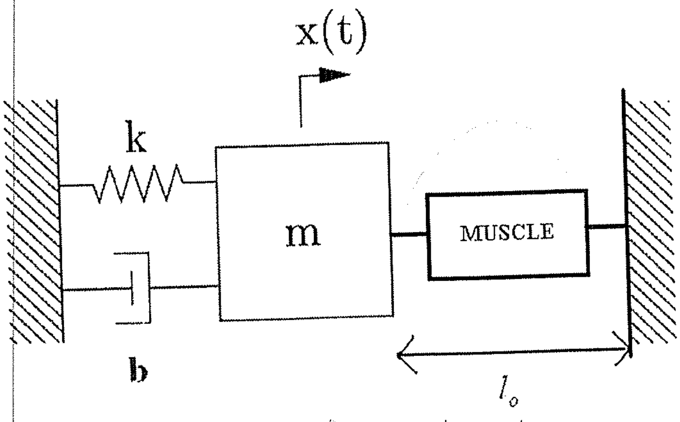
$$F_{total} = [a_1 + a_2 \arctan(a_3 + a_4 \dot{l})](F_a + F_p)$$

The mass-spring-damper system is driven by the muscle as shown in the figure below. By providing a series of impulses of muscle activation a with magnitude 1, simulate the fused tentanus with the initial conditions $x(0) = 0$ and $\dot{x}(0) = 0$.

The parameters are given as follows:

m=10kg, k=500N/m, b=200Ns/m.

Also, let F_{max}=45.7N, l_o=6.6cm, and K_{sh}=3, a1=0.8, a2=0.5, a3=0.43, and a4=58s/m.

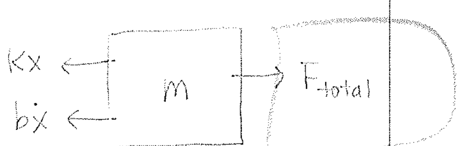


muscle activation α는 크기가 1인 series of impulse 이다.
그리고 우리가 도출해야 하는 결론은 fused tentanus 형태를 simulation 하는 것이다
따라서, α를 가정할 때 문제 (1)번에서 fused tentanus 에 도달할때의 frequency 정보를 포함하고자 함
즉, (1)번에서 α는 100~150Hz 에서 fused tentanus 가 될것으로 보았으므로 α를 다음과 같이 설정한다

$f = 100\text{Hz} \rightarrow w = 2\pi f \fallingdotseq 630$ ⇒ 간단히 $w = 500$ rad/s 로 설정

$\alpha = \sin(500t)$ 라 가정한다 ⇒ $\alpha = \sin wt$ cf.(또는 상수 1 로도 simulation 하였다)

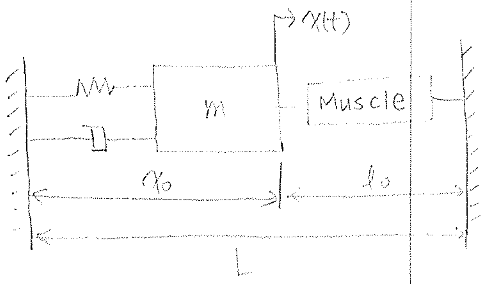
이제 주어진 system 에서 운동방정식을 도출한다. (Equation of Motion)



$$\boxed{\Sigma F = ma}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}(t) = -kx(t) - b\dot{x}(t) + \boxed{F_{total}(l)}$$

이때 F_{total}은 l에 관한 함수이다 따라서 이를 x에 관한 함수로 변환해줄 필요가 있다



전체 구간의 길이를 L, mass-spring-damper 구간의 초기길이를 X_0, muscle 구간의 초기길이를 l_0 라고 할때 $L = x_0 + l_0$ 의 관계를 만족한다.

Mass 구간에 변위가 발생할 경우. 즉 $x(t)+x_0$, ⇒ muscle 구간의 변위는 $l(t)$ 가 된다.

$$L = x(t) + x_0 + l(t) \Rightarrow l(t) = L - x_0 - x(t)$$

$$\therefore\ l(t) = l_0 - x(t) \Rightarrow \underline{l - l_0 = -x(t)}$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{l}(t) = -\dot{x}(t)}$$

이 관계를 통하여 $F_{total}(l)$ 을 x에 관한 식으로 변환한다

$$F_{total} = [a_1 + a_2 \arctan(a_3 + a_4\dot{l})](F_a + F_p)$$

$$= [a_1 + a_2 \arctan(a_3 + a_4\dot{l})]\left(\overbrace{\alpha F_{max}\left[1 - 4\left(\frac{l-l_0}{l_0}\right)^2\right]^+}^{F_A} + \overbrace{\left[\left(\frac{F_{max}}{\exp(K_{sh})-1}\right)\left(\exp\left(\frac{K_{sh}(l-l_0)}{0.5\,l_0}\right)-1\right)\right]^+}^{F_P}\right)$$

$$= [a_1 + a_2 \arctan(a_3 - a_4\dot{x})]\left(\underline{\sin\omega t} \cdot F_{max}\left[1 - 4\left(\frac{-x}{l_0}\right)^2\right]^+ + \left[\left(\frac{F_{max}}{\exp(K_{sh})-1}\right)\left(\exp\left(\frac{-K_{sh}x}{0.5\,l_0}\right)-1\right)\right]^+\right)$$

$$= F_{total}(x, t)$$

$\therefore$ Equation of Motion

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = F_{total}(x, t)$$

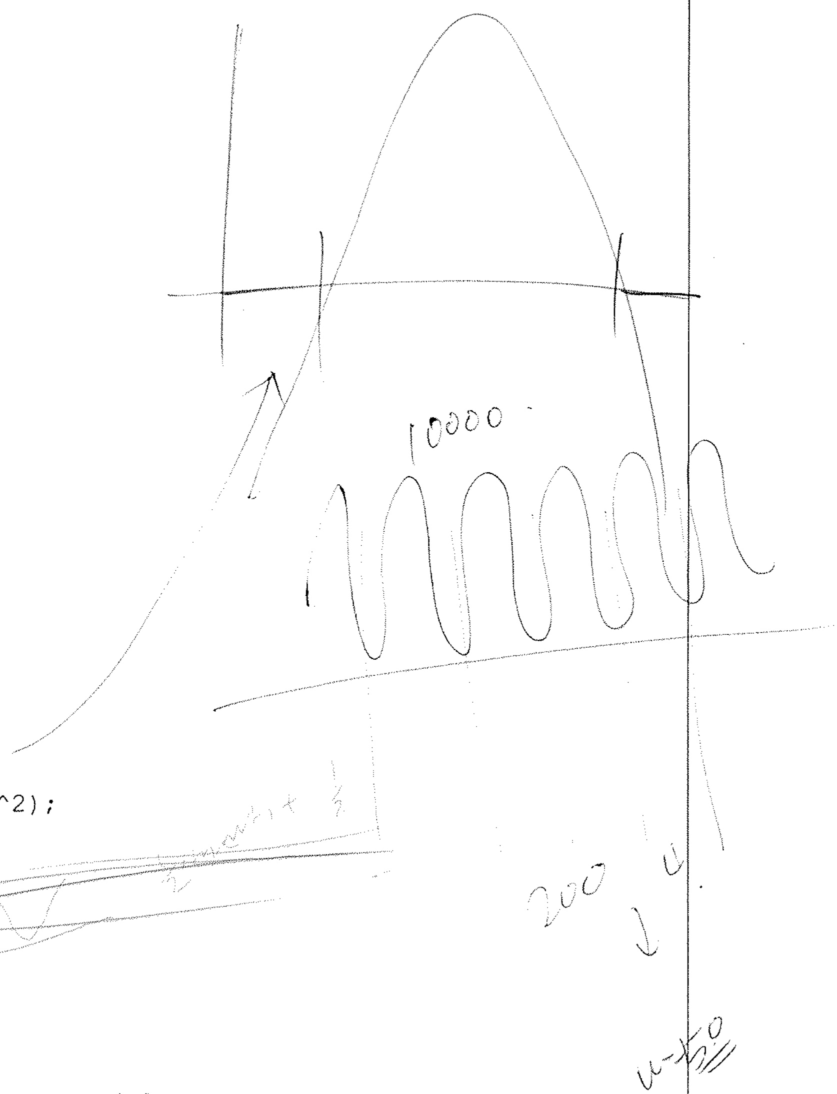
m의 motion을 simulation 하기 위해 EOM을 State-space form 으로 구성한다

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= X \\ X_2 &= \dot{X} \end{aligned}\right] \qquad \begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2 \\ \dot{X}_2 &= -\frac{k}{m}X_1 - \frac{b}{m}X_2 + \frac{F}{m} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F/m \end{bmatrix}$$ ← matrix form 으로도 정리가능하다.

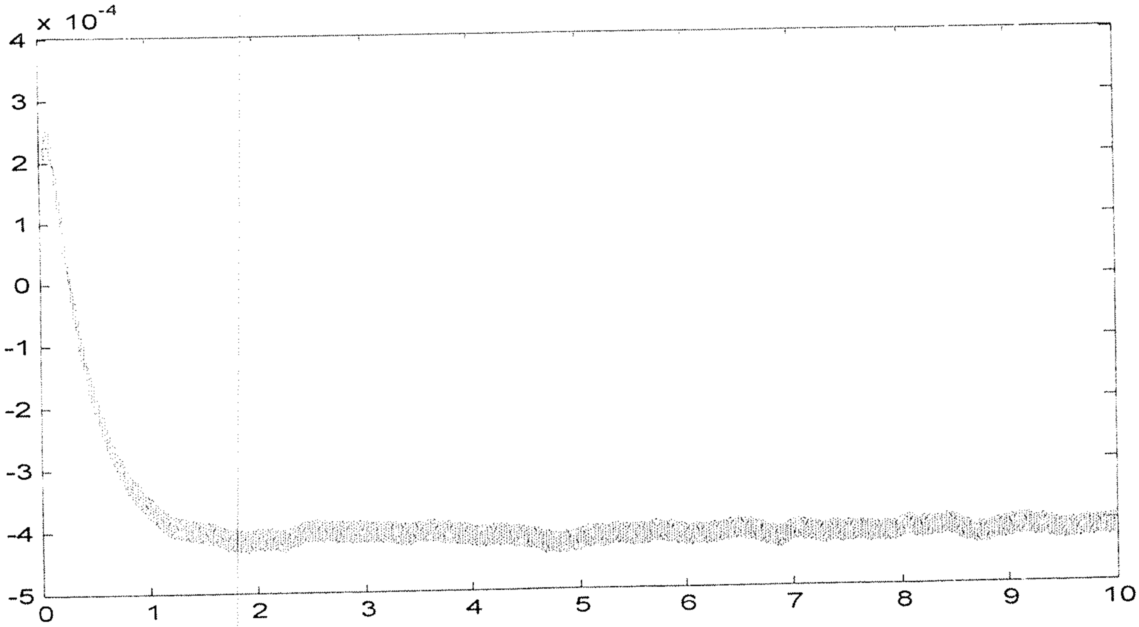
x, $\dot{x}$

```
function xdot = musclehill( t,x )
%UNTITLED Summary of this function goes here
%   Detailed explanation goes here

%% constants

Fmax=45.7;      % N
L0=0.066;       % m
Ksh=3;
m=10;           % kg
k=500;          % N/m
b=200;          % Ns/m
a1=0.8;
a2=0.5;
a3=0.43;
a4=58;          % s/m
w=500;          % rad/s

%% For active force Fa
if x(1)<=0.5*L0 && x(1)>=-0.5*L0
   Fa=sin(w*t)*Fmax*(1-4*(-x(1)/L0)^2);
else
   Fa=0;
end

%% For passive force Fp
if x(1)>=0
   Fp=(Fmax/(exp(Ksh)-1))*(exp(-2*Ksh*x(1)/L0)-1);
else
   Fp=0;
end

%% Ftotal
Ftotal=(a1+a2*atan(a3-a4*x(2)))*(Fa + Fp);

xdot=zeros(2,1);
xdot(1)=x(2);
xdot(2)=-k/m*x(1)-b/m*x(2)+Ftotal/m;
end
```

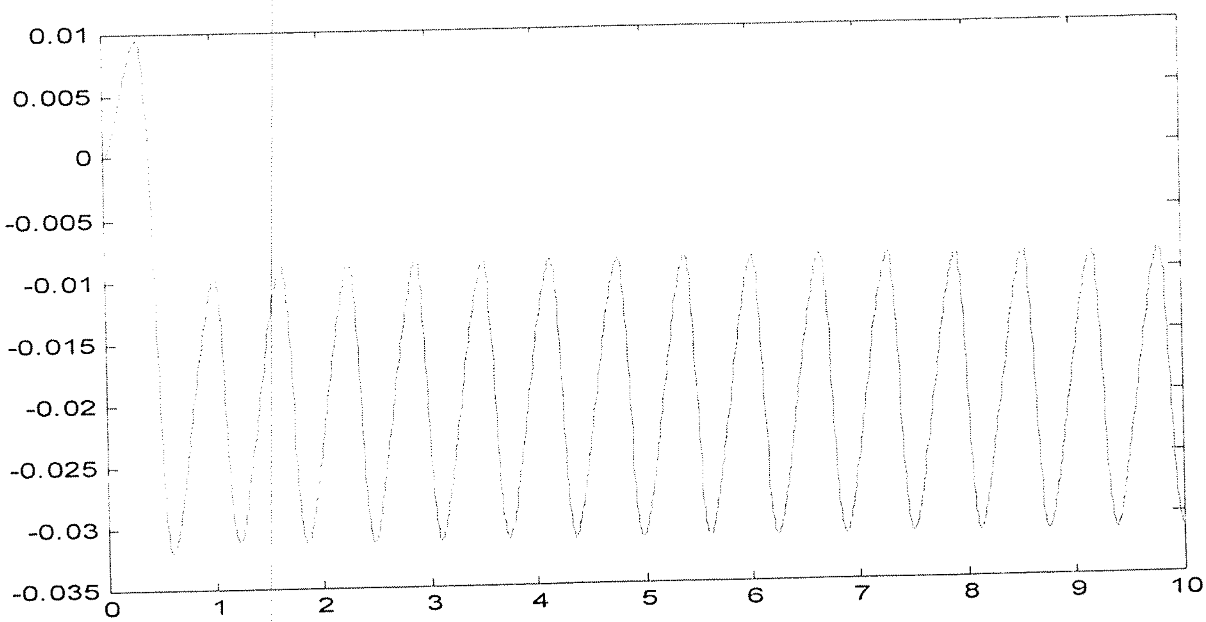


```
<command window>

>> [t,x]=ode45('musclehill',[0 10],[0 0]);
>> plot(t,x(:,1))
```

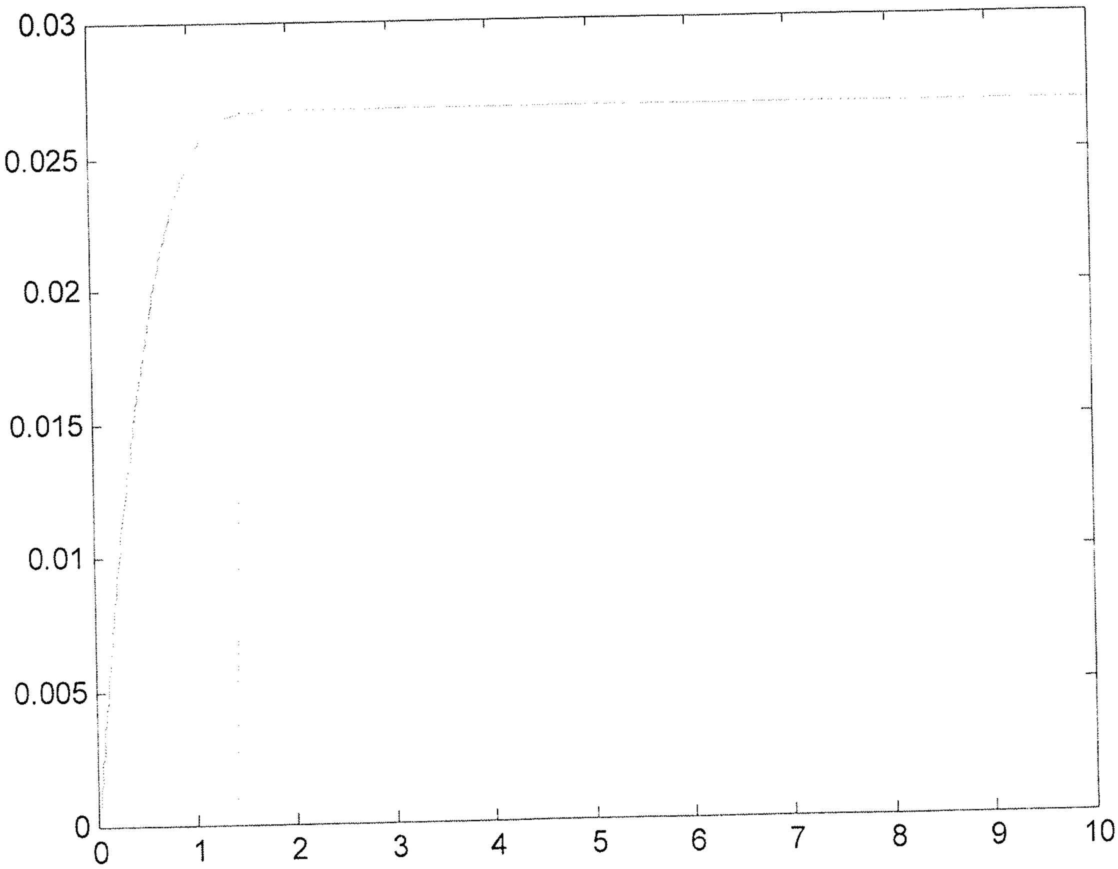
<w= 500 rad/s>



<w= 10 rad/s>



<alpha=1>

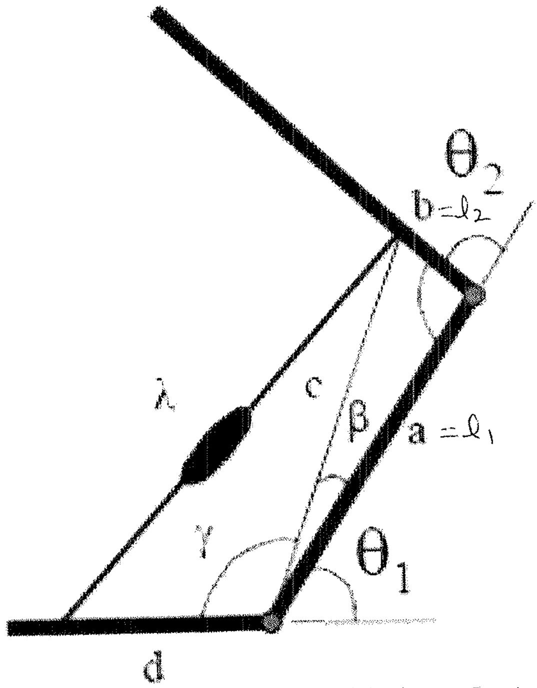


$\alpha=1$ 일때

$$F_{total} = [a_1 + a_2 \arctan(a_3 - a_4 \dot{x})]\left(F_{max}\left[1 - 4\left(\frac{-x}{l_0}\right)^2\right]^+ + \left[\left(\frac{F_{max}}{\exp(K_{sh}) - 1}\right)\left(\exp\left(\frac{-K_{sh}x}{0.5 l_0}\right) - 1\right)\right]^+\right)$$

을 이용하여 m의 motion을 simulation 하였다

c) The two-link arm with shoulder and elbow joints in the horizontal plane is driven by the muscle model as shown in the figure below. Derive the equation between he endpoint force F_{ext} and the total muscle force F_{total}. Here, lengths of upper and lower arms are given as l_1 and l_2.



muscle 의 수축에 의해 발생한 힘(force)가 다수 joint에 작용하는 토크(torque)로 전달될 때 그사이의 관계를 도출하기 위해 virtual work principle 을 사용한다

Work = force ∘ displacement ,   Work = torque ∘ joint angular change

근육의 힘 (force) f 는 근육을 $\Delta\lambda$ 만큼 수축하는 데에 일을 수행하고. joint에서의 일은 torque τ 와 joint angular change 의 dot product 만큼이다.

그 둘사이의 관계는 $\Delta\lambda < 0$ 이므로 다음과 같이 정리된다.

$$\tau^T \Delta q = -f^T \Delta\lambda$$

여기에서 force f 와 torque τ 는 multi-dimensional vector 이다.
만약 displacement 가 infinitesimal 하다면 ($\Delta\lambda, \Delta q \to 0$) Jacobian matrix J 를 정의할수있다

$J = \frac{d\lambda}{dq}$; Jacobian – the derivative of the length change with respect to the change in joint angle

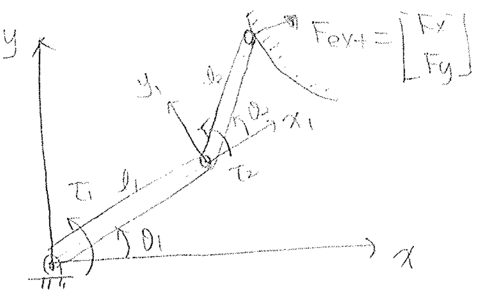
$$J = \frac{\Delta\lambda}{\Delta q} \Rightarrow \Delta\lambda = J\Delta q$$

$$\Rightarrow \tau^T \Delta q = -f^T \Delta\lambda = -f^T J \Delta q \qquad \therefore \tau^T = -f^T J$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = -J^T f}$$ → the relationship to convert a force in muscle coordi into a torque in joint coordinates

$\tau = -J^T f$ 의 관계를 통해 muscle force f로부터 각 joint에 인가되는 torque τ를 도출할 수 있다
이제 각 joint의 torque로부터 endpoint에 전달되는 force F_{ext} 사이의 관계를 찾고자 한다.

upper 와 lower arm을 길이가 각각 l_1, l_2 인 link로 두고 각 joint 에서의 torque τ_1, τ_2 로부터 endpoint force F_{ext} 사이의 관계를 살펴보도록 하자



link 길이와 endpoint position 사이의 geometric 관계

$$\begin{cases} x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x = x(\theta_1, \theta_2) \rightarrow dx = (\partial x / \partial \theta_1) d\theta_1 + (\partial x / \partial \theta_2) d\theta_2 \\ y = y(\theta_1, \theta_2) \rightarrow dy = (\partial y / \partial \theta_1) d\theta_1 + (\partial y / \partial \theta_2) d\theta_2 \end{array}$$

$$d\vec{x} = J_e d\vec{\theta} \quad , \quad \text{where } J_e = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \theta_1 & \partial x / \partial \theta_2 \\ \partial y / \partial \theta_1 & \partial y / \partial \theta_2 \end{bmatrix} = \frac{d\vec{x}}{d\vec{\theta}}$$

Joint 에서 가해지는 torque 에 의해 joint 회전이 발생하므로 이는 work 이 수행된 결과다
이는 endpoint 로 전달되는 Fext 가 하게 될 일과 동일해진다
즉 principal of virtual work 에 의해

$$F_{ext}^T \Delta x = \tau^T \Delta q$$

Jacobian 으로부터 $J_e = \frac{d\vec{x}}{d\vec{\theta}} \simeq \frac{\Delta x}{\Delta q} \rightarrow \Delta x = J_e \Delta q$

$$\therefore F^T J_e \Delta q = \tau^T \Delta q \qquad \therefore F^T J_e = \tau^T$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = J_e^T F} \longrightarrow$$ the relationship to convert a endpoint force F in Cartesian coordinates into a torque in joint coordinates

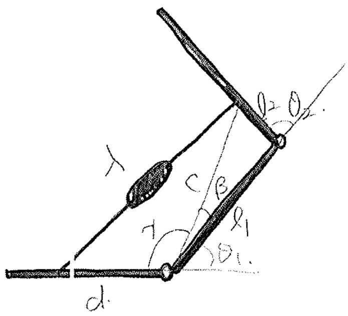
이번 문제에서 최종목표는 muscle force F_{total} → endpoint force F_{ext} 사이의 관계를 도출하는 것이다. 이 둘 사이에는 joint torque 가 매개한다

$$\left.\begin{array}{l} \tau = -J^T F_{total} \\ \tau = J_e^T F_{ext} \end{array}\right] \rightarrow -J^T F_{total} = J_e^T F_{ext}$$

$$\Rightarrow F_{ext} = -\left(J_e^T\right)^{-1} \cdot J^T F_{total}$$

먼저, muscle force F_{total} → joint torque τ 사이의 Jacobian 을 구하기 위해

arm structure 를 다시 봤다



cosine 법칙에 따라

$$c = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos\theta_2}$$

sine 법칙에 따라

$$\frac{\sin\beta}{l_2} = \frac{\sin\theta_2}{c} \Rightarrow \beta = \sin^{-1}\left(\frac{l_2 \sin\theta_2}{c}\right)$$

$$\lambda = \sqrt{d^2 + c^2 + 2dc\cos(\beta + \theta_1)}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\rightarrow \lambda = \sqrt{d^2 + c^2 + 2dc\,[\cos\beta\cos\theta_1 - \sin\beta\sin\theta_1]}$$

$$\sin\beta = \frac{l_2 \sin\theta_2}{c}, \quad \cos\beta = \sqrt{1 - \frac{l_2^2 \sin^2\theta_2}{c^2}}$$

$$\Rightarrow \lambda = \sqrt{d^2 + c^2 + 2dc\left(\sqrt{1 - \frac{l_2^2 \sin^2\theta_2}{c^2}}\cdot\cos\theta_1 - \frac{l_2 \sin\theta_2}{c}\cdot\sin\theta_1\right)}$$

$$c = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos\theta_2}$$

$$J = \frac{d\lambda}{d\theta} = \begin{bmatrix} \frac{d\lambda}{d\theta_1} & \frac{d\lambda}{d\theta_2} \end{bmatrix}$$

?

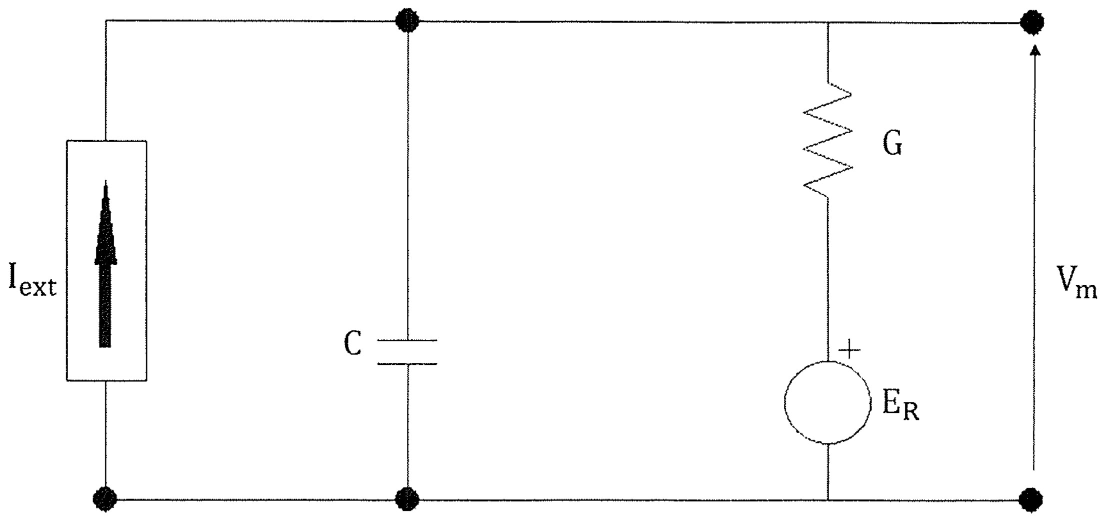
다음은 joint torque τ → endpoint force F_{ext}

$$x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

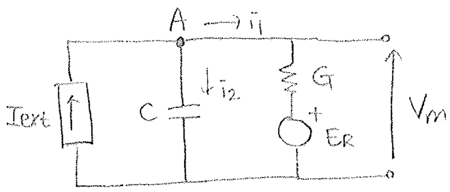
$$\therefore J_e = \begin{bmatrix} -l_1 \sin\theta_1 - l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) \\ l_1 \cos\theta_1 + l \cos(\theta_1+\theta_2) & l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$$

3. Consider the circuit model of a nerve membrane. The resting potential of the cell is represented by the source E_R. The current source I_{ext} represents a current injected into the cell through an electrode.



a) Compute the membrane potential V_m with $I_{ext}=0$ and initial condition $V_m(0)=0$.

우선 회로를 통해서 미분 방정식을 도출한다.



A-node 에서 $\boxed{KCL}$을 적용하면

$$I_{ext} = i_1 + i_2$$

오른쪽, G, E_R-line에서 $\boxed{KVL}$을 적용하면

$$V_m = G i_1 + E_R \Rightarrow i_1 = \frac{1}{G}V_m - \frac{E_R}{G}$$

Capacitor 에서 전류 i_2와 V_m의 관계는 다음과 같다.

$$i_2 = C\frac{dV_m}{dt}$$

이를 정리하면 V_m 의 "일차 미분 방정식"이 도출된다.

$$I_{ext} = \left(\frac{1}{G}V_m - \frac{E_R}{G}\right) + \left(C\frac{dV_m}{dt}\right) \Rightarrow \frac{dV_m}{dt} + \frac{1}{CG}V_m = \frac{1}{C}\left(I_{ext} + \frac{E_R}{G}\right)$$

$I_{ext}=0$ IC: $V_m(0)=0$

$$\Rightarrow \frac{dV_m}{dt} + \frac{1}{CG}V_m = \frac{E_R}{CG}$$

* integral factor $e^{\int \frac{1}{CG}dt} = e^{\frac{1}{CG}t}$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{CG}t}\frac{dV_m}{dt} + \frac{1}{CG}e^{\frac{1}{CG}t}V_m = e^{\frac{1}{CG}t}\frac{E_R}{CG} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[e^{\frac{1}{CG}t}V_m\right] = e^{\frac{1}{CG}t}\cdot\frac{E_R}{CG}$$

적분하면,

$$e^{\frac{1}{CG}t}V_m = \int e^{\frac{1}{CG}t}\cdot\frac{E_R}{CG}dt = \frac{E_R}{CG}\frac{1}{\frac{1}{CG}}e^{\frac{1}{CG}t} + K_1 = E_R e^{\frac{1}{CG}t} + K_1$$

$$\therefore V_m = E_R + K_1 e^{-\frac{1}{CG}t}$$

IC. $V_m(0)=0 \rightarrow V_m(0) = E_R + K_1 = 0 \quad \therefore K_1 = -E_R$

$$\therefore V_m(t) = E_R\left(1 - e^{-\frac{1}{CG}t}\right)$$

b) Now compute the membrane potential as a function of time with $I_{ext}=I_0$, a constant, and $V_m(0)$ equal to the steady state value found with $I_{ext}=0$.

(a) 에서 도출한 V_m의 일차미분방정식은 $\frac{dV_m}{dt} + \frac{1}{CG}V_m = \frac{1}{C}\left(I_{ext} + \frac{E_R}{G}\right)$ 이다

그리고 $I_{ext}=0$ 일때 V_m은 (a)에서 구한것과 같이 아래와 같다.

$$V_m(t) = E_R\left(1 - e^{-\frac{1}{CG}t}\right)$$

이때 Steady-state 값은 $t\to\infty$ 일때가 된다.

$$V_{m,ss} = \lim_{t\to\infty} V_m(t) = \lim_{t\to\infty} E_R\left(1 - \cancel{e^{-\frac{1}{CG}t}}^{\,0}\right) = E_R$$

따라서 본 문제에서의 IC는 $V_m(0) = E_R$ 이 되고, $I_{ext} = I_0$ (const) 인 경우가 된다

$$\frac{dV_m}{dt} + \frac{1}{CG}V_m = \frac{1}{C}\left(I_0 + \frac{E_R}{G}\right) = A.$$

integral factor는 (a)와 동일하게 $e^{\int \frac{1}{CG}dt} = e^{\frac{1}{CG}t}$ 가 된다.

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{CG}t}\frac{dV_m}{dt} + \frac{1}{CG}e^{\frac{1}{CG}t}V_m = Ae^{\frac{1}{CG}t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[e^{\frac{1}{CG}t}V_m\right] = Ae^{\frac{1}{CG}t}$$

적분하면, $e^{\frac{1}{CG}t}V_m = \int Ae^{\frac{1}{CG}t}dt = CGAe^{\frac{1}{CG}t} + K_2$

$$= \cancel{C}G\cdot\frac{1}{\cancel{C}}\left(I_0 + \frac{E_R}{G}\right)e^{\frac{1}{CG}t} + K_2 = (GI_0 + E_R)e^{\frac{1}{CG}t} + K_2$$

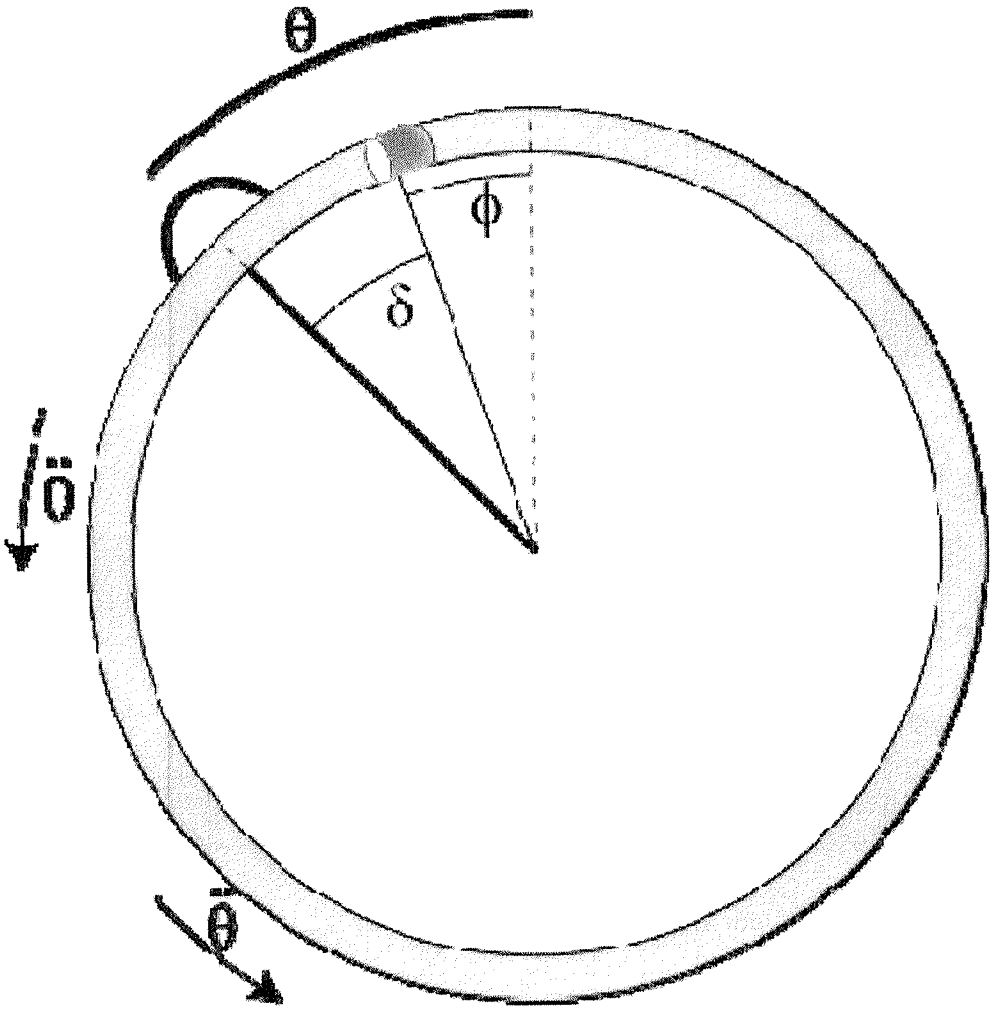
$$\therefore V_m = (GI_0 + E_R) + K_2e^{-\frac{1}{CG}t}$$

IC $V_m(0) = E_R \rightarrow V_m(0) = (GI_0 + E_R) + K_2 = E_R \quad \therefore K_2 = -GI_0$

$$\therefore V_m(t) = GI_0\left(1 - e^{-\frac{1}{CG}t}\right) + E_R$$

0 (-10)

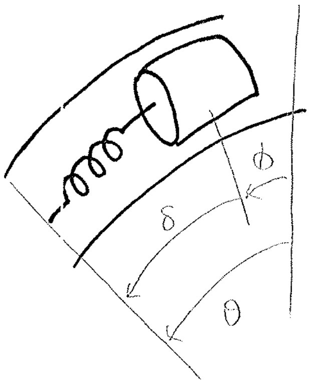
4. The vestibular organ in the inner ear includes three semicircular canals as shown in the figure below. Each canal can be considered a thin circular tube containing a viscous liquid(endolymph). Within a swollen region of each canal known as the ampulla, a flap called the cupula deflects as the endolymph moves under inertial forces. Deflections of the cupula are detected by hair cells and reported to the brain. Consider the model on the right. The cupula is considered to be a movable piston having the same density as the endolymph, When the skull is in motion, δ measures the cupula deflection from rest. The mass of the fluid plus cupula is M, the viscous resistance to flow of endolymph is B, the radius of the center line of the canal is a, and the position of the skull in space is θ. Thus, the angular position of the cupula in space is $\phi = \theta - \delta$. A spring with stiffness K acts to return the cupula to δ=0.



Using matlab, draw the bode plot of the transfer function between the angular velocity of the tube($\dot{\theta}$) and the movement of between the tube and the endolymph(δ).
Let M=0.01, B=1, and K=0.2. Based on the bode plot, explain the so-called vestibulo-ocular reflex. Discuss when your vision gets blurry and when you feel dizzy.

angular velocity of the tube ($\dot{\theta}$) 와 tube 와 endolymph 사이의 movement (δ) 사이의 transfer function 을 구한다.

먼저. Newton's 2nd law 에 의해. $\Sigma F = ma$.



$$M\ddot{x} = Ka\delta + Ba\dot{\delta}$$

$$\Rightarrow M\phi\ddot{\phi} = K\phi\delta + B\phi\dot{\delta} \Rightarrow \therefore M\ddot{\phi} = K\delta + B\dot{\delta}$$

$\phi = \theta - \delta$ 이므로

$$M(\ddot{\theta} - \ddot{\delta}) = K\delta + B\dot{\delta}$$

$$\Rightarrow M\ddot{\theta} = M\ddot{\delta} + B\dot{\delta} + K\delta$$

라플라스 (Laplace) 변환 (Transformation) 하면

$$\mathcal{L}[M\ddot{\theta}] = \mathcal{L}[M\ddot{\delta} + B\dot{\delta} + K\delta]$$

$$Ms^2\theta(s) = (Ms^2 + Bs + K)\,\delta(s)$$

$\dot{\theta}$와 δ 사이의 Transfunction 은 $s\theta(s)$와 $\delta(s)$ 로 구할수 있다 $\Leftarrow \mathcal{L}\left[\frac{d\theta}{dt}\right] = s\theta(s)$

$$\therefore \text{Transfer function} \quad \frac{\delta(s)}{s\theta(s)} = \frac{Ms}{Ms^2 + Bs + K}$$

이를 바탕으로 Bode 선도를 그린다 (using matlab)

그래프를 보고 논의하기 전에 vestibulo-ocular reflex 에 대해 알아본다

vestibulo-ocular reflex 는 머리가 움직이는 방향과 반대방향으로 움직여서 시야 혼란 장애를 방지하는 현상이다

⇒ 머리는 항상 움직인다. 만약, 머리가 움직이는 동안에 눈이 고정되어 있다면 retina (망막) 에는 고정된 상이 맺히지 못할 것이다 그러므로 head movement 와 반대방향, 동등한 속도로의 움직임이 필요하다

```
clc;clear;

%% constants
M=0.01;B=1;K=0.2;

%% transfer function
num=[M 0];
den=[M B K];

sys=tf(num,den);
bode(num, den)
grid
```

Transfer function:

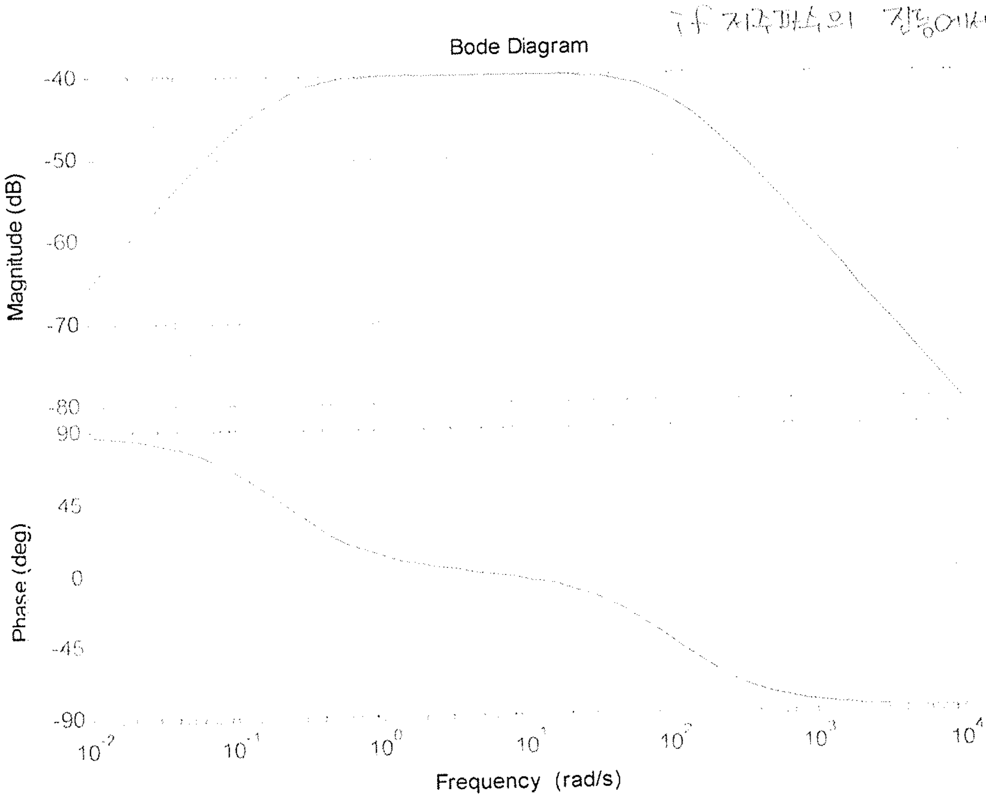
```
      0.01 s
------------------
0.01 s^2 + s + 0.2
```

Bode 선도를 보면 Magnitude 에서 대략 frequency가 1 ~ 10 정도에 최대값을 갖고 flat 한 특성을 갖는 것을 확인할 수 있다 그 이전이나 이후는 값이 하락하여 이는 시야가 흐려지는 것을 의미한다.

if 머리를 빠르게 흔들었을 때 (frequency ↑) 시야가 흐려질 수 있고.

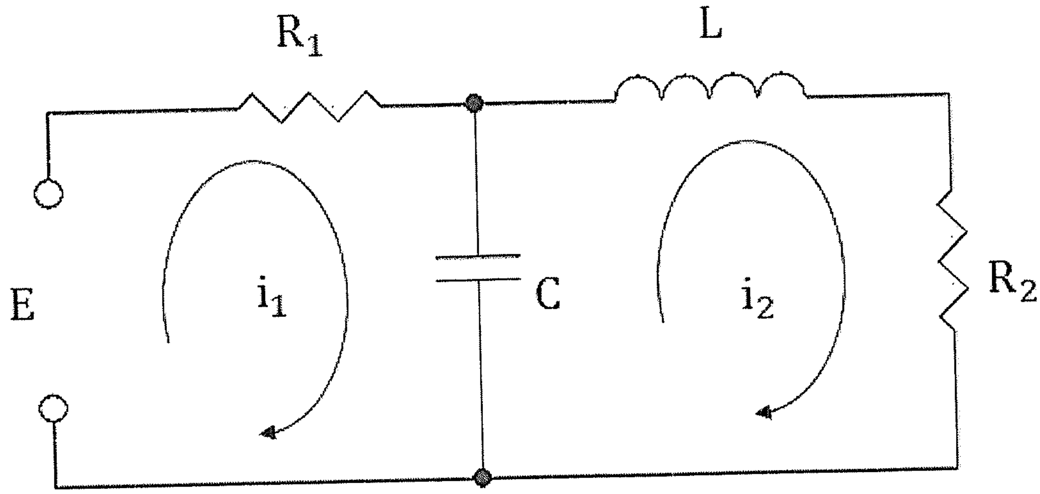
if 저주파수의 진동에서는 멀미를 느낄 수 있다.

저주파에서는 위상차가 90도 정도 발생하고 Magnitude 가 낮아지므로 어지러움을 느낄 수 있다 실제로 멀미가 일어나는 주파수는 대략 0.6Hz 정도 된다고 한다.



26

5. Consider the circuit shown below.



a) Obtain a mathematical model.

Left mesh : $E = R_1 i_1 + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} (i_1 - i_2)dt$

Right mesh : $\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} (i_2 - i_1)dt + L\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = 0$

⇒ Laplace transform

$$E = R_1 i_1 + \frac{1}{Cs}(i_1 - i_2)$$

$$\frac{1}{Cs}(i_2 - i_1) + Ls i_2 + R_2 i_2 = 0$$

→ 두 식을 연립한다.

$$\left(R_1 + \frac{1}{Cs}\right) i_1 = E + \frac{1}{Cs} i_2 \rightarrow i_1 = \frac{\cancel{Cs}}{R_1 Cs + 1}\left(\frac{ECs + i_2}{\cancel{Cs}}\right) = \frac{ECs + i_2}{R_1 Cs + 1}$$

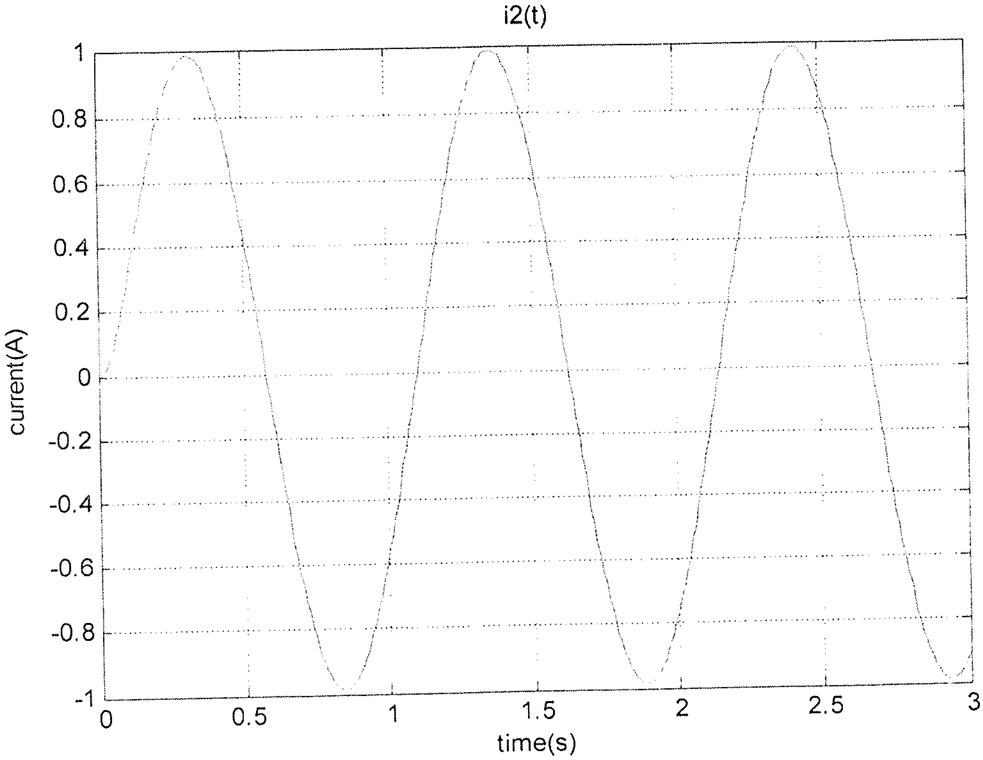
$$\frac{1}{Cs}\left[i_2 - \frac{ECs + i_2}{R_1 Cs + 1}\right] + Ls i_2 + R_2 i_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Cs}\left[i_2 - \frac{ECs}{R_1 Cs + 1} - \frac{i_2}{R_1 Cs + 1}\right] + Ls i_2 + R_2 i_2 = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{E}{R_1 Cs + 1} + \left[\frac{R_1}{R_1 Cs + 1} + Ls + R_2\right] i_2 = 0$$

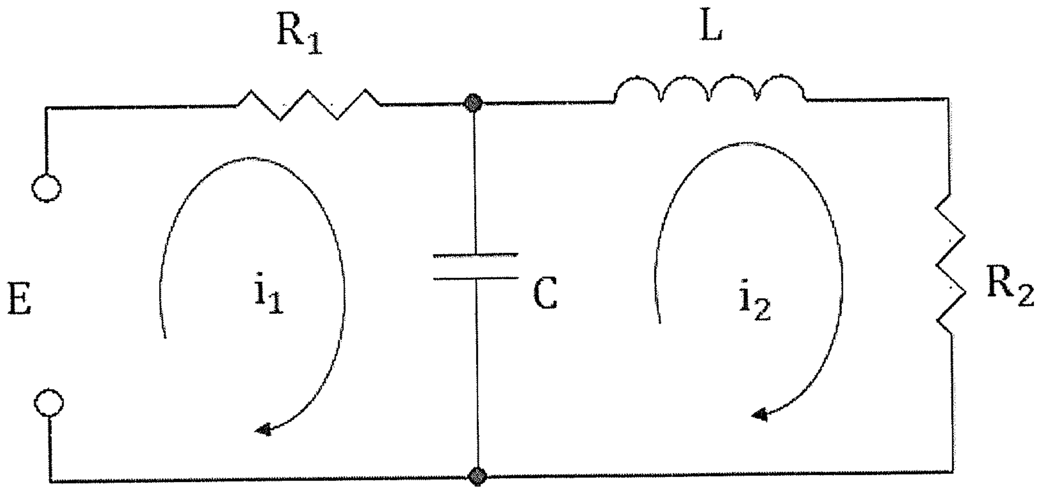
$$\therefore i_2 = \frac{E}{R_1 L C s^2 + (R_1 R_2 C + L)s + (R_1 + R_2)}$$

b) Assuming that E(t) is given aas E(t)=sin(6t) with zero initial conditions, simulate the current $i_2(t)$ through R_2 using matlab, Let R_1=0.03, R_2=0.95, C=1.5, and L=0.01.




```
clc; clear;

%% constants
R1=0.03;R2=0.95;C=1.5;L=0.01;

%% transfer function
num=[1];
den=[R1*L*C (R1*R2*C+L) (R1+R2)];

t=0:0.01:3;
sys=tf(num,den);
E=sin(6*t);
[i2,t]=lsim(sys,E,t,0);     % input E, time t, initial condition 0

plot(t,i2),hold on,grid
title('i2(t)')
xlabel('time(s)'),ylabel('current(A)')
```

c) Draw an equivalent hydraulic model.



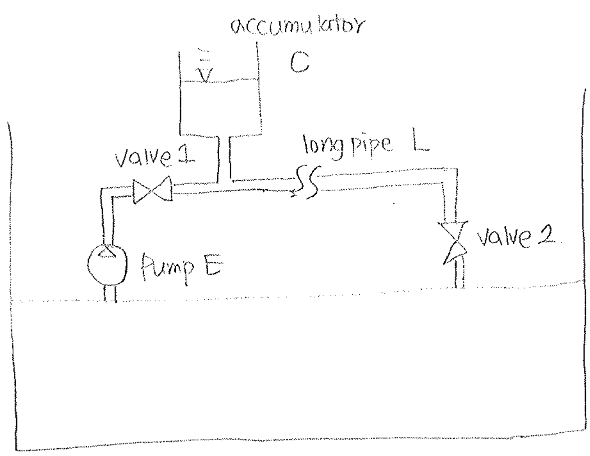
⟨equivalent element⟩

resistance R. → valve

capacitor C → accumulator

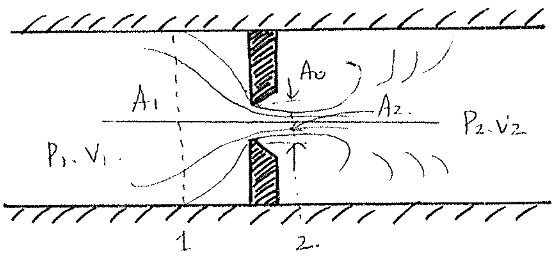
Inductor L → long pipe

Source E → pump



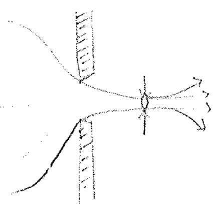
⟨Equivalent hydraulic model⟩

6. An orifice is a sudden restriction of short length in a flow passage. Because of the continuity law, the velocity of flow through an orifice must increase above that in the upstream region. In the figure below, the pressure drop across the orifice is caused by the acceleration of the fluid from the upstream velocity to the higher jet velocity. This situation arises when Reynolds numbers are high. The downstream flow becomes turbulent.



a) Derive the orifice equation starting from Bernoulli's equation and continuity equation. You may introduce proper coefficients.

point 2 → vena contracta



; downstream 에서 직경이 가장 작은 지점을 말한다.

orifice 에서 유량을 측정할 때 보통 vena contracta 지점에서 측정하는데 이는 vena contracta를 기점으로 convergence가 급격히 일어나 압력 변화가 심해지기 때문에 그 변화의 전환점인 vena contracta가 기준이 된다

Bernoulli's equation $\cancel{z_1} + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \cancel{z_2} + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$

$$\therefore \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{1}{2g}(V_1^2 - V_2^2)$$

Continuity equation $A_1V_1 = A_2V_2 \quad \therefore A_1 = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)V_2$

$$\Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{1}{2g}\left\{V_1^2 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 V_2^2\right\} = \frac{V_2^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]$$

$$\therefore V_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}}\sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}}$$

ideal discharge $Q_i = A_2V_2$ 로 vena contracta 지점에서의 정보로 구성된다.
그러나 실제로는 vena contracta는 orifice 로부터 어느정도의 간격을 둔 지점이고 orifice의 구멍 A_0 보다 작은 값을 갖지만 정확한 값은 모르므로

$A_c = C_cA_0$ 로 대체한다.

여기에서 C_c는 contraction coefficient 이다.

$$\therefore Q = C_c \cdot C_v Q_i = \frac{C_d A_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{C_c A_0}{A_1}\right)^2}}\sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}}$$

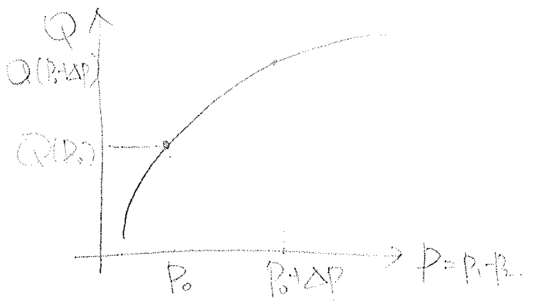
따라서 orifice 유량, $Q = CA_0\sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}}$ → C = flow coefficient

b) Derive a linear version of orifice equation by linearization.

$$Q = CA_0 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}} \quad \Rightarrow \quad Q = f(P) = CA_0 \sqrt{\frac{2P}{\rho}}$$

Orifice 유량은 P에 관한 비선형식이다.
이를 linearization 개념을 이용하여 선형화시켜 $P_1 - P_2 = RQ$ 형태의 linear version을 도출하고자 한다. (여기에서 R은 유체흐름저항)

* Taylor 급수 선형화 *



테일러 급수 전개: 연속적인 함수에 있어 임의의 지점 혹은 시점에서의 값을 기준지점 혹은 시점에서의 값과 모든 미분값들을 이용하여 급수로 표현하는 방법.

⇒ 대부분 1차 미분까지 포함시키는 선형화 수행

작동점 P_0 근처에서의 Taylor 급수 이용

$$Q(P) = Q(P_0) + \frac{1}{1!}\frac{dQ}{dP}\bigg|_{P=P_0}(P-P_0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2Q}{dP^2}\bigg|_{P=P_0}(P-P_0)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3Q}{dP^3}\bigg|_{P=P_0}(P-P_0)^3 + \cdots$$

1차 Taylor 급수 : $Q(P) = Q(P_0) + \frac{dQ}{dP}\Big|_{P=P_0}(P-P_0) + \cancel{\Delta(P-P_0)^2}^{\to 0}$

$$\text{"}\ Q(P) - Q(P_0) = \frac{dQ}{dP}\bigg|_{P=P_0}(P-P_0)\ \text{"}$$

$P - P_0$ is small $\Rightarrow$ $\delta Q = \frac{1}{R}\delta P$ 여기에서 $\delta P = P - P_0$, $\delta Q = Q - Q_0$

$$\frac{1}{R} = \frac{dQ}{dP}\bigg|_{P=P_0}$$

$$Q = \underbrace{CA_0\sqrt{\frac{2}{\rho}}}_{K}\sqrt{P} = K\sqrt{P} \Rightarrow \frac{dQ}{dP} = \frac{K}{2\sqrt{P}} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{dQ}{dP}\bigg|_{P=P_0} = \frac{K}{2\sqrt{P_0}}$$

$$\therefore\ Q(P) = Q(P_0) + \frac{dQ}{dP}\bigg|_{P=P_0}(P-P_0)$$

Taylor 급수 선형화를 이용한 linear version $Q = K\sqrt{P_0} + \frac{1}{R}(P - P_0)$.

이때 유체흐름저항 $R = \frac{2\sqrt{P_0}}{K}$, $K = CA_0\sqrt{\frac{2}{\rho}}$

Problem 1.

a) $A(t) = \left(1 + \frac{K_{PE}}{K_{SE}}\right) T(t) + \frac{b}{K_{SE}} \dot{T}(t)$

주어진 A(t), $K_{SE} = 136\ g/cm$, $K_{PE} = 75\ g/cm$, $b = 50\ g \cdot s/cm$ 를 대입하면

$\rightarrow 48144\, e^{(-t/0.0326)} - 45845\, e^{(-t/0.034)} = \left(1 + \frac{75}{136}\right) T(t) + \frac{50}{136} \dot{T}(t)$ - ①

$\dot{T}(t)$ 항의 계수를 1로 만들기 위해 양변에 50/136을 나눠주면

$\rightarrow \dot{T}(t) + 4.22\, T(t) = 130950\, e^{(-t/0.0326)} - 124700\, e^{(-t/0.034)}$ - ②

식②는 $\dot{T}(t) + a\,T(t) = b$ 의 형태인 선형 미분방정식 이므로
양변에 $e^{\int a\,dt} = e^{\int 4.22\,dt} = e^{4.22t}$ 를 곱하면

$\rightarrow \dot{T}(t) e^{4.22t} + 4.22\, T(t) e^{4.22t} = 130950\, e^{-26.4548t} - 124700\, e^{-25.1918t}$

$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(T(t)\, e^{4.22t}\right) = 130950\, e^{-26.4548t} - 124700\, e^{-25.1918t}$ ③

식③의 양변을 t에 관해 적분하면

$\rightarrow T(t)\, e^{4.22t} = -4950\, e^{-26.4548t} + 4950\, e^{-25.1918} + C$ -④

식 ④의 양변을 $e^{4.22t}$ 로 나누면

$\rightarrow T(t) = 4950\left(e^{-29.4118t} - e^{-30.6748t}\right) + C$

$-29.4118 = -1/0.034$, $-30.6748 = -1/0.0326$ 이므로

$T(t) = 4950\left(e^{-t/0.034} - e^{-t/0.0326}\right) + C$ - ⑤

초기조건 $T(0) = 0$ 을 식 ⑤에 대입하면

$T(0) = 4950(1 - 1) + C = 0$

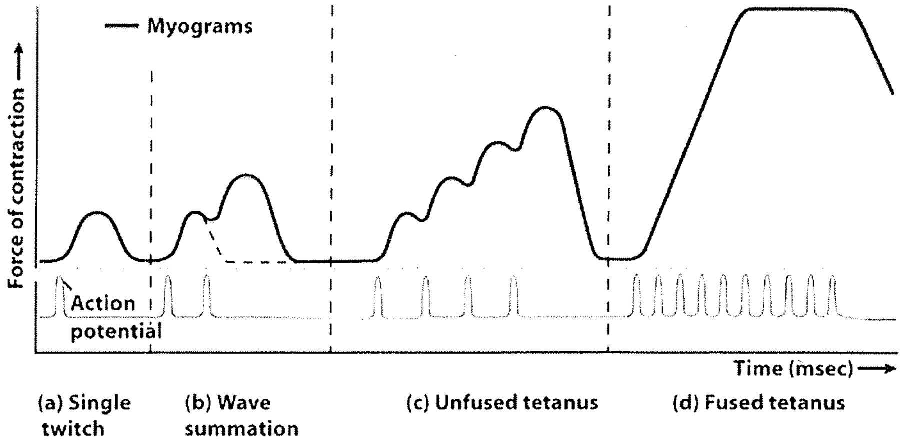
$\rightarrow C = 0$ — ⑥

식⑥에서 구한 C를 식⑤에 대입하면

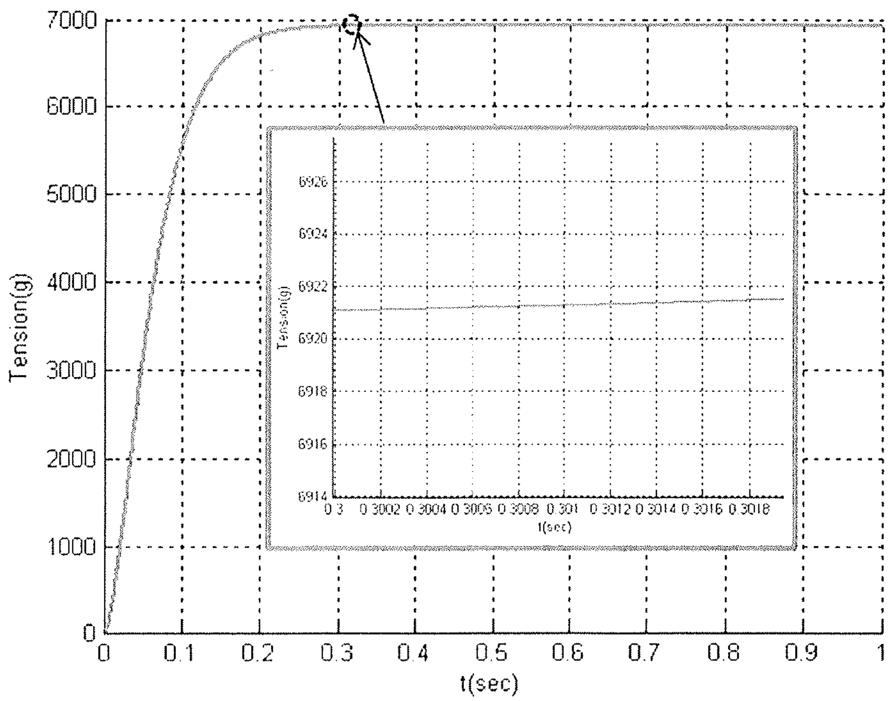
$\therefore T(t) = 4950\left(e^{-t/0.034} - e^{-t/0.0326}\right)$

의 정의는 아래와 같다.

Complete (Fused) tetanus: High rate of stimulation where the muscle fibers do not relax between stimuli.



- 위 그림에서 보여주듯이 muscle fiber가 relax 되기 시작하는데 걸리는 시간보다 짧은 주기의 주파수에서 자극을 가할 경우 fused tetanus가 발생한다. 이전 페이지의 시뮬레이션 결과를 살펴볼 때, 100Hz정도 이상의 주파수로 자극을 가했을 때 거의 fused tetanus가 발생한다. 확대한 그림을 보면 force가 아주 조금씩은 요동치기 때문에 완벽한 fused tetanus라고는 말하기에는 모호하다. 주파수를 더 높여본 결과, 이러한 현상은 약 1000Hz 정도의 주파수를 가했을 때에 완벽히 사라졌다.



1000Hz

Problem 2

c) i) muscle에 의한 torque τ와 total muscle force F_{total}의 관계식

- principle of virtual work에 의해

$$\tau^T \Delta\theta = -F^T_{total}\Delta\lambda \quad — ① \qquad \left(\tau = \begin{pmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{pmatrix},\ \Delta\theta = \begin{pmatrix}\Delta\theta_1\\ \Delta\theta_2\end{pmatrix}\right)$$

- 아래와 같이 Jacobian Matrix를 정의

$$J = \frac{d\lambda}{d\theta} = \left[\frac{\partial\lambda}{\partial\theta_1}\ \frac{\partial\lambda}{\partial\theta_2}\right] \rightarrow \Delta\lambda = J\Delta\theta \quad — ②$$

②를 ①에 대입

$$\tau^T\Delta\theta = -F^T_{total}J\Delta\theta$$

$$\tau^T = -F^T_{total}J$$

$$\tau = -J^T F_{total} \quad — ③$$

- J를 계산하기 위해 λ를 θ에 관한 식으로 정리

→ (제 2 코사인 법칙) $c = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta_2}$

→ (사인의 정의) $\sin\beta = \frac{b\sin\theta_2}{c} \longrightarrow \beta = \sin^{-1}\left(\frac{b\sin\theta_2}{c}\right)$ — ④

→ (제 2 코사인 법칙) $\lambda = \sqrt{d^2+c^2+2dc\cos\gamma} = \sqrt{d^2+c^2+2dc\cos(\beta+\theta_1)}$

$$= \sqrt{d^2+c^2+2dc\left[\cos\beta\cos\theta_1 - \sin\beta\sin\theta_1\right]} \quad — ⑤$$

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}, \qquad \sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} \quad — ⑥$$

- ④와 ⑥을 이용해 ⑤의 cosβ와 sinβ를 계산하면

$$\begin{cases}\cos\beta = \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{b\sin\theta_2}{c}\right)\right) = \sqrt{1-\frac{b^2\sin^2\theta_2}{c^2}} \\ \sin\beta = \sin\left(\sin^{-1}\frac{b\sin\theta_2}{c}\right) = \frac{b\sin\theta_2}{c}\end{cases} \quad — ⑦$$

- ⑦을 ⑤에 대입하면

$$\lambda = \sqrt{d^2+c^2+2dc\left(\sqrt{1-\frac{b^2\sin^2\theta_2}{c^2}}\cos\theta_1 - \frac{b\sin\theta_2}{c}\sin\theta_1\right)} \quad — ⑧$$

ii) endpoint에서의 외력에 의한 torque τ_e와 endpoint force F_{ext}의 관계식

- principle of virtual work에 의해

$$F_{ext}^T \Delta x = \tau_e^T \Delta \theta \quad \text{— ⑨}$$

- 아래와 같이 Jacobian matrix를 정의

$$J_e = \frac{dX}{d\theta} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial\theta_1 & \partial x/\partial\theta_2 \\ \partial y/\partial\theta_1 & \partial y/\partial\theta_2 \end{bmatrix} \rightarrow \Delta x = J_e \Delta\theta \quad \text{— ⑩}$$

- ⑩을 ⑨에 대입

$$F_{ext}^T \cdot J_e \Delta\theta = \tau_e^T \Delta\theta$$

$$\tau_e^T = F_{ext}^T J_e$$

$$\tau_e = J_e^T F \quad \text{— ⑪}$$

- J_e를 계산하기 위해 x와 y를 θ에 관한 식으로 정리

$$\begin{cases} x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) \\ y = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) \end{cases}$$

$$- J_e = \begin{bmatrix} -l_1\sin\theta_1 - l_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -l_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1+\theta_2) & l_2\cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \quad \text{— ⑫}$$

iii) endpoint 에서의 외력을 포함한 전체 시스템은

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + G(q) = \tau + \tau_e$$

③과 ⑪ 에 의해

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + G(q) = -J^T F_{total} + J_e^T F_{ext}$$

$$J_e^T F_{ext} = M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + G(q) + J^T F_{total}$$

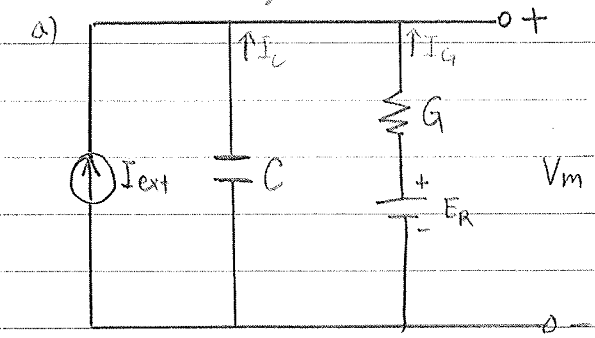
$$\therefore F_{ext} = (J_e^T)^{-1}\{M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + G(q) + J^T F_{total}\}$$

$$\left(\text{where } J = \frac{d\lambda}{d\theta}, \quad \lambda = \sqrt{d^2+c^2+2dc\left(\sqrt{1-\frac{b^2\sin^2\theta_2}{c^2}}\cos\theta_1 - \frac{b\sin\theta_2}{c}\sin\theta_1\right)} \right.$$

$$\left. J_e = \begin{bmatrix} -l_1\sin\theta_1 - l_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -l_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1+\theta_2) & l_2\cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \right)$$

Problem 3.

a)



$\underline{\text{initial condition}}$ $\quad I_{ext} = 0$

$\rightarrow V_m(0) = 0$

$G = \frac{1}{R}$ (conductance)

Sol) $\underline{KVL}$

$$E_R - \frac{I_G}{G} - V_m = 0$$

$$\frac{I_G}{G} = E_R - V_m$$

$$I_G = (E_R - V_m)G \quad — ①$$

$\underline{KCL}$

$$I_{ext} + I_c + I_G = 0$$

$$\rightarrow I_{ext} = I_c - I_G \quad — ②$$

$$\rightarrow I_{ext} = -\left(-C\frac{dV_m}{dt}\right) + G(V_m - E_R)$$

② 에 ① 대입

$$\rightarrow \frac{I_{ext} + GE_R}{C} = \frac{dV_m}{dt} + \frac{G}{C}V_m \quad — ③$$

③ 의 양변에 $e^{\int \frac{G}{C}dt} = e^{\frac{G}{C}t}$ 를 곱하면

$$\rightarrow \left(\frac{I_{ext} + GE_R}{C}\right)e^{\frac{G}{C}t} = \frac{dV_m}{dt}e^{\frac{G}{C}t} + \frac{G}{C}V_m e^{\frac{G}{C}t}$$

$$\rightarrow \left(\frac{I_{ext} + GE_R}{C}\right)e^{\frac{G}{C}t} = \frac{d}{dt}\left(V_m e^{\frac{G}{C}t}\right) \quad — ④$$

④ 의 양변을 t에 관해 적분하면

$$\rightarrow \frac{\cancel{C}}{G} \times \left(\frac{I_{ext} + GE_R}{\cancel{C}}\right)e^{\frac{G}{C}t} + const = V_m e^{\frac{G}{C}t} \quad — ⑤$$

initial condition ($V_m(0) = 0$) 과 주어진조건 ($I_{ext} = 0$) 을 대입하면

$$\rightarrow E_R + const = 0$$

$$const = -E_R \quad — ⑥$$

⑥을 ⑤에 대입하면

$$\to V_m e^{\frac{G}{C}t} = \frac{I_{ext}+GE_R}{G} e^{\frac{G}{C}t} - E_R \quad — ⑦$$

⑦의 양변에 $e^{-\frac{G}{C}t}$를 곱해주면

$$\to V_m = \frac{I_{ext}+GE_R}{G} - E_R e^{-\frac{G}{C}t} \quad — ⑧$$

$I_{ext}=0$을 대입하면

$$\to V_m = E_R - E_R e^{-\frac{G}{C}t} \quad — ⑨$$

$\therefore V_m = E_R - E_R e^{-\frac{G}{C}t}$

b) $I_{ext}=0$ 일때 steady state value는
a)의 식 ⑨에 $t=\infty$를 준것과 같으므로

$$V_m(\infty) = E_R \leftarrow I_{ext}=I_0 \text{ 일때 } V_m(0) = E_R$$

a)의 식 ⑤에 $V_m(0)=E_R$과 $I_{ext}=I_0$를 대입하면

$$\to \frac{I_0+GE_R}{G} + const = E_R$$

$$const = -\frac{I_0}{G} \quad — ⑩$$

식 ⑩을 식 ⑤에 다시 대입하면

$$\to \frac{I_0+GE_R}{G} e^{\frac{G}{C}t} - \frac{I_0}{G} = V_m e^{\frac{G}{C}t} \quad — ⑪$$

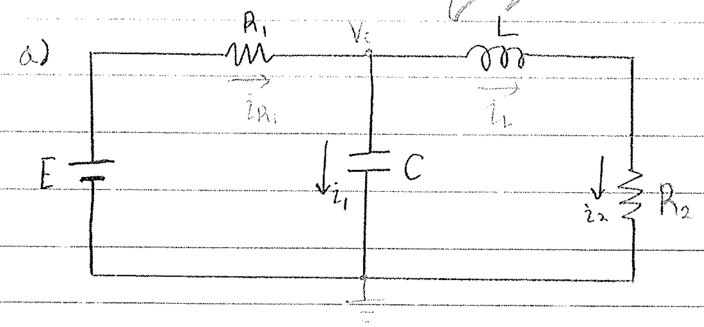
양변에 $e^{\frac{G}{C}t}$를 나눠주면

$$\to V_m = E_R + \frac{I_0}{G}\left(1 - e^{-\frac{G}{C}t}\right)$$

$\therefore V_m = E_R + \frac{I_0}{G}(1 - e^{-\frac{G}{C}}$

Problem 5.

a)



Sol)

KVL

$$E - R_1 i_{R_1} - V_c = 0 \quad \rightarrow \quad i_{R_1} = \frac{E - V_c}{R_1} \qquad — ①$$

$$V_c - L\frac{di_L}{dt} - R_2 i_2 = 0 \qquad — ②$$

KCL

$$i_{R_1} - i_L - i_1 = 0 \qquad — ③$$

$$i_L - i_2 = 0 \quad \rightarrow \quad i_1 = i_2 \qquad — ④$$

식 ③에 식 ①,④를 대입

$$\rightarrow \frac{E - V_c}{R_1} - i_2 - C\frac{dV_c}{dt} = 0 \qquad — ⑤$$

식 ②에 식 ④를 대입

$$\rightarrow V_c - L\frac{di_2}{dt} - R_2 i_2 = 0$$

$$V_c = L\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 \qquad — ⑥$$

식 ⑤에 식 ⑥을 대입

$$\rightarrow \frac{E}{R_1} - \frac{1}{R_1}\left(L\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2\right) - i_2 - C\frac{d}{dt}\left(L\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2\right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{E}{R_1} - \frac{L}{R_1}\frac{di_2}{dt} - \frac{R_2}{R_1} i_2 - i_2 - CL\frac{d^2 i_2}{dt^2} - CR_2\frac{di_2}{dt} = 0$$

$$\rightarrow -CL\frac{d^2 i_2}{dt^2} - \left(\frac{L}{R_1} + CR_2\right)\frac{di_2}{dt} - \left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right) i_2 + \frac{E}{R_1} = 0 \qquad — ⑦$$

식 ⑦의 양변에 $-R_1$을 곱함

$$\rightarrow \therefore R_1 C L \frac{d^2 i_2}{dt^2} + (L + CR_1R_2)\frac{di_2}{dt} + (R_1 + R_2) i_2 - E = 0 \qquad — ⑧$$

b) a)에서 구한 식 ⑧을 아래와 같이 정리

$$\rightarrow \frac{d^2 i_2}{dt^2} = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 CL} i_2 - \frac{L + CR_1R_2}{R_1 CL}\frac{di_2}{dt} + \frac{E}{R_1 CL}$$

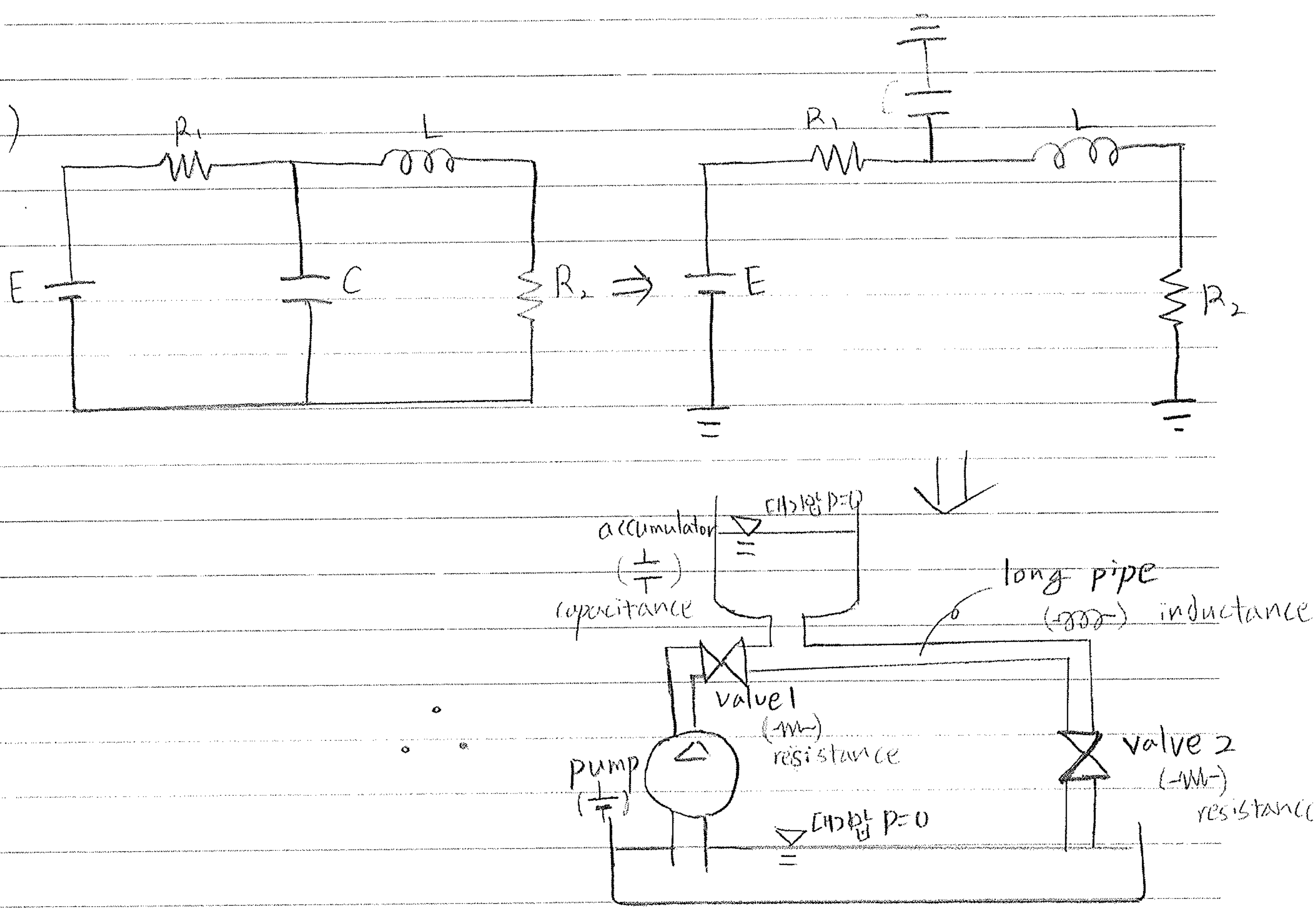
일차 기본 방정식 2개로 나타내면

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{i}_{2-1} = i_{2-2} \\ \dot{i}_{2-2} = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 CL} i_{2-1} - \frac{L + CR_1R_2}{R_1 CL} i_{2-2} + \frac{E}{R_1 CL} \end{cases}$$

→ matlab의 ode45 함수를 이용해 기본방정식을 풀어서,
t에 대한 i_2의 함수로 나타냄.

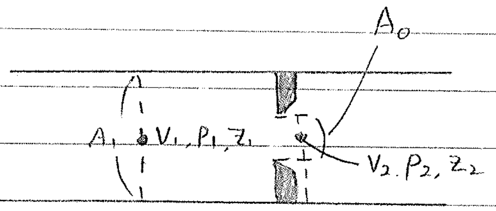
(matlab을 이용해 문제를 푼 결과는 다음 페이지에 계속 ...)

c)



Problem 6.

a)



Continuity equation 을 이용

$$\rightarrow Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 \rightarrow V_1 = \left(\frac{A_2}{A_1}\right) V_2 \underset{\substack{\uparrow \\ A_2 = A_0}}{=} \left(\frac{A_0}{A_1}\right) V_2 \quad — ①$$

Bernoulli equation 을 이용 (g= 중력가속도)

$$\rightarrow \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \quad (z_1 = z_2 \text{ 이므로}) \quad — ②$$

식①을 식②에 대입

$$\rightarrow \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2 V_2^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\left(\frac{\left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2 - 1}{2\cancel{g}}\right) V_2^2 = \frac{P_2 - P_1}{\rho \cancel{g}}$$

$$V_2^2 = \frac{2 P_1 - P_2}{\rho\left(1 - \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2\right)}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho\left(1 - \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2\right)}} \quad — ③$$

식③을 식 ①에 대입

$$\rightarrow Q = A_0 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho\left(1 - \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2\right)}} \quad — ④$$

여기서 식 ④는 orifice를 통과할 때 'no loss'를 가정한 식이다. 실제로 발생하는 loss (ex: friction)을 고려할 경우 유량 Q는 식④에 나타난 것보다 작으므로 discharge coefficient C_d를 곱해준다.

$$\rightarrow Q = A_0 C_d \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho\left(1 - \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2\right)}}$$

(단, $C_d < 1$ 이며, C_d는 실험적으로 결정 됨.)

$$\therefore Q = A_0 C_d \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho\left(1 - \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2\right)}}$$

b) a)에서 구한 Q에 관한 식을 $p_1 - p_2$에 관한 식으로 정리하면

$$Q = A_0 C_d \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(1-(\frac{A_0}{A_1})^2}}$$

$$\rightarrow Q^2 = A_0^2 C_d^2 \frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(1-(\frac{A_0}{A_1})^2)}$$

$$\rightarrow P_1 - P_2 = \frac{\rho(1-(\frac{A_0}{A_1})^2)Q^2}{2A_0^2 C_d^2} = f(Q) \leftarrow \text{nonlinear}$$

Taylor series expansion 을 이용하여 $f(Q)$를 linearization 하면

$$f(Q) = f(Q_0) + f'(Q_0)(Q - Q_0)$$

$$= \frac{\rho(1-(A_0/A_1)^2)Q_0^2}{2A_0^2 C_d^2} + \frac{2\rho(1-(A_0/A_1)^2)Q_0}{2A_0^2 C_d^2}(Q - Q_0)$$

$$= \frac{2\rho Q_0(1-(A_0/A_1)^2)}{2A_0^2 C_d^2} Q - \frac{\rho Q_0^2}{2A_0^2 C_d^2}$$

$$\therefore P_1 - P_2 = f(Q) = \frac{2\rho Q_0(1-(A_0/A_1)^2)}{2A_0^2 C_d^2} Q - \frac{1}{2}$$

($f(Q)$는 Q_0 근방에서 linear 하다.)