Численное моделирование динамики жидкости в крупных кровеносных сосудах

Долгов Д.А.

Научный руководитель: Захаров Ю.Н.

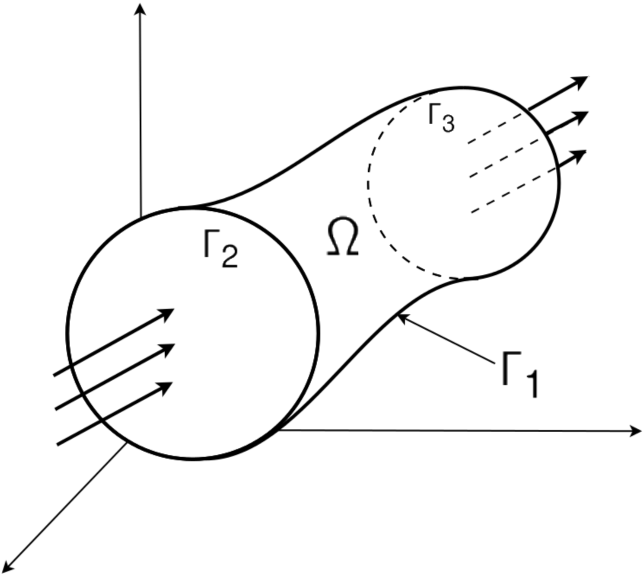
Кемеровский Государственный Университет

20 ноября 2014 г.

Введение

Рассмотрим задачу о течении крови внутри крупных сосудов с гибкими стенками. Кровь будем моделировать как вязкую, несжимаемую двухкомпонентную жидкость (плазма и форменные элементы: эритроциты, лейкоциты, тромбоциты), стенки сосуда - как поверхность заданной формы, обладающую определенной жесткостью. Стенки движутся с той же скоростью, что и жидкость.

Введение



Моделирование течения

Система уравнений Навье-Стокса:

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u) = -\nabla p + \nabla \cdot \sigma + f \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \tag{2}$$

где $\sigma = \mu(\nabla u + (\nabla u)^T)$, с начальными условиями

$$u(x, y, z, t_0) = u_0 \tag{3}$$

Условия на стенках

- на Γ_1 задаются условия прилипания
- на Γ_2, Γ_3 заданы значения давления $P_{int}(x, y, z), P_{out}(x, y, z)$

Сопротивление деформации

В каждой точке стенки определена поверхностная сила сопротивления деформации [3]

$$F = \frac{\partial}{\partial s}(T\tau) + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(E \cdot I \frac{\partial^2}{\partial s^2} X\right) \tag{4}$$

$$F(x, y, z, t) = k \cdot \|X(x, y, z) - X_0(x, y, z)\| \tag{5}$$

Концентрация

Уравнение для расчета концентрации примеси в жидкости:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \cdot \nabla c = 0 \tag{6}$$

с начальными условиями

$$c(x, y, z, 0) = c_0(x, y, z) \tag{7}$$

Концентрация

Плотность и вязкость зависят от концентрации:

$$\mu = c(\mu_2 - \mu_1) + \mu_1 \tag{8}$$

$$\rho = c(\rho_2 - \rho_1) + \rho_1 \tag{9}$$

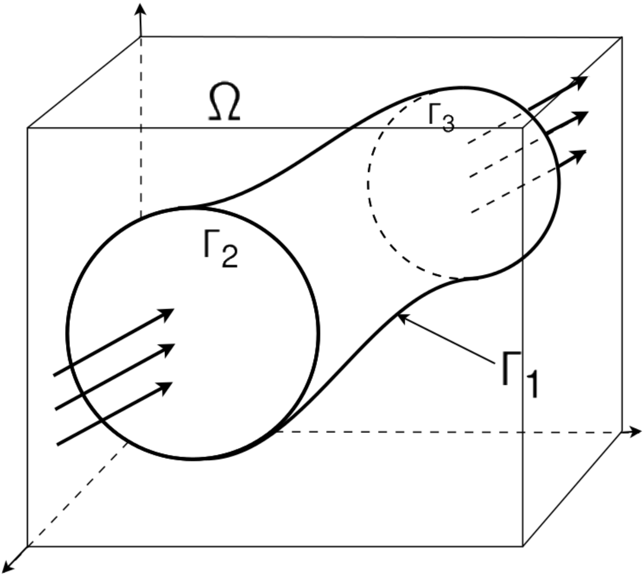
где $\mu_1, \mu_2, \rho_1, \rho_2$ - вязкости и плотности обоих компонент.

Метод решения

Будем рассматривать отдельно задачи вычисления параметров течения жидкости и параметров движения стенок сосуда и клапанов. Для этого введем в расчетной области сетки:

- $\Omega_h = \Omega_h(x, y, z)$ - равномерная разнесенная сетка для расчета течения
- $\Gamma_h = \Gamma_h(q, r, s, t)$ - соответствует стенкам сосуда и клапанам в лагранжевых координатах

Метод решения



Взаимодействие

Уравнения, описывающие взаимодействие погруженной границы и жидкости [2]:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \int_{\Omega_h} u \cdot \delta(x - X)\, dx\, dy\, dz \tag{10}$$

$$f = \int_{\Gamma_h} F \cdot \delta(x - X)\, dq\, dr\, ds \tag{11}$$

и условие прилипания

$$\frac{\partial X}{\partial t}(q, r, s, t) = u(X(q, r, s, t), t) \tag{12}$$

Алгоритм решения

Схема расщепления по физическим факторам:

$$\frac{u^* - u^n}{\triangle t} = -(u^n \cdot \nabla)u^n + \frac{1}{\rho}\nabla\sigma + f \tag{13}$$

$$\rho\triangle p^{n+1} - (\nabla p \cdot \nabla p^{n+1}) = \frac{\rho^2 \nabla u^*}{\triangle t} \tag{14}$$

$$\frac{u^{n+1} - u^*}{\triangle t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p^{n+1} \tag{15}$$

где $\nabla\sigma(u^n, \mu) = \mu\triangle u^n + (\nabla\mu \cdot \nabla)u^n + (\nabla\mu \cdot J_{u^n})$

Алгоритм решения

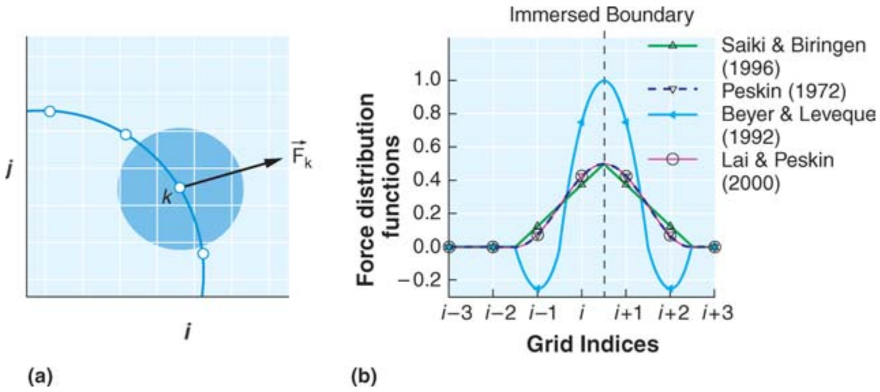
Интерполяция скорости на границу и распределение поверхностной силы деформации на точки жидкости:

$$U_n = \sum_{ijk} u_{ijk} \cdot D(x_{ijk} - x_n) h_{ijk}^3 \qquad (16)$$

$$f_{ijk} = \sum_{n} F_n \cdot D(x_{ijk} - x_n) h_n^2 \qquad (17)$$

$D(x_n)$ соответствует $\delta(x - x_k)$, а h_n - шаг сетки по погруженной границе.

Схема распределения силы деформации



Примеры

- Деформация стенок сосуда
- Аналогичный расчет на более мелкой сетке

Примеры

- Расчет распространения примеси
- Размыв "тромба"

Дополнительная информация

- Peskin C.S., Numerical Analysis of Blood Flow in the Heart// JCP 25,220-252, (1977)
- Peskin C.S., The immersed boundary method// Acta numerica, 1-39, (2002)
- Boyce E.G. Immersed boundary model of aortic heart valve dynamics with physiological driving and loading conditions // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. 1–29, 2011
- Kruger T., Introduction to the immersed boundary method, (2011)