

# Моделирование динамики жидкости в крупных кровеносных сосудах

Долгов Д.А.

Научный руководитель: Захаров Ю.Н.

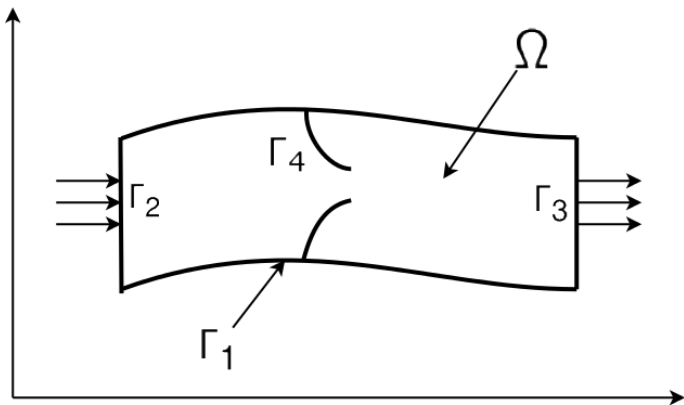
Кемеровский Государственный Университет

23 октября 2014 г.



Рассмотрим задачу о течении крови внутри крупных сосудов с гибкими стенками и клапанами. Кровь будем моделировать как вязкую, несжимаемую двухкомпонентную жидкость (плазма + форменные элементы: эритроциты, лейкоциты, тромбоциты), стенки сосуда и лепестки клапанов - как поверхность заданной формы, обладающую определенной жесткостью.

# Введение



Система уравнений Навье-Стокса:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u\right) = -\nabla p + \nabla \cdot \sigma + f \quad (1)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (2)$$

где  $\sigma = \mu(\nabla u + (\nabla u)^T)$ , с начальными условиями

$$u(x, y, z, t_0) = 0, \quad p(x, y, z, t_0) = p_0 \quad (3)$$

# Условия на стенках

- на  $\Gamma_1, \Gamma_4$  задаются условия прилипания
- на  $\Gamma_2, \Gamma_3$  заданы значения давления  $P_{int}, P_{out}$

Помимо этого в каждой точке стенки определена поверхностная сила сопротивления деформации

$$F = F(x, y, z, t)$$

Уравнение для расчета концентрации примеси в жидкости:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \cdot \nabla c = D \Delta c \quad (4)$$

где  $D$  - коэффициент диффузии, с краевыми условиями на  $\Gamma_1$

$$\frac{\partial c}{\partial \vec{n}} = 0 \quad (5)$$

Предполагается, что плотность и вязкость зависят от концентрации:

$$\mu = c(\mu_2 - \mu_1) + \mu_1 \quad (6)$$

$$\rho = c(\rho_2 - \rho_1) + \rho_1 \quad (7)$$

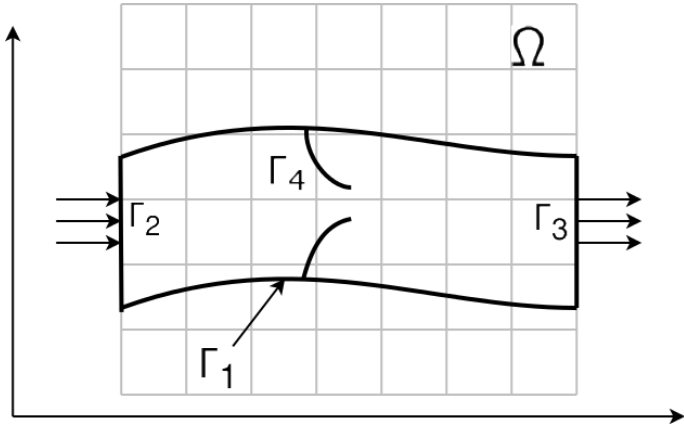
где  $\mu_1, \mu_2, \rho_1, \rho_2$  - вязкости и плотности обоих компонент в начальный момент времени.

В соответствии с методом погруженной границы, будем рассматривать отдельно задачи вычисления параметров течения жидкости и параметров движения стенок сосуда и клапанов. Для этого введем в расчетной области сетки:

- $\Omega = \Omega(x, y, z)$  - равномерная разнесенная сетка для расчета течения
- $\Gamma = \Gamma(q, r, s, t)$  - соответствует стенкам сосуда и клапанам в лагранжевых координатах



# Метод решения



Стенки сосуда и клапаны моделируются с помощью безмассовых (или с "нейтральной плавучестью" (neutrally buoyant)) фибр (коллагеновых фибр в случае сердечно-сосудистой системы), погруженных в жидкость.

# Взаимодействие

В такой постановке необходимо добавить следующие уравнения, которые будут описывать взаимодействие погруженной границы и жидкости:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \int_{\Omega} u \cdot \delta(x - X) dx dy dz \quad (8)$$

$$f = \int_{\Gamma} F \cdot \delta(x - X) dq dr ds \quad (9)$$

и условия прилипания

$$\frac{\partial X}{\partial t}(q, r, s, t) = u(X(q, r, s, t), t) \quad (10)$$

Для случая переменной плотности добавлять уравнение:

$$\rho = \int_{\Gamma} M \cdot \delta(x - X) dq dr ds \quad (11)$$

В существующих работах [2] есть доказательство того, что  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho = 0$  есть следствие из (2), (11), (8)

В текущей реализации краевые условия для концентрации задаются на  $\Omega$  вместо  $\Gamma_1$ , что скорее всего дает меньшую точность. В существующих работах практически не встречается реализация подобных условий (см. [3]). Есть предположение, что этого можно добиться с помощью подхода, аналогичного для скорости.

# Алгоритм решения

- Рассчитываем параметры течения в  $\Omega(x, y, z)$ , в частности векторное поле скорости
- С помощью полученной скорости вычислить скорость движения точек границы и ее деформацию
- На основе деформации  $\Gamma(q, r, s, t)$  находим силу сопротивления  $F(q, r, s, t)$
- С помощью  $F(q, r, s, t)$  вычислить  $f(x, y, z, t)$  для жидкости
- Перейти к новому временному слою с измененной  $f(x, y, z, t)$

# Алгоритм решения

- Рассчитываем параметры течения в  $\Omega(x, y, z)$ , в частности векторное поле скорости
- С помощью полученной скорости вычислить скорость движения точек границы и ее деформацию
- На основе деформации  $\Gamma(q, r, s, t)$  находим силу сопротивления  $F(q, r, s, t)$
- С помощью  $F(q, r, s, t)$  вычислить  $f(x, y, z, t)$  для жидкости
- Перейти к новому временному слою с измененной  $f(x, y, z, t)$

# Алгоритм решения

- Рассчитываем параметры течения в  $\Omega(x, y, z)$ , в частности векторное поле скорости
- С помощью полученной скорости вычислить скорость движения точек границы и ее деформацию
- На основе деформации  $\Gamma(q, r, s, t)$  находим силу сопротивления  $F(q, r, s, t)$
- С помощью  $F(q, r, s, t)$  вычислить  $f(x, y, z, t)$  для жидкости
- Перейти к новому временному слою с измененной  $f(x, y, z, t)$



# Алгоритм решения

- Рассчитываем параметры течения в  $\Omega(x, y, z)$ , в частности векторное поле скорости
- С помощью полученной скорости вычислить скорость движения точек границы и ее деформацию
- На основе деформации  $\Gamma(q, r, s, t)$  находим силу сопротивления  $F(q, r, s, t)$
- С помощью  $F(q, r, s, t)$  вычислить  $f(x, y, z, t)$  для жидкости
- Перейти к новому временному слою с измененной  $f(x, y, z, t)$

# Алгоритм решения

- Рассчитываем параметры течения в  $\Omega(x, y, z)$ , в частности векторное поле скорости
- С помощью полученной скорости вычислить скорость движения точек границы и ее деформацию
- На основе деформации  $\Gamma(q, r, s, t)$  находим силу сопротивления  $F(q, r, s, t)$
- С помощью  $F(q, r, s, t)$  вычислить  $f(x, y, z, t)$  для жидкости
- Перейти к новому временному слою с измененной  $f(x, y, z, t)$

# Схема расщепления

$$\frac{u^* - u^n}{\Delta t} = -(u^n \cdot \nabla)u^n + \frac{1}{\rho}\nabla\sigma + f \quad (12)$$

$$\rho\Delta p^{n+1} - (\nabla p \cdot \nabla p^{n+1}) = \frac{\rho^2 \nabla u^*}{\Delta t} \quad (13)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p^{n+1} \quad (14)$$

где  $\nabla\sigma(u^n, \mu) = \mu\Delta u^n + (\nabla\mu \cdot \nabla)u^n + (\nabla\mu \cdot J_{u^n})$

# Алгоритм решения

- Аппроксимируем уравнение (12) с помощью схемы расщепления Дугласа-Рекфорда и решаем полученную систему методом прогонки
- Из уравнения (13) методом бисопряженных градиентов определяем поле давления
- Восстанавливаем окончательное поле вектора скорости по явным формулам (14)

# Алгоритм решения

- Аппроксимируем уравнение (12) с помощью схемы расщепления Дугласа-Рекфорда и решаем полученную систему методом прогонки
- Из уравнения (13) методом бисопряженных градиентов определяем поле давления
- Восстанавливаем окончательное поле вектора скорости по явным формулам (14)

# Алгоритм решения

- Аппроксимируем уравнение (12) с помощью схемы расщепления Дугласа-Рекфорда и решаем полученную систему методом прогонки
- Из уравнения (13) методом бисопряженных градиентов определяем поле давления
- Восстанавливаем окончательное поле вектора скорости по явным формулам (14)

# Алгоритм решения

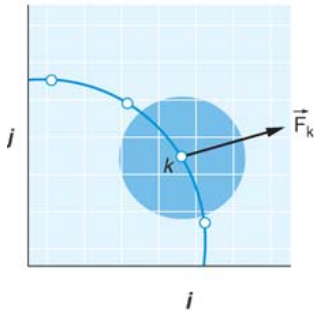
Интерполяция скорости на границу и распределение поверхностной силы деформации на точки жидкости:

$$U_n = \sum_{ijk} u_{ijk} \cdot D(x_{ijk} - x_n) h_{ijk}^3 \quad (15)$$

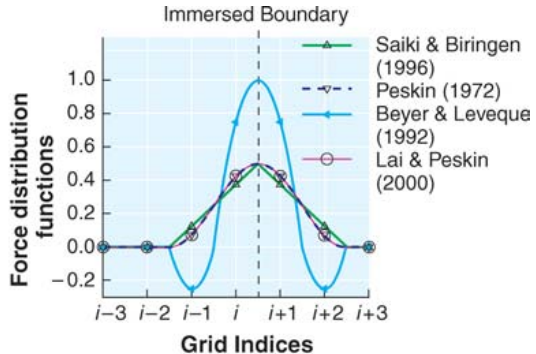
$$f_{ijk} = \sum_n F_n \cdot D(x_{ijk} - x_n) h_n^2 \quad (16)$$

$D(x_n)$  соответствует  $\delta(x - x_k)$ , а  $h_n$  - шаг сетки по погруженной границе.

# Схема распределения силы деформации



(a)



(b)



Сила находится исходя из смещения от начального положения:

$$F_n = -k_n(q_n - q_n^*) \quad (17)$$

где  $F_n$  - проекция силы на одну из осей, для  $(q, r, s) \in \Gamma$

# "Наивный" метод расчета сил

Сила состоит из силы сопротивления растяжению и скручиванию, и находится исходя из смещения относительно соседних точек:

$$F_n^s = k_s \sum_{m \neq n} \frac{d_{nm} - d_{nm}^0}{d_{nm}} \frac{x_n - x_m}{d_{nm}} \quad (18)$$

где  $F_n^s = F_n^s(X_1, X_2)$ ,  $X_{1,2} \in \Gamma$ , а  $d_{nm}$  - расстояние между точками

# "Наивный" метод расчета сил

$$F_n^b = k_b \sum_{\substack{m \neq n \\ l \neq n}} (\alpha_{mln} - \alpha_{mln}^0) \vec{n}_{ml} \quad (19)$$

где  $F_n^s = F_n^s(X_1, X_2, X_3)$ ,  $X_{1,2,3}(q, r, s) \in \Gamma$ ,  
 $\alpha_{mln}$  - угол, образованный тремя точками,  
 $\vec{n}_{ml}$  - единичный нормальный вектор

# Расчет с помощью энергии деформации

Каждой точке границы  $(q, r, s)$  соответствует фибра, которую можно параметрически описать с помощью  $s$  в виде  $s \rightarrow X(q_0, r_0, s)$

$$F = \frac{\partial}{\partial s}(T\tau) + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( k \frac{\partial^2}{\partial s^2} X \right) \quad (20)$$

$$k = E \cdot I \quad (21)$$

где  $E$  - модуль Юнга,  $I$  - момент инерции поперечного сечения,  $T$  - напряжение фибры,  $\tau$  - единичный тангенциальный вектор, касательный к фибре.

Данный метод разрабатывался с учетом применения в исследовании биологических систем, для которых подвижность и эластичность границ является важным фактором. Он разделяет одну сложную задачу на три более простые - моделирование течения, моделирование состояния границы и их взаимодействие.

Это позволяет применять мощные методы для решения каждой из задач. Помимо этого такой подход позволяет единообразно моделировать различные классы проблем, т.к. погруженная граница может иметь практически любую форму.

Метод погруженной границы пока не реализован ни в одном из крупных CFD пакетов (такая работа начата только в OpenFOAM, но она находится на стадии обсуждения сообществом).

- IBAMR (UNC McAllister Heart Institute)
- Пример моделирования аортального клапана
- Расчет параметров хордового протеза для митрального клапана



- Деформация стенок сосуда
- Аналогичный расчет на более мелкой сетке

- Расчет распространения примеси
- Разрыв "тромба"

- Peskin C.S., Numerical Analysis of Blood Flow in the Heart// JCP 25,220-252, (1977)
- Peskin C.S., The immersed boundary method// Acta numerica, 1-39, (2002)
- Peskin C.S., Griffith B.E., Pilhwa L., The immersed boundary method for advection-electrodiffusion with implicit timestepping and local mesh refinement, Comput Phys, (2010)
- Kruger T., Introduction to the immersed boundary method, (2011)