

Моделирование динамики жидкости в крупных кровеносных сосудах

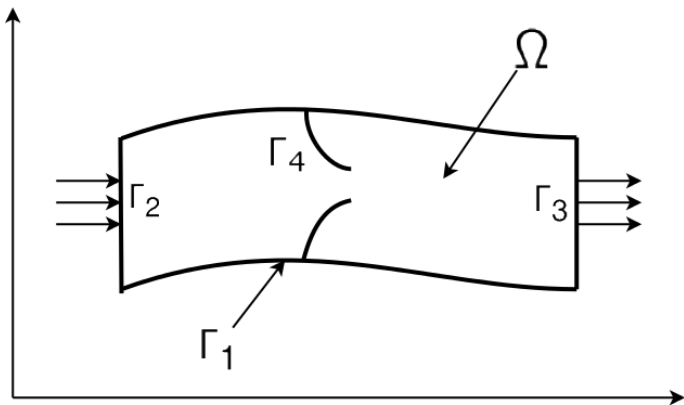
Долгов Д.А.

Кемеровский Государственный Университет

6 сентября 2014 г.

Рассмотрим задачу о течении крови внутри крупных сосудов с гибкими стенками и клапанами. Кровь будем моделировать как вязкую, несжимаемую однородную жидкость, стенки сосуда и лепестки клапанов - как поверхность заданной формы, обладающую определенной жесткостью.

Введение



Система уравнений Навье-Стокса:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u\right) = -\nabla p + \nabla \sigma + f \quad (1)$$

$$\nabla u = 0 \quad (2)$$

где $\sigma = \mu(\nabla u + (\nabla u)^T)$, с начальными условиями

$$u(x, y, z, t_0) = 0, \quad p(x, y, z, t_0) = p_0 \quad (3)$$

Условия на стенках

- на Γ_1, Γ_4 задаются условия прилипания
- на Γ_2, Γ_3 заданы значения давления P_{int}, P_{out}

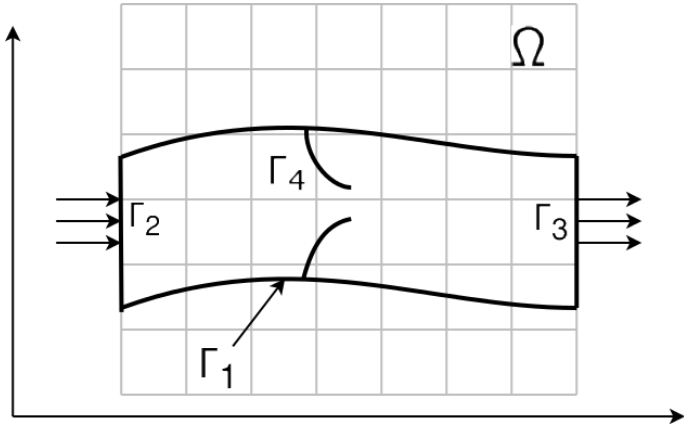
Помимо этого в каждой точке стенки определена сила сопротивления деформации

$$F = F(x, y, z, t)$$

В соответствии с методом погруженной границы, будем рассматривать отдельно задачи вычисления параметров течения жидкости и параметров движения стенок сосуда и клапанов. Для этого введем в расчетной области сетки:

- $\Omega = \Omega(x, y, z)$ - равномерная разнесенная сетка для расчета течения
- $\Gamma = \Gamma(q, r, s, t)$ - соответствует стенкам сосуда и клапанам в лагранжевых координатах

Метод решения



Алгоритм решения

- Рассчитываем параметры течения в $\Omega(x, y, z)$, в частности векторное поле скорости
- С помощью полученной скорости вычислить скорость движения точек границы и ее деформацию
- На основе деформации $\Gamma(q, r, s, t)$ находим силу сопротивления $F(q, r, s, t)$
- С помощью $F(q, r, s, t)$ вычислить $f(x, y, z, t)$ для жидкости
- Перейти к новому временному слою с измененной $f(x, y, z, t)$

Алгоритм решения

- Рассчитываем параметры течения в $\Omega(x, y, z)$, в частности векторное поле скорости
- С помощью полученной скорости вычислить скорость движения точек границы и ее деформацию
- На основе деформации $\Gamma(q, r, s, t)$ находим силу сопротивления $F(q, r, s, t)$
- С помощью $F(q, r, s, t)$ вычислить $f(x, y, z, t)$ для жидкости
- Перейти к новому временному слою с измененной $f(x, y, z, t)$

Алгоритм решения

- Рассчитываем параметры течения в $\Omega(x, y, z)$, в частности векторное поле скорости
- С помощью полученной скорости вычислить скорость движения точек границы и ее деформацию
- На основе деформации $\Gamma(q, r, s, t)$ находим силу сопротивления $F(q, r, s, t)$
- С помощью $F(q, r, s, t)$ вычислить $f(x, y, z, t)$ для жидкости
- Перейти к новому временному слою с измененной $f(x, y, z, t)$

Алгоритм решения

- Рассчитываем параметры течения в $\Omega(x, y, z)$, в частности векторное поле скорости
- С помощью полученной скорости вычислить скорость движения точек границы и ее деформацию
- На основе деформации $\Gamma(q, r, s, t)$ находим силу сопротивления $F(q, r, s, t)$
- С помощью $F(q, r, s, t)$ вычислить $f(x, y, z, t)$ для жидкости
- Перейти к новому временному слою с измененной $f(x, y, z, t)$

Алгоритм решения

- Рассчитываем параметры течения в $\Omega(x, y, z)$, в частности векторное поле скорости
- С помощью полученной скорости вычислить скорость движения точек границы и ее деформацию
- На основе деформации $\Gamma(q, r, s, t)$ находим силу сопротивления $F(q, r, s, t)$
- С помощью $F(q, r, s, t)$ вычислить $f(x, y, z, t)$ для жидкости
- Перейти к новому временному слою с измененной $f(x, y, z, t)$

Схема расщепления

$$\frac{u^* - u^n}{\Delta t} = -(u^n \cdot \nabla)u^n + \frac{1}{\rho}\nabla\sigma + f \quad (4)$$

$$\rho\Delta p^{n+1} - (\nabla p \cdot \nabla p^{n+1}) = \frac{\rho^2 \nabla u^*}{\Delta t} \quad (5)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p^{n+1} \quad (6)$$

где $\nabla\sigma(u^n, \mu) = \mu\Delta u^n + (\nabla\mu \cdot \nabla)u^n + (\nabla\mu \cdot J_{u^n})$

Алгоритм решения

- С помощью схемы стабилизирующей поправки решаем уравнение (4) и получаем промежуточное поле скорости u^*
- Из уравнения (5) методом бисопряженных градиентов определяем поле давления
- Восстанавливаем окончательное поле вектора скорости по явным формулам (6)

Алгоритм решения

- С помощью схемы стабилизирующей поправки решаем уравнение (4) и получаем промежуточное поле скорости u^*
- Из уравнения (5) методом бисопряженных градиентов определяем поле давления
- Восстанавливаем окончательное поле вектора скорости по явным формулам (6)

Алгоритм решения

- С помощью схемы стабилизирующей поправки решаем уравнение (4) и получаем промежуточное поле скорости u^*
- Из уравнения (5) методом бисопряженных градиентов определяем поле давления
- Восстанавливаем окончательное поле вектора скорости по явным формулам (6)

Погруженная граница

Взаимодействие погруженной границы и жидкости:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \int_{\Gamma} u \cdot \delta(x - X) \, dx \, dy \, dz \quad (7)$$

$$f = \int_{\Omega} F \cdot \delta(x - X) \, dq \, dr \, ds \quad (8)$$

и условия прилипания

$$\frac{\partial X}{\partial t}(q, r, s, t) = u(X(q, r, s, t), t) \quad (9)$$

Данный метод разрабатывался с учетом применения в исследовании биологических систем, для которых подвижность и эластичность границ является важным фактором. Он разделяет одну сложную задачу на три более простые - моделирование течения, моделирование состояния границы и их взаимодействие.

Это позволяет применять мощные методы для решения каждой из задач. Помимо этого такой подход позволяет единообразно моделировать различные классы проблем, т.к. погруженная граница может иметь практически любую форму.

- IBAMR (UNC McAllister Heart Institute)
- Пример моделирования аортального клапана
- Расчет параметров хордового протеза для митрального клапана

- Деформация стенок сосуда
- Аналогичный расчет на более мелкой сетке

- Peskin C.S., Numerical Analysis of Blood Flow in the Heart// JCP 25,220-252, (1977)
- Peskin C.S., The immersed boundary method, (1977)
- Mittal R, Iaccarino G, Immersed boundary method// ARFM, 37, 239-261, (2005)
- Bandringa H., Immersed boundary method, Groningen, (2010)
- Kruger T., Introduction to the immersed boundary method, (2011)