

Моделирование динамики жидкости в крупных кровеносных сосудах

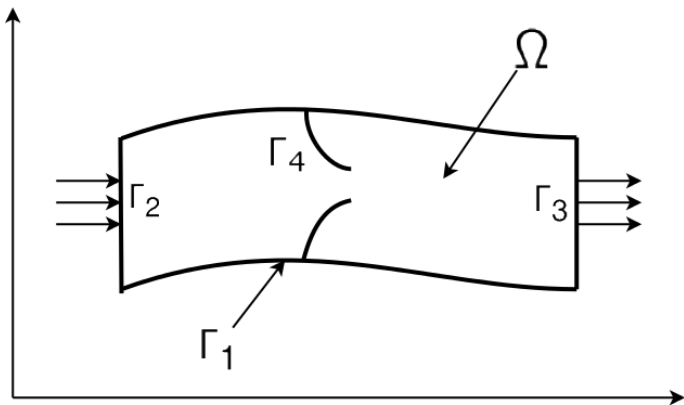
Долгов Д.А.

Кемеровский Государственный Университет

6 сентября 2014 г.

Рассмотрим задачу о течении крови внутри крупных сосудов с гибкими стенками и клапанами. Кровь будем моделировать как вязкую, несжимаемую однородную жидкость, стенки сосуда и лепестки клапанов - как поверхность заданной формы, обладающую определенной жесткостью.

Введение



Система уравнений Навье-Стокса:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u\right) = -\nabla p + \nabla \sigma + f \quad (1)$$

$$\nabla u = 0 \quad (2)$$

где $\sigma = \mu(\nabla u + (\nabla u)^T)$, с начальными условиями

$$u(x, y, z, t_0) = 0, \quad p(x, y, z, t_0) = p_0 \quad (3)$$

Условия на стенках

- на Γ_1, Γ_4 задаются условия прилипания
- на Γ_2, Γ_3 заданы значения давления P_{int}, P_{out}

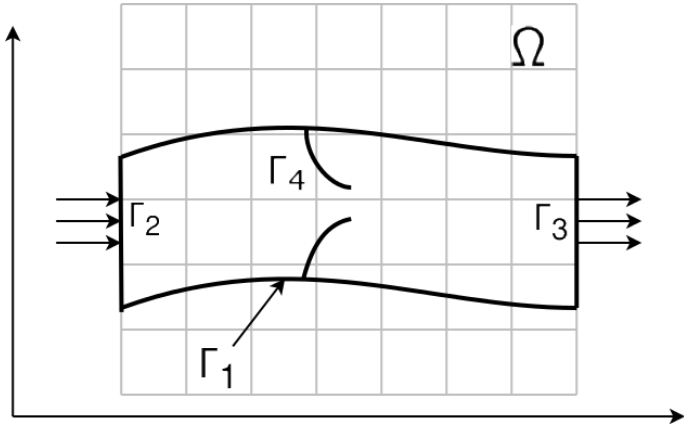
Помимо этого в каждой точке стенки определена сила сопротивления деформации

$$F = F(x, y, z, t)$$

В соответствии с методом погруженной границы, будем рассматривать отдельно задачи вычисления параметров течения жидкости и параметров движения стенок сосуда и клапанов. Для этого введем в расчетной области сетки:

- $\Omega = \Omega(x, y, z)$ - равномерная разнесенная сетка для расчета течения
- $\Gamma = \Gamma(q, r, s, t)$ - соответствует стенкам сосуда и клапанам в лагранжевых координатах

Метод решения



Алгоритм решения

- Рассчитываем параметры течения в $\Omega(x, y, z)$, в частности векторное поле скорости
- С помощью полученной скорости вычислить скорость движения точек границы и ее деформацию
- На основе деформации $\Gamma(q, r, s, t)$ находим силу сопротивления $F(q, r, s, t)$
- С помощью $F(q, r, s, t)$ вычислить $f(x, y, z, t)$ для жидкости
- Перейти к новому временному слою с измененной $f(x, y, z, t)$

Алгоритм решения

- Рассчитываем параметры течения в $\Omega(x, y, z)$, в частности векторное поле скорости
- С помощью полученной скорости вычислить скорость движения точек границы и ее деформацию
- На основе деформации $\Gamma(q, r, s, t)$ находим силу сопротивления $F(q, r, s, t)$
- С помощью $F(q, r, s, t)$ вычислить $f(x, y, z, t)$ для жидкости
- Перейти к новому временному слою с измененной $f(x, y, z, t)$

Алгоритм решения

- Рассчитываем параметры течения в $\Omega(x, y, z)$, в частности векторное поле скорости
- С помощью полученной скорости вычислить скорость движения точек границы и ее деформацию
- На основе деформации $\Gamma(q, r, s, t)$ находим силу сопротивления $F(q, r, s, t)$
- С помощью $F(q, r, s, t)$ вычислить $f(x, y, z, t)$ для жидкости
- Перейти к новому временному слою с измененной $f(x, y, z, t)$

Алгоритм решения

- Рассчитываем параметры течения в $\Omega(x, y, z)$, в частности векторное поле скорости
- С помощью полученной скорости вычислить скорость движения точек границы и ее деформацию
- На основе деформации $\Gamma(q, r, s, t)$ находим силу сопротивления $F(q, r, s, t)$
- С помощью $F(q, r, s, t)$ вычислить $f(x, y, z, t)$ для жидкости
- Перейти к новому временному слою с измененной $f(x, y, z, t)$

Алгоритм решения

- Рассчитываем параметры течения в $\Omega(x, y, z)$, в частности векторное поле скорости
- С помощью полученной скорости вычислить скорость движения точек границы и ее деформацию
- На основе деформации $\Gamma(q, r, s, t)$ находим силу сопротивления $F(q, r, s, t)$
- С помощью $F(q, r, s, t)$ вычислить $f(x, y, z, t)$ для жидкости
- Перейти к новому временному слою с измененной $f(x, y, z, t)$

Схема расщепления

$$\frac{u^* - u^n}{\Delta t} = -(u^n \cdot \nabla)u^n + \frac{1}{\rho}\nabla\sigma + f \quad (4)$$

$$\rho\Delta p^{n+1} - (\nabla p \cdot \nabla p^{n+1}) = \frac{\rho^2 \nabla u^*}{\Delta t} \quad (5)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p^{n+1} \quad (6)$$

где $\nabla\sigma(u^n, \mu) = \mu\Delta u^n + (\nabla\mu \cdot \nabla)u^n + (\nabla\mu \cdot J_{u^n})$

Алгоритм решения

- С помощью схемы стабилизирующей поправки решаем уравнение (4) и получаем промежуточное поле скорости u^*
- Из уравнения (5) методом бисопряженных градиентов определяем поле давления
- Восстанавливаем окончательное поле вектора скорости по явным формулам (6)

Алгоритм решения

- С помощью схемы стабилизирующей поправки решаем уравнение (4) и получаем промежуточное поле скорости u^*
- Из уравнения (5) методом бисопряженных градиентов определяем поле давления
- Восстанавливаем окончательное поле вектора скорости по явным формулам (6)

Алгоритм решения

- С помощью схемы стабилизирующей поправки решаем уравнение (4) и получаем промежуточное поле скорости u^*
- Из уравнения (5) методом бисопряженных градиентов определяем поле давления
- Восстанавливаем окончательное поле вектора скорости по явным формулам (6)

Погруженная граница

Взаимодействие погруженной границы и жидкости:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \int_{\Gamma} u \cdot \delta(x - X) \, dx \, dy \, dz \quad (7)$$

$$f = \int_{\Omega} F \cdot \delta(x - X) \, dq \, dr \, ds \quad (8)$$

и условия прилипания

$$\frac{\partial X}{\partial t}(q, r, s, t) = u(X(q, r, s, t), t) \quad (9)$$

Данный метод разрабатывался с учетом применения в исследовании биологических систем, для которых подвижность и эластичность границ является важным фактором. Он разделяет одну сложную задачу на три более простые - моделирование течения, моделирование состояния границы и их взаимодействие.

Это позволяет применять мощные методы для решения каждой из задач. Помимо этого такой подход позволяет единообразно моделировать различные классы проблем, т.к. погруженная граница может иметь практически любую форму.

Метод погруженной границы пока не реализован ни в одном из крупных CFD пакетов (такая работа начата только в OpenFOAM, но она находится на стадии обсуждения сообществом).

- IBAMR (UNC McAllister Heart Institute)
- Пример моделирования аортального клапана
- Расчет параметров хордового протеза для митрального клапана

- Деформация стенок сосуда
- Аналогичный расчет на более мелкой сетке

- Peskin C.S., Numerical Analysis of Blood Flow in the Heart// JCP 25,220-252, (1977)
- Peskin C.S., The immersed boundary method, (1977)
- Mittal R, Iaccarino G, Immersed boundary method// ARFM, 37, 239-261, (2005)
- Bandringa H., Immersed boundary method, Groningen, (2010)
- Kruger T., Introduction to the immersed boundary method, (2011)