Решение задач к экзамену по алгебре

Задача 1

Докажите, что класс алгебраических расширений отмеченный.

Пусть $F \subset K \subset L$. Если L/F алгебраическое, то и L/K, и K/F алгебраические (сразу следует из определения). В обратную сторону, пусть $\alpha \in L$. Пусть $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ — минимальный многочлен α над K, тогда $F(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \alpha)$ — конечное, а значит α алгебраический над F. Второе условие, очевидно, верно, т. к. если элемент алгебраический над F, он алгебраический и над любым расширением.

Задача 2

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}^*$ и произведение любого поднабора не является квадратом. Докажите, что $[\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n}) : \mathbb{Q}] = 2^n$.

Докажем по индукции, $n = 1$ — очевидно. Пусть $x^2 - a_n$ имеет корень над $\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_{n-1}})$, т. е.$(a + b\sqrt{a_{n-1}})^2 = a_n$, для некоторых $a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_{n-2}})$, т. е. $a^2 + a_{n-1}b^2 + 2ab\sqrt{a_{n-1}} = a_n$, в частности $ab = 0$, если $a = 0$, противоречие, иначе $b^2 = \frac{a_n a_{n-1}}{a_{n-1}^2}$. Противоречие, ведь $\{\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_{n-2}}, \frac{\sqrt{a_n a_{n-1}}}{a_{n-1}}\}$ тоже удовлетворяет условию.

Задача 3

K_1/F и K_2/F — конечные расширения степени m и n соответственно, причём $(m, n) = (1)$. Докажите, что $[K_1K_2 : F] = mn$.

Очевидно из мультипликативности степени расширений.

Задача 4

Вычислите $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}$.

Пусть $\alpha = a + b\sqrt{-3} \in \mathcal{O}_K$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, тогда, в частности, $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) \in \mathbb{Z}$, и $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) \in \mathbb{Z}$, т. е. $2a \in \mathbb{Z}$, и $a^2 + 3b^2 \in \mathbb{Z}$, а значит $2a$ и $2b$ — целые одной четности. Но α — корень многочлена $x^2 - \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)x + \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)$, т. е. условие достаточно.

Задача 5

Приведите пример конечного расширения L/F, т. ч. $\mathrm{Tr}_{L/F} = 0$.

Пусть $F = \mathbb{F}_p(x^p)$, $L = \mathbb{F}_p(x)$. $\mathrm{Tr}_{L/F}(1) = [L : F] = p = 0$. Минимальный многочлен x^k для $p \nmid k$ равен $t^p - x^{pk}$, из совпадения степеней, он равен характеристическому, т. е., в частности, $\mathrm{Tr}_{L/F}(x^k) = 0$ для $k = 0, 1, \ldots, p-1$, но это базис, а значит $\mathrm{Tr}_{L/F} = 0$.

Задача 6

$L = F(\theta)$, где θ — корень неприводимого многочлена $t^3 + at + b$. Чему равен $\mathrm{disc}\{1, \theta, \theta^2\}$?

$\mathrm{Tr}(\theta) = 0$. Характеристический θ^{-1} равен $t^3 + \frac{a}{b}t^2 + \frac{1}{b}$, ведь $b \neq 0$, из неприводимости. Т. е. $\mathrm{Tr}(\theta^{-1}) = -\frac{a}{b}$. $\mathrm{Tr}(\theta^2) = -a\,\mathrm{Tr}(1) - b\,\mathrm{Tr}(\theta^{-1}) = -2a$, аналогично $\mathrm{Tr}(\theta^3) = -3b$, $\mathrm{Tr}(\theta^4) = 2a^2$.

$$\mathrm{disc}\{1, \theta, \theta^2\} = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2a \\ 0 & -2a & -3b \\ -2a & -3b & 2a^2 \end{pmatrix} = -12a^3 - 27b^2 + 8a^3 = -4a^3 - 27b^2$$

Альтернативное доказательство:

$$\det \begin{pmatrix} \mathrm{Tr}(1) & \mathrm{Tr}(\theta) & \mathrm{Tr}(\theta^2) \\ \mathrm{Tr}(\theta) & \mathrm{Tr}(\theta^2) & \mathrm{Tr}(\theta^3) \\ \mathrm{Tr}(\theta^2) & \mathrm{Tr}(\theta^3) & \mathrm{Tr}(\theta^4) \end{pmatrix} = \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \theta & \theta' & \theta'' \\ \theta^2 & \theta'^2 & \theta''^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \theta & \theta^2 \\ 1 & \theta' & \theta'^2 \\ 1 & \theta'' & \theta''^2 \end{pmatrix} \right) =$$

$$` = \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \theta & \theta' & \theta'' \\ \theta^2 & \theta'^2 & \theta''^2 \end{pmatrix} \right)^2$$

Т. е. искомый дискриминант — дискриминант в многочлена в стандартном смысле.

Задача 7

Если K/F — конечное, то следующие условия равносильны:

1) Найдётся α, т. ч. $K = F(\alpha)$.

2) Существует лишь конченое число промежуточных расширений.

Пусть $K = F(\alpha)$, f — минимальный многочлен α над F. Пусть $F \subset L \subset K$ и g — минимальный многочлен α над L, тогда $g \mid f$, причём, из факториальности кольца многочленов, таких g конечное число(g должен быть унитальным), при этом g однозначно определяет L. Действительно, L — минимальное поле, содержащее коэффициенты g, из совпадения степеней расширений и вложенности последнего в L.

В обратную сторону. Считаем F бесконечным, для конечных полей утверждение очевидно из цикличности F^*. Пусть $K = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Достаточно доказать утверждение для $n = 2$. Действительно, для $n \geq 3$ можно рассмотреть $F' = F(\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n)$ и воспользоваться индукцией. $K = F(\alpha, \beta)$. Рассмотрим промежуточные поля вида $F(\alpha + c\beta)$, где $c \in F$. Из условия, для каких-то $c_1, c_2 \in K$ $F(\alpha + c_1\beta) = (\alpha + c_2\beta)$, а значит это расширение содержит α и β, т. е. $F(\alpha + c_1\beta) = K$.

Задача 8

Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{Q}$, $b_i > 0$, $k \geq 2$ и $\sqrt[k]{\frac{b_i}{b_j}} \notin \mathbb{Q}$ для различных i, j. Тогда $\sqrt[k]{b_i}$ линейно независимы.

Пусть $\alpha = \sqrt[k]{\frac{b_i}{b_j}}$, $i \neq j$, $d = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$, r — наименьшее число, т. ч. $\alpha^r \in \mathbb{Q}$. Пусть $x^r = c$. Тогда $\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\alpha)/Q}(\alpha)^r = \mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\alpha)/Q}(c) = c^d$, значит $c = q^{\frac{r}{gcd(r,d)}}$, где $q \in \mathbb{Q}$, т. е. $x^{gcd(r,d)} \in \mathbb{Q}$, а значит $d = r$. $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = s\,\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\alpha) = 0$ т. к. минимальный многочлен α — $x^r - c$. Деля равенство из условия на $\sqrt[k]{b_i}$ и применяя след, получаем $a_i = 0$.

Задача 9

$K = \mathbb{Q}(\xi)$, где ξ — первообразный корень из единицы степени p, где p — простое. Проверьте, что $\{1, \xi, \ldots, \xi^{p-2}\}$ — базис и вычислите дискриминант этого набора.

Многочлен $\Phi(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + 1$ неразложим, по критерию Эйзенштейна. Действительно, $\Phi(x+1) = \frac{(x+1)^p - 1}{x+1-1} = x^{p-1} (\mathrm{mod}\, p)$, при этом $\Phi(x+1) = x^{p-1} + \ldots + p$. Значит $\{1, \xi, \ldots, \xi^{p-2}\}$ — базис. $\mathrm{Tr}(\xi^k) = -1$, при $p \nmid k$; $p - 1$ — иначе. Итого:

$$\mathrm{disc}\{1, \xi, \ldots, \xi^{p-2}\} = \det \begin{pmatrix} p-1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & p-1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 & p-1 & \ldots & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1-p & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & p-1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 & p-1 & \ldots & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1-p & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & -p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -p & 0 & \ldots & p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & -p & p & \ldots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{p-1}{2}} p^{p-2}$$

Альтернативное доказательство:

$$\operatorname{disc}\{1,\xi,\dots,\xi^{p-2}\} = \operatorname{disc}_\Phi = \frac{\operatorname{disc}_{x^p-1}}{\Phi(1)^2} = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}\frac{\operatorname{Res}(x^p-1, px^{p-1})}{p^2} =$$

$$= (-1)^{\frac{p-1}{2}}p^{p-2}(-1)^{p-1} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}p^{p-2}$$

Задача 10

Докажите, что для сепарабельных L/K и K/F норма и след транзитивны, т. е. $\mathrm{N}_{L/F} = \mathrm{N}_{K/F} \circ \mathrm{N}_{L/K}$ и $\mathrm{Tr}_{L/F} = \mathrm{Tr}_{K/F} \circ \mathrm{Tr}_{L/K}$.

Пусть $\{\sigma_i\}$ — различные вложения K над F в алгебраическое замыкание L, продолженные на алгебраическое замыкание, $\{\tau_j\}$ — различные вложения L над K. Тогда любое вложение L над F представляется единственным образом в виде $\sigma_i\tau_j$, т. к. если σ — вложение, найдётся i, т. ч. F неподвижно относительно $\sigma_i^{-1}\sigma$. Значит $\sigma_i^{-1}\sigma = \tau_j$ на L для какого-то j. Отсюда утверждение задачи получается группировкой членов суммы или произведения.

Задача 11

Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n$ — различные простые. Докажите, что $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} + \dots + \sqrt{p_n}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_n})$.

Из одной из предыдущих задач мы знаем, что степень расширения в точности 2^n, вложения меняют на противоположный знак у произвольного подмножества порождающих. Действительно, добавляем корни по одному, на каждом шаге продолжаем вложение, либо меняя знак, либо оставляя. Эти вложения, очевидно различны и на сумме, т. к. порождающие линейно независимы, а значит степень расширения хотя бы 2^n. Отсюда расширения совпадают.

Задача 12

Пусть K — кончечное поле, L — его конечное расширение. Докажите, что: 1) L/K — циклическое расширение Галуа; 2) $\mathrm{N}_{L/K} : L^* \to K^*$ — сюръективный гомоморфизм.

Пусть $K = \mathbb{F}_q$, $L = \mathbb{F}_{q^n}$, L/K — нормальное и сепарабельное, как разбивающее расширение многочлена $x^{q^n} - x$, не имеющего кратных корней (его производная равна -1), утверждается, что $\sigma(x) = x^q$ порождает группу Галуа. Действительно, σ — автоморфизм с периодом n, пусть его порядок равен d, тогда $X^{p^d} - X = 0$ для любого элемента L, следовательно, $d = n$.

Пусть ζ порождает мультипликативную группу L. $\mathrm{N}(\zeta) = \zeta^{1+p+\dots+p^{n-1}} = \zeta^{\frac{p^n-1}{p-1}} \in K$, т. е. порядок образа ζ равен $p-1$. Значит он порождает мультипликативную группу K.

Задача 13

Найдите $\Phi_{p^n} \in \mathbb{Q}[x]$ для простого p.

Φ_{p^n} делит $f(x) = \Phi_p(x^{p^{n-1}})$, но его степень равна $\varphi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$, значит $f = \Phi_{p^n}$.

Задача 14

Докажите, что S_n разрешима тогда и только тогда, когда $n < 5$.

S_n - очевидно, разрешима, при $n < 4$. При $n = 4$ $\{id\} \subset V_4 \subset A_4 \subset S_4$ — искомая цепь. Пусть $n > 4$, тогда $[A_n, A_n] = A_n$. Действительно, $[(mik), (klj)] = (kim)(jlk)(mik)(klj) = (ijk)$, где все индексы различны. Но 3–циклы порождают A_n.

Задача 15

L/F — квадратичное расширение, $\mathrm{char}\, F \neq 2$, $N_{L/F}(\beta) = a^2$, где $a \in F^*$. Докажите, что $\beta = c\alpha^2$ для некоторых $c \in F^*$ и $\alpha \in L^*$.

$\mathrm{char}\, F \neq 0$, а значит расширение сепарабельно. Пусть $\beta \notin F$, $\alpha = \frac{\beta}{a}$. Тогда $\alpha(1 + \sigma\alpha) = (1 + \alpha)$, т. е. $\alpha = \frac{1+\alpha}{1+\sigma\alpha} = \frac{(1+\alpha)^2}{\mathrm{N}(1+\alpha)}$.

Задача 16

F — поле, $\mathrm{char}\, F \neq 2, 3$, f — неприводимый многочлен степени 3. Докажите, что $G = A_3$, если $\mathrm{disc}\, f \in {F^*}^2$, и $G = S_3$, иначе.

Расширение сепарабельно, т. к. $\mathrm{char}\, F \neq 2, 3$, а также нормально, по определению. Будем рассматривать действие группы Галуа на корнях f, т. е. вложение в S_3, ведь автоморфизм однозначано задаётся действием на корнях. Если $\mathrm{disc}\, f \in {F^*}^2$, $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$ неподвижен относительно всех атвоморфизмов, значит автоморфизмы допускают только чётные перестановки корней, при этом $3 \mid |G|$, значит $G = A_3$. Пусть теперь $G = A_3$, тогда G действует на корнях как A_3, т. к. $2 \nmid |G|$, значит элемент $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \in F_f$ неподвижен, значит лежит в F.

Задача 17

Пусть K — поле, $\mathrm{char}\, F \neq 2$, $x, y, a \in K$, $L = K(\sqrt{x + y\sqrt{a}})$ — квадратичное расширение $K(\sqrt{a}) \neq K$. Докажите, что L/K — циклическое тогда и только тогда, когда найдётся $z \in K$, т. ч. $x^2 - ay^2 = az^2$.

Пусть L/K — циклическое расширение Галуа, σ — образующая, $\theta = \sqrt{x + y\sqrt{a}}$. Тогда $\sigma^2|_{K(\sqrt{a})} = id$, значит $\sigma^2(\theta) = -\theta$, при этом $\sigma(\theta^2) = x - y\sqrt{a}$. Пусть $\alpha = \theta\sigma(\theta)$, тогда $\sigma(\alpha) = -\alpha$, в частности $\sigma^2(\alpha) = \alpha$, т.

е. $\alpha \in K(\sqrt{a})$, значит $\alpha = z\sqrt{a}$. Итого $\alpha^2 = x^2 - ay^2 = az^2$. В обратную сторону рассуждение полностью аналогично.

Задача 18

Пусть F/K — расширение Галуа с группой G. H_1, H_2 — подгруппы G. Докажите, что $F^{H_1 \cap H_2} = F^{H_1}F^{H_2}$, $F^{H_1H_2} = F^{H_1} \cap F^{H_2}$.

Пусть $H = Gal(F/K_1K_2)$, тогда, очевидно, $H = H_1 \cap H_2$, при этом $K_1K_2 = F^H$. Пусть теперь $H' = Gal(F/(K_1 \cap K_2))$, тогда $H_1, H_2 \subset H'$, но $K^{H_1H_2} \subset K^{H_1} \cap K^{H_2} = K_1 \cap K_2$, т. е. $H' \subset H_1H_2$, а значит $H' = H_1H_2$, по определению.

Задача 19

K — поле, $\operatorname{char} K = 0$, f — неприводимый степени n, L — его поле разложения, при этом $Gal(L/K) = S_n$. Поймите, как выглядит L^{A_n}.

Рассмотрим действие $G = S_n$ на корнях, т. е. вложение $G \hookrightarrow \operatorname{Perm}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Тогда образ A_n — нечётные перестановки корней. Действительно, при $n \geq 5$, $[S_n, S_n] = A_n$, при $n < 5$, 3-циклы переходят в 3-циклы и порождают A_n. Тогда $L^{A_n} = K(\sqrt{\Delta})$, где Δ — дискриминант f. Действительно, $\sqrt{\Delta}$ неподвижен относительно чётных перестановок корней, при этом $[L^{A_n} : K] = 2$.

Задача 20

Постройте многочлен степени 4 над $\mathbb{Q}$ с группой Галуа S_4.

Рассмотрим многочлен $f(x) = x^4 - x + 1$. Он неприводим, т. к. у него нет корней и $x^4 - x + 1 = (x+1)(x^3 - x^2 + x + 1) \mod 3$, где последний неприводим по модулю 3, т. к. у него нет корней. Рассмотрим кубическую резольвенту f, $g(x) = x^3 - 4x + 1$. $g(x)$ неразложим, т. к. не имеет корней. При этом дискриминант g равен дискриминанту f, значит $\operatorname{disc}_f = 256 - 27 = 229 \neq n^2$. Итого, $12 \mid |G|$ и $G \neq A_4$, но $|G| \neq 12$. Действительно, ведь тогда подргуппа чётных перестановок G имеет порядок 6 и её действие на множестве из 4-х элементов разбивает его на 2 орбиты из 2 элементов, но в этой подгруппе есть элемент порядка 3. Противоречие. Отсюда, $G = S_4$.

Задача 21

Выразите коэффициенты кубической резольвенты через коэффициенты исходного.

$$g(x) = (x - (x_1 + x_2)(x_3 + x_4))(x - (x_1 + x_3)(x_2 + x_4))(x - (x_1 + x_4)(x_2 + x_3)) = x^3 -$$

$$-2\sigma_2 x^2 + (\sigma_{02} + 3\sigma_{21} + 6\sigma_4)x - (\sigma_{111} + 2\sigma_{301} + 2\sigma_{03} + 4\sigma_{22}) = x^3 - 2\sigma_2 x^2 +$$

$$+(\sigma_2^2+\sigma_{21})x-(\sigma_3\sigma_2\sigma_1-\sigma_{301}-\sigma_{03}-4\sigma_{22}) = x^3-2\sigma_2x^2+(\sigma_2^2+\sigma_3\sigma_1-4\sigma_4)x-$$
$$-(\sigma_3\sigma_2\sigma_1-\sigma_4(\sigma_1^2-2\sigma_2)-(\sigma_3^2-2\sigma_4\sigma_2)-4\sigma_2\sigma_2) = x^3-2\sigma_2x^2+(\sigma_2^2+\sigma_3\sigma_1-4\sigma_4)x+$$
$$+\sigma_4\sigma_1^2+\sigma_3^2-\sigma_3\sigma_2\sigma_1$$

Задача 22

Докажите теорему о нормальном базисе для конечных полей.

Минимальный многочлен σ равен x^n-1, т. к. $1, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}$ линейно независимы, как попарно различные характеры. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : K[x] \to \mathrm{End}_K(L)$, т. ч. $\varphi(x) = \sigma$. Ядро φ нетривиально, т. к. $\mathrm{End}_K(L)$ конечномерно над K. Из структурной теоремы,

$$L \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} K[x]/(f_i),$$

где $f_i \mid f_{i+1}$. Тогда f_m — минимальный многочлен, по определению. Но $\dim_K K[x]/(x^n-1) = n$, значит $L \simeq K[x]/(x^n-1)$. Тогда найдётся u, т. ч. $u, \sigma u, \sigma^2 u, \ldots, \sigma^{n-1}u$ — базис L над K.

Задача 23

Поймите, чему изоморфна $k[G]$, если G — конечнопорождённая абелева.

G — конечнопорождённая абелева, из структурной теоремы

$$G \simeq \mathbb{Z}^r \oplus (\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}/q_i\mathbb{Z})$$

Рассмотрим $k[x,y] := k[x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, \ldots, x_r, x_r^{-1}, y_1, y_2, \ldots, y_n]$. Пусть $I = (y_1^{q_1}-1, y_2^{q_2}-1, \ldots, y_n^{q_n}-1)$. Пусть теперь $\varphi : k[x,y] \to G$, т. ч. $p_j(\varphi(x_i)) = \delta_{ij}$, $p_{j+r}(\varphi(y_i)) = \delta_{ij}$, тогда $I \subset \ker\varphi$, значит определено $\psi : k[x,y]/I \to G$. ψ, очевидно, изоморфизм, т. к. переводит разные мономы в разные.

Задача 24

Докажите, что тензорное произведение сохраняет прямую сумму двух модулей.

Пусть π_1 и π_2 — соответствующие проекции, i_1 и i_2 — соответствующие вложения. Тогда $\pi_1 \circ i_1 = id$, $\pi_2 \circ i_2 = id$, $\pi_2 \circ i_1 = 0$, $\pi_1 \circ i_2 = 0$ и $i_1 \circ \pi_1 + i_2 \circ \pi_2 = id$, и в обратную сторону, если есть линейные отображения, удовлетворяющие этим свойствам, то модуль является прямой суммой заданных. Действительно, проверим универсальное свойство. Пусть $f : M \to A$, $g : N \to A$, тогда $h = f \circ \pi_1 + g \circ \pi_2$ делает диаграмму коммутативной. При этом пусть $\tilde{h}$ другое такое отображение. Тогда $h - \tilde{h} = (h-\tilde{h}) \circ (i_1 \circ \pi_1 + i_2 \circ \pi_2) = 0$.

Все эти равенства сохраняются при применении тензорного произведения. Отсюда $(M \oplus N) \otimes P$ — прямая сумма $M \otimes P$ и $N \otimes P$.

Задача 25

Докажите, что для конечномерных векторных пространств V, W над полем K отображение $V^* \otimes_K W \to \mathrm{Hom}(V, W)$, т. ч. $f \otimes w \mapsto (v \mapsto f(v)w)$ корректно определено и является изоморфизмом.

$(f, w) \mapsto (v \mapsto f(v)w)$, очевидно, билинейно, значит определено $\varphi : f \otimes w \mapsto (v \mapsto f(v)w)$. Пусть $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — базис V, $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ — W, тогда $\{v^i \otimes w_j\}_{i,j}$ — базис $V^* \otimes W$. Пусть $u = \sum_{i,j} a_{ij} v^i \otimes w_j \in \ker \varphi$. Тогда $0 = \varphi(u)(v_i) = \sum_j a_{ij} w_j$, по определению двойственного базиса. Тогда все $a_{ij} = 0$. Пусть теперь $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, тогда $f = \varphi(\sum_i e^i \otimes f(e_i))$. Итого, φ — изоморфизм.

Задача 26

Докажите лемму о змее.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle d'} & & \Big\downarrow{\scriptstyle d} & & \Big\downarrow{\scriptstyle d''} & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & N'' & & \end{array}$$

Утверждается, что $\delta : \ker d'' \to \operatorname{coker} d'$, т. ч. $\delta = f^{-1} \circ d \circ g^{-1}$ корректно определён и последовательность

$$\ker d' \longrightarrow \ker d \xrightarrow{g^*} \ker d'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} d' \xrightarrow{f^*} \operatorname{coker} d \longrightarrow \operatorname{coker} d''$$

точна. Действительно, $f^{-1} \circ d \circ g^{-1} m'' = f^{-1} \circ d(m + \ker g) = f^{-1} \circ d(m + \mathrm{Im}\, f) = f^{-1}(n + \mathrm{Im}\, d \circ f) = f^{-1}(n + \mathrm{Im}\, f \circ d') = n' + \mathrm{Im}\, d'$. Здесь $f^{-1}(n)$ определено, т. к. $g(n) = 0$ из коммутативности диаграммы. Точность в $\ker d$ и $\operatorname{coker} d$ очевидна. Докажем точность в $\ker d''$. Вложение $\mathrm{Im}\, g^* \subseteq \ker \delta$ сразу следует из инъективности $f : N' \to N$ и определения δ. Пусть теперь m'' оказался в ядре, тогда $n' = d'x$. Отсюда $d(f(x) - m) = d \circ fx - n = f \circ d'x - n = 0$, но $g(f(x) - m) = m''$, значит $m'' \in g^*$. Проверим точность в $\operatorname{coker} d'$. Вложение $\mathrm{Im}\, \delta \subseteq \ker f^*$ очевидно из определения δ. Пусть теперь $f(n') = d(x)$, тогда $n' - \delta \circ gx \in \mathrm{Im}\, d'$ из инъективности $f : N' \to N$. Итого, получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \ker d' \arrow[r] \arrow[d] & \ker d \arrow[r] \arrow[d] & \ker d'' \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners] & \\
 & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & N'' \arrow[d] & \\
 & \operatorname{coker} d' \arrow[r] & \operatorname{coker} d \arrow[r] & \operatorname{coker} d'' &
\end{tikzcd}$$

Задача 27

Докажите 9 лемму.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & B_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & B_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_3 \arrow[r] \arrow[d] & B_3 \arrow[r] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Из точности 2-ой строки сразу следует, что у нас есть короткая точная последовательность комплексов

$$0 \longrightarrow A_i \longrightarrow B_i \longrightarrow C_i \longrightarrow 0$$

А значит есть длинная точная последовательность

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_1^1 \arrow[r] & H_2^1 \arrow[r] & H_3^1 \arrow[r] & H_1^2 \arrow[r] & H_2^2 \arrow[r] & H_3^2 \arrow[dllll] \\
 & & H_1^3 \arrow[r] & H_2^3 \arrow[r] & H_3^3 \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

$H_2^i = 0$ из точности второй строки. Отсюда, если все $H_1^i = 0$, то и $H_3^i = 0$, и наоборот.