Ленг. Алгебра Конспект Степанова Представления и характеры конечных групп

Теорема (Бёрнсайд)**.** *Группа порядка $p^n q^m$ разрешима.*

Теорема (Машке)**.** *k — поле, G — группа, $\operatorname{char} k \nmid |G|$, V — $k[G]$-модуль, и – подмодуль. Тогда найдётся подмодуль W, т. ч. $V = U \oplus W$.*

Определение. *Неприводимый G-модуль — простой $k[G]$-модуль.*

Определение. *Неразложимый — если $M = M_1 \oplus M_2$, то M_1 или M_2 тривиален.*

Везде далее V — конечномерное векторное пространство над k, а $\operatorname{char} k \nmid |G|$.

Из конечноемерноссти, разлоожение в прямую сумму неприводимых, очевидно существует, хотим доказать единственность.

Теорема (Шур)**.** *Пусть M, N — простые R-модули. Тогда*

1. *Любой гомоморфизм $M \to^{\phi} N$ либо тривиален, либо является изоморфизмом.*
2. *$\operatorname{End}_k(M)$ — тело*.*

Доказательство.

1. Пусть ϕ не изоморфизм. Тогда либо $\ker \phi \neq 0$, либо $\operatorname{Im} \phi \neq N$. В первом случае $\ker \phi = M$, во втором — $\operatorname{Im} \phi = 0$, т. е. $\phi = 0$.
2. Ну действительно, любой ненулевой элемент — изоморфизм, а значит обратим.

□

Вернёмся к доказательству единственности. Пусть $V \simeq M_1^{r_1} \oplus M_2^{r_2} \oplus \ldots \oplus M_k^{r_k}$ и $V \simeq N_1^{s_1} \oplus N_2^{s_2} \oplus \ldots \oplus N_l^{s_l}$, где $M_i \not\simeq M_j$ и $N_i \not\simeq N_j$ при разлчиных i, j.

Пусть $M_i \not\simeq N_j$. Тогда гомоморфизм $M_i^{r_i} \to^{\phi} N_j^{r_j}$ определённый понятным образом, тривиален.

Пусть теперь $M_i \simeq N_j$. Из вышесказанного ϕ, очевидно, инъективен, но так же определено и отображение в обратну сторону, но тогда размернсти $M_i^{r_i}$ и $N_j^{s_j}$ совпадают, в частности, из соображений размерности $r_i = s_j$.

Определение. *Кольцо R называется k-алгеброй. Если R - векторное пространостово над k, причём $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$.*

Из теоремы выше,
$k[G] \simeq L_1^{r_1} \oplus L_2^{r_2} \oplus \ldots \oplus L_n^{r_n}$, L_i — простые и $L_i \not\simeq L_j$, при $i \neq j$.

Предложение. *Пусть L — простой идеал в R. M — простой модуль. Тогда если $L \not\simeq M$, то $LM = 0$.*

Доказательство. для любого m определено отображение $l \mapsto m$. По лемме Шура, все такие отображения тривиальны, т. е. $LM = 0$. □

Пусть $1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_m$, где $e_i \in L_i^{r_i}$. Отсюда сразу же $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$, и $e_i^2 = e_i$. Кроме того, очевидно, $e_i \in Z(k[G])$. Если $a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n = 0$, домножая на e_i получаем $a_i = 0$. Значит $m \leq \dim_k Z(k[G])$.

Теорема. *Пусть M — простой G-модуль. Тогда для какого-то i, $L_i \simeq M$.*

Доказательство. для какого-то i, $L_i M \neq 0$. Отсюда $L_i \simeq M$. □

Для $g \in G$ рассмотрим $K_g = \{hgh^{-1} \mid h \in G\}$. Обозначим $\hat{K}_g = \sum_{\sigma \in K_g} \sigma$.

Теорема. *$\{\hat{K}_g\}_{g \in I}$, где I — множество представителей классов сопряжённости, сосатвляют базис $Z(k[G])$.*

$\hat{K}_g$, очевидно, лежит в центре при любом $g \in G$. С другой стороны, если $x = \sum_\sigma a_\sigma \sigma \in Z(k[G])$, $x = \sum_\sigma a_\sigma \tau\sigma\tau^{-1}$.