Литература:

- Ленг. Алгебра.
- Степанова А. В. Конспект 4-семестрового курса алгебры.
- Заварницин А. В., Ревин Д. О. Представления и характеры конечных групп.

Теорема (Бёрнсайд)**.** *Группа порядка $p^n q^m$ разрешима.*

Теорема (Машке)**.** *k — поле, G — конечная группа, $\operatorname{char} k \nmid |G|$, V — $k[G]$-модуль, U – подмодуль. Тогда найдётся подмодуль W, т. ч. $V = U \oplus W$.*

Определение. *Неприводимый G-модуль — простой $k[G]$-модуль.*

Определение. *Модуль M называется неразложимым, если равенство $M = M_1 \oplus M_2$, означает, что M_1 или M_2 тривиален.*

Везде далее V — конечномерное векторное пространство над k, а $\operatorname{char} k \nmid |G|$.

Из конечномерноссти, разложение в прямую сумму неприводимых, очевидно, существует, хотим доказать единственность.

Лемма (Шур)**.** *Пусть M, N — простые R-модули. Тогда*

1. *Любой ненулевой гомоморфизм $M \xrightarrow{\varphi} N$ является изоморфизмом.*
2. *$\operatorname{End}_k(M)$ — тело(т. е. кольцо с делением).*

Доказательство.

1. Пусть φ не изоморфизм. Тогда $\ker\varphi \neq 0$, или $\operatorname{Im}\varphi \neq N$. В первом случае $\ker\varphi = M$, во втором — $\operatorname{Im}\varphi = 0$, т. е. $\varphi = 0$.
2. Ну действительно, любой ненулевой элемент — изоморфизм, а значит обратим.

□

Вернёмся к доказательству единственности. Пусть $V \simeq M_1^{r_1} \oplus M_2^{r_2} \oplus \ldots \oplus M_k^{r_k}$ и $V \simeq N_1^{s_1} \oplus N_2^{s_2} \oplus \ldots \oplus N_l^{s_l}$, где $M_i \not\simeq M_j$ и $N_i \not\simeq N_j$ при разлчиных i, j.

Пусть $M_i \not\simeq N_j$. Тогда гомоморфизм $M_i^{r_i} \xrightarrow{\varphi} N_j^{r_j}$ определённый понятным образом, нулевой, по лемме Шура.

Пусть теперь $M_i \simeq N_j$. Из вышесказанного φ, очевидно, инъективен, но таким же образом определено и отображение в обратную сторону, но тогда размернсти $M_i^{r_i}$ и $N_j^{s_j}$ совпадают, в частности, из соображений размерности, $r_i = s_j$.

Определение. *Кольцо R называется k-алгеброй. Если R - векторное пространство над k, причём $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$.*

Из теоремы выше, $k[G] \simeq L_1^{r_1} \oplus L_2^{r_2} \oplus \ldots \oplus L_n^{r_n}$, L_i — простые и $L_i \not\simeq L_j$, при $i \neq j$.

Предложение. *Пусть L — простой идеал в R. M — простой модуль. Тогда если $L \not\simeq M$, то $LM = 0$.*

Доказательство. Для любого m определено отображение $l \mapsto lm$. По лемме Шура, все такие отображения нулевые, т. е. $LM = 0$. □

Пусть $1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_m$, где $e_i \in L_i^{r_i}$. Отсюда сразу же $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$, и $e_i^2 = e_i$. Кроме того, очевидно, $e_i \in Z(k[G])$. Если $a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n = 0$, домножая на e_i получаем $a_i = 0$. Значит $m \leq \dim_k Z(k[G])$.

Теорема. *Пусть M — простой G-модуль. Тогда для какого-то i, $L_i \simeq M$.*

Доказательство. Для какого-то i, $L_i M \neq 0$. Отсюда $L_i \simeq M$. □

Для $g \in G$ рассмотрим $K_g = \{hgh^{-1} \mid h \in G\}$. Обозначим $\hat{K}_g = \sum\limits_{\sigma \in K_g} \sigma$.

Теорема. *$\{\hat{K}_g\}_{g \in I}$, где I — множество представителей классов сопряжённости, составляют базис $Z(k[G])$.*

$\hat{K}_g$, очевидно, лежит в центре при любом $g \in G$. С другой стороны, если $x = \sum\limits_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma \in Z(k[G])$, $x = \sum\limits_{\sigma \in G} a_\sigma \tau \sigma \tau^{-1}$, для любого $\tau \in G$, т. е. $a_{\tau \sigma \tau^{-1}} = a_\sigma$. Завершить доказательство можно индукцией по числу ненулевых a_σ.