

Table des matières

3.5	Définition	14
3.6	Méthodologie	14
3.7	Résultats	14
3.8	Conclusion	15
4	Analyse de la Fonction de Répartition et de Densité de l'Impact de Défault	16
4.1	Introduction	16
4.2	Méthodologie	16
4.3	Fonction de Répartition de l'Impact de Défault	16
4.4	Fonction de Densité de l'Impact de Défault	16
4.5	Analyse Conditionnelle en cas d'Effondrement Total	16
4.6	Résultats et Discussion	17
4.7	Conclusion	17
5	Value-at-Risk et Conditional Value-at-Risk	18
5.1	Introduction	18
5.2	Définitions et Principes	18
5.2.1	Value-at-Risk	18
5.2.2	Conditional Value-at-Risk	18
5.3	Méthodologie de Calcul	18
5.4	Estimation du VaR et du CVaR	18
5.5	Analyse et Interprétation	19
5.6	Conclusion	19
6	Contagion Dynamique	20
6.1	Introduction	20
6.2	Modélisation de la Contagion Dynamique	20
6.3	Intégration du Risque de Contagion Dynamique	20
6.4	Implications pour la Gestion du Risque Systémique	20
6.5	Value-at-Risk et Conditional Value-at-Risk	21
6.5.1	Estimation du VaR et du CVaR avec contagion dynamique	21
6.5.2	Analyse et Interprétation avec contagion dynamique	21
6.6	Conclusion	22
6.7	Conclusion	23
7	Étude d'Insolvabilité et Influence de la Taille du Réseau	24
7.1	Introduction	24
7.2	Estimation des Cascades d'Insolvabilité	24
7.3	Méthodologie	24
7.4	Identification des Liaisons de Contrepartie Dangereuses	24
7.5	Influence de la Taille du Réseau	25
7.6	Conclusion	25
8	Étude des Réseaux Financiers	26
8.1	Introduction	26
8.2	Calcul des Degrés et Probabilités	26
8.3	Objectifs	26
8.4	Méthodologie	26
8.5	Résultats :	27
8.5.1	Estimation des paramètres de la loi de puissance :	27
8.5.2	Analyse de la Distribution des Degrés	27

1 Introduction

Dans le sillage de la crise financière de 2008, l'importance cruciale de l'analyse des risques dans le secteur financier a été mise en lumière. Auparavant, les risques étaient souvent considérés comme des éléments périphériques, traités comme des composants secondaires dans les stratégies de gestion et d'investissement. Cependant, la faillite de grandes institutions bancaires et l'impact systémique qui en a résulté ont changé la donne. Les analystes de risque sont devenus les gardiens essentiels de la stabilité financière, armés de modèles mathématiques et de techniques statistiques avancées pour prévoir et atténuer les répercussions des chocs économiques.

L'analyste de risque d'aujourd'hui ne se contente pas d'évaluer la probabilité d'événements défavorables; il explore la structure même des réseaux financiers, cherchant à comprendre comment les interconnexions entre les institutions peuvent conduire à des effets domino dévastateurs. Le travail implique une modélisation sophistiquée de la contagion dans le réseau financier, l'utilisation de simulations pour évaluer les impacts des défauts en cascade et l'élaboration de stratégies pour renforcer la résilience des systèmes économiques globaux.

Dans ce contexte, notre projet vise à développer une compréhension complète du risque systémique, à partir de la modélisation du bilan des banques jusqu'à l'étude des réseaux financiers interdépendants. À travers des simulations numériques et des analyses théoriques, nous évaluerons comment les différents niveaux de corrélation entre les actifs influencent la stabilité financière globale. Nous étudierons également l'efficacité des diverses réglementations mises en place pour limiter les risques systémiques et proposerons des recommandations basées sur nos résultats.

Le rapport qui suit est un voyage au cœur de l'analyse du risque systémique, un domaine où la finance et les mathématiques se rencontrent pour forger les boucliers défendant notre économie contre les crises futures.

2 Modélisation du Bilan d'une Banque et Réseaux Financiers

2.1 Fondements de la Modélisation Financière

Notre projet se penche sur la complexité inhérente aux réseaux financiers, modélisés à travers un ensemble de N institutions interconnectées, symbolisées par des nœuds et des relations pondérées. Cette structure est mathématiquement représentée par une matrice d'exposition, qui quantifie la valeur de l'exposition de l'institution financière i vis-à-vis de l'institution j .

Le Bilan Bancaire : Chaque institution détient un capital propre $K_i(t)$ à l'instant t , constituant un matelas financier destiné à absorber les pertes éventuelles. Ce capital est sujet à des fluctuations dues à l'activité du marché, modélisées par l'équation stochastique suivante :

$$dK_t = \lambda(\mu - K_t)dt + \sigma dW_t,$$

où λ , μ , et σ incarnent respectivement le taux de retour à l'équilibre, la moyenne à long terme du capital, et la volatilité des fluctuations du capital. Le terme dW_t représente un mouvement Brownien, illustrant les incertitudes du marché.

2.2 Solvabilité et Insolvabilité

À l'approche de l'horizon temporel T , un bilan de solvabilité est établi pour chaque institution. Une banque est déclarée insolvable si son capital $K_i(T)$ ne satisfait pas le seuil critique θ , entraînant sa liquidation et induisant des pertes pour ses créanciers, définies par un taux de récupération α .

2.3 Cascade de Défauts et Impact de Défaut

La contagion financière, au cœur de notre étude, est déclenchée par le défaut initial d'une ou plusieurs banques. Ce phénomène entraîne un effet domino, provoquant une succession de défaillances. L'impact global de ces défauts est exprimé par la formule :

$$\text{Impact} = f(\text{ensemble initial}, \text{ensemble final}),$$

où ensemble initial représente l'ensemble initial des institutions défaillantes, et ensemble final, l'ensemble final des banques en défaut après la cascade. Cette équation mesure les pertes totales engendrées par la propagation des défauts dans le réseau.

3 Analyse de la Contagion Financière

3.1 Fonction DOMINO

La fonction DOMINO joue un rôle central dans l'analyse de la contagion financière au sein d'un réseau de banques. Elle simule le processus par lequel les défauts de paiement se propagent à travers le réseau, en prenant en compte les expositions mutuelles entre les institutions financières. À chaque étape, la fonction évalue les capitaux restants des banques après avoir absorbé les pertes dues aux défauts des contreparties. Elle identifie alors les banques qui deviennent insolubles (c'est-à-dire dont le capital tombe en dessous d'un seuil critique) et calcule les impacts financiers de ces défauts sur les banques solvables restantes. Ce processus se répète jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de nouveaux défauts, permettant d'observer comment une perturbation initiale peut entraîner une cascade de faillites à travers le réseau.

3.2 Mécanisme de Simulation

La fonction DOMINO est essentielle à notre analyse des risques systémiques et de la contagion dans les réseaux financiers. Elle nous permet de simuler, étape par étape, comment les défauts se propagent à travers le réseau de contreparties financières. En identifiant les banques solvables et insolubles à chaque étape, et en calculant l'impact financier total des défaillances, cette fonction nous donne une vue dynamique et évolutive de la santé financière du réseau. Cela nous aide à comprendre l'ampleur potentielle des crises financières et à identifier les points de défaillance critiques qui peuvent accélérer la propagation des défauts.

3.3 Lien entre Mathématiques Financières et Contagion

Le rôle de la fonction DOMINO et de la simulation qu'elle permet établit un lien direct entre les concepts des mathématiques financières et la réalité des crises financières systémiques. Cette approche modélise de façon précise comment des chocs initiaux, qu'ils soient dus à des perturbations économiques ou à des faillites spécifiques, peuvent se propager au sein d'un réseau d'institutions financières interconnectées. Elle illustre l'application des mathématiques financières à l'analyse des risques systémiques, démontrant comment des modèles mathématiques peuvent être utilisés pour prévoir la propagation des risques et identifier les vulnérabilités au sein des réseaux financiers. Ainsi, cette modélisation sert de pont entre la théorie financière et les pratiques de gestion des risques, soulignant l'importance des outils mathématiques dans la prévention et la gestion des crises financières systémiques.

3.4 Impact de Défaut

L'impact de défaut, calculé à travers la simulation de la fonction DOMINO et la fonction `calculer_impact_defaut`, revêt une importance capitale dans l'analyse du risque systémique au sein des réseaux financiers. Cette mesure quantifie les conséquences financières des défauts en cascade au sein du réseau bancaire, en tenant compte à la fois des pertes directes subies par les créanciers des banques défaillantes et de l'effet domino entraîné par ces pertes sur l'ensemble du système.

3.4.1 Rôle et Importance

- **Évaluation Quantitative du Risque Systémique :** L'impact de défaut fournit une évaluation quantitative des répercussions potentielles d'une crise financière sur le système bancaire dans son ensemble. Il permet d'estimer le volume de capitaux qui pourrait être érodé en cas de contagion, offrant ainsi une mesure concrète du risque systémique.
- **Identification des Points de Vulnérabilité :** En calculant l'impact de défaut, on peut identifier les institutions financières dont les défaillances auraient les conséquences les plus graves sur le réseau. Cela aide à cibler les points de vulnérabilité au sein du système et à prioriser les interventions pour renforcer la stabilité financière.
- **Mesure de l'Effet de Contagion :** L'impact de défaut mesure non seulement les pertes initiales dues aux défauts de paiement mais aussi l'amplification de ces pertes à travers le réseau de contreparties. Cela permet d'appréhender l'effet de contagion propre aux crises financières systémiques, où les défaillances se propagent et s'amplifient au sein du réseau.
- **Outil de Simulation pour la Prise de Décision :** En permettant aux régulateurs et aux gestionnaires de risque de simuler différents scénarios de crise, le calcul de l'impact de défaut devient un outil précieux pour la prise de décision en matière de politiques de régulation financière et de stratégies de mitigation du risque.

Étude théorique de l'évolution des capitaux

On modélise l'évolution d'un capital par l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dX_t = \lambda(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t, \quad (1)$$

où l'on pose $Y_t = e^{\lambda t}X_t$.

Résoudre cette équation avec l'aide de Lemme d'Ito.

Pour cela on introduit un processus stochastique $Y_t = e^{\lambda t}X_t$ et on calcule dY_t . Puis on intègre $d(e^{\lambda t}X_t)$ sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$.

Le développement est le suivant:

$$\begin{aligned} dY_t &= \lambda e^{\lambda t}X_t dt + e^{\lambda t}dX_t \\ &= \lambda e^{\lambda t}X_t dt + e^{\lambda t}(\lambda(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t) \\ &= \mu\lambda e^{\lambda t}dt + \sigma e^{\lambda t}dW_t. \end{aligned}$$

En intégrant sur l'intervalle donné, on obtient:

$$Y_{t_{k+1}} - Y_{t_k} = \mu\lambda(e^{\lambda t_{k+1}} - e^{\lambda t_k}) + \sigma \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\lambda s} dW_s. \quad (2)$$

Ce qui donne la formule pour $X_{t_{k+1}}$:

$$X_{t_{k+1}} = e^{-\lambda\Delta t}X_{t_k} + \mu(1 - e^{-\lambda\Delta t}) + \sigma \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\lambda(s-t_{k+1})} dW_s. \quad (3)$$

Calcul de l'espérance conditionnelle

On souhaite calculer l'espérance conditionnelle de $X_{t_{k+1}}$ sachant X_{t_k} , notée $E[X_{t_{k+1}}|X_{t_k}]$. En utilisant la définition du processus stochastique, nous obtenons :

$$\begin{aligned} E[X_{t_{k+1}}|X_{t_k}] &= E \left[e^{-\lambda\Delta t}X_{t_k} + \mu(1 - e^{-\lambda\Delta t}) + \sigma \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\lambda(s-\Delta t)} dW_s \middle| X_{t_k} \right] \\ &= e^{-\lambda\Delta t}X_{t_k} \cdot E[1|X_{t_k}] + \mu(1 - e^{-\lambda\Delta t}) \cdot E[1|X_{t_k}] + E \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma e^{\lambda(s-\Delta t)} dW_s \middle| X_{t_k} \right] \\ &= e^{-\lambda\Delta t}X_{t_k} \cdot 1 + \mu(1 - e^{-\lambda\Delta t}) \cdot 1 + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma e^{\lambda(s-\Delta t)} \cdot E[dW_s|X_{t_k}] \\ &= e^{-\lambda\Delta t}X_{t_k} + \mu(1 - e^{-\lambda\Delta t}), \end{aligned}$$

car l'espérance de l'intégrale du mouvement brownien est zéro étant donné que W_s est une martingale et l'espérance de dW_s est zéro. De plus, étant donné que X_t est un processus de Markov, pour tout $t \in [t_k, t_{k+1}]$, nous n'avons pas d'informations supplémentaires sur X_t que celles contenues dans X_{t_k} . D'où :

$$E[X_{t_{k+1}} | X_{t_k}] = e^{-\lambda \Delta t} X_{t_k} + \mu(1 - e^{-\lambda \Delta t}). \quad (4)$$

Calcul de la variance conditionnelle

Pour calculer la variance conditionnelle $Var[X_{t_{k+1}} | X_{t_k}]$, nous utilisons la définition de la covariance conditionnelle :

$$\begin{aligned} Var(X_{t_{k+1}} | X_{t_k}) &= Cov((X_{t_{k+1}} - E[X_{t_{k+1}} | X_{t_k}]) | X_{t_k}), \\ &= E[(X_{t_{k+1}} - E[X_{t_{k+1}} | X_{t_k}])^2 | X_{t_k}], \\ &= E\left[\left(\sigma \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\lambda(s-\Delta t)} dW_s\right)^2 | X_{t_k}\right], \\ &= \sigma^2 e^{-2\lambda \Delta t} \cdot E\left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{2\lambda s} dW_s\right)^2 | X_{t_k}\right], \\ &= \sigma^2 e^{-2\lambda \Delta t} \cdot \left[e^{2\lambda t} \Big|_{t_k}^{t_{k+1}} - \frac{1}{2\lambda}\right], \\ &= \sigma^2 e^{-2\lambda \Delta t} \cdot \left[\frac{e^{2\lambda \Delta t} - 1}{2\lambda}\right]. \end{aligned}$$

D'où, nous obtenons la variance conditionnelle :

$$Var(X_{t_{k+1}} | X_{t_k}) = \frac{\sigma^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda \Delta t}). \quad (5)$$

Étudier le sens de chaque paramètre de l'équation: λ, μ, σ .

- λ : Taux de retour à la moyenne.
- μ : Moyenne à long terme.
- σ : Volatilité du processus.

Étude de la Cascade à l’Aide de Données Simulées par Monte Carlo

Cette partie se consacre à l’analyse de la propagation des défaillances au sein d’un réseau financier en utilisant la simulation Monte Carlo. Nous explorons comment différents scénarios affectent la solvabilité des institutions financières et déclenchent une cascade de défauts.

Paramétrisation de la Simulation

Les paramètres initiaux pour la simulation sont définis comme suit :

Les paramètres utilisés pour le reste du travail sont les suivants :

- Moyenne du capital initial (μ) : 15
- Volatilité (σ) : 8
- Taux de retour à la moyenne (λ) : 20
- Seuil de solvabilité ($C(i)$) : 10 pour chaque banque $i = 1$ à 5

La matrice des expositions entre les banques est donnée par :

$$\text{expositions} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Méthodologie de Simulation

1. Simulation de l’Évolution des Capitaux

Sur une période de 12 mois (avec $\Delta t = T/12$), nous simulons l’évolution des capitaux pour chaque scénario prédéfini. À l’issue de chaque simulation, le vecteur final des capitaux ($K(0)$) est récupéré et analysé à l’aide de la fonction DOMINO pour évaluer l’impact des défaillances et identifier les banques solvables et insolubles.

2. Estimation des Probabilités d’Insolvabilité

Pour chaque simulation, nous comptabilisons les scénarios où le nombre de banques défaillantes varie de 1 à 5. Cette approche quantitative permet d’estimer les probabilités d’insolvabilité dans le réseau financier.

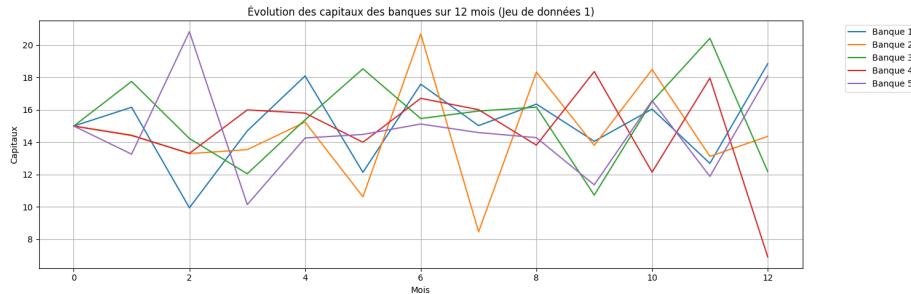


Figure 1: simulation de capitaux dans le cas dépendant

Résultats et Analyses

Simulation et Application de la Fonction DOMINO

Les simulations révèlent des variations significatives dans le nombre de banques ruinées et solvables selon les différents jeux de données.

Visualisation des Résultats :

La visualisation graphique de l'évolution des capitaux fournit des insights sur la dynamique des risques et la propagation des défaillances au fil du temps.on voyer plutot que les capitaux converger bien vers .

Évolution Dépendante de N Capitaux et Impact de la Corrélation

Introduction

Cette section explore l'évolution du capital de plusieurs banques en présence d'une corrélation positive entre leurs mouvements browniens. Cette hypothèse reflète un marché où les fortunes des institutions financières sont interdépendantes, augmentant ainsi la complexité de la gestion des risques.

Construction de la Matrice de Covariance et Décomposition de Cholesky

Nous introduisons les mouvements browniens indépendants des capitaux des différentes banques, notés $B(t) = (B_1(t), \dots, B_N(t))$. Pour modéliser la corrélation entre ces capitaux, nous utilisons une matrice de covariance Cov, donnée par :

$$\text{Cov} = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

où $\rho \in [0, 1]$ est le coefficient de corrélation entre les mouvements des capitaux des différentes banques.

Pour simuler les mouvements browniens corrélés, $W(t)$, nous appliquons la décomposition de Cholesky à la matrice de covariance Cov. Cette décomposition factorise Cov en le produit de deux matrices triangulaires :

$$\text{Cov} = MM^\top,$$

où M est une matrice triangulaire inférieure. Les mouvements browniens corrélés, $W(t)$, sont alors générés par les combinaisons linéaires des $B(t)$:

$$W_i(t) = \sum_{j=1}^N M_{ij} B_j(t).$$

L'impact de la corrélation est significatif, car elle influence les simulations de risques et les estimations de stabilité financière des banques.

Méthodologie de Simulation

1. Mouvements Browniens Corrélés

Les mouvements browniens corrélés $W(t)$ sont obtenus comme combinaisons linéaires de mouvements browniens indépendants, où M est la matrice obtenue par la décomposition de Cholesky de la matrice de covariance Σ .

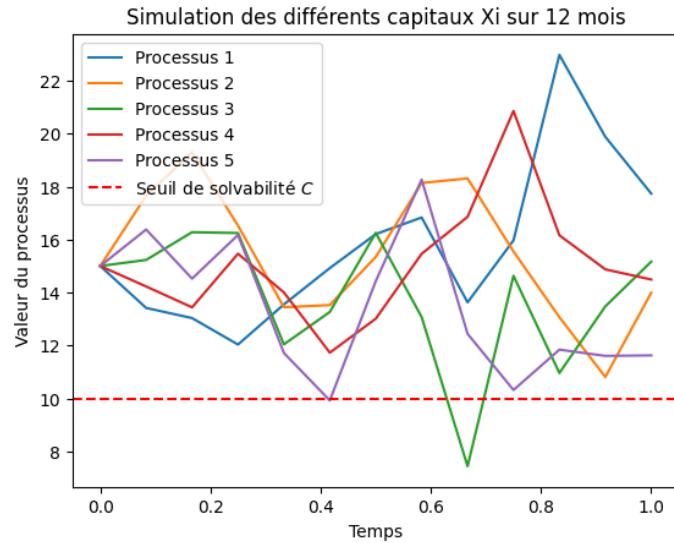


Figure 2: simulation de capitaux dans le cas indépendant

Analyse de l'Impact de la Corrélation

L'introduction de la corrélation entre les mouvements des capitaux transforme radicalement le paysage du risque. En simulant ces dynamiques, nous identifions comment la corrélation influence la probabilité et l'ampleur des cascades de défauts dans le réseau financier.

Résultats et Observations

Les simulations Monte Carlo révèlent que la corrélation positive augmente le risque systémique, amplifiant la probabilité que les défaillances se propagent à travers le réseau. La fonction DOMINO permet d'analyser ces résultats en détail, offrant des insights précieux sur les banques solvables et celles en défaut sous différentes conditions de corrélation.

[utf8]inputenc graphicx

Définition de la Loi Beta

Objectifs

- Simulation de la Variable Aléatoire Beta : Simuler une variable aléatoire Beta avec les paramètres $(\alpha, \beta) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
- Détermination des Paramètres : Calculer les paramètres pour obtenir une espérance de 5% et un écart-type d'environ 20%.
- Visualisation de la Densité Empirique : Tracer la fonction de densité empirique pour illustrer les distributions obtenues dans chaque cas.

Méthodologie

1. Simulation avec $(\alpha, \beta) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Cette simulation vise à générer une série de valeurs suivant une loi Beta caractérisée par une forte variabilité et une concentration des probabilités aux extrémités de l'intervalle $[0, 1]$.

2. Ajustement des Paramètres pour une Moyenne de 5% et un Écart-type de 20%

Pour satisfaire ces contraintes, les paramètres α et β sont ajustés en résolvant les équations relatives à l'espérance et à la variance d'une loi Beta.

3. Visualisation des Distributions

Les densités empiriques des distributions simulées sont tracées pour visualiser et comparer les formes des distributions obtenues pour les différents ensembles de paramètres.

Résultats et Analyse

- **Simulation Initiale** : La distribution Beta avec $(\alpha, \beta) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ montre une concentration élevée des valeurs près des limites de l'intervalle, illustrant la variabilité des taux de récupération.
- **Ajustement des Paramètres** : Les paramètres α et β calculés pour obtenir les caractéristiques souhaitées de la distribution (espérance de 5% et écart-type de 20%) sont présentés, mettant en évidence la flexibilité de la loi Beta pour modéliser différentes formes de distributions.
- **Comparaison des Distributions** : Les graphiques de densité empirique révèlent les différences entre la distribution initiale et celle ajustée, offrant une compréhension visuelle des impacts des paramètres α et β sur la forme de la distribution.

Conclusion

La loi Beta offre un cadre puissant pour simuler des distributions avec des propriétés spécifiques, essentielles pour la modélisation des risques dans le secteur financier. Cette étude démontre l'importance de la sélection des paramètres dans la fidélité de la simulation des distributions réelles et met en évidence l'utilité de ces simulations dans l'analyse du risque de crédit.

L'Indice du Risque Systémique

3.5 Définition

L'indice du risque systémique est définie de la façon suivante :

$$I_S = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} I(D_0^T(i))$$

L'indice de risque systémique est une mesure utilisée pour évaluer le risque que représente une institution financière pour l'ensemble du système financier. Il prend en compte la probabilité que cette institution fasse défaut, ainsi que l'impact potentiel de ce défaut sur les autres institutions financières et sur l'économie dans son ensemble.

L'indice de risque systémique est utilisé par les régulateurs financiers pour surveiller les institutions financières et pour prendre des mesures préventives afin de réduire le risque systémique. Il est également utilisé par les investisseurs pour évaluer le risque de leurs investissements dans des institutions financières et pour prendre des décisions d'investissement éclairées.

3.6 Méthodologie

On simule ainsi plusieurs scénarios :

- Modélisation de la dynamique des capitaux via un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, prenant en compte des paramètres tels que la moyenne du capital initial (μ), la volatilité (σ), et le taux de retour à la moyenne (λ).
- Simulation des mouvements browniens dépendants pour générer les trajectoires des capitaux des banques.
- Application de la fonction DOMINO pour simuler la cascade de défauts au sein du réseau à la maturité T, en fonction des expositions mutuelles entre banques et du seuil de solvabilité.
- Calcul de l'impact de défaut et de l'IRS par la méthode Monte-Carlo et la loi faible des grands nombres qui nous donne ainsi une bonne estimation du risque.

3.7 Résultats

Les simulations montrent une variabilité significative de l'IRS en fonction des paramètres initiaux et des scénarios de marché considérés. En ajustant les paramètres tels que la volatilité des capitaux et les taux de récupération, nous pouvons observer l'effet sur la probabilité et l'ampleur des cascades de défauts. Nous effectuons une simulation via python qui permet d'observer l'indice du

risque systémique reliée à la matrice de contrepartie définie précédemment dans le cas général et dans le cas où toutes les banques font défaut :

```
[utf8]inputenc graphicx
```

```
>>> (executing file "Calcul_IRS.py")
L'indice du risque systémique vaut : IRS = 2.082722936444632
L'indice du risque systémique tel que tout le système s'effondre vaut : IRS = 0.38172446803772964
```

3.8 Conclusion

Le calcul de l'Indice du Risque Systémique via les simulations Monte Carlo offre une compréhension approfondie de la dynamique des crises financières et de la résilience du système bancaire. Cette analyse permet d'identifier les points de vulnérabilité au sein du réseau financier et de proposer des stratégies de mitigation des risques. Les résultats mettent en évidence l'importance de la régulation financière et de la gestion prudente des expositions entre institutions pour prévenir les crises systémiques.

4 Analyse de la Fonction de Répartition et de Densité de l'Impact de Défaut

4.1 Introduction

Dans cette section, nous explorons la distribution de l'impact de défaut au sein d'un réseau d'institutions financières, considéré comme une variable aléatoire. Cette analyse est cruciale pour comprendre la probabilité et la gravité des pertes potentielles en cas de défaillance systémique. Les fonctions de répartition et de densité nous permettent de quantifier ces risques et de visualiser la distribution des impacts de défaut.

4.2 Méthodologie

Les simulations Monte Carlo sont employées pour générer des scénarios de défaut au sein du réseau financier. À travers ces simulations, nous calculons l'impact de défaut basé sur les paramètres suivants :

- Moyenne du capital initial (μ), volatilité (σ), et taux de retour à la moyenne (λ).
- Matrice d'expositions entre les institutions financières.
- Seuil de solvabilité et taux de récupération en cas de défaut.

Nous distinguons deux analyses principales : l'une pour tous les scénarios de défaut possibles et l'autre spécifiquement pour les cas où le réseau financier s'effondre entièrement.

4.3 Fonction de Répartition de l'Impact de Défaut

La fonction de répartition indique la probabilité cumulative que l'impact de défaut soit inférieur ou égal à un certain niveau. Cette fonction est essentielle pour évaluer le risque global au sein du réseau financier.

4.4 Fonction de Densité de l'Impact de Défaut

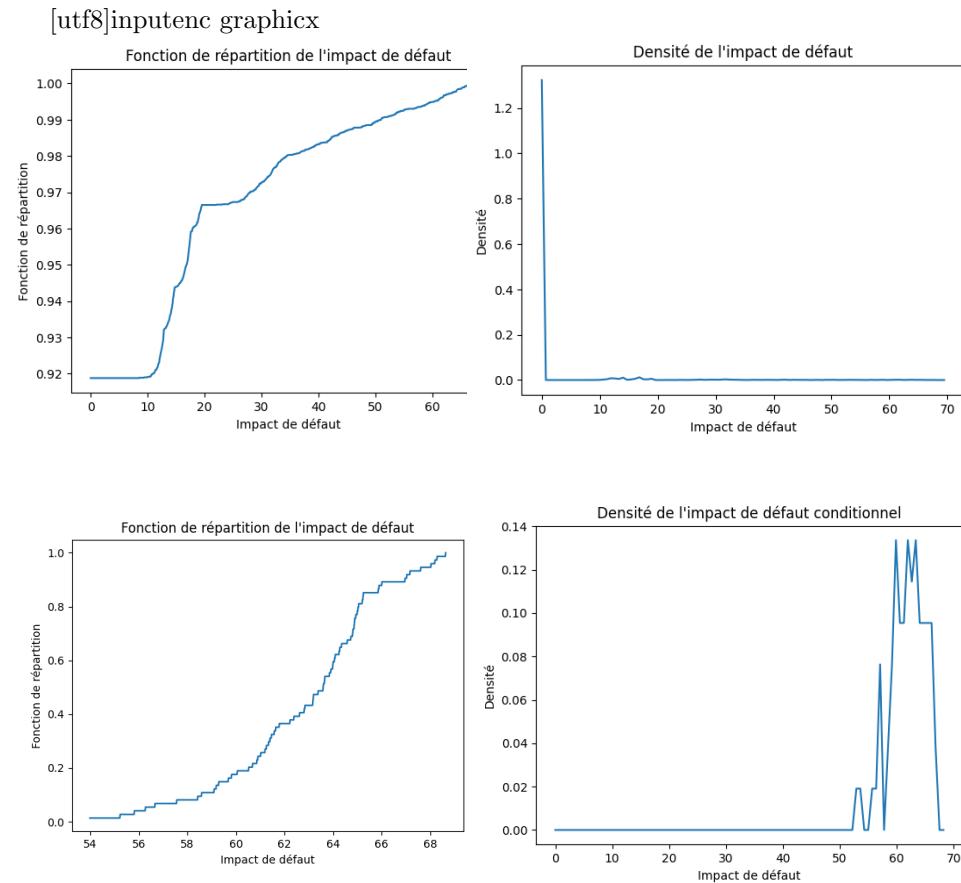
La fonction de densité révèle la probabilité relative de différents niveaux d'impact de défaut. Elle fournit une vue détaillée de la distribution des pertes potentielles, permettant aux institutions de mieux préparer leurs stratégies de gestion du risque.

4.5 Analyse Conditionnelle en cas d'Effondrement Total

En se concentrant sur les scénarios où le réseau financier s'effondre totalement, nous obtenons une perspective sur les impacts de défaut les plus extrêmes. Cette analyse conditionnelle est vitale pour comprendre la vulnérabilité du système financier face à des crises majeures.

4.6 Résultats et Discussion

Les résultats des simulations montrent une large distribution des impacts de défaut, reflétant une variété de scénarios de risque au sein du réseau financier. L'analyse conditionnelle souligne l'importance d'une gestion efficace du risque et de mesures préventives pour mitiger les conséquences d'un effondrement systémique.



4.7 Conclusion

Cette analyse de la fonction de répartition et de densité de l'impact de défaut fournit des insights précieux sur la nature et l'étendue des risques financiers. La compréhension de ces distributions est essentielle pour l'élaboration de politiques de gestion du risque et de stratégies de résilience financière.

5 Value-at-Risk et Conditional Value-at-Risk

5.1 Introduction

Le Value-at-Risk (VaR) est une mesure statistique réglementaire essentielle utilisée pour évaluer le risque de perte d'un portefeuille d'investissements. Le VaR est défini comme le seuil de perte maximum prévu sur un horizon donné, sous un niveau de confiance spécifié. En complément, le Conditional Value-at-Risk (CVaR) offre une mesure du risque qui capture la taille moyenne des pertes qui dépassent le VaR, fournissant ainsi une vue plus complète du risque en queue de distribution.

5.2 Définitions et Principes

5.2.1 Value-at-Risk

Pour un niveau de confiance $\alpha \in (0, 1)$, le VaR est calculé à partir de la fonction de répartition des pertes potentielles du portefeuille. Formellement, le VaR d'ordre α est défini comme le quantile d'ordre α de cette distribution, soit:

$$x_\alpha = \inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\},$$

où F_X est la fonction de répartition des pertes du portefeuille.

5.2.2 Conditional Value-at-Risk

Le CVaR, également connu sous le nom de Expected Shortfall, est la moyenne des pertes qui excèdent le VaR. Il fournit donc une estimation du risque en cas de pertes extrêmes, offrant ainsi une mesure complémentaire au VaR.

5.3 Méthodologie de Calcul

La méthode de simulation, souvent employée lorsque la distribution des pertes ne peut être déterminée analytiquement, implique les étapes suivantes:

1. Simulation d'un échantillon représentatif des pertes du portefeuille, notées X_1, X_2, \dots, X_n , où chaque X_i est une réalisation indépendante de la variable aléatoire X .
2. Ordonnancement de cet échantillon pour obtenir $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$.
3. Détermination du VaR comme $X_{[n\alpha]}$, où $[n\alpha]$ désigne la partie entière de $n\alpha$.

5.4 Estimation du VaR et du CVaR

L'estimation du VaR à différents seuils de confiance (par exemple, 99.9% et 99.99%) se fait par identification du k -ième élément de l'échantillon ordonné tel que:

$$\text{VaR} = X_{(k)},$$

où $k = \lceil n\alpha \rceil$, et $\lceil \cdot \rceil$ dénote la partie entière supérieure.

Le CVaR est ensuite calculé comme la moyenne des pertes excédant le VaR, offrant ainsi une mesure de la sévérité des pertes dans les scénarios les plus défavorables.

5.5 Analyse et Interprétation

L'analyse du VaR et du CVaR permet aux institutions financières de mieux comprendre et gérer leur exposition au risque. L'identification visuelle du VaR à partir de la fonction de répartition empirique permet de vérifier la cohérence des résultats obtenus par simulation.

[utf8]inputenc graphicx

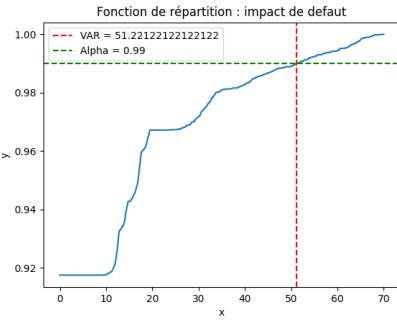


fig : VaR à 99%

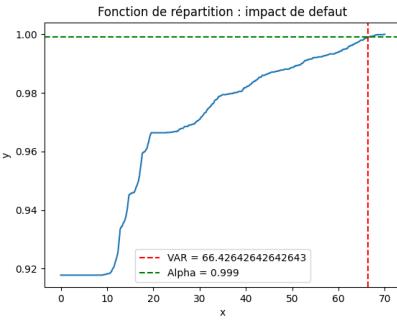


fig : VaR à 99.9%

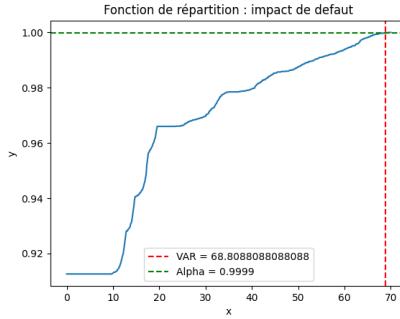


fig : VaR à 99.99%

5.6 Conclusion

Le VaR et le CVaR sont des outils cruciaux dans la gestion des risques financiers, permettant d'évaluer et de quantifier le risque de pertes potentielles dans des conditions extrêmes de marché. Leur estimation par des méthodes de simulation offre une flexibilité importante, particulièrement pour des portefeuilles complexes.

6 Contagion Dynamique

6.1 Introduction

Dans le cadre de l'analyse du risque systémique, la considération de la contagion dynamique est essentielle. Contrairement à une approche statique, qui pourrait négliger la temporalité des événements d'insolvabilité, une perspective dynamique reconnaît que les défauts au sein d'un réseau financier peuvent se produire à tout moment entre le début et la fin de la période considérée. Cette section développe sur la modélisation et l'évaluation des impacts de défaut de manière dynamique, offrant ainsi une compréhension plus approfondie du risque de contagion.

6.2 Modélisation de la Contagion Dynamique

La contagion dynamique peut être modélisée par l'évaluation des impacts de défaut à différents instants t_k , pour $k = 1$ à n , jusqu'à la date finale T . L'impact de défaut total à la date T est alors exprimé comme la somme de tous ces impacts individuels:

$$\sum_{k=1}^N I(t_k).$$

Cette approche permet de capturer la nature évolutive du risque de contagion et de défaut au sein du réseau financier.

6.3 Intégration du Risque de Contagion Dynamique

En intégrant la dimension temporelle, il devient possible de réexaminer et d'affiner les analyses antérieures sur l'insolvabilité et la taille du réseau en considérant explicitement:

1. La séquence et la probabilité des événements de défaut à travers le temps.
2. L'identification des périodes critiques où le risque de contagion est particulièrement élevé.
3. L'effet de la taille et de la structure du réseau sur la propagation dynamique des défauts.

6.4 Implications pour la Gestion du Risque Systémique

La reconnaissance du caractère dynamique de la contagion financière a des implications significatives pour la gestion du risque systémique. Elle souligne l'importance de:

- Des stratégies de mitigation flexibles, capables de s'adapter à l'évolution des conditions du marché.

- La surveillance continue du réseau financier pour détecter et répondre aux signes précurseurs de contagion.
- L’élaboration de cadres réglementaires qui tiennent compte de la dynamique temporelle du risque de contagion.

6.5 Value-at-Risk et Conditional Value-at-Risk

6.5.1 Estimation du VaR et du CVaR avec contagion dynamique

L'estimation du VaR et du CVaR avec contagion dynamique nécessite de prendre en compte la dimension temporelle de la contagion. Pour cela, nous devons évaluer les impacts de défaut à différents instants t_k , pour $k = 1$ à n , jusqu'à la date finale T .

L'estimation du VaR à différents seuils de confiance (par exemple, 99.9 % et 99.99 %) se fait par identification du k -ième élément de l'échantillon ordonné tel que:

$$\text{VaR}(t_k) = X_{(k)},$$

où $k = \lceil n\alpha \rceil$, et $\lceil \cdot \rceil$ dénote la partie entière supérieure.

Le CVaR est ensuite calculé à chaque instant t_k comme la moyenne des pertes excédant le VaR correspondant, offrant ainsi une mesure de la sévérité des pertes dans les scénarios les plus défavorables à chaque instant.

6.5.2 Analyse et Interprétation avec contagion dynamique

L'analyse du VaR et du CVaR avec contagion dynamique permet aux institutions financières de mieux comprendre et gérer leur exposition au risque au fil du temps. L'identification visuelle du VaR à partir de la fonction de répartition empirique à chaque instant t_k permet de vérifier la cohérence des résultats obtenus par simulation. Ainsi, le VaR est plus élevé car il prend en considération les pertes à chaque instant et non seulement à la date de maturité T.

En prenant en compte la dimension temporelle de la contagion, les institutions financières peuvent identifier les périodes critiques où le risque de contagion est particulièrement élevé et adapter leur stratégie de gestion du risque en conséquence. De plus, l'analyse de la sévérité des pertes dans les scénarios les plus défavorables à chaque instant permet de mieux comprendre l'impact potentiel de la contagion sur le système financier dans son ensemble.

[utf8]inputenc graphicx

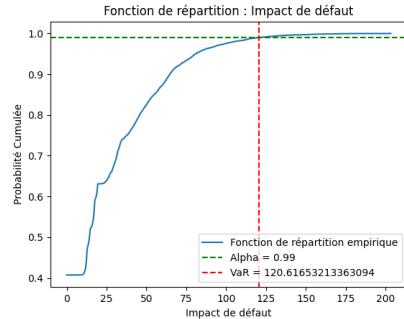


fig : VaR à 99%

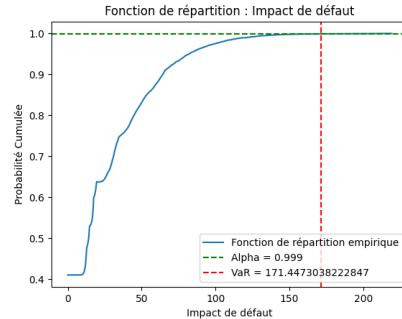


fig : VaR à 99.9%

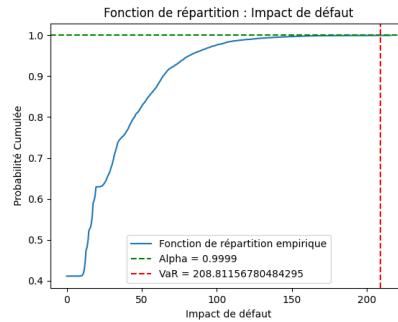


fig : VaR à 99.99%

6.6 Conclusion

Le VaR et le CVaR sont des outils cruciaux dans la gestion des risques financiers, permettant d'évaluer et de quantifier le risque de pertes potentielles dans des conditions extrêmes de marché. Leur estimation par des méthodes de simulation offre une flexibilité importante, particulièrement pour des portefeuilles complexes.

6.7 Conclusion

La prise en compte de la contagion dynamique enrichit notre compréhension des risques systémiques et offre une base plus solide pour l'élaboration de stratégies de prévention des crises financières. En intégrant cette dimension temporelle dans l'analyse, les décideurs peuvent mieux préparer les réseaux financiers à résister aux défauts et à limiter la propagation des chocs à travers le système.

7 Étude d’Insolvabilité et Influence de la Taille du Réseau

7.1 Introduction

L’analyse de l’insolvabilité au sein des réseaux financiers est cruciale pour comprendre la dynamique des crises financières et pour identifier les mesures de prévention efficaces. Cette section aborde la question de l’insolvabilité en se concentrant sur l’estimation des cascades d’insolvabilité les plus probables et en évaluant l’influence de la taille du réseau sur la stabilité du système financier.

7.2 Estimation des Cascades d’Insolvabilité

L’objectif principal est de déterminer les séquences d’insolvabilité les plus susceptibles de se produire au sein du réseau financier, en fonction du nombre de banques en défaut. Cette analyse implique:

- La simulation de divers scénarios de marché pour estimer la probabilité et la sévérité des cascades d’insolvabilité.
- L’évaluation de l’impact de chaque banque sur la stabilité du réseau pour identifier les institutions dont la défaillance entraînerait les conséquences les plus graves.

7.3 Méthodologie

- Nous allons tout d’abord faire un algorithme qui nous fournit en fonction du nombre de banque en défaut donné en paramètre quelles sont les banques qui tombent souvent en défaut. Par exemple dans le cas particulier de la matrice d’exposition fourni précédemment, il vient que lorsque deux banques font défaut c’est souvent les banques 1 et 5. Cet algorithme nous donne un aperçu global mais sans possibilité d’identifier concrètement les liaisons dangereuses. Il donne la cascade d’insolvabilité la plus probable en fonction du nombre de banques en défaut
- La deuxième possibilité est de regarder dans chaque scénario le cas d’une banque en particulier. Prenons le cas de la banque 2, si cette banque fait défaut à l’étape 1 de la cascade. Quelle sera la ou les banques les plus probables qu’elle risque d’entraîner avec elle. Dans ce cas, il est plus aisés d’identifier les liaisons dangereuses de chacune des banques de notre réseau. Nous pouvons ensuite prendre les mesures adéquates.

7.4 Identification des Liaisons de Contrepartie Dangereuses

Cette analyse vise à identifier les connexions entre banques qui présentent un risque élevé pour le système financier. Elle examine les scénarios critiques qui

```
>>> (executing file "travail4_bis.py")
les liaisons dangereuses : [4, 1, 5, 1]
les liaisons raisonnables : [[1, 2, 3, 5], [2, 3, 4, 5], [1, 2, 3, 4], [1, 2, 3, 4], [2, 3, 4, 5]]
```

Figure 3:

pourraient mener à l'effondrement du système et explore des configurations (raisonnables) pour améliorer la sûreté du système. Les éléments clés comprennent :

- L'analyse des réseaux de contreparties pour détecter les liens les plus vulnérables.
- La proposition de modifications dans la structure du réseau pour réduire le risque systémique, comme l'augmentation des réserves de liquidités ou la limitation de certaines expositions.

7.5 Influence de la Taille du Réseau

L'effet de la taille du réseau sur la probabilité et l'impact des cascades d'insolvabilité est un aspect crucial de cette étude. En considérant des réseaux de tailles différentes ($N = 10, 20, 50$), nous analysons :

- Comment l'augmentation de la taille du réseau affecte la complexité et la résilience du système financier.
- Les configurations spécifiques dans les réseaux de différentes tailles qui présentent un risque élevé d'insolvabilité systémique.

7.6 Conclusion

L'étude d'insolvabilité et l'analyse de l'influence de la taille du réseau révèlent des insights précieux pour la gestion du risque systémique. En identifiant les configurations à haut risque et en comprenant l'impact de la structure du réseau, les régulateurs et les institutions financières peuvent élaborer des stratégies plus efficaces pour prévenir les crises financières et renforcer la stabilité du système financier global.

8 Étude des Réseaux Financiers

8.1 Introduction

L'analyse des réseaux financiers permet de comprendre la structure et la dynamique des relations de créance et de dette entre les institutions. En examinant les degrés d'entrée (K_{in}) et de sortie (K_{out}) de chaque nœud du réseau, ainsi que leurs distributions, nous pouvons identifier des modèles de connectivité et évaluer la robustesse du système financier face aux chocs externes.

8.2 Calcul des Degrés et Probabilités

Pour chaque nœud du réseau, le degré d'entrée représente le nombre de débiteurs (K_{in}), tandis que le degré de sortie correspond au nombre de créanciers (K_{out}). La probabilité que le degré d'un nœud soit égal à i est donnée par:

$$P[K_{in} = i] = C_1 i^{\alpha_1}, \quad P[K_{out} = i] = C_2 i^{\alpha_2},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes, et α_1 et α_2 sont des exposants à déterminer.

8.3 Objectifs

L'objectif de cette analyse est d'évaluer la distribution des degrés d'entrée et de sortie des banques dans le contexte du risque systémique bancaire. Plus précisément, nous visons à estimer les paramètres d'une loi de puissance pour modéliser ces distributions, ce qui nous permettra de mieux comprendre la structure du réseau bancaire et d'identifier d'éventuelles vulnérabilités.

8.4 Méthodologie

- Calcul des degrés d'entrée et de sortie : Pour chaque banque, les degrés d'entrée (K_{in}) et de sortie (K_{out}) sont calculés à partir d'une matrice d'expositions représentant les liens financiers entre les banques. Les valeurs de (K_{in}) et de (K_{out}) sont triées et leurs occurrences sont comptées pour préparer l'analyse statistique.
- Estimation des paramètres de la loi de puissance : Les paramètres d'une loi de puissance, notamment le paramètre d'échelle (α) et la constante C , sont estimés à l'aide de la méthode Maximum Likelihood. Pour estimer α , nous utilisons la formule suivante :

$$\hat{\alpha} = 1 + n \times \left(\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{x_{min} - \frac{1}{2}}\right) \right)$$

où n est le nombre d'observations, x_i sont les valeurs observées, et x_{min} est la valeur minimale observée. Les valeurs minimales des degrés d'entrée et de sortie ($x_{min}(K_{in})$ et ($x_{min}(K_{out})$)) sont identifiées pour le calcul des paramètres.

8.5 Résultats :

8.5.1 Estimation des paramètres de la loi de puissance :

Les paramètres sont estimés pour les distributions des degrés d'entrée et de sortie. Les valeurs estimées permettent de caractériser la décroissance des probabilités en fonction des degrés.

8.5.2 Analyse de la Distribution des Degrés

Les graphiques des probabilités cumulatives en fonction des degrés d'entrée et de sortie sont tracés en logarithmique pour une meilleure visualisation.

- $i \rightarrow \ln(P[K_{\text{in}} \geq i])$,
- $i \rightarrow \ln(P[K_{\text{out}} \geq i])$.

Ces tracés permettent d'identifier si la distribution des degrés suit une loi de puissance, caractéristique des réseaux sans échelle où quelques noeuds agissent comme des hubs centraux.

L'étude des degrés d'entrée et de sortie dans les réseaux financiers révèle des aspects fondamentaux de la structure du réseau et de sa susceptibilité à la contagion. La compréhension de ces distributions et la détermination des paramètres α_1 et α_2 fournissent des indications précieuses sur la robustesse et la vulnérabilité du système financier.

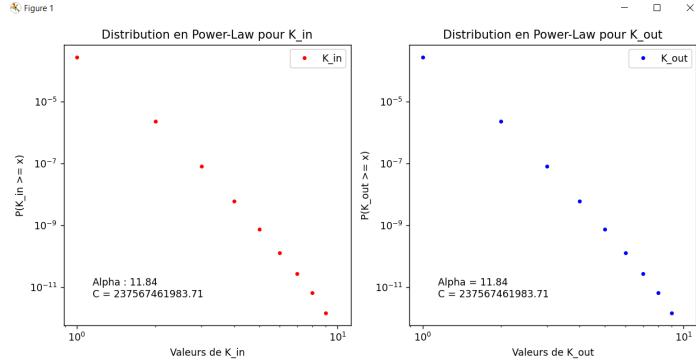


Figure 4: Loi de distribution : 10 banques

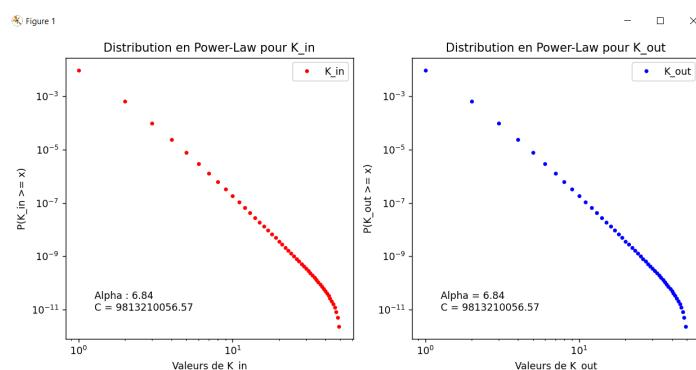


Figure 5: Loi de distribution : 50 banques