ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

Ενδεικτικά παλαιότερα θέματα

e-class: http://eclass.uoa.gr/courses/PHYS192/

Δημήτριος Φασουλιώτης

Επικοινωνία: dfassoul at phys.uoa.gr

Θέμα να περιλαμβάνει Υπολογιστική φυσική 2023

Ενδεικτικά παλαιότερα θέματα 1

Δίδεται ο παρακάτω πίνακας δειγματοληψίας μιας συνάρτησης y=f(x).

x	0.	1.	2.	3.	4.
y	0.	0.	8.	54.	192.

Α) Υπολογίστε με ακρίβεια $2^{ης}$ τάξης ως προς x την τιμή της συνάρτησης y για x=1.5.

Β) Υπολογίστε με ακρίβεια $2^{ης}$ τάξης ως προς x την τιμή την παράγωγο της συνάρτησης y στο σημείο x=3.

Γ) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της y για $0 \leq x \leq 4$ με την μέθοδο Simpson με την μέγιστη ακρίβεια που επιτρέπει η συγκεκριμένη δειγματοληψία.

Δίδεται ο παρακάτω πίνακας δειγματοληψίας μιας συνάρτησης y=f(x).

x	0.	1.	2.	3.	4.
y	0.	0.	8.	54.	192.

Α) Υπολογίστε με ακρίβεια 2ης τάξης ως προς x την τιμή της συνάρτησης y για x=1.5.
Β) Υπολογίστε με ακρίβεια 2ης τάξης ως προς x την τιμή την παράγωγο της συνάρτησης y στο σημείο x=3.
Γ) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της y για 0 ≤ x ≤ 4 με την μέθοδο Simpson με την μέγιστη ακρίβεια που επιτρέπει η συγκεκριμένη δειγματοληψία.

Α) Ακρίβεια 2η τάξης → 3 σημεία για παρεμβολή. Είτε x=0,1,2 είτε x=1,2,3. Και οι δύο επιλογές είναι σωστές. Η πρώτη είναι ευκολότερη διότι f(0)=f(1)=0. Οπότε:

Στα ίδια αποτελέσματα καταλήγουμε και με την μέθοδο Newton. Αν είτε στην μέθοδο Newton είτε στην μέθοδο Lagrange χρησιμοποιήθηκαν όλα τα σημεία, δεν επιτυγχάνουμε ακρίβεια 2ης τάξης αλλά 4ης τάξης, που δεν είναι το ζητούμενο. Παρόλα αυτά, αν η λύση ήταν σωστή (1.6875) δόθηκε η μισή βαθμολογία του υπο-ερωτήματος.

Δίδεται ο παρακάτω πίνακας δειγματοληψίας μιας συνάρτησης y=f(x).

x	0.	1.	2.	3.	4.
y	0.	0.	8.	54.	192.

Α) Υπολογίστε με ακρίβεια 2ης τάξης ως προς x την τιμή της συνάρτησης y για x=1.5.
Β) Υπολογίστε με ακρίβεια 2ης τάξης ως προς x την τιμή την παράγωγο της συνάρτησης y στο σημείο x=3.
Γ) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της y για $0 \le x \le 4$ με την μέθοδο Simpson με την μέγιστη ακρίβεια που επιτρέπει η συγκεκριμένη δειγματοληψία.

Β) Η ακριβέστερη και απλούστερη μέθοδος είναι η midpoint 3 σημείων.

Η απάντηση είναι ίδια είτε χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Lagrange είτε η μέθοδος Newton. Η χρήση της μεθόδου Lagrange ή Newton με όλα τα σημεία δειγματοληψίας δεν οδηγεί σε ακρίβεια 2ης τάξης, αλλά αν το αποτέλεσμα ήταν σωστό (81.) δόθηκε η μισή βαθμολογία του υπο-ερωτήματος. Λύσεις 2ης τάξης που χρησιμοποίησαν τα σημεία x=0,1,2 δεν έλαβαν βαθμολογία για το υπο-ερώτημα αυτό

Δίδεται ο παρακάτω πίνακας δειγματοληψίας μιας συνάρτησης y=f(x).

x	0.	1.	2.	3.	4.
y	0.	0.	8.	54.	192.

Α) Υπολογίστε με ακρίβεια 2ης τάξης ως προς x την τιμή της συνάρτησης y για x=1.5.

Β) Υπολογίστε με ακρίβεια 2ης τάξης ως προς x την τιμή την παράγωγο της συνάρτησης y στο σημείο x=3.

Γ) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της y για $0 \le x \le 4$ με την μέθοδο Simpson με την μέγιστη ακρίβεια που επιτρέπει η συγκεκριμένη δειγματοληψία.

Γ) Από την δειγματοληψία αυτή, το ακριβέστερο αποτέλεσμα με την μέθοδο Simpson προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου σε δύο διαστήματα:

Η απάντηση με χρήση της μεθόδου σε ένα διάστημα, έλαβε την μισή βαθμολογία του υποερωτήματος

Ενδεικτικά παλαιότερα θέματα 2

A) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $f(x)=x^2+1$ στην περιοχή [1., 3.] κατασκευάζοντας αλγόριθμο για την εφαρμογή της μεθόδου τραπεζίου κατά τμήματα.

B) Εφαρμόστε τον αλγόριθμό σας για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος για 1 και 2 διαστήματα και προσδιορίστε την τιμή και την αβεβαιότητα του ολοκληρώματος από τις παραπάνω τιμές. Καλύπτεται από την αβεβαιότητα η απόκλιση του ολοκληρώματος που υπολογίσατε από την αναλυτική τιμή;

A) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα f(x)=x^2+1 στην περιοχή [1., 3.] κατασκευάζοντας αλγόριθμο για την εφαρμογή της μεθόδου τραπεζίου κατά τμήματα.
B) Εφαρμόστε τον αλγόριθμό σας για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος για 1 και 2 διαστήματα και προσδιορίστε την τιμή και την αβεβαιότητα του ολοκληρώματος από τις παραπάνω τιμές. Καλύπτεται από την αβεβαιότητα η απόκλιση του ολοκληρώματος που υπολογίσατε από την αναλυτική τιμή;

A)

```
double myfunc(double x)
{
    double ff=0.;
    ff= x*x+1.;
    return ff;
}
void trapezio(int n)
{
    double a=1.; double b=3.;
    double h=(b-a)/n;
    double integral=0.5*h*(myfunc(a)+myfunc(b));
    for (int i=1; i<n; i++){
         double xx=a+h*i;
         integral+=h*myfunc(xx);
        }
     cout<< n <<" "<< integral<< endl;
}
```

A) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $f(x)=x^2+1$ στην περιοχή [1., 3.] κατασκευάζοντας αλγόριθμο για την εφαρμογή της μεθόδου τραπεζίου κατά τμήματα.
B) Εφαρμόστε τον αλγόριθμό σας για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος για 1 και 2 διαστήματα και προσδιορίστε την τιμή και την αβεβαιότητα του ολοκληρώματος από τις παραπάνω τιμές. Καλύπτεται από την αβεβαιότητα η απόκλιση του ολοκληρώματος που υπολογίσατε από την αναλυτική τιμή;

B) Σε ένα διάστημα $h_1=2$ και σε δύο διαστήματα $h_2=1$

$$I_1 = \frac{h_1}{2}[f(1) + f(3)] = 1 * (2 + 10) = 12$$

$$I_2 = \frac{h_2}{2}[f(1) + 2 * f(2) + f(3)] = 0.5 * (2 + 2 * 5 + 10) = 11$$

Απόκλιση $|I - I_2|=|11-1/3 -11|=1/3$

Αβεβαιότητα = $|I_2-I_1|/3 = 1/3$

A) Κατασκευάστε υπολογιστικό αλγόριθμο χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Runge-Kutta 4ης τάξης, για την εύρεση της ενεργότητας ως συνάρτηση του χρόνου κατά τη διάσπαση ραδιενεργούς πηγής.

B) Εφαρμόστε τον αλγόριθμό σας για χρονικό βήμα $h=\tau_0$. Πόση είναι η απόκλιση από την πραγματική τιμή σε ένα βήμα;

A) Κατασκευάστε υπολογιστικό αλγόριθμο χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Runge-Kutta 4ης τάξης, για την εύρεση της ενεργότητας ως συνάρτηση του χρόνου κατά τη διάσπαση ραδιενεργούς πηγής.

B) Εφαρμόστε τον αλγόριθμό σας για χρονικό βήμα $h=\tau_0$. Πόση είναι η απόκλιση από την πραγματική τιμή σε ένα βήμα;

```
double myf(double t, double y)
{
  double tau0=1.; double value=-y/tau0; return value;
}
void rk4()
{
   double wrk4[100];  double t[100];
   double a=0; double b=5;  double h=0.1; int N=(b-a)/h;
   t[0]=a;  wrk4[0]=1.;
for(int i=0; i<N; i++)
      {
         double k1=h*myf(t[i],wrk4[i]);
         double k2=h*myf(t[i]+h/2, wrk4[i]+k1/2);
         double k3=h*myf(t[i]+h/2, wrk4[i]+k2/2);
         double k4=h*myf(t[i]+h, wrk4[i]+k3);
         wrk4[i+1]= wrk4[i]+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
         t[i+1]=t[i]+h;
      }
}
```

Α) Κατασκευάστε υπολογιστικό αλγόριθμο χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Runge-Kutta 4ης τάξης, για την εύρεση της ενεργότητας ως συνάρτηση του χρόνου κατά τη διάσπαση ραδιενεργούς πηγής.

Β) Εφαρμόστε τον αλγόριθμό σας για χρονικό βήμα $h=\tau_0$. Πόση είναι η απόκλιση από την πραγματική τιμή σε ένα βήμα;

$$K1 = h * \left(-\frac{w0}{t0}\right) = -w0$$

$$K2 = h * \left(-\frac{w0 - \frac{w0}{2}}{t0}\right) = -w0/2$$

$$K3 = h * \left(-\frac{w0 - \frac{w0}{2*2}}{t0}\right) = -3w0/4$$

Ποσοστιαία διαφορά ~2%

$$K4 = h * \left(-\frac{w0 - \frac{3w0}{4}}{t0}\right) = -w0/4$$

$$W1 = w0 - \frac{1}{6} * \left(w0 + 2 * \frac{w0}{2} + 2 * \frac{3w0}{4} + \frac{w0}{4}\right) = \frac{3w0}{8}$$

Σώμα εκτινάσσεται κατακόρυφα με φορά προς τα επάνω με αρχική ταχύτητα 20 m/s.
A) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Euler, κατασκευάστε υπολογιστικό αλγόριθμο που να περιγράφει την κίνηση του σώματος. Υπολογίστε στον αλγόριθμό σας το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει, καθώς και το χρόνο στον οποίο θα πέσει πάλι στο έδαφος.
B) Με χρονικό βήμα 1 s, εφαρμόστε τον αλγόριθμό σας για να εκτιμήσετε τα δύο παραπάνω μεγέθη. Η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα και $g=10$ m/s^2.

Σώμα εκτινάσσεται κατακόρυφα με φορά προς τα επάνω με αρχική ταχύτητα 20 m/s.
A) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Euler, κατασκευάστε υπολογιστικό αλγόριθμο που να περιγράφει την κίνηση του σώματος. Υπολογίστε στον αλγόριθμό σας το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει, καθώς και το χρόνο στον οποίο θα πέσει πάλι στο έδαφος.
B) Με χρονικό βήμα 1 s, εφαρμόστε τον αλγόριθμό σας για να εκτιμήσετε τα δύο παραπάνω μεγέθη. Η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα και $g=10\ m/s^2$.

(A)

```
void elptosi()
{
    double y=0.; double v=20.; double t=0; //initial conditions
    double g=10.;  // rest of constants
    double h=0.1;  // time step
    double maxh=0;
    printf("%lf %lf %lf \n", t,y,v);
    while(y>=0)
       {
         y=y+h*v;
         v=v-h*g;
         t=t+h;
         if(y>maxh)maxh=y;
       }
     printf("%lf %lf \n", t, maxh);
}
```

Σώμα εκτινάσσεται κατακόρυφα με φορά προς τα επάνω με αρχική ταχύτητα 20 m/s.
Α) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Euler, κατασκευάστε υπολογιστικό αλγόριθμο που να περιγράφει την κίνηση του σώματος. Υπολογίστε στον αλγόριθμό σας το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει, καθώς και το χρόνο στον οποίο θα πέσει πάλι στο έδαφος.
Β) Με χρονικό βήμα 1 s, εφαρμόστε τον αλγόριθμό σας για να εκτιμήσετε τα δύο παραπάνω μεγέθη. Η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα και $g=10\ m/s^2$.

(Β)

Y0=0
V0=20
Y1=Y0+hV0 = 0+20 = 20
V1=V0-hg =20-10 = 10
Y2=Y1+hV1 =20+10 = **30**
V2=V1-hg= 10-10 = 0
Y3=Y2+hV2= 30+0 = **30**
V3=V2-hg= 0-10 = -10
Y4=Y3+hV3= 30-10 = 20
V4=V3-hg= -10-10 = -20
Y5=Y4+hV4= 20-20 = **0**
V5=V4-hg= -20-10 = -30

Ενδεικτικά παλαιότερα θέματα 5

Σώμα ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο μήκους 1m που σχηματίζει γωνία 30^o με το οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής ολίσθησης $^1/_{(2*\sqrt{3})}$. Το σώμα αφήνεται την χρονική στιγμή t=0 στο ψηλότερο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου με μηδενική αρχική ταχύτητα. (Θεωρήστε $g=10\ m/s^2$. Δίδεται: $\sin(30^o)=1/2$)

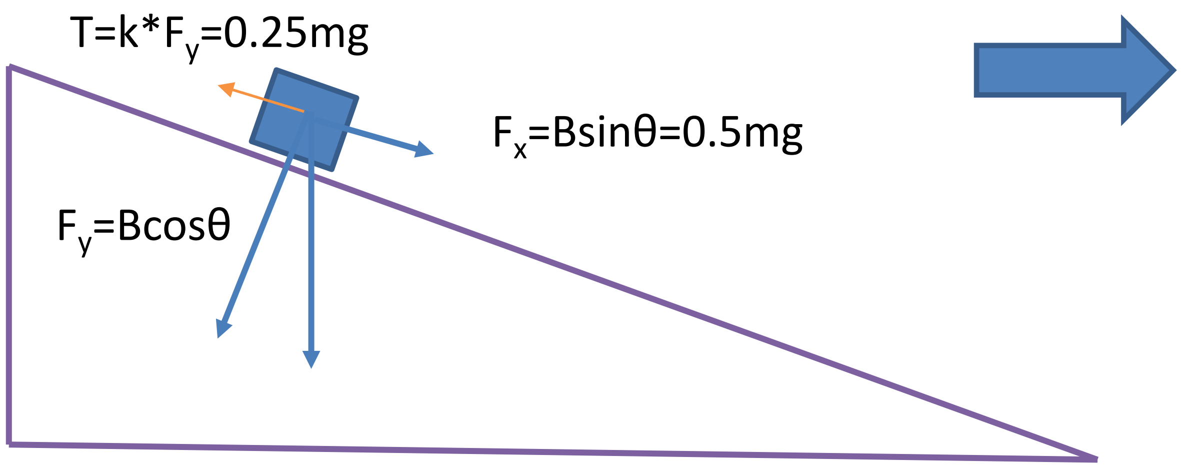
Α) Κατασκευάστε υπολογιστικό αλγόριθμο που να υπολογίζει την θέση και την ταχύτητα του σώματος στο κεκλιμένο επίπεδο όσο αυτό παραμένει επάνω σε αυτό, επιλύοντας την διαφορική εξίσωση που προκύπτει για το συγκεκριμένο πρόβλημα με την μέθοδο Euler.

Β) Εφαρμόστε τον αλγόριθμό σας χρησιμοποιώντας χρονικό βήμα 0.4 s μέχρι το σώμα να απομακρυνθεί από το κεκλιμένο επίπεδο. Πόσος χρόνος απαιτείται σύμφωνα με την εφαρμογή που πραγματοποιήσατε για να συμβεί αυτό;

Σώμα ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο μήκους 1m που σχηματίζει γωνία 30^o με το οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής ολίσθησης $^1/_{(2*\sqrt{3})}$. Το σώμα αφήνεται την χρονική στιγμή t=0 στο ψηλότερο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου με μηδενική αρχική ταχύτητα. (Θεωρήστε $g=10\ m/s^2$. Δίδεται: $\sin(30^o)=1/2$)

A) Κατασκευάστε υπολογιστικό αλγόριθμο που να υπολογίζει την θέση και την ταχύτητα του σώματος στο κεκλιμένο επίπεδο όσο αυτό παραμένει επάνω σε αυτό, επιλύοντας την διαφορική εξίσωση που προκύπτει για το συγκεκριμένο πρόβλημα με την μέθοδο Euler.

B) Εφαρμόστε τον αλγόριθμό σας χρησιμοποιώντας χρονικό βήμα 0.4 s μέχρι το σώμα να απομακρυνθεί από το κεκλιμένο επίπεδο. Πόσος χρόνος απαιτείται σύμφωνα με την εφαρμογή που πραγματοποιήσατε για να συμβεί αυτό;



$$\frac{d^2x}{dt^2}=0.25g$$

Ενδεικτικά παλαιότερα θέματα 5

Σώμα ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο μήκους 1m που σχηματίζει γωνία 30° με το οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής ολίσθησης $^{1}/_{(2*\sqrt{3})}$. Το σώμα αφήνεται την χρονική στιγμή t=0 στο ψηλότερο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου με μηδενική αρχική ταχύτητα. (Θεωρήστε g=10 m/s^2. Δίδεται: sin(30°)=1/2)

A) Κατασκευάστε υπολογιστικό αλγόριθμο που να υπολογίζει την θέση και την ταχύτητα του σώματος στο κεκλιμένο επίπεδο όσο αυτό παραμένει επάνω σε αυτό, επιλύοντας την διαφορική εξίσωση που προκύπτει για το συγκεκριμένο πρόβλημα με την μέθοδο Euler.

B) Εφαρμόστε τον αλγόριθμό σας χρησιμοποιώντας χρονικό βήμα 0.4 s μέχρι το σώμα να απομακρυνθεί από το κεκλιμένο επίπεδο. Πόσος χρόνος απαιτείται σύμφωνα με την εφαρμογή που πραγματοποιήσατε για να συμβεί αυτό;

A)

```
void epipedo()
{
    double x=0.;    //initial conditions
    double v=0;
    double t=0;
    double g=10.;   // rest of constants
    double h=0.1;   // time step
    printf("%lf %lf %lf \n", t,y,v);
    while(x<=1)
       {
         y=y+h*v;
         v=v-h*0.25*g;
         t=t+h;
         printf("%lf %lf %lf \n", t,y,v);
       }
}
```

Σώμα ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο μήκους 1m που σχηματίζει γωνία 30^o με το οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής ολίσθησης $^1/_{(2*\sqrt{3})}$. Το σώμα αφήνεται την χρονική στιγμή t=0 στο ψηλότερο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου με μηδενική αρχική ταχύτητα. (Θεωρήστε g=10 m/s^2. Δίδεται: $\sin(30^o)=1/2$)

A) Κατασκευάστε υπολογιστικό αλγόριθμο που να υπολογίζει την θέση και την ταχύτητα του σώματος στο κεκλιμένο επίπεδο όσο αυτό παραμένει επάνω σε αυτό, επιλύοντας την διαφορική εξίσωση που προκύπτει για το συγκεκριμένο πρόβλημα με την μέθοδο Euler.

B) Εφαρμόστε τον αλγόριθμό σας χρησιμοποιώντας χρονικό βήμα 0.4 s μέχρι το σώμα να απομακρυνθεί από το κεκλιμένο επίπεδο. Πόσος χρόνος απαιτείται σύμφωνα με την εφαρμογή που πραγματοποιήσατε για να συμβεί αυτό;

Y0=0
V0=0
Y1=Y0+hV0 = 0+0 = 0
V1=V0+h*0.25g =0+1 = 1
Y2=Y1+hV1 =0+0.4 = 0.4
V2=V1+h*0.25g= 1+1 = 2
Y3=Y2+hV2= 0.4+0.8 = **1.2**
V3=V2+h*0.25g= 2+1 = 3

Γραμμική παρεμβολή

$$t = 2 + \frac{3-2}{1.2-0.4}(1-0.4) = 2.75$$

Ενδεικτικά παλαιότερα θέματα 6

Θεωρήστε ότι ένα σώμα κρυώνει όσο περνά ο χρόνος και έχουμε τις παρακάτω μετρήσεις για την θερμοκρασία Θ από την αρχή του πειράματος

t (sec)	0	1	3	5
Θ (^{0}C)	40	30	16	9.5

Προσαρμόστε την εξάρτηση από την θερμοκρασία με μια σχέση της μορφής **$\Theta = A + Be^{ct}$** . Δίνεται επί πλέον ότι η θερμοκρασία μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα φτάνει σε μία τιμή σταθεράς κατάστασης ίσης με 6 ^{0}C.

Ενδεικτικά παλαιότερα θέματα 6

Θεωρήστε ότι ένα σώμα κρυώνει όσο περνά ο χρόνος και έχουμε τις παρακάτω μετρήσεις για την θερμοκρασία Θ από την αρχή του πειράματος

t (sec)	0	1	3	5
Θ (^{0}C)	40	30	16	9.5

Προσαρμόστε την εξάρτηση από την θερμοκρασία με μια σχέση της μορφής **$\Theta=A+Be^{ct}$** . Δίνεται επί πλέον ότι η θερμοκρασία μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα φτάνει σε μία τιμή σταθεράς κατάστασης ίσης με 6 ^{0}C.

A=6

$\Theta-A=Be^{ct}$

$\ln(\Theta-A)=\ln(B)+ct$ $\Rightarrow$ Εφαρμόζετε ευθεία ελαχίστων τετραγώνων

Ενδεικτικά παλαιότερα θέματα 7

Υπολογίστε το παρακάτω ολοκλήρωμα με τη μέθοδο Simpson, σε ένα διάστημα.

$$\int_0^1 e^x dx$$

Υπολογίστε την απόκλιση από το πραγματικό ολοκλήρωμα, το σφάλμα αποκοπής κάνοντας χρήση της αναλυτικής έκφρασης καθώς και το σφάλμα αποκοπής με υπολογιστικό τρόπο. Συγκρίνετε τα αποτελέσματα και σχολιάστε.

$$I = e^1 - e^0 = 1.71828$$

$$I1 = \frac{h1}{3}[f(0) + 4f(0.5) + f(1)] = 1.71886$$

$$I2 = \frac{h2}{3}[f(0) + 4f(0.25) + 2f(0.5) + 4f(0.75) + f(1)] = 1.71832$$

$$\varepsilon = \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) = \frac{0.5^5}{90} e^1 = 0.0009$$

Θεωρήστε ότι έχουμε τα κατωτέρω πειραματικά δεδομένα

x	1.00	1.01	1.02
f(x)	1.27	1.32	1.38

α) Να βρείτε την προσεγγιστική τιμή της **f'(1.005**) και της **f'(1.015)** με τον τρόπο που θεωρείτε ότι δίνει τα μικρότερα σφάλματα και την **f''(1.01)** χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα αποτελέσματα

β) Αν η ακρίβεια στις ανωτέρω μετρήσεις είναι +/- 0.005 να βρείτε το μέγιστο σφάλμα στον υπολογισμό του α) που οφείλεται στην ανακρίβεια των δεδομένων.