第38卷　第2期　　《新疆师范大学学报》(自然科学版)　　Vol.38,No.2
2019年9月　　Journal of Xinjiang Normal University　　Sep.2019
(Natural Sciences Edition)

热传导方程中傅氏积分与傅氏变换的应用

代　莹,肖　冰*
(新疆师范大学 数学科学学院,新疆 乌鲁木齐 830017)

摘　要:热传导方程是最简单、最典型的抛物型方程。许多热传导中的主要定解问题,例如柯西问题及混合问题,都需要运用傅里叶积分与傅里叶变换。傅里叶积分变换有许多的性质都是值得学习运用的,尤其是傅里叶变换在不同的领域有不同的形式,比如现代声学、声呐、地震、核科学乃至生物医学等方面广泛的应用。

关键词:热传导方程;定解问题;傅里叶积分;傅里叶变换
中图分类号:TN911　　**文献标识码:**A　　**文章编号:**1008-9659(2019)02-005-11
DOI:10.14100/j.cnki.1008-9659.2019.02.002

傅里叶(法国数学家、物理学家,1768-1830)一生中的学术成就最突出的贡献就是对热传导问题的研究,开创出“傅里叶分析”这一重要分支,为数学物理方程开辟了广阔的道路。傅里叶于1807年在论文《固体中的热运动理论》中增加了在无穷大物体中热扩散的新分析[1]。但由于运用的三角级数具有周期性而不能用,所以引入了傅里叶积分:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\lambda(x-\xi)d\lambda$$

基于傅里叶积分的基础上,推导出傅里叶变换

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx$$

及其逆变换

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$

热传导方程的主要定解问题是柯西问题及混合问题,运用的工具有傅里叶积分变换和极值原理等。傅里叶积分变换中的内容十分丰富,许多热传导中的问题都需要运用傅里叶积分与傅里叶变换及其性质去解决。正像对数运算将实数的乘法和除法运算转换成实数的加法和减法一样,利用积分变换可以将数学物理方程中的未知数个数减少,转化为常微分方程或代数方程,这样使得许多问题的分析与求解得到简化。傅里叶积分与傅里叶变换便是常用的积分变换,在数据处理、信号分析等领域中广泛应用。

1　热传导原理及其方程

同一时刻在某物体的所有点之间所发生的作用,会在所有温度中产生一个无穷小的合变化,该物体将在每一时刻受到相似的作用,由于温度的变化会越来越明显,可知,当所有其他环境保持不变时,这两个分子中的一个从另一个那里所得到的热量,与这两个分子的温差成正比[2]。超出热的这两个部分的同时作用,即热传导原理[1]。当两个相同物质的相同分子,有相同的温度,二者间的相互作用可看作是0,反之,若第一

[收稿日期]　2019-02-02
[作者简介]　代　莹(1993-),女,陕西长武人,硕士研究生,主要从事偏微分方程的理论及其应用研究。
*[通讯作者]　肖　冰(1961-),男,陕西咸阳人,副教授,主要从事偏微分方程的理论及其应用研究。

个比第二个热,则二者间的相互作用即为两热量的差。如果空间中某物体内各点处的温度不同,则热量就从温度较高的点处向温度较低的点处流动,这种现象称为热传导[3]。下面,构建热传导方程的模型[4]:

在三维立体空间中,某一均匀且各向同性的物体,内部含有热源,与周围并无热交换,则该物体内部温度的变化规律是如何的体现呢?

需设$u(x,y,z,t)$表示物体在点$M(x,y,z)$处,时刻t的温度;$k(x,y,z)$表示热传导系数,当物体均匀,各向同性时,其为常数;设$c(x,y,z)$为比热,$\rho(x,y,z)$为体密度。

若要导出温度$u(x,y,z,t)$满足的方程,根据热传播的傅里叶定律可知:物体在无穷小的时段dt内流过一个无穷小的面积ds的热量dQ和物体温度沿无穷小曲面ds法线方向的方向导数$\frac{\partial u}{\partial n}$成正比[4],故有

$$dQ = -k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}dsdt, \tag{1}$$

其中n为曲面ds沿热流方向的法线向量,温度的法向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \boldsymbol{gradu}\cdot\boldsymbol{n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(n,z),$$

其表示温度沿n方向的变化率,(1)式中的负号表示热流的方向与温度梯度的方向相反,因为热流是由高温区指向低温区[4],而温度梯度$\boldsymbol{gradu}$是由低温区指向高温区。

物体内任选取一闭曲面S,其所包围的区域记作Ω,则从时刻t_1到时刻t_2流入区域Ω的热量为:

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2}\left[\iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}dS\right]dt \tag{2}$$

设函数u是关于变量x,y,z的二阶连续偏导数,是关于变量t的一阶连续偏导数,运用奥—高公式(简称高斯公式),可知

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]dv\right]dt$$

在区域Ω内含有热源,且热源的体密度为$F(x,y,z,t)$,则$[t_1,t_2]$内热源散发的热量为:

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint_\Omega F(x,y,z,t)dv\right]dt \tag{3}$$

在Ω内各点由t_1时刻温度$u(x,y,z,t_1)$变化到$u(x,y,z,t_2)$所需要的热量为:

$$\begin{aligned} Q_3 &= \iiint_\Omega c(x,y,z)\rho(x,y,z)\left[u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1)\right]dv \\ &= \iiint_\Omega c\rho\left[\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}dt\right]dv = \int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint_\Omega c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dv\right]dt \end{aligned} \tag{4}$$

根据热量守恒定律有$Q_1 + Q_2 = Q_3$,即

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) + F(x,y,z)\right]dv\right]dt = \int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint_\Omega c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dv\right]dt$$

又由于被积函数具有连续性,积分区域Ω和$[t_1,t_2]$的任意性,令$a^2 = \frac{k}{c\rho}, f = \frac{F}{c\rho}$,则有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f \tag{5}$$

若体内无热源,即$F = 0$,有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{6}$$

称(5)式为非齐次三维热传导方程,(6)式为齐次三维热传导方程,其中a为导温系数。

特别地,如果物体是一个薄片,上、下底面不与周围介质进行热交换,则有二维热传导方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{7}$$

如果物体是细长的棒,侧面与周围介质不进行热交换,垂直于轴线的截面上各点温度分布相同,则有一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \tag{8}$$

2　定义

定义 1[5]　当细杆内存在热源(发出热或吸收热)时,热源的密度设为$F(x,t)$,即在t时刻和x处,在单位时间内和单位长度上所放出的热量。在时间间隔t到$t+\Delta t$内,微元段$[x,x+\Delta x]$中的热源所产生的热量为$F(x,t)\Delta x\Delta t$,所以热传导方程为$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t)$,其中$a^2=\frac{k}{c\rho}$,$f(x,t)=\frac{F(x,t)}{c\rho A}$.

特别地,若无热源,则上述的热传导方程为$u_t=a^2u_{xx}$,其中$a^2=\frac{k}{c\rho}$.

定义 2[5]]　在一定的条件下,傅里叶级数变成了一个积分形式,则称为傅里叶积分(傅氏积分),即

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi.$$

若被积函数$cos\,\lambda(x-\xi)$是λ的偶函数,则上式可改写为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi.$$

定义 3[5]]　若引进一个新函数

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi$$

即

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx \tag{9}$$

则

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda \tag{10}$$

$F(\lambda)$称为$f(x)$的傅里叶变换(傅氏变换)或像,而$f(x)$称为$F(\lambda)$的傅里叶逆变换(傅氏逆变换)或原像。其中将(9)式记为

$$\mathscr{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx,$$

将(10)式记为

$$\mathscr{F}^{-1}[f(x)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda.$$

注:对于更一般的情形,即:含有多个自变量的函数的傅里叶变换:

$$\mathscr{F}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)=\mathscr{F}[f(x_1,x_2,\dots,x_n)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\dots,x_n)e^{-i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_nx_n)}dx_1dx_2\dots dx_n$$

其逆变换公式为

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{F}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)e^{i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_nx_n)}d\lambda_1d\lambda_2\dots d\lambda_n.$$

定义 4[5]　设$f_1(x)$,$f_2(x)$都满足傅里叶变换,则称

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x-\eta)f_2(\eta)d\eta$$

为$f_1(x)$和$f_2(x)$的卷积,记为$f_1(x)*f_2(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x-\eta)f_2(\eta)d\eta$.

3 定理

定理1[5] (傅里叶积分定理)设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续、绝对可积,且存在任何有限区间上分段光滑,则傅里叶积分公式成立,即

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi$$

或

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi$$

成立。其还可改写成

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[A(\lambda)cos\,\lambda x+B(\lambda)sin\,\lambda x\right]d\lambda,$$

其中$A(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi$,$B(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)sin\,\lambda\xi d\xi.$

定理2[6] (线性定理)傅里叶变换是一个线性变换,即,如果α、β为任意常数,函数$f_1(x)$和$f_2(x)$满足傅氏变量的条件,则对函数$f_1(x)$和$f_2(x)$有

$$\mathscr{F}\left[\alpha f_1+\beta f_2\right]=\alpha\mathscr{F}^{1}\left[f_1\right]+\beta\mathscr{F}\left[f_2\right]$$

与

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\alpha f_1+\beta f_2\right]=\alpha\mathscr{F}^{-1}\left[f_1\right]+\beta\mathscr{F}^{-1}\left[f_2\right].$$

定理3[6] (卷积定理)$f_1(x)$和$f_2(x)$的卷积的傅里叶变换等于$f_1(x)$和$f_2(x)$的傅里叶变换的乘积,即

$$\mathscr{F}\left[f_1*f_2\right]=\mathscr{F}\left[f_1\right]\mathscr{F}\left[f_2\right]$$

或

$$f_1*f_2=\mathscr{F}^{-1}\left[\ \mathscr{F}\left[f_1\right]\mathscr{F}\left[f_2\right]\ \right].$$

定理4[7] (乘积定理)$f_1(x)$和$f_2(x)$的乘积的傅氏变换等于它们各自的傅氏变换的卷积再乘$\frac{1}{2\pi}$,即

$$\mathscr{F}\left[f_1f_2\right]=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\left[f_1\right]*\mathscr{F}\left[f_2\right].$$

定理5[7](能量积分定理,*Parseval*不等式)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(x)\right|^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathscr{F}\left[f\right]\right|^2dx$$

定理6[6] (原像的导数定理)如果$f(x)$、$f'(x)$都可以进行傅里叶变换,而且$|x|\to+\infty$时,$f(x)\to 0$,则有

$$\mathscr{F}\left[f'\right]=i\lambda\mathscr{F}\left[f\right]$$

推广至n维傅里叶变换有

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial f}{\partial x_k}\right]=i\lambda_k\mathscr{F}\left[f\right],k=1,2,...,n.$$

定理7[7] (像的导数定理)如果$f(x)$、$xf(x)$都可以进行傅里叶变换,则有

$$\frac{d}{d\lambda}\mathscr{F}\left[\lambda\right]=\mathscr{F}\left[-ixf\right]$$

推广至n维傅里叶变换有

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\mathscr{F}\left[f\right]=\mathscr{F}\left[-ix_kf\right],k=1,2,...,n.$$

4 性质

性质1[7] (位移性质)对于任意的函数f及常数b,则有

$$\mathscr{F}\left[f(x-b)\right]=e^{-ib\lambda}\mathscr{F}\left[f\right]$$

$$\mathscr{F}\left[fe^{-ibx}\right]=\mathscr{F}\left[f(x-b)\right]$$

性质2[7]　(相似性质)对于任意的函数f 及常数$a\neq 0$，则有

$$\mathscr{F}\left[f(ax)\right]=\frac{1}{|a|}\mathscr{F}\left[f\left(\frac{x}{a}\right)\right]$$

性质3[7]　(乘多项式性质)设$f(x),xf(x)$是一维欧氏空间，则有

$$\mathscr{F}\left[xf\right]=i\frac{d}{d\lambda}\mathscr{F}\left[f\right]$$

一般地，如果$f(x),xf(x),\dots,x^kf(x)$是一维欧氏空间，则有$\mathscr{F}\left[x^kf\right]=i^k\frac{d^k}{dx^k}\mathscr{F}\left[f\right]$.

性质4[7]　(对称性质)若$f(x)$是一维欧氏空间，则有

$$\mathscr{F}^{-1}\left[f\right]=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}^{-1}\left[f(-\lambda)\right]$$

性质5[7]　(积分性质)

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{x}f(\xi)d\xi\right]=\frac{1}{i\lambda}\mathscr{F}\left[f\right]=-\frac{i}{\lambda}\mathscr{F}\left[f\right]$$

5　应用实例

例1　利用傅里叶积分与傅里叶变换求解热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}, & (-\infty<x<+\infty,t>0) \quad (11)\\ u(x,t)=\varphi(x), & (-\infty<x<+\infty) \quad (12)\end{cases}$$

解：方法一：用傅里叶积分求解热传导方程的初值问题。

利用分离变量法，设(11)式具有下列形式的可分离变量的解，

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

将上式代入(11)式，可得

$$X(x)T'(t)=a^2X''(x)T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \tag{13}$$

$$T'(t)+\lambda a^2T(t)=0 \tag{14}$$

由(14)式可知：

$$\frac{dT(t)}{T}=-a^2\lambda dt,$$

对上式两边同时积分可得：

$$ln\,T(t)=-a^2\lambda t+C$$

再两边同时取以e为底的自然对数，可得：

$$T(t)=Ce^{-a^2\lambda t}$$

需分析：(1)当$\lambda<0$时，$T(t)$随t的增加而增加，故不符合题意。

(2)当$\lambda\geqslant 0$时，可记$\lambda=\mu^2$，所以(13)式与(14)式可改写为

$$X''(x)+\mu^2X(x)=0 \tag{15}$$

$$T'(t)+\mu^2a^2T(t)=0 \tag{16}$$

当$\mu=0$时，$X''(x)=0,\ \therefore\ X(x)=X_0=c_1x+c_2$

$$T'(t)=0,\ \therefore\ T(t)=T_0.$$

其中假若$c_1\neq 0$，则当$x\to\infty$时，$X(x)$无界，故不符合题意。

当$\mu \neq 0$时,$T(t)=T_{\mu}(t)=e^{-a^2\mu^2 t}$,

$$X(x)=X_{\mu}(x)=A(\mu)\cos\mu x+B(\mu)\sin\mu x,$$

$$u_{\mu}(x,t)=X_{\mu}(x)T_{\mu}(t)=e^{-a^2\mu^2 t}\left[A(\mu)cos\mu x+B(\mu)sin\mu x\right]$$

下面需要将u_{μ}进行叠加,因为$u\in R$,所以对u_{μ}进行积分,得

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\mu^2 t}\left[A(\mu)\cos\mu x+B(\mu)\sin\mu x\right]d\mu \tag{17}$$

又(12)式可得

$$u(x,0)=\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[A(\mu)cos\mu x+B(\mu)sin\mu x\right]d\mu$$

其中$A(\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)cos\mu\xi d\xi$,$B(\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)sin\mu\xi d\xi$.

将$A(\mu)$、$B(\mu)$的值代入(17)式中,得

$$\begin{aligned}
u(x,t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\mu^2 t}\left[A(\mu)\cos\mu x+B(\mu)\sin\mu x\right]d\mu\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\mu^2 t}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\mu\xi d\xi\cos\mu x+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin\mu\xi d\xi\sin\mu x\right]d\mu\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\mu^2 t}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\mu\xi\cos\mu x d\xi+\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin\mu\xi\sin\mu x d\xi\right]d\mu\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\mu^2 t}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)(\cos\mu\xi\cos\mu x+\sin\mu\xi\sin\mu x)d\xi\right]d\mu\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\mu^2 t}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos(\mu\xi-\mu x)d\xi\right]d\mu\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\mu^2 t}\cos\mu(\xi-x)d\mu\right]d\xi\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\left[\int_{0}^{+\infty}e^{-a^2\mu^2 t}\cos\mu(\xi-x)d\mu\right]d\xi
\end{aligned} \tag{18}$$

由泊松积分可知,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}e^{-a^2\mu^2 t}\cos\mu(\xi-x)d\mu&=\frac{1}{\pi}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^2t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}=\frac{1}{\pi}\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}=\frac{1}{\pi}\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi^2}{t\pi}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\\
&=\frac{1}{\pi}\frac{1}{2a}\frac{\pi}{\sqrt{t\pi}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}=\frac{1}{2a\sqrt{t\pi}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}
\end{aligned}$$

由(18)式可简化得:

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\left[\int_{0}^{+\infty}e^{-a^2\mu^2 t}\cos\mu(\xi-x)d\mu\right]d\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{t\pi}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi$$

由此可知,其为热传导方程初值问题的解。

方法二:用傅里叶变换求解热传导方程的初值问题。

对(11)式的两端进行关于x的傅里叶变换,并结合定理6,可得

$$\frac{d\tilde{u}}{dt}=-a^2\lambda^2\tilde{u} \tag{19}$$

$$\tilde{u}(\lambda,0)=\widetilde{\varphi}(\lambda) \tag{20}$$

由(19)式可得:

$$\frac{d\tilde{u}}{\tilde{u}}=-a^2\lambda^2 dt,$$

对上式两边同时积分可得:

$$\ln\tilde{u}=-a^2\lambda^2 t+C$$

再两边同时取以e为底的自然对数,可得

$$\tilde{u}(x,t)=Ce^{-a^2\lambda^2 t},$$
$$\because\ \tilde{u}(\lambda,0)=\widetilde{\varphi}(\lambda)=Ce^{-a^2\lambda^2\times 0}=C$$
$$\therefore\ C=\widetilde{\varphi}(\lambda)$$
$$\therefore\ \tilde{u}(x,t)=\widetilde{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t} \tag{21}$$

其是(19)式与(20)式的解。

由定义4可知

$$f_1(x)\cdot f_2(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x-\eta)f_2(\eta)d\eta$$

对上述卷积的定义进行傅里叶变换，可得：

$$\mathscr{F}\cdot\left[f_1\cdot f_2\right]=\mathscr{F}\left[f_1\right]\mathscr{F}\left[f_2\right]$$

再进行傅里叶逆变换，可得：

$$f_1\cdot f_2=\mathscr{F}^{-1}\left[\ \mathscr{F}\left[f_1\right]\mathscr{F}\left[f_2\right]\ \right]$$

同理，将(21)式运用傅里叶逆变换与定理3，可得：

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\mathscr{F}^{-1}\left[\tilde{u}(x,t)\right]=\mathscr{F}^{-1}\left[\widetilde{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}\right]=\mathscr{F}^{-1}\left[\widetilde{\varphi}(\lambda)\right]\mathscr{F}^{-1}\left[e^{-a^2\lambda^2 t}\right]\\&=\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}\left[\varphi(x)\right]\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}^{-1}\left[e^{-a^2\lambda^2 t}\right]=\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}\left[\varphi(x)\right]\mathscr{F}^{-1}\left[\ \mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}\left[e^{-a^2\lambda^2 t}\right]\ \right]\\&=\mathscr{F}^{-1}\left[\ \mathscr{F}\left[\varphi(x)\right]\mathscr{F}\left[\ \mathscr{F}^{-1}\left[e^{-a^2\lambda^2 t}\right]\ \right]\ \right]=\varphi(x)*\mathscr{F}^{-1}\left[e^{-a^2\lambda^2 t}\right]\end{aligned} \tag{22}$$

下面只需求$\mathscr{F}^{-1}\left[e^{-a^2\lambda^2 t}\right]$即可，运用棣莫弗公式，且知正弦函数为奇函数，可得：

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}\left[e^{-a^2\lambda^2 t}\right]&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}e^{i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}(\cos\lambda x+i\sin\lambda x)d\lambda\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}(\cos\lambda x)d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}(\cos\lambda x)d\lambda\end{aligned} \tag{23}$$

由泊松积分可知，

$$\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}(cos\,\lambda x)d\lambda=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^2t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}=\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}=\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi^2}{t\pi}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}=\frac{1}{2a}\frac{\pi}{\sqrt{t\pi}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

由(23)式可知，

$$\mathscr{F}^{-1}\left[e^{-a^2\lambda^2 t}\right]=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}(cos\,\lambda x)d\lambda=\frac{1}{\pi}\frac{1}{2a}\frac{\pi}{\sqrt{t\pi}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}=\frac{1}{2a\sqrt{t\pi}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

由定义4可知(22)式，即

$$u(x,t)=\varphi(x)*\mathscr{F}^{-1}\left[e^{-a^2\lambda^2 t}\right]=\varphi(x)*\frac{1}{2a\sqrt{t\pi}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}=\frac{1}{2a\sqrt{t\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi$$

注：推广到非齐次的形式，有

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}+f(x,t), & (-\infty<x<+\infty,t>0),\\ u(x,t)=\varphi(x), & (-\infty<x<+\infty).\end{cases}$$

的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{t\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi+\int_0^t\frac{d\tau}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi$$

例2　利用傅里叶积分求解热传导方程的混合问题

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}, & (-\infty<x<+\infty,t>0), & (24)\\ u(x,0)=\dfrac{u_0}{l}x, & (-\infty<x<+\infty), & (25)\\ u_x(0,t)=0,u(l,t)=u_0, & (t>0). & (26)\end{cases}$$

其中u_0为已知常数。

解:将边界条件齐次化,设$v(x,t)=u(x,t)-u_0$,则有

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, & (-\infty < x < +\infty, t > 0), \quad (27) \\ v(x,0) = \dfrac{u_0}{l}x - u_0, & (-\infty < x < +\infty), \quad (28) \\ v_x(0,t) = 0, v(l,t) = 0, & (t > 0). \quad (29) \end{cases}$$

利用分离变量法,设(27)式具有下列形式的可分离变量的解:

$$v(x,t)=X(x)T(t)$$

将上式代入(27)式,可得

$$X(x)T'(t)=a^2X''(x)T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \tag{30}$$

$$T'(t)+\lambda a^2T(t)=0 \tag{31}$$

由(31)式可知,

$$\frac{dT(t)}{T}=-a^2\lambda dt,$$

对上式两边同时积分可得:

$$\ln T(t)=-a^2\lambda t+C$$

再两边同时取以e为底的自然对数,可得:

$$T(t)=Ce^{-a^2\lambda t} \tag{32}$$

又由(29)式可知,

$$v_x(0,t)=X'(0)T(t)=0, v(l,t)=X(l)T(t)=0$$

又因为$T(t)\neq 0$,所以有: $X'(0)=X(l)=0$

构造特征值问题,即

$$\begin{cases} X''(x)+\mu^2X(x)=0, & (33) \\ X'(0)=X(l)=0, & (34) \end{cases}$$

由(33)式可知,$\mu^2+\lambda=0$,所以$u=\pm\sqrt{-\lambda}=\pm i\sqrt{\lambda}$,虚部为$\sqrt{\lambda}$,

故有,$X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x,$

又由(34)式可知,$X'(x)=-\sqrt{\lambda}A\sin\sqrt{\lambda}x+\sqrt{\lambda}B\cos\sqrt{\lambda}x$

$$X'(0)=\sqrt{\lambda}B\cos\left(\sqrt{\lambda}\times 0\right)=\sqrt{\lambda}B=0$$

所以$B=0$.

从而有$X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x$,且又有$X(l)=0$

即 $$X(l)=A\cos\sqrt{\lambda}l=0,\ \therefore\ \lambda=\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2, n=1,2,\ldots$$

$$X_{2n+1}(x)=A_{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x, n=0,1,2,\ldots$$

将$\lambda=\left[\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2$代入(32)式中,可得

$$T_{2n+1}(t)=C_{2n+1}e^{-a^2\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2t}$$

所以,

$$v(x,t)=X(x)T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}xC_{2n+1}e^{-a^2\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2t}=\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}xe^{-a^2\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2t}$$

又由(28)式,可得

$$v(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x=\frac{u_0}{l}x-u_0$$

由傅里叶级数可知,

$$\begin{aligned}
B_{2n+1}&=\frac{2}{l}\int_0^l\left(\frac{u_0}{l}x-u_0\right)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}xdx\\
&=\frac{2}{l}\frac{2l}{\pi(2n+1)}\int_0^l\left(\frac{u_0}{l}x-u_0\right)d\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\\
&=\frac{4}{\pi(2n+1)}\int_0^l\left(\frac{u_0}{l}x-u_0\right)d\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\\
&=\frac{4}{\pi(2n+1)}\left\{\left(\frac{u_0}{l}x-u_0\right)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\Big|_0^l-\int_0^l\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\,d\left(\frac{u_0}{l}x-u_0\right)\right\}\\
&=\frac{4}{\pi(2n+1)}\left\{\left(\frac{u_0}{l}l-u_0\right)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}l-0-\int_0^l\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\,d\left(\frac{u_0}{l}x-u_0\right)\right\}\\
&=\frac{4}{\pi(2n+1)}\left\{-\frac{u_0}{l}\int_0^l\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\,dx\right\}\\
&=-\frac{u_0}{l}\frac{4}{\pi(2n+1)}\int_0^l\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\,dx\\
&=\frac{4u_0}{\pi(2n+1)l}\frac{2l}{\pi(2n+1)}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\Big|_0^l\\
&=\frac{8u_0}{\pi^2(2n+1)^2}\left[\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)-1\right]\\
&=-\frac{8u_0}{\pi^2(2n+1)^2}
\end{aligned}$$

即,

$$\begin{aligned}
u(x,t)=v(x,t)+u_0&=\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}xe^{-a^2\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2t}+u_0\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{8u_0}{\pi^2(2n+1)^2}\right]\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}xe^{-a^2\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2t}+u_0
\end{aligned}$$

为原问题的解。

例3　求解二维热传导方程的柯西问题的解

$$\begin{cases}u_t=u_{xx}+u_{yy}, & -\infty<x,y<+\infty,t>0,\\ u(x,y,0)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\beta_i(y), & -\infty<x,y<+\infty.\end{cases}$$

解: 由例1可知,可将上式改写为齐次性初值问题

$$\begin{cases}v_t=v_{xx}\\ v(x,0)=\varphi(x)\end{cases}$$

的解为:

$$v(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{t\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}d\xi$$

又有若$u(x,t)$,$u(y,t)$分别是定解问题

$$\begin{cases}u_t=u_{xx}, & -\infty<x<+\infty,t>0,\\ u(x,0)=\alpha(x), & -\infty<x<+\infty.\end{cases}$$

和
$$\begin{cases} u_t = u_{yy}, & -\infty < y < +\infty, t > 0, \\ u(y,0) = \beta(y), & -\infty < y < +\infty. \end{cases}$$
的解,则 $u(x,y,t) = u(x,t)u(y,t)$ 是定解问题
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy}, & -\infty < x, y < +\infty, t > 0, \\ u(x,y,0) = \alpha(x)\beta(y), & -\infty < x, y < +\infty. \end{cases}$$
的解。

所以,原问题的初值问题
$$\begin{cases} w_t = w_{xx} + w_{yy}, & -\infty < x, y < +\infty, t > 0, \\ w(x,y,0) = \alpha(x)\beta(y), & -\infty < x, y < +\infty. \end{cases}$$
解的表达式为
$$w(x,y,t) = \alpha(x)\beta(y) = \frac{1}{2\sqrt{t\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}d\xi \frac{1}{2\sqrt{t\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\beta(\eta)e^{-\frac{(\eta-x)^2}{4t}}d\eta$$
$$= \frac{1}{4t\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha(\xi)\beta(\eta)e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-x)^2}{4t}}d\xi d\eta$$

由叠加原理(适用于线性的方程)可知,即
$$w(x,y,t) = \frac{1}{4t\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha(\xi)\beta(\eta)e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-x)^2}{4t}}d\xi d\eta$$
为原问题的解。

6 小结

法国数学家傅里叶于19世纪拉开了偏微分方程发展的序幕,其研究的主要问题是吸热或放热物体内所有点处的温度随空间和时间的变化规律[8],并对物体的物理性状做出一定的限制(如均匀,各向同性)后,根据物理原理从而推导出三维的热传导方程
$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}),$$
其中 a 为一常数。当处理无穷区域的热传导问题时,傅里叶导出了傅里叶积分
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\lambda(x-\xi)d\lambda,$$
其是用封闭形式解偏微分方程的重要工具[9]。再利用傅里叶积分,得到傅里叶变换,为求解偏微分方程提供了又一方便、快捷的途径。

热传导中许多的定解问题,如柯西问题及混合问题利用傅里叶变换与傅里叶积分来解决会更加的快速、便捷,比如一维齐次性的热传导方程柯西问题的解为:
$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{t\pi}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi;$$
对于热传导方程非齐次性的问题,可以利用齐次化原理与叠加原理相结合的形式转化成我们熟悉的非齐次性的问题进行解决,即:一维非齐次性的热传导方程柯西问题的解为:
$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{t\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi + \int_0^t\frac{d\tau}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi$$

通过以上实例的应用,更加体现了傅里叶积分与傅里叶变换在热传导方程中的重要作用,并突出了傅里叶的杰出成就,其表现在不仅发展了偏微分方程的理论,也使得人们从解析函数或可展成泰勒级数的函数中解放了出来[10]。在傅里叶积分变换中有许多性质是值得学习与运用的,合理的利用并相互对比总结,选出最优的方法去解决实际问题是最终的目标。

参考文献:

[1] [法] 傅里叶. 热的解析理论[M]. 北京:北京大学出版社,2008:4-17.
[2] 朱敏. 包覆加气片材钢管柱的抗火研究[D]. 西安建筑科技大学,2013:5-7.
[3] 段志文、韩淑霞. 数学物理方程与特殊函数[M].,北京:高等教育出版社,2008:6-10.
[4] 袁张露. 基于小波分析与偏微分方程的图像去噪研究[D]. 浙江理工大学,2012:25-40.
[5] 四川大学数学学院. 高等数学(第四册)[M]. 北京:高等教育出版社,2015:185-199,278-285.
[6] 王定江. 应用偏微分方程[M]. 杭州:浙江大学出版社,2007:94-100.
[7] 王明新,王晓光. 数学物理方程学习指导与习题解答[M]. 北京:清华大学出版社,2007:80-87.
[8] 赵雪菲. 几类微分方程的网格差分方法[D]. 哈尔滨师范大学,2013:1-5.
[9] 李心灿. 微积分的创立者及其先驱[M]. 北京:高等教育出版社,2007:212-216.
[10] 李文林. 数学史概论(第三版)[M]. 北京:高等教育出版社,2011:262-274.

Application of Fourier Integral and Fourier Transform in Heat Conduction Equation

DAI Ying, XIAO Bing*

(*School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi, Xinjiang, 830017, China*)

Abstract: The heat conduction equation is the simplest and most typical parabolic equation. Many of the main fixed-solution problems in heat conduction, such as Cauchy problem and mixed problem, need to use Fourier integral and Fourier transform. Fourier integral transform has many properties. It is worth learning and using, especially the Fourier transform has different forms in different fields, such as modern acoustics, sonar, earthquake, nuclear science, and even biomedical applications.

Keywords: Heat conduction equation; Fixed-solution problems; Fourier integral; Fourier transform