

考虑水管冷却效果的混凝土 等效热传导方程

朱 伯 芳

(水利水电科学研究院)

提 要

在用有限元方法计算水管冷却效果时,由于水管附近的温度梯度很大,在水管周围必须布置密集的网格,使计算常因计算机内存的限制而发生困难。本文把冷却水管看成负热源,建立了大体积混凝土的等效热传导方程,给出了有关计算公式,可在平均意义上考虑水管冷却的效果。采用本文方法,只要布置比较稀疏的网格,就可以考虑水管冷却的效果,计算混凝土的温度场和温度应力。

一、前 言

在大体积混凝土施工中,目前国内外广泛采用冷却水管以控制温度、减小温度应力。在设计和施工中经常需要计算冷却水管对温度和应力的影响。单独一根水管的冷却问题,已在文献[1—3]中解决。混凝土表面和水管共同冷却的问题,则十分复杂,作者在文献[4]中给出了有限元解法,可以较准确地进行计算,但由于水管附近的温度梯度很大,必须布置密集的网格,如只计算温度场,则问题不大。如果需要同时计算温度场和应力场时,则往往由于计算机内存的限制,实际上无法计算。作者在文献[2,5]中提出了一个近似解法,即把冷却水管看成热汇,在平均意义上考虑水管冷却的效果,使问题得到了极大的简化。但热汇的效果要通过查表求得,在利用电子计算机进行计算时,颇不方便。本文给出一套计算冷却水管效果的公式,使考虑水管冷却效果的等效热传导方程趋于完善,可直接利用电子计算机进行计算,具有较大的实用价值。

二、无热源水管冷却问题

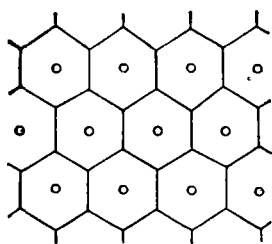
如图1所示,考虑单独一根水管的冷却问题。设混凝土圆柱体的直径为 D ,长度为 L ,无热源,混凝土初温为 T_0 ,水管进口处的冷却水温度为 T_w ,由文献[1,2]可知,混凝土的平均温度可计算如下:

$$T = T_w + (T_0 - T_w)\Phi, \quad (1)$$

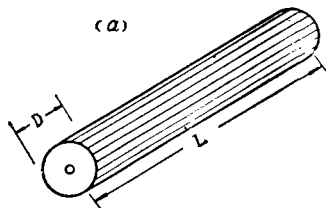
式中函数 Φ 即文献[2]中的 X_1 ,其计算十分复杂,但已有图表可查。为了以后建立等效热传导方程时使用,下面给出函数 Φ 的2种表达式。

(一)函数 Φ 的第一种表达式

设 Φ 可表示如下:

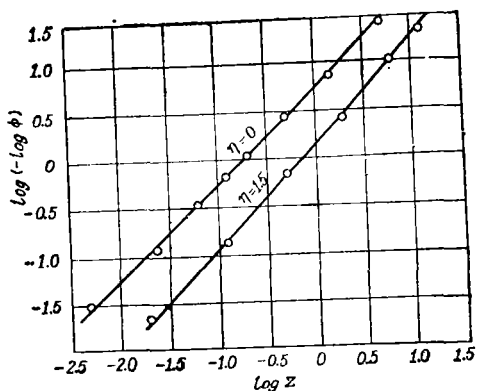


(a)



(b)

图 1 冷却柱体



注：图中 $\eta = 1.5$ 应为 1.0
图 2 $\log z$ 与 $\log(-\log \phi)$ 关系

$$\Phi = e^{-k_1 z^s}, \quad (2)$$

式中： $z = a\tau/D^2$ ； a ——混凝土的导温系数； τ ——时间； D ——混凝土冷却柱体的直径。

对式 (2) 两边取两次对数，得到

$$\log k_1 + s \log z = \log(-\log \phi). \quad (3)$$

水管冷却效果与无量纲参数 η 有关：

$$\eta = \lambda L / c_w \rho_w q_w, \quad (4)$$

式中 λ ——混凝土导热系数； L ——冷却柱体长度； c_w ——冷却水的比热； ρ_w ——水的密度； q_w ——冷却水流量。

笔者发现，当参数 η 固定时，以 $\log z$ 为横坐标，以 $\log(-\log \phi)$ 作为纵坐标， ϕ 的点基本上落在一条直线上，如图 2 所示。这一事实表明，式 (2) 可以很好地描述混凝土的冷却过程。由图 2 中直线的斜率可计算 s ，由直线的截距 $\log k_1$ 可以计算 k_1 。对于不同的 η ，分别求出相应的 k_1 和 s ，然后得到 k_1 和 s 的表达式如下：

$$k_1 = 2.08 - 1.174\eta + 0.256\eta^2; \quad (5)$$

$$s = 0.971 + 0.1485\eta - 0.0445\eta^2. \quad (6)$$

[算例 1] 设 $\eta = \lambda L / c_w \rho_w q_w = 0.50$ ， $a\tau/D^2 = 0.20$ ，由 (5) (6) 两式， $k_1 = 1.557$ ， $s = 1.0341$ ，代入式 (2) 得

$$\phi = e^{-1.557 \times 0.20^{1.0341}} = 0.7447.$$

由文献 [2] 查表得 $\phi = 0.743$ ，与计算值 0.7447 很接近。

为了全面检查式 (2) 的计算精度，对各种不同的 η 和 z 进行了验算，验算结果见表 1。由表可见，式 (2) 的计算精度很好，可满足实际工程需要。

把 $z = a\tau/D^2$ 代入式 (2)，得到

$$\phi = e^{-b_1 \tau^s}, \quad (7)$$

$$\text{式中：} \quad b_1 = k_1 (a/D)^s. \quad (8)$$

表 1

z	$\eta = 0$		$\eta = 1.0$		$\eta = 2.0$	
	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_1	ϕ_2
0.10	0.801	0.808	0.906	0.897	0.940	0.940
0.20	0.647	0.655	0.814	0.808	0.877	0.875
0.30	0.524	0.532	0.727	0.727	0.816	0.822
0.50	0.346	0.352	0.576	0.585	0.701	0.715
0.75	0.207	0.212	0.426	0.438	0.576	0.590
1.00	0.125	0.125	0.313	0.327	0.470	0.485
2.00	0.017	0.018	0.087	0.095	0.200	0.203
3.00	0.002	0.000	0.023	0.025	0.082	0.075

注: ϕ_1 为计算值;

ϕ_2 为查表值.

(二) 函数 ϕ 的第二种表达式

在二期水管冷却中, 通常冷却时间不超过 15d, $z = a\tau/D^2 \leq 0.75$, (例如, 当 $a = 0.10\text{m}^2/\text{d}$, $\tau = 15\text{d}$, $D = 1.5\text{m}$ 时, $z = 0.667$; 当 $a = 0.10\text{m}^2/\text{d}$, $\tau = 15\text{d}$, $D = 3.0\text{m}$ 时, $z = 0.1667$), 在这种情况下, 函数 ϕ 可表示如下:

$$\phi = e^{-kz}, \quad (9)$$

式中: $k = 2.09 - 1.35\eta + 0.320\eta^2. \quad (10)$

按式(9)计算的 ϕ 与由文献[2]查表所得 ϕ 值对比见表2, 可见计算误差一般不超过 2%.

把 $z = a\tau/D^2$ 代入式(9), 得到

$$\phi = e^{-k\tau}, \quad (11)$$

式中: $b = ka/D^2. \quad (12)$

在二期水管冷却中, 因子 ≤ 0.75 , 可用(9)、(11)两式计算 ϕ . 在二期冷却中, 因子可能超过 1.00, 按式(9)计算, 误差可能较大, 应按式(2)、(7)计算.

表 2

z	$\eta = 0$		$\eta = 1.0$		$\eta = 2.0$	
	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_1	ϕ_2
0.10	0.811	0.808	0.899	0.897	0.935	0.940
0.20	0.658	0.655	0.809	0.808	0.875	0.875
0.30	0.534	0.532	0.728	0.727	0.818	0.822
0.50	0.352	0.352	0.589	0.585	0.715	0.715
0.75	0.209	0.212	0.451	0.438	0.605	0.590

注: ϕ_1 系按式(9)计算值;

ϕ_2 查表值.

三、有热源的水管冷却问题

今考虑有热源混凝土单根水管的冷却问题.

首先研究冷却水温度 T_w 等于混凝土初温 T_0 的情况. 设冷却柱体的长度为 L , 直径

为 D ，混凝土绝热温升为 $\theta(\tau)$ 。如图 3 所示，在时间 τ 的绝热温升增量为 $\Delta\theta(\tau)$ ，由于水管冷却，到时间 t 时，温升为

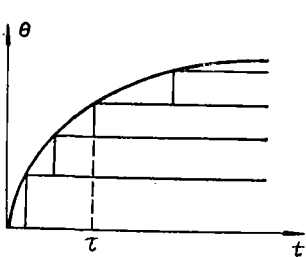


图 3 绝热温升

下面按 3 种情况分别推导。

(一) 指数型绝热温升

设绝热温升公式为

$$\theta(\tau) = \theta_0(1 - e^{-m\tau}), \tag{15}$$

式中： θ_0 为最终绝热温升； m 为常数。

由上式微分，得

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \theta_0 m e^{-m\tau}. \tag{16}$$

代入式 (14)，积分后得到

$$T(t) = \theta_0 \psi(t), \tag{17}$$

式中：

$$\psi(t) = \frac{m}{m-b}(e^{-bt} - e^{-mt}). \tag{18}$$

[算例 2] 水管方形排列，间距为 $1.5 \times 1.5 \text{ m}^2$ ，混凝土导温系数 $a = 0.10 \text{ m}^2/\text{d}$ ，导热系数 $\lambda = 226.1 \text{ kJ/m} \cdot \text{d} \cdot ^\circ\text{C}$ ，冷却水比热 $c_w = 4.187 \text{ kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C}$ ，密度 $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ ，冷却水流量 $q_w = 0.90 \text{ m}^3/\text{h} = 21.6 \text{ m}^3/\text{d}$ ，水管长度 $L = 200 \text{ m}$ ， $m = 0.315(1/\text{d})$ 。

$$\eta = \frac{\lambda L}{c_w \rho_w q_w} = \frac{226.1 \times 200}{4.187 \times 1000 \times 21.6} = 0.500,$$

等效直径 $D = 1.692 \text{ m}$ 。由式 (10)：

$$k = 2.09 - 1.35 \times 0.50 + 0.320 \times 0.50^2 = 1.495,$$

由式 (12)， $b = 1.495 \times 0.10 / 1.692^2 = 0.0522$ 。

由式 (17)，得到

$$\psi(t) = T/\theta_0 = 1.1986(e^{-0.0522t} - e^{-0.315t}).$$

冷却柱体半径 $b_1 = 1.692/2 = 0.846 \text{ m}$ ， $b_1 \sqrt{m/a} = 0.846 \sqrt{0.315/0.10} = 1.50$ ，由文献 [3] 可查出 ψ 值。由上式计算的 $\psi(t)$ 与由文献得出的 $\psi(t)$ 对比如表 3。由表可见，本文式 (18) 的计算精度是很高的，如用作图方法对比，实际上 2 条曲线将完全重

表 3

$t(\text{d})$	1	2	4	6	8	10	12	14
本文计算 ψ	0.263	0.441	0.633	0.695	0.693	0.659	0.613	0.562
文献 [3] ψ	0.270	0.430	0.630	0.700	0.690	0.666	0.610	0.560

合。

本文推得式(18)有如下优点: (1)文献[3]中只给出了 $b_1\sqrt{m/a}=1.50$ 及 $b_1\sqrt{m/a}=2.0$ 两种情况下的图表,本文式(18)不受这个限制; (2)因不必查表,可直接按公式计算,便于利用计算机进行计算。

(二)双曲线型绝热温升

设混凝土绝热温升为

$$\theta = \theta_0 \tau / (n + \tau), \quad (19)$$

式中: n 为常数。

由上式

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = n \theta_0 / (n + \tau)^2.$$

代入式(14), 得到 $T(t) = \theta_0 \psi(t)$, 而

$$\psi(t) = n b e^{-b(n+t)} \left\{ \frac{e^{bn}}{nb} - \frac{e^{b(n+t)}}{b(n+t)} + E_i(bn) - E_i[b(n+t)] \right\}, \quad (20)$$

式中: $E_i(bx) = \int \frac{e^{bx}}{x} dx$.

指数积分 $E_i(bx)$ 见函数手册, 如文献[6], 也可用下式进行数值积分:

$$\int \frac{e^{bx}}{x} dx = \sum e^{b(x+0.50\Delta x)} \ln \left(\frac{x+\Delta x}{x} \right).$$

(三)任意绝热温升

混凝土绝热温升为

$$\theta(\tau) = \theta_0 f(\tau), \quad (21)$$

式中: $f(\tau)$ 是任意函数, 可直接采用试验值。

由式(14)可知

$$T(t) = \sum e^{-b(t-\tau)} \Delta \theta(\tau) = \theta_0 \psi(t). \quad (22)$$

为提高精度, 计算 $\psi(t)$ 时采用中点龄期 $\tau + 0.5\Delta\tau$ 如下:

$$\psi(t) = \sum e^{-b(t-\tau-0.5\Delta\tau)} \Delta f(\tau), \quad (23)$$

式中: $\Delta f(\tau) = f(\tau + \Delta\tau) - f(\tau)$.

上述计算工作可直接由计算机完成, 只需输入 $\Delta f(\tau)$ 。

下面再考虑混凝土初温不等于水温的单根水管冷却问题, 设混凝土初温为 T_0 , 绝热温升为 $\theta(\tau)$, 进口处冷却水温度为 T_w , 混凝土平均温度按下式计算:

$$T(t) = T_w + (T_0 - T_w) \varphi(t) + \theta_0 \psi(t), \quad (24)$$

式中: $\varphi(t)$ 见式(11)、(7), $\psi(t)$ 见式(18)、(20)、(23)。

四、考虑水管冷却效果的混凝土等效热传导方程

在上述单根水管冷却计算中, 假定冷却柱体外表面为绝热边界, 只考虑了冷却水管的散热作用, 实际上, 除了水管外, 混凝土与空气、水、岩石等介质的接触面也会传递热量, 也具有散热作用。例如, 一期冷却中, 混凝土浇筑层面的散热作用是显著的, 二期冷却中, 上下游表面及岩石接触面都具有传热作用。这些问题是十分复杂的, 理论方法难以求解。为了用数值方法求出近似解, 可以把冷却水管看成负热源, 在平均意义上

考虑冷却水管作用, 由此可得混凝土等效热传导方程如下:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T + (T_o - T_w) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \theta_o \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, \quad (25)$$

式中 $\varphi(\tau)$ 见式(11)、(7), $\psi(\tau)$ 见式(18)(20)(23). ∇^2 为拉普拉斯算子如下:

$$\text{三维问题: } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$\text{二维问题: } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$\text{一维问题: } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

对于二维和三维问题, 可用有限元方法计算, 对于一维问题, 可把式(25)写成差分方程如下:

$$T_{i, \tau + \Delta \tau} = T_{i, \tau} \left(1 - \frac{2a \Delta \tau}{\Delta x^2} \right) + \frac{a \Delta \tau}{\Delta x^2} (T_{i-1, \tau} + T_{i+1, \tau}) + (T_o - T_w) \Delta \varphi + \theta_o \Delta \psi. \quad (26)$$

式中增量 $\Delta \varphi$ 、 $\Delta \psi$ 按下式计算:

$$\Delta \varphi = \varphi(\tau + \Delta \tau) - \varphi(\tau), \quad \Delta \psi = \psi(\tau + \Delta \tau) - \psi(\tau).$$

计算开始时, 混凝土初温为 T_o , 以后即按时段逐一计算. 在冷却水管停止后, 混凝土的绝热温升增量按式(15)、(19)计算.

根据等效热传导方程(25), 利用现有的有限元程序就可以很方便地考虑冷却水管和混凝土表面的共同散热作用进行计算, 因而具有较大的实用价值.

[算例3] 混凝土浇筑在岩基上, 每层厚度1.50. 冷却水管的水平 and 铅直间距均为1.50m. 各浇筑层间的间歇时间为4d. 冷却水管长度 $L=200\text{m}$. $\eta = \lambda L / c_w \rho_w q_w = 0.50$, $\theta(\tau) = 25\tau / (1.0 + \tau)$, 用考虑水管冷却的等效差分方程计算混凝土的温度场. 初温、气温及进口处冷却水温均假定为零. 第3浇筑层的平均温度 T_m 用实线表示于图4中. 各中虚线是用有限元法计算的结果, 可见两者相当接近.

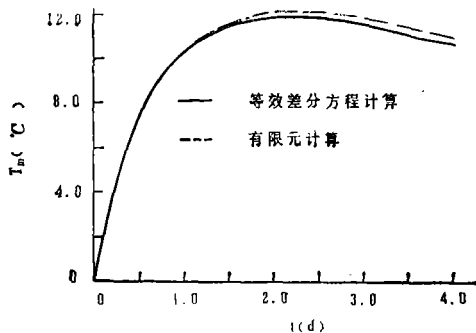


图4 水管与层面同时散热的混凝土浇筑层平均温度

五、结 束 语

冷却水管和混凝土表面共同散热问题一直是人们所关心的, 根据本文方法, 可以利用现有程序进行计算, 因而十分方便. 本文方法是在平均意义上考虑水管冷却效果, 带有一定近似性, 但考虑到混凝土施工过程中温度应力的复杂性, 这种近似处理, 在实用上还是允许的, 不失为一个有用的计算方法.

参 考 文 献

- [1] U.S.Bureau of Reclamation, Cooling of Concrete Dams.1949.
- [2] 朱伯芳等, 水工混凝土结构的温度应力与温度控制.水电出版社, 1976年.
- [3] 朱伯芳, 有内部热源的大块混凝土用埋设水管冷却的降温计算.水利学报, 1957年第 4 期.
- [4] 朱伯芳, 蔡建波, 混凝土坝水管冷却效果的有限元分析.水利学报.1985年第 4 期.
- [5] 朱伯芳, 混凝土坝一期水管冷却效果的近似分析.水利水电技术, 1986年第 5 期.
- [6] Beyer, W.H.CRC Standard Mathematical Tables.1985, P.369.
- [7] Korn, G. A. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers.1961, P.869.

Equivalent equation of heat conduction in mass concrete considering the effect of pipe cooling

Zhu Bofang

(Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power Research)

Abstract

Since the temperature gradient near the cooling pipe is great, it is necessary to adopt a very fine mesh in finite element computation to consider the effect of pipe cooling in mass concrete. As a result, the required capacity of memory is very large and the time of computation is long. Considering the cooling pipe as a negative source of heat, an equivalent equation of heat conduction is established in this paper. Formulas are given to take into account the effect of pipe cooling in average. By this method, the conventional mesh of computation may be used to calculate the temperature and stress field in mass concrete.

欢迎对本刊论文进行讨论, 有关本期论文的讨论, 请于1992年1月底以前寄到本刊编辑部。