

# 热传导问题的 MATLAB 数值计算

李 灿

湖南冶金职业技术学院  
冶金系

高彦栋 黄素逸

华中科技大学  
能源与动力工程学院

**摘要:** 分析了应用 MATLAB 中 PDE 工具箱解热传导问题的方法和步骤, 编制了三个难以用解析方法求解的算例. 采用有限元法求解导热偏微分方程, 应用 PDE 工具箱得到数值解. 对适合圆柱坐标描述的问题, 通过公式变化将其转换为能用 PDE 工具箱求解的形式. 算例表明, 用 MATLAB 对复杂形状和有内热源的非稳态导热问题进行数值计算和图形处理是方便高效的.

**关键词:** 热传导; 非稳态导热; MATLAB; 数值计算

**中图分类号:** TK124 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-4512(2002)09-0091-03

许多工程问题需要确定物体内部的温度场或确定其内部温度到达某一限定值所需要的时间, 因此研究导热问题特别是非稳态导热问题十分重要. 目前非稳态导热问题的描述方程为多维非线性的偏微分方程, 这些方程只在几何形状与边界条件都较简单的情况下才能求得理论解, 而对于几何形状和边界条件复杂的情况多用数值解法, 需借助于计算机将时间和空间坐标划分成数量巨大的网格才能得到较精确的数值解. 本文应用 MATLAB 中 PDE 工具箱, 求解复杂边界条件的热传导问题.

## 1 求解方法

求解方法是基于数值解法中的有限元法<sup>[1]</sup>, 其基本原理是把计算区域划分成一系列的三角形单元, 每个单元上取一个节点, 选定一个形状函数(抛物线形或双曲线形), 并通过单元中节点上的被求解变量值表示该函数. 通过对控制方程作积分来获得离散方程. 有限元法的最大优点是对不规则区域适应性好, 故用 MATLAB 方法求解的结果在边界上也较精确. 对于适合圆柱坐标和球坐标描述的问题, 通过对其热传导方程的变换, 也能在 MATLAB 中求解.

应用 MATLAB 的 PDE (Partial Differential Equation) 工具箱可以解如下四类偏微分方程<sup>①</sup>

$$\begin{cases} -\Delta \circ (c \Delta u) + au = f; \\ d(\partial u / \partial t) - \Delta \circ (c \Delta u) + au = f; \\ d(\partial^2 u / \partial t^2) - \Delta \circ (c \Delta u) + au = f; \\ -\Delta \circ (c \Delta u) + au = \epsilon du, \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $u$  为域  $\Omega$  上的求解变量;  $\epsilon$  为特征值;  $d, c, a, f$  为常数或变量;  $t$  为时间变量. 前 3 个方程分别称为椭圆方程、抛物线方程和双曲线方程, 第 4 个方程称为特征值方程.

导热问题的通用微分方程可写成<sup>[2]</sup>

$$\rho c_p (\partial u / \partial t) = \Delta (\lambda \Delta u) + q_v, \quad (2)$$

式中,  $u$  为求解变量, 此处表示被求解物体内的温度;  $\lambda$  为导热系数;  $q_v$  为热源的发热率密度;  $\rho$  为密度;  $c_p$  为定压比热容.

可以看出, 式(1)和式(2)中的抛物线方程有着类似的形式. 其中, 求解变量为区域的温度,  $d$  与  $\rho c_p$ ,  $c$  与  $\lambda$ ,  $f - au$  与  $q_v$  可以一一对应.

MATLAB 中的 PDE 工具箱定义了两类边界条件

$$\begin{cases} hu = r; \\ \mathbf{n} \circ (c \Delta u) + qu = g, \end{cases} \quad (3)$$

式中,  $\mathbf{n}$  为垂直于边界的单位矢量;  $h, r, q$  和  $g$  为常量或与  $u$  有关的变量. 方程(3)中的第 1 个方程称为狄利克雷(Dirichlet)边界条件, 第 2 个方程称为纽曼(Neumann)边界条件. 可以看出, 导热问题中的第一类边界与狄利克雷边界条件对应, 第二类和第三类边界条件与纽曼边界条件对应. 这些对应关系可以使用 MATLAB 中的 PDE 工具箱

收稿日期: 2002-05-09.

作者简介: 李 灿(1968-), 女, 副教授, 株洲, 湖南冶金职业技术学院冶金系(412000).

① Partial differential equation toolbox user's guide, The Math Works, Inc., 2000.

©1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

来求解.

对一个导热问题的计算可以按图 1 的步骤进行.

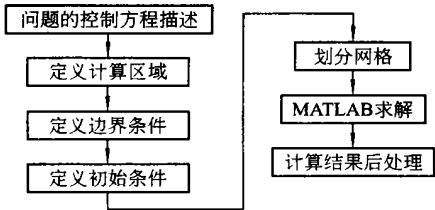


图 1 MATLAB 计算流程图

2 算例

2.1 三维非稳态无内热源的导热问题

边长为 0.5 m, 0.7 m 和 1.0 m 的长方形钢锭, 置于炉温  $u_f=1\,200\text{ }^{\circ}\text{C}$  的加热炉内, 计算 5 h 后钢锭的温度. 已知钢锭的  $\lambda=40.5\text{ W}/(\text{m}\cdot^{\circ}\text{C})$ ,  $\alpha=0.722\times 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$ ,  $u_0=25\text{ }^{\circ}\text{C}$ , 钢锭与外界的对流换热系数  $h=348\text{ W}/(\text{m}^2\cdot^{\circ}\text{C})$ .

由对应关系可得

$d=\rho c_p=\lambda/\alpha; c=\lambda; f=0; a=0,$

边界条件为纽曼边界条件, 且钢锭的 6 个边界条件均相同, 由对应关系有:

$q=h; g=hf.$

求得 5 h 后钢锭内部的温度分布如图 2, 温度梯度如图 3. 两图还显示了有限元求解的网格, 图 3 底平面的箭头方向为热流密度方向.

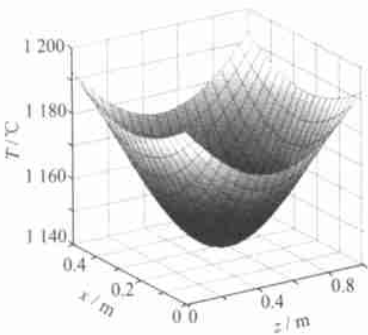


图 2 5 h 时刻钢锭的温度分布云图

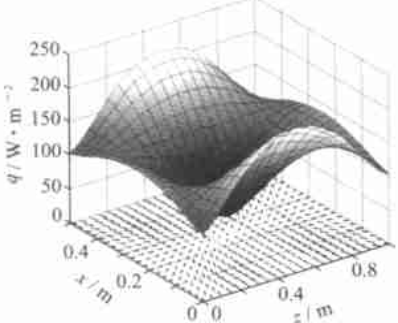


图 3 5 h 时刻钢锭的温度梯度云图

如果导热体物性系数  $\lambda$  为温度  $u$  的函数, 只要写出  $\lambda(u)$  的函数关系式, 就可以得到解.

2.2 有内热源的圆柱体非稳态导热问题

有一半径为 0.2 m, 长为 3 m 的圆柱形核电站用燃烧棒置于  $u_f=100\text{ }^{\circ}\text{C}$  的水中, 由于链式反应, 棒内有恒定的产热率密度  $q_v=20\,000\text{ W}/\text{m}^3$ , 计算 10 h 后燃烧棒内的温度分布. 已知, 燃烧棒的密度  $\rho=7\,800\text{ kg}/\text{m}^3$ ,  $c_p=500\text{ W}\cdot\text{s}/(\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C})$ ,  $\lambda=40\text{ W}/(\text{m}\cdot^{\circ}\text{C})$ ,  $u_0=0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , 燃烧棒右端恒温  $t_r=100\text{ }^{\circ}\text{C}$ , 左端有一恒热流  $q_l=5\,000\text{ W}/\text{m}^2$ , 燃烧棒外表面与外界水的对流换热系数  $h=50\text{ W}/(\text{m}^2\cdot^{\circ}\text{C})$ .

此问题宜采用圆柱坐标, 由于燃烧棒内温度沿半径对称分布, 因此可以转换为  $(r, z)$  坐标的二维问题. 将圆柱坐标内的热传导方程改写为

$$\rho c_p r \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \left[ \lambda r \frac{\partial u}{\partial r} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda r \frac{\partial u}{\partial z} \right] = q_v r, \tag{4}$$

以使其形式与式 (1) 拟合. 式 (4) 与式 (1) 中的抛物线方程对比可以得出:  $d=\rho c_p r; c=\lambda r; a=0; f=q_v r$ , 式中,  $z$  对应第一个坐标方向(在直角坐标中为  $x$  方向);  $r$  对应第二个坐标方向(在直角坐标中为  $y$ ).

燃烧棒左端的边界条件为:  $n^{\circ}(\lambda \Delta u)=q_b$ , 为纽曼边界条件, 由对应关系得:

$q=0; g=q_l r,$

燃烧棒右端为狄利克雷边界条件  $u=100$ .

燃烧棒上(外)边界条件  $n^{\circ}(\lambda \Delta u)=h(u_f-u)$  为纽曼边界条件, 由对应关系得  $q=hr; g=hu_r$ .

解析域的下边界为棒的中心, 其边界条件为  $n^{\circ}(\lambda \Delta t)=0$ , 也为纽曼边界条件.  $q=0$ , 则把  $q$  和  $g$  都设为 0 即可.

求得 10 h 时刻燃烧棒内部的温度分布如图 4 所示, 热流密度分布如图 5 所示.

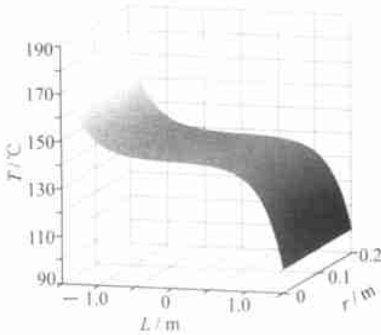


图 4 10 h 时刻燃烧棒的温度分布云图

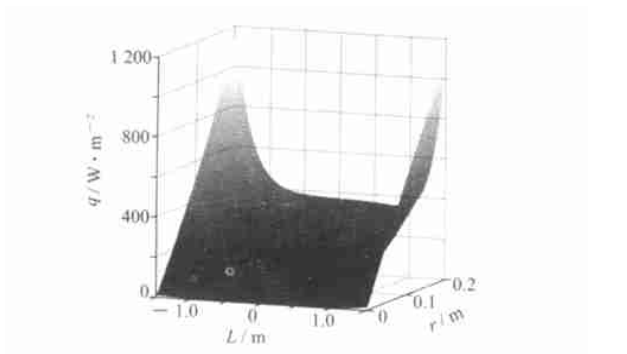


图 5 10 h 时刻燃烧棒的热流密度云图

如果内热源是时间或空间的函数, 写出函数关系式, 也可以得到解.

2.3 复杂边界的热传导问题

考虑这样一个问题: 一个正方形内嵌一菱形, 其中正方形区域的密度为  $2\text{ W/m}^2$ , 导热系数为  $10\text{ W}/(\text{cm}\cdot^\circ\text{C})$ , 菱形的密度为  $1\text{ W/m}^2$ , 导热系数为  $5\text{ W}/(\text{cm}\cdot^\circ\text{C})$ , 并有内热源的发热率密度为  $10\text{ W/m}^2$ , 两个区域的定压比热容均为  $0.1\text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$ . 初始温度为  $0\text{ }^\circ\text{C}$ . 计算  $0.1\text{ s}$  之后的等温图如图 6 所示, 箭头所指为热流方向, 热流密度图如图 7 所示.

由此可见, 应用 MATLAB 可以方便快捷地解出复杂几何形状和复杂边界条件的非稳态问题. 并且其强大的图形可视化功能使计算结果形象、直观而便于理解.

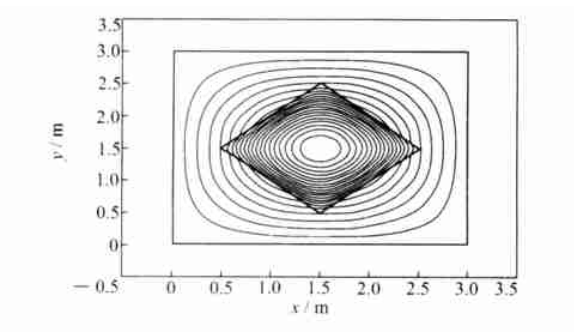


图 6 0.1 s 时刻等温图

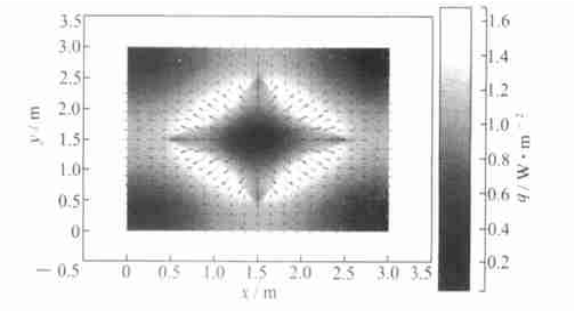


图 7 0.1 s 时刻热流密度云图

参 考 文 献

[ 1 ] 陶文铨. 数值传热学(第 2 版). 西安: 西安交通大学出版社, 2001.  
[ 2 ] 程俊国, 张洪济. 高等传热学. 重庆: 重庆大学出版社, 1990.

Numerical simulation of problems in heat conduction using MATLAB

Li Can    Gao Yandong    Huang Suyi

**Abstract:** The method and steps for finding the solutions for problems in heat conduction with the PDE toolbox in MATLAB are described. Three examples difficult to resolve with the analytical method are given. The partial differential equation (PDE) for heat conduction is solved with the finite element method and the PDE toolbox is adopted to obtain the numerical simulation. Problems suitable for description with cylindrical coordinates are transformed into forms that are capable of solution with the PDE toolbox through formula variation. Examples of calculation show that MATLAB is convenient and highly efficient for numerical simulation and graphic processing of complex geometry and non-steady-state heat conduction problems with internal thermal source.

**Key words:** heat conduction; non-steady state heat conduction; MATLAB; numerical simulation

**Li Can**    Assoc. Prof.; Dept. of Metallurgy, Hu'nan Metallurgy Professional and Technical College, Zhuzhou 412000, Hu'nan, China.