EPSON A901S 机械臂正逆运动学算法分析

Lingtao HUANG,Yanan LI

2017年5月6日

1 机器人坐标系D-H参数

1.1 机器人示意图

机器人示意图如图 1 所示。

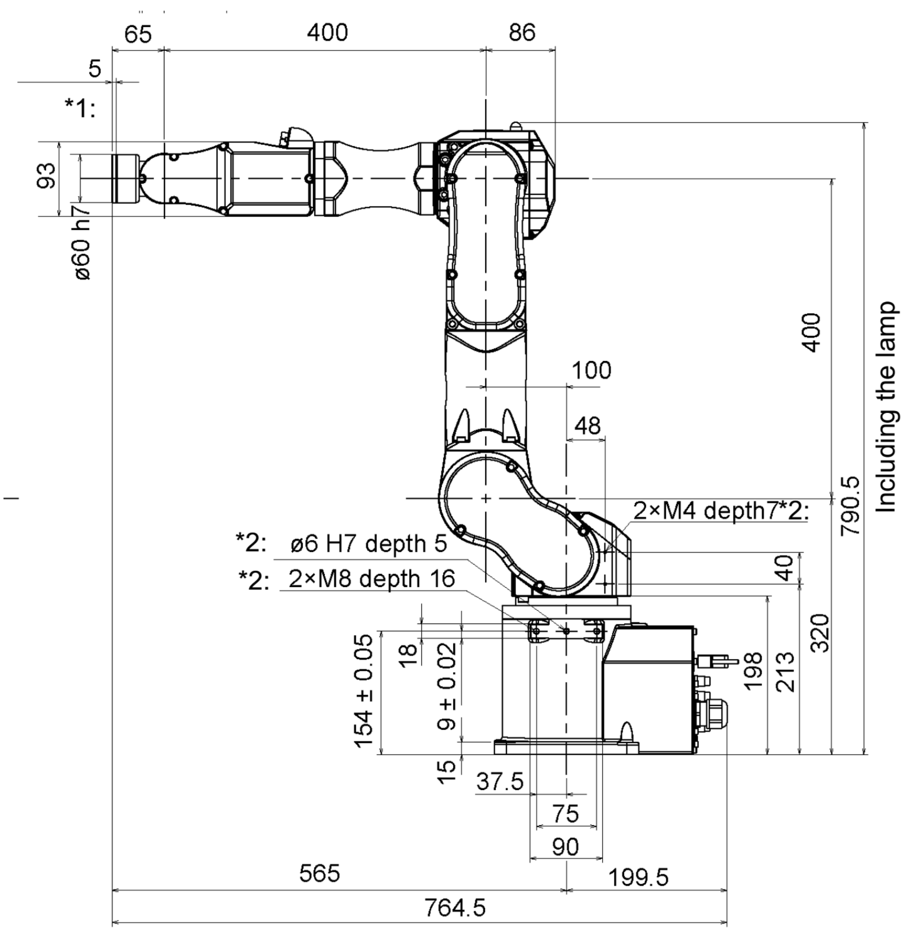

图 1: EPSON C4 A901S robot

1.2 机器人各关节坐标系

机器人各关节的坐标系如图 2 所示。

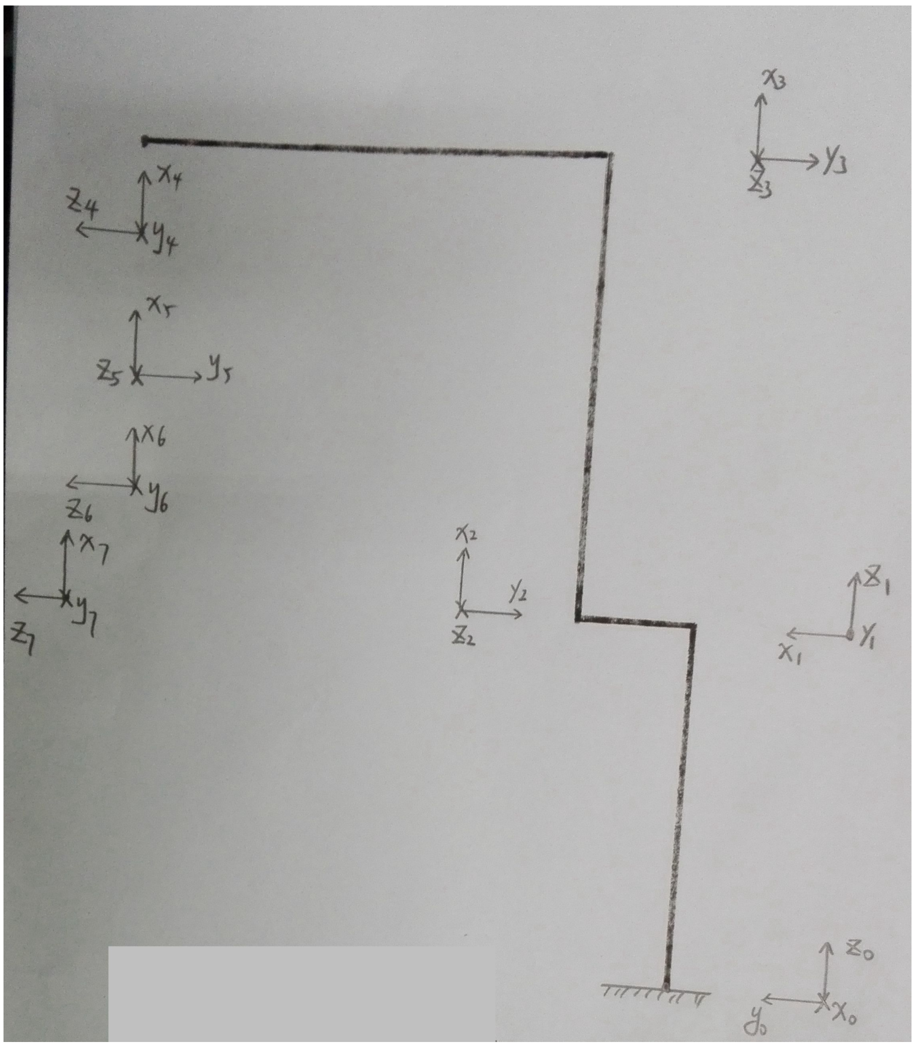

图 2: Coordinate systems of EPSON C4 A901S

1.3 机器人D-H参数

机器人的D-H参数如表 1 所示。

表 1: D-H parameters of the robot

i	$\alpha_{i-1}/\circ$	a_{i-1}/mm	d_i/mm	$\theta_i/\circ$
1	0	0	320	$90+\varphi_1$
2	90	100	0	$90+\varphi_2$
3	0	400	0	φ_3
4	90	0	400	$-\varphi_4$
5	-90	0	0	φ_5
6	90	0	0	$-\varphi_6$
7	0	0	65	0

2 旋转矩阵 R 和奇次变换矩阵 T

首先将坐标系$\{B\}$和一个已知参考坐标系$\{A\}$重合。先将$\{B\}$绕X_A旋转$xangle$角，再绕Y_A旋转$yangle$角，最后绕Z_A旋转$zangle$角。

旋转矩阵为：

$$
\begin{aligned}
{}^A_BR_{XYZ}(x,y,z) &= R_z(zangle)R_y(yangle)R_x(xangle) \\
&= \begin{bmatrix} cz & -sz & 0 \\ sz & cz & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cy & 0 & sy \\ 0 & 1 & 0 \\ -sy & 0cy & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cx & -sx \\ 0 & sx & cx \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} czcy & czsysx - szcx & czsycx + szsx \\ szcy & szsysx + czcx & szsycx - czsx \\ -sy & cysx & cycx \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中，$sx = sin(xangle), cx = cos(xangle), sy = sin(yangle), cy = cos(yangle), sz = sin(zangle), cz = cos(zangle)$。

因此，此旋转矩阵对应的其次变换矩阵为：

$$
{}^{A}_{B}T_{XYZ} = \begin{bmatrix} czcy & czsysx - szcx & czsycx + szsx & px \\ szcy & szsysx + czcx & szsycx - czsx & py \\ -sy & cysx & cycx & pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}
$$

其中，px, py, pz分别是$\{B\}$坐标系在$\{A\}$坐标系的位置$\{px, py, pz\}$。

3 正运动学

3.1 计算齐次变换矩阵 ${}^{0}_{1}T$

$i = 1$
$\alpha_0 = 0$
$a_0 = 0$
$d_1 = 320$
$\theta_1 = 90 + \varphi_1$
$c\theta_1 = cos(90 + \varphi_1) = -sin(\varphi_1)$
$s\theta_1 = sin(90 + \varphi_1) = cos(\varphi_1)$
$c\alpha_0 = cos(0) = 1$
$s\alpha_0 = sin(0) = 0$
其次变换矩阵为：

$$
{}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} -s1 & -c1 & 0 & 0 \\ c1 & -s1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 320 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}
$$

3.2 计算齐次变换矩阵 ${}^{1}_{2}T$

$i = 2$
$\alpha_1 = 90$
$a_1 = 100$
$d_2 = 0$
$\theta_2 = 90 + \varphi_2$
$c\theta_2 = cos(90 + \varphi_2) = -sin(\varphi_2)$

$s\theta_2 = sin(90 + \varphi_2) = cos(\varphi_2)$
$c\alpha_1 = cos(90) = 0$
$s\alpha_1 = sin(90) = 1$
其次变换矩阵为：

$$ {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} -s2 & -c2 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ c2 & -s2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4} $$

3.3 计算齐次变换矩阵 ${}^{2}_{3}T$

$i = 3$
$\alpha_2 = 0$
$a_2 = 400$
$d_3 = 0$
$\theta_3 = \varphi_3$
$c\theta_3 = cos(\varphi_3)$
$s\theta_3 = sin(\varphi_3)$
$c\alpha_2 = cos(0) = 1$
$s\alpha_2 = sin(0) = 0$
其次变换矩阵为：

$$ {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c3 & -s3 & 0 & 400 \\ s3 & c3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5} $$

3.4 计算齐次变换矩阵 ${}^{3}_{4}T$

$i = 4$
$\alpha_3 = 90$
$a_3 = 0$
$d_4 = 400$
$\theta_4 = -\varphi_4$
$c\theta_4 = cos(-\varphi_4) = cos(\varphi_4)$
$s\theta_4 = sin(-\varphi_4) = -sin(\varphi_4)$

$c\alpha_3 = cos(90) = 0$
$s\alpha_3 = sin(90) = 1$
其次变换矩阵为：

$$ {}^3_4T = \begin{bmatrix} c4 & s4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -400 \\ -s4 & c4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6} $$

3.5 计算齐次变换矩阵 ${}^4_5T$

$i = 5$
$\alpha_4 = -90$
$a_4 = 0$
$d_5 = 0$
$\theta_5 = \varphi_5$
$c\theta_5 = cos(\varphi_5)$
$s\theta_5 = sin(\varphi_5)$
$c\alpha_4 = cos(-90) = 0$
$s\alpha_4 = sin(-90) = -1$
其次变换矩阵为：

$$ {}^4_5T = \begin{bmatrix} c5 & -s5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s5 & -c5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7} $$

3.6 计算齐次变换矩阵 ${}^5_6T$

$i = 6$
$\alpha_5 = 90$
$a_5 = 0$
$d_6 = 0$
$\theta_6 = -\varphi_6$
$c\theta_6 = cos(-\varphi_6) = cos(\varphi_6)$
$s\theta_6 = sin(-\varphi_6) = -sin(\varphi_6)$
$c\alpha_5 = cos(90) = 0$

$s\alpha_5 = sin(90) = 1$
其次变换矩阵为：

$$
{}^{5}_{6}T = \begin{bmatrix} c6 & s6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -s6 & c6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}
$$

3.7 计算齐次变换矩阵 ${}^{6}_{7}T$

$i = 7$
$\alpha_6 = 0$
$a_6 = 0$
$d_7 = 65$
$\theta_7 = 0$
$c\theta_7 = cos(0) = 1$
$s\theta_7 = sin(0) = 0$
$c\alpha_6 = cos(0) = 1$
$s\alpha_6 = sin(0) = 0$
其次变换矩阵为：

$$
{}^{6}_{7}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 65 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}
$$

3.8 计算齐次变换矩阵 ${}^{0}_{6}T$

$$
{}^{0}_{6}T = {}^{0}_{1}T * {}^{1}_{2}T * {}^{2}_{3}T * {}^{3}_{4}T * {}^{4}_{5}T * {}^{5}_{6}T \tag{10}
$$

$$
{}^{0}_{7}T = {}^{0}_{6}T * {}^{6}_{7}T \tag{11}
$$

3.9 验证正运动学的正确性

${}^{A}_{B}T_{XYZ}$可以表示第$\{7\}$坐标系相对于基坐标系$\{0\}$的其次变换矩阵${}^{A}_{B}T_{XYZ}$ $= {}^{0}_{7}T$. 根据公式(11)，变换得到：

$$
{}^{0}_{6}T = {}^{A}_{B}T_{XYZ} * {}^{6}_{7}T^{-1} \tag{12}
$$

单独计算等号左侧[1]和右侧[2]的矩阵，如果机器人在任意位置，两侧的矩阵都相等，则可以证明此正运动学是正确的。

4 逆运动学—前3个关节角

本文采用的机械臂是EPSON C4 A901S系列，后三个关节轴相较于同一点，满足Pieper准则，所以存在封闭解。前三个关节影响第{6}坐标系的**位置**，后三个关节影响第{6}坐标系的**姿态**。

4.1 第{7}坐标系转换成第{6}坐标系

已知条件：第{7}坐标系在世界坐标系的位姿 pose7 $= [px7, py7, pz7, xangle, yangle, zangle]$。

将pose7带入到公式(12)中，即可得到矩阵 ${}_6^0T$。由于${}_6^0T$表示第{6}坐标系相对于第{0}坐标系的齐次变换矩阵，故其第4列前3个元素表示第{6}坐标系在世界坐标系的位置[px, py, pz]，又由于第{7}坐标系相对于第{6}坐标系姿态不发生变化，所以第{6}坐标系在世界坐标系的位姿为[3]：

$$pose6 = [px, py, pz, xangle, yangle, zangle] \tag{13}$$

4.2 求关节1的角度$a1$

已知条件：第{6}坐标系在世界坐标系的位姿为$pose6 = [px, py, pz, xangle, yangle, zangle]$，并且令第{6}坐标系相对于第{0}坐标系的其次变换矩阵为T_{pose6}，此时机器人6个关节的关节角为$[a1, a2, a3, a4, a5, a6]$。

$$T_{pose6} = \begin{bmatrix} nx & ox & ax & px \\ ny & oy & ay & py \\ nz & oz & az & pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

由于$T_{pose6} = {}_6^0T = {}_1^0T * {}_6^1T$，变换得到 ${}_6^1T = {}_1^0T^{-1} * T_{pose6}$，令$T_{left} = {}_6^1T$，$T_{right} = {}_1^0T^{-1} * T_{pose6}$。

[1]参看MATLAB程序“homoMatrix.m”

[2]参看MATLAB程序“forward.m”

[3]参看MATLAB程序“WorldCoordinate6.m”

4×4 矩阵T_{left} 和 T_{right}的元素一一对应相等[4],得到三个公式：

$$-(px * cos(a1) + py * sin(a1)) = 0 \tag{15}$$

$$(pz - 320)/400 = cos(a2) + sin(a2 + a3) \tag{16}$$

$$(py * cos(a1) - px * sin(a1) - 100)/400 = cos(a2 + a3) - sin(a2) \tag{17}$$

由公式(15)得到关节1的角度$a1$：

$$a1 = arctan(\frac{-px}{py}) \tag{18}$$

关节1的角度$a1$有两个值[5]：

$$\begin{cases} \begin{cases} a11 = a1 \\ a12 = a11 - \pi \end{cases} & , \quad a1 > 0 \\ \begin{cases} a12 = a1 \\ a11 = \pi + a12 \end{cases} & , \quad a1 <= 0 \end{cases} \tag{19}$$

4.3 求关节3的角度$a3$

令公式(16)左侧的式子为m, 公式(17)左侧的式子为n, 则两个方程变换成：

$$m = cos(a2) + sin(a2 + a3) \tag{20}$$

$$n = cos(a2 + a3) - sin(a2) \tag{21}$$

其中，$m = (pz - 320)/400, n = (py * cos(a1) - px * sin(a1) - 100)/400$。

对公式(20)和公式(21)等号两边同时平方再相加，得到关节3的角度a3,

$$a3 = arcsin(\frac{m^2 + n^2}{2} - 1) \tag{22}$$

每一个$a1$对应的关节3的角度$a3$有两个值[6]：

$$\begin{cases} a31 = a3 \\ a32 = -a3 \end{cases} \tag{23}$$

又因为$a1$共有2个值，所以$a3$共有4个值。

---

[4]参看MATLAB程序“theory123.m”

[5]参看Csharp程序：类InvKinematics中方法GetAngle1()

[6]参看Csharp程序：类InvKinematics中方法GetAngle3()

4.4 求关节2的角度$a2$

将$a1$和$a3$的值带入到公式(20)和(21)中，得到关于$a2$的方程组：

$$cos(a2) = \frac{n * cos(a3)}{2(sin(a3)+1)} + \frac{m}{2} \tag{24}$$

$$sin(a2) = \frac{1}{2}(\frac{m * cos(a3)}{1+sin(a3)} - n) \tag{25}$$

通过公式(24)得到$a2$的值[7]：

$$a2 = arccos(\frac{n * cos(a3)}{2(sin(a3)+1)} + \frac{m}{2}) \tag{26}$$

其中，$a2$的正负号由$sin(a2)$的正负号决定：

$$a2 = \begin{cases} |a2|, & \text{if } sin(a2) > 0 \\ -|a2|, & \text{if } sin(a2) <= 0 \end{cases} \tag{27}$$

每一个$a3$唯一对应一个$a2$的值，所以$a2$也有4个值。

4.5 筛选最优关节角

由上述可知，前三个关节角共有4组可能的角度组合[8]：

$$\begin{cases} a11, a21, a31 \\ a11, a22, a32 \\ a12, a23, a33 \\ a12, a24, a34 \end{cases}$$

4.5.1 角度范围筛选

虽然前3个关节角度有4组不同的角度组合，但是由于机器人各关节有些角度无法到达，以此可以排除一些角度。现在列出前三个关节的角度范围(单位：度)：

$$\begin{cases} [-170, 170] & a1 \\ [-160, 65] & a2 \\ [-51, 225] & a3 \end{cases}$$

[7]参看Csharp程序：类InvKinematics中方法GetAngle2()

[8]参看Csharp程序：类InvKinematics中方法Filter123()

4.5.2 旋转幅度最小原则

如果根据(4.5.1)节的方法仅仅筛选得到1组角度，则此角度就是最终的关节角度组合。如果不止1组角度，则再经过本节采用的筛选方法筛选出最终的角度组合。

假设，有N组角度组合存在，先判断关节1从当前角度转到哪一组的目标角度，转动的幅度最小，则这组就是最终的组合。如果相同，再判断关节2，以此类推，就可以得到最终最优的前三个关节角度组合。

这里得到的前三个关节的角度$a1$, $a2$ 和 $a3$ 将用于计算$a4$, $a5$ 和 $a6$ 的值。

5 逆运动学—后3个关节角

5.1 求关节5的角度$a5$

由公式(12)可知，${}^3_6T = {}^0_3T^{-1} * {}^A_BT_{XYZ} * {}^6_7T^{-1}$。令 $T_{left2} = {}^3_6T, T_{right2} = {}^0_3T^{-1} * {}^A_BT_{XYZ} * {}^6_7T^{-1}$, 其中，$T_{right2}$ 仅与 $a1, a2, a3, xangle, yangle, zangle$ 有关，而这些值目前都是已知的。T_{left2} 与 $a4, a5, a6$ 有关，这些值是待求的。

分别将T_{left2}和T_{right2}的表达式列出来，然后两边元素一一对应相等，并找到$a4, a5, a6$关于已知角的表达式。

由 $T_{left2}(2,3) = T_{right2}(2,3)$ 得到关于 $a5$ 的表达式：

$$-cos(a5) = f(a1, a2, a3, xangle, yangle, zangle) \tag{28}$$

其中，$f(a1, a2, a3, xangle, yangle, zangle)$ 是关于已知量 $a1, a2, a3$, $xangle, yangle, zangle$ 的表达式[9]。

```
double f =
− (c1∗s2∗s3∗cz∗sx − c1∗c2∗c3∗cz∗sx
− c2∗c3∗s1∗sx∗sz + s1∗s2∗s3∗sx∗sz
+ c1∗c1∗c2∗s3∗cx∗cy + c1∗c1∗c3∗s2∗cx∗cy
```

[9]参看Csharp程序：类InvKinematics中方法GetAngle5()

```
+ c2*s1*s1*s3*cx*cy + c3*s1*s1*s2*cx*cy
+ c1*c2*c3*cx*sy*sz − c2*c3*s1*cx*cz*sy
− c1*s2*s3*cx*sy*sz + s1*s2*s3*cx*cz*sy)
/(c2*c2*c3*c3 + c2*c2*s3*s3+c3*c3*s2*s2 + s2*s2*s3*s3);
```

所以得到 $a5$ 的值：

$$a5 = arccos(-f) \tag{29}$$

关节5的角度 $a5$ 有两个值:

$$\begin{cases} a51 = a5 \\ a52 = -a5 \end{cases} \tag{30}$$

5.2 求关节4的角度$a4$

由 $T_{left2}(1,3) = T_{right2}(1,3)$ 和 $T_{left2}(3,3) = T_{right2}(3,3)$ 得到关于 $a4$ 的表达式：

$$\begin{cases} cos(a4) * sin(a5) = g_1(a1, a2, a3, xangle, yangle, zangle) \\ -sin(a4) * sin(a5) = g_2(a1, a2, a3, xangle, yangle, zangle) \end{cases} \tag{31}$$

其中，$g_1(a1, a2, a3, xangle, yangle, zangle)$, $g_2(a1, a2, a3, xangle,$ $yangle, zangle)$ 均是关于已知量 $a1, a2, a3, xangle, yangle, zangle$ 的表达式[10]。

$g_1(a1, a2, a3, xangle, yangle, zangle)$ 的表达式等于变量 $a4_value$的值,
$g_2(a1, a2, a3, xangle, yangle, zangle)$ 的表达式等于变量 $a4_value2$的值。

```
double a4_value =
(c1*c2*s3*cz*sx + c1*c3*s2*cz*sx
+ c2*s1*s3*sx*sz + c3*s1*s2*sx*sz
+ c1*c1*c2*c3*cx*cy + c2*c3*s1*s1*cx*cy
− c1*c1*s2*s3*cx*cy − s1*s1*s2*s3*cx*cy
− c1*c2*s3*cx*sy*sz − c1*c3*s2*cx*sy*sz
+ c2*s1*s3*cx*cz*sy + c3*s1*s2*cx*cz*sy)
/(c2*c2*c3*c3 + c2*c2*s3*s3 + c3*c3*s2*s2 + s2*s2*s3*s3);
```

[10]参看Csharp程序：类InvKinematics中方法GetAngle4()

```
double a4_value2 = c1*sx*sz − s1*cz*sx + c1*cx*cz*sy + s1*cx*sy*sz;
```

所以在 $a5 \neq 0$ 处[11]得到 $a4$ 的值：

$$a4 = arccos(\frac{g_1}{sin(a5)}) \tag{32}$$

此时，$a4$ 也有两个值，但是通过判断公式(31)中 $sin(a4)$ 的正负号，可以唯一确定一个 $a4$ 的值。

$$a4 = \begin{cases} |arccos(\frac{g_1}{sin(a5)})|, & \text{if } sin(a4) > 0 \\ -|arccos(\frac{g_1}{sin(a5)})|, & \text{if } sin(a4) <= 0 \end{cases} \tag{33}$$

综上，每一个 $a5$ 唯一对应一个 $a4$，又由于共有2个 $a5$，所以 $a4$ 也有2个值。

5.3 求关节6的角度$a6$

由 $T_{left2}(2,1) = T_{right2}(2,1)$ 和 $T_{left2}(2,2) = T_{right2}(2,2)$ 得到关于 $a6$ 的表达式：

$$\begin{cases} cos(a6) * sin(a5) = h_1(a1, a2, a3, xangle, yangle, zangle) \\ sin(a6) * sin(a5) = h_2(a1, a2, a3, xangle, yangle, zangle) \end{cases} \tag{34}$$

其中，$h_1(a1, a2, a3, xangle, yangle, zangle), h_2(a1, a2, a3, xangle, yangle, zangle)$ 均是关于已知量 $a1, a2, a3, xangle, yangle, zangle$ 的表达式[12]。

$h_1(a1, a2, a3, xangle, yangle, zangle)$ 的表达式等于变量 $a6_value$的值，$h_2(a1, a2, a3, xangle, yangle, zangle)$ 的表达式等于变量 $a6_value2$的值。

```
double a6_value =
(c1*c1*c2*s3*sy + c1*c1*c3*s2*sy
+ c2*s1*s1*s3*sy + c3*s1*s1*s2*sy
− c1*c2*c3*cy*sz + c2*c3*s1*cy*cz
+ c1*s2*s3*cy*sz − s1*s2*s3*cy*cz)
```

[11] $a5 = 0$的情况将在(5.5.1)节讨论

[12] 参看Csharp程序：类InvKinematics中方法GetAngle6()

```
/(c2*c2*c3*c3 + c2*c2*s3*s3
+ c3*c3*s2*s2 + s2*s2*s3*s3);

double a6_value2 =
- (c1*c2*c3*cx*cz - c1*s2*s3*cx*cz
+ c2*c3*s1*cx*sz - s1*s2*s3*cx*sz
+ c1*c1*c2*s3*cy*sx + c1*c1*c3*s2*cy*sx
+ c2*s1*s1*s3*cy*sx + c3*s1*s1*s2*cy*sx
+ c1*c2*c3*sx*sy*sz - c2*c3*s1*cz*sx*sy
- c1*s2*s3*sx*sy*sz + s1*s2*s3*cz*sx*sy)
/(c2*c2*c3*c3+c2*c2*s3*s3+c3*c3*s2*s2
+ s2*s2*s3*s3);
```

所以在 $a5 \neq 0$ 处[13]得到 $a6$ 的值：

$$a6 = arccos(\frac{h_1}{sin(a5)}) \tag{35}$$

此时，$a6$ 也有两个值，但是通过判断公式(34)中 $sin(a6)$ 的正负号，可以唯一确定一个 $a6$ 的值。

$$a6 = \begin{cases} |arccos(\frac{h_1}{sin(a5)})| & \text{if } sin(a6) > 0 \\ -|arccos(\frac{h_1}{sin(a5)})| & \text{if } sin(a6) <= 0 \end{cases} \tag{36}$$

综上，每一个 $a5$ 唯一对应一个 $a6$，又由于共有2个 $a5$，所以 $a6$ 也有2个值。

5.4 筛选最优关节角

由上述可知，后三个关节角共有2组可能的角度组合：

$$\begin{cases} a41, a51, a61 \\ a42, a52, a62 \end{cases}$$

5.4.1 角度范围筛选

此方法与(4.5.1)节的方法是一致的，现在列出后三个关节的角度范围[14]：

[13] $a5 = 0$的情况将在(5.5.2)节讨论

[14] 参看Csharp程序：类InvKinematics中方法Filter456()

$$\begin{cases} [-200,200] & a4 \\ [-135,135] & a5 \\ [-360,360] & a6 \end{cases}$$

5.4.2 旋转幅度最小原则

此方法与(4.5.2)节的方法是一致的，在此不再赘述[15]。

5.5 $a5=0$ 处 $a4,a6$ 的值

5.5.1 $a5=0$ 处求 $a4$

由公式(32)可知，当 $a5 = 0$ 时，$a4$ 解不存在。这里采用的方法[16]是当 $a5=0$ 或者非常接近 0 时，对 $a5$ 补偿一个值，使公式(32)有解。
令一个临界值为Limit = 0.0001°，

$$a4 = \begin{cases} -Limit, & a5=0 \\ sign(a5)*Limit, & -Limit \le a5 \le Limit \quad AND \quad a5 \ne 0 \end{cases} \tag{37}$$

将此 $a5$ 的值带入公式(32)中，即可求出 $a4$ 的值。

5.5.2 $a5=0$ 处求 $a6$

由公式(35)可知，当 $a5 = 0$ 时，$a6$ 解不存在。这里采用和(5.5.1)节相同的方法[17],当 $a5 = 0$ 或者非常接近 0 时，对 $a5$ 补偿一个值，使公式(35)有解。
令一个临界值为Limit = 0.0001°，

$$a6 = \begin{cases} -Limit, & a5=0 \\ sign(a5)*Limit, & -Limit \le a5 \le Limit \quad AND \quad a5 \ne 0 \end{cases} \tag{38}$$

将此 $a6$ 的值带入公式(35)中，即可求出 $a6$ 的值。

---

[15]参看Csharp程序：类InvKinematics中方法Filter456()

[16]参看Csharp程序：类InvKinematics中方法GetAngle4()

[17]参看Csharp程序：类InvKinematics中方法GetAngle6()