Dancing Links

舞蹈链

问题 1：

集合 s 有 n 个成员，现在有 m 个子集，每个子集包含一些成员，每个成员都属于集合 s。在 m 个子集中选择一些子集组成子集的集合 t，使 t 中包含的成员可以覆盖集合 s，即 s 中所有成员都属于 t 中的某个子集。

重复覆盖：集合 s 中的任意成员 x 至少属于 t 中的一个子集，允许同时属于两个及以上的子集。例如集合$s = \{0, 1, 2, 3\}$，在子集$a = \{0, 1\}$、$b = \{1, 2\}$、$c = \{1, 3\}$中选择$t = \{a, b, c\}$即可重复覆盖 s。

精确覆盖：集合 s 中的任意成员 x 属于且只属于 t 中的一个子集，不能出现 x 不属于 t 中的任何子集，或者 x 同时属于 t 中两个及以上的子集。例如集合$s = \{0, 1, 2, 3\}$，在子集$a = \{0, 1\}$、$b = \{1, 2\}$、$c = \{2, 3\}$中选择$t = \{a, b\}$即可精确覆盖 s。

给定集合 s 和 m 个子集，求出其重复覆盖和精确覆盖。

重复覆盖解法：

遍历集合 s 中每个成员 x，若其尚未被包含在 t 中，则在 m 个集合中寻找一个包含 x 的子集加入 t 中，重复该步骤即可获得重复覆盖。

精确覆盖解法：

求解精确覆盖的算法称为 X 算法，将集合 s 中 n 个成员看作列，将 m 个子集看作行，组成一个$m \times n$的矩阵 d。若子集sub_i（其中$1 \le i \le m$）包含某个成员x_j（其中$1 \le j \le n$），则$d[i, j] = 1$；若不包含则$d[i, j] = 0$。对于集合$s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$有$n = 7$个成员，还有$m = 6$个子集$sub_1 = \{1, 3, 5, 6\}$、$sub_2 = \{1, 4, 7\}$、$sub_3 = \{2, 6, 7\}$、$sub_4 = \{2, 3, 6\}$、$sub_5 = \{4, 5, 7\}$、$sub_6 = \{5\}$的情况，如图所示：

					n			
		1	2	3	4	5	6	7
	sub 1	1	0	1	0	1	1	0
	sub 2	1	0	0	1	0	0	1
m	sub 3	0	1	0	0	0	1	1
	sub 4	0	1	1	0	0	1	0
	sub 5	0	0	0	1	1	0	1
	sub 6	0	0	0	0	1	0	0

在这个矩阵 d 上进行回溯法（我个人认为回溯法和深度优先递归搜索的本质都是递归）即可得到精确覆盖，过程如下：

(1) 从 1 开始遍历集合 s 中每个成员，对于成员 1，遍历所有子集，找到第一个满足$d[i, 1] = 1$的子集sub_1，即$i = 1$时有$d[1, 1] = 1$，选择该子集作为精确覆盖中的一个子集$\{sub_1\}$，已经覆盖的成员有$\{1, 3, 5, 6\}$，$sub_1 = \{1, 3, 5, 6\}$中已经包含的成员其他子集不能再出现，因此删掉其他包含$\{1, 3, 5, 6\}$的子集sub_2、sub_4、sub_5、sub_6、sub_3，

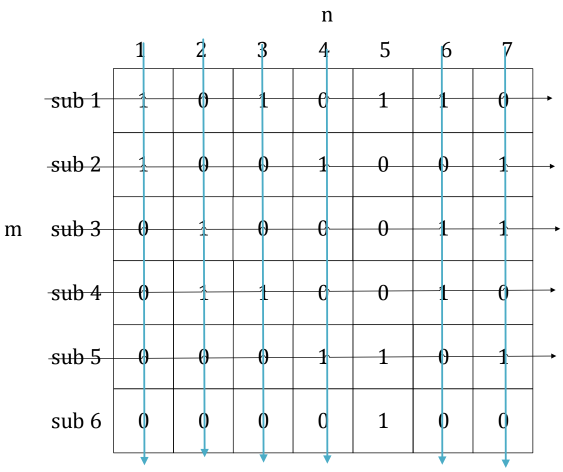
将sub_1也删掉；

m \ n	1	2	3	4	5	6	7
sub 1	1	0	1	0	1	1	0
sub 2	1	0	0	1	0	0	1
sub 3	0	1	0	0	0	1	1
sub 4	0	1	1	0	0	1	0
sub 5	0	0	0	1	1	0	1
sub 6	0	0	0	0	1	0	0

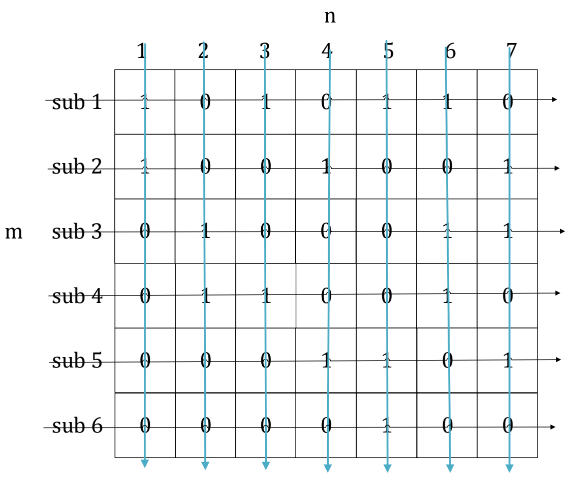
(2) 这时矩阵 d 中所有子集都被删除，成为空矩阵，但并没有完全覆盖集合 s 中所有成员，因此(1)的选择是失败的，撤销(1)中的所有操作。继续从 1 开始遍历集合 s 中每个成员，对于成员 1，遍历所有子集，找到第二个满足$d[i,1]=1$的子集sub_2，即$i=2$时有$d[2,1]=1$，选择该子集作为精确覆盖中的一个子集$\{sub_2\}$，已经覆盖的成员有$\{1,4,7\}$，$sub_2=\{1,4,7\}$中已经包含的成员其他子集不能再出现，因此删掉其他包含$\{1,4,7\}$的子集sub_1、sub_3、sub_5，将sub_2也删掉；

m \ n	1	2	3	4	5	6	7
sub 1	1	0	1	0	1	1	0
sub 2	1	0	0	1	0	0	1
sub 3	0	1	0	0	0	1	1
sub 4	0	1	1	0	0	1	0
sub 5	0	0	0	1	1	0	1
sub 6	0	0	0	0	1	0	0

(3) 从 2 开始遍历集合 s 中剩下的成员，对于成员 2，遍历剩余子集，找到第一个满足$d[i,2]=1$的子集sub_4，即$i=4$时有$d[4,2]=1$，选择该子集作为精确覆盖中的一个子集$\{sub_2,sub_4\}$，已经覆盖的成员有$\{1,2,3,4,6,7\}$，$sub_4=\{2,3,6\}$中已经包含的成员其他子集不能再包含，因此删掉其他包含$\{2,3,6\}$的子集（没有找到），将sub_4也删掉；



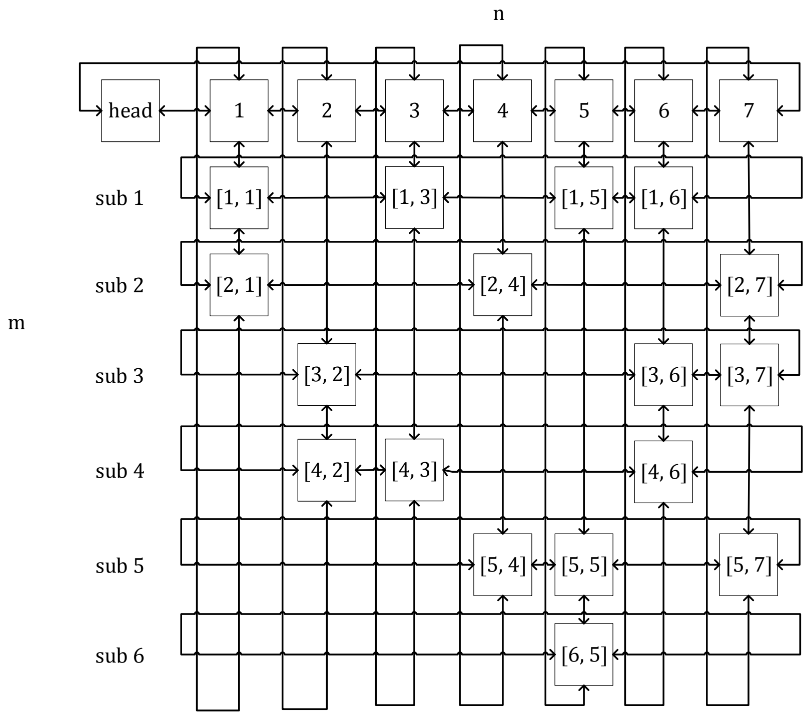
(4) 从 5 开始遍历集合 s 中剩下的成员，对于成员 5，遍历剩余子集，找到第一个满足$d[i,5]=1$的子集sub_6，即$i=6$时有$d[6,5]=1$，选择该子集作为精确覆盖中的一个子集$\{sub_2,sub_4,sub_6\}$，已经覆盖的成员有$\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$sub_6=\{5\}$中已经包含的成员其他子集不能再包含（没有找到），将sub_6删掉后矩阵 d 即为空矩阵，并且已经完全覆盖了子集 s 中的所有成员，则精确覆盖的结果为$\{sub_2,sub_4,sub_6\}$，算法结束；



(5) 当算法进行到矩阵 d 为空矩阵，但集合 s 中所有成员并没有被完全覆盖的情况时，说明某一次的子集选择有错误，将该次选择的操作进行恢复，并寻找下一个覆盖要求的子集，继续尝试，直到找到精确覆盖；

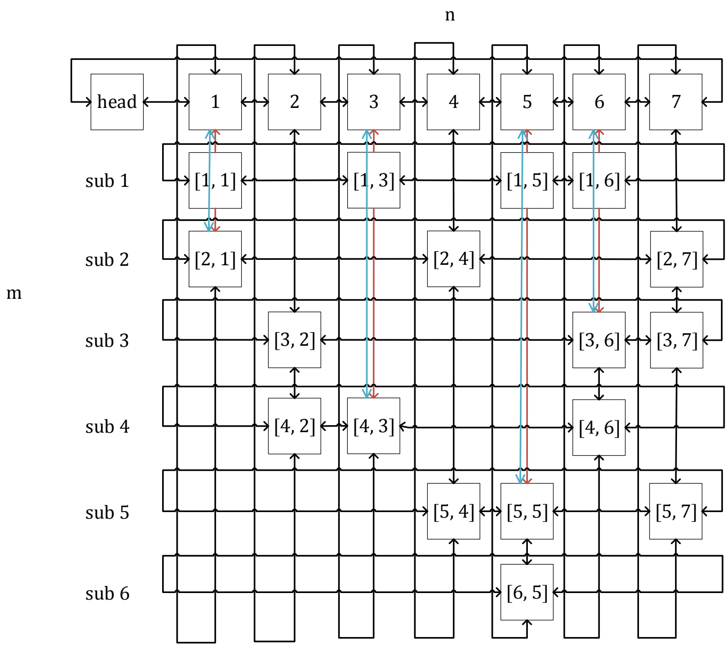
回溯法的递归结束条件是矩阵 d 为空（当矩阵 d 为空时递归结束），每次递归时选择矩阵中的一列x_j（其中$0\le j\le n$），遍历矩阵 d 中的所有子集（行），找到一子集sub_i（其中$0\le i\le m$）满足$d[i,j]=1$，选择该子集（行）。由于精确覆盖的要求，其他包含该子集中任意成员的子集，都不能再选择，将其删掉，并将子集sub_i也删掉。重复这个操作直到将矩阵 d 删空，检查矩阵 d 为空时是否集合 s 的所有成员都被覆盖到。在选取包含某个成员x_j的子集时，可能有多个选择，若选择其中一个子集无法最终将集合 s 完全覆盖，则在递归函数中返回这一层，尝试其他子集，直到找出精确覆盖。

十字链表是一种方便删除矩阵 d 中的行列、以及恢复行列的数据结构。每个节点有上下左右 4 个指针指向周围的节点。现在将上文的集合$s=\{1,2,3,4,5,6,7\}$、6 个子集以及 5 个步骤，用十字链表的形式重复一遍。建立十字链表时需要额外对每一列添加头节点，并添加一个总的 head 节点连接所有列的头节点，如图所示：



(1) 选取 head 节点右边的节点 1（第 1 列），在第 1 列中从上到下依次考虑每个子集，看是否最终可以得到精确覆盖，第 1 列有 2 个选择sub_1、sub_2，首先尝试选择sub_1。根据上文可知，目标是将包含sub_1成员$\{1,3,5,6\}$的所有子集都删除掉，即删除sub_1、sub_2、sub_4、sub_5、sub_6、sub_3。在十字链表中这个过程分为以下几个步骤来依次进行；

(2) 将sub_1的所有成员$[1,1]$、$[1,3]$、$[1,5]$、$[1,6]$首先删除；



(3) 再依次将属于$\{1,3,5,6\}$列上的所有节点，以及其所在子集（行）上的所有节点，都删除掉；

(4) 这时矩阵 d 为空，所选子集为$\{sub_1\}$，覆盖的成员为$\{1,3,5,6\}$，没有完全覆盖，因此选择错误，恢复$\{1,3,5,6\}$列的所有元素，然后继续尝试第 1 列（节点 1）的下一

个节点$[2,1]$，直到找到精确覆盖；

舞蹈链算法在最坏情况下的时间复杂度与递归的时间复杂度一样，为$O(n\times m)$。