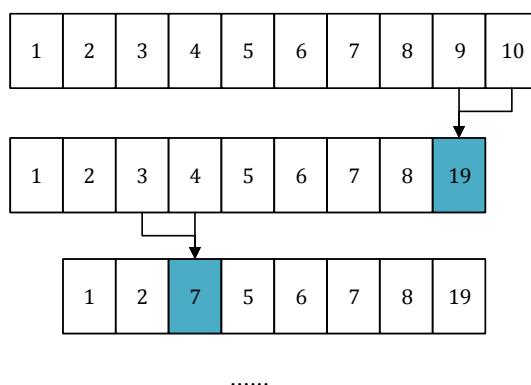


## Minimum Merge Cost

### 最小合并代价

问题:

对长度为 $n$ 的序列 $s$ 进行合并, 每次将相邻的两个元素 $a$ 和 $b$ 合并为一个新的元素 $c$ , 并且 $c = a + b$ , 合并产生的代价也为 $a + b$ 。经过 $n - 1$ 次合并后, 序列 $s$ 被合并为 1 个数字, 这个过程的代价是之前所有合并的代价总和。求出将序列 $s$ 合并为一个数字的最小合并代价。合并过程如图:



本问题的原型为“石子合并”。

解法:

设 $sum(i, j)$ 为序列中区域 $s[i, j]$ 的所有元素之和, 设 $f(i, j)$ 为合并区域 $s[i, j]$ 产生的最小代价, 其中 $i \in [1, n]$ ,  $j \in [1, n]$ ,  $i \leq j$ 。因此有如下状态转移方程:

$$f(i, j) =$$

$$\begin{cases} 0 & (\text{初始化}) \ i = j, \ i, j \in [1, n] \\ +\infty & (\text{初始化}) \ i \neq j, \ i, j \in [1, n] \\ \min\{f(i, k) + f(k + 1, j) + sum(i, k) + sum(k + 1, j)\} & i, j, k \in [1, n] \text{ 且 } i \leq k \leq j \end{cases}$$

(1)  $s[i, i]$ 不需要合并, 因此 $f(i, i) = 0$ ;

(2)  $s[i, j]$ 需要合并, 我们的最终目标是获取合并最小代价, 因此设未知的 $f(i, j) = +\infty$ ;

(3) 假设将 $s[i, k]$ 和 $s[k + 1, j]$ 这两个区域的元素合并。合并 $s[i, k]$ 和 $s[k + 1, j]$ 的过程中, 已知 $s[i, k]$ 范围的总和为 $sum(i, k)$ , 消耗的代价为 $f(i, k)$ ,  $s[k + 1, j]$ 范围的总和为 $sum(k + 1, j)$ , 消耗的代价为 $f(k + 1, j)$ 。因为 $k \in [i, j]$ , 因此 $f(i, j) = \min\{f(i, k) + f(k + 1, j) + sum(i, k) + sum(k + 1, j)\}$ , 选择该范围中所有结果的最小值即可;  
 $f(n, n)$ 即为序列 $s$ 的最小合并代价。该算法的时间复杂度是 $O(n \times n)$ 。

石子合并:

<http://acm.nyist.edu.cn/JudgeOnline/problem.php?pid=737>