

Longest Increasing Subsequence

最长递增子序列

定义：

对于序列 $s = \{3, 0, 2, 1, 4\}$ 来说， $\{\}$, $\{3\}$, $\{0\}$, $\{2\}$, $\{1\}$, $\{4\}$, $\{3, 4\}$, $\{0, 2\}$, $\{0, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{1, 4\}$, $\{0, 2, 4\}$, $\{0, 1, 4\}$ 都是 s 的递增子序列。递增子序列是递增的，相邻元素的值不相等，相对顺序不变，不必是连续的。

问题：

查找序列 s 中的最长递增子序列 s_{sub} 的长度。

解法：

序列 s 的长度为 n （数组从 1 开始，范围为 $[1, n]$ ），前 i 个元素组成的子序列为 $s[1, i]$ 。设 $f(i)$ 是以 $s[i]$ 作为最后一个元素的最长递增子序列的长度，则有如下状态转移方程：

$$f(i) = \begin{cases} 0 & \text{(初始化) } i = 0 \\ 1 & \text{(初始化) } i \in [1, n] \\ \max\{f(k) + 1\} & i > 0 \text{ 且 } s[i] > s[k], \text{ 其中 } k \in [1, i) \end{cases}$$

- (1) 用数组中的下标 0 来存储初始的固定值，对于 s 序列的前 0 个元素，最长递增子序列显然是空的，即 $\{\}$ ，因此 $f(0) = 0$ ；
- (2) 对于序列 s 中所有由 1 个元素组成的序列 $s[i, i]$ （其中 $i \in [1, n]$ ）只有一个元素，也算是递增子序列，因此 $f(i) = 1$ ；
- (3) 对于序列 s 中第 i 个数字 $s[i]$ ，若 $s[i] > s[k]$ （其中 $k \in [1, i)$ ）则 $s[i]$ 与 $s[1, k]$ 之间的部分可以组成一个更长的递增子序列，因此 $f(i) = f(k) + 1$ ， k 需要遍历 $[1, i - 1]$ 中的所有可能的子序列；

最后返回 $\max\{f(i)\}$ （其中 $i \in [1, n]$ ），即 $f(i)$ 中的最大值。该算法的时间复杂度是 $O(n^2)$ 。