

Longest Common Subsequence

最长公共子序列

定义：

对于序列 $s_1 = \{1, 2, 3\}$ 来说， $\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{\}$ 都是 s_1 的子序列，但 $\{2, 1\}$ 不是。子序列是由序列的子集组成的，并且相对顺序不变的序列。

问题：

查找两个序列 s_1 和 s_2 中最长公共子序列 s 的长度，其中 s 既是 s_1 的子序列，也是 s_2 的子序列，并且是所有子序列中最长的。

解法：

对于长度分别为 n_1 和 n_2 的序列 $s_1[1, n_1]$ 和 $s_2[1, n_2]$ （数组从 1 开始），前 i 个元素组成的子序列分别为 $s_1[1, i]$ 和 $s_2[1, i]$ 。设 $f(i, j)$ 为 $s_1[1, i]$ 和 $s_2[1, j]$ 的最长公共子序列的长度，则有如下状态转移方程：

$$f(i, j) = \begin{cases} 0 & i = 0 \text{ 或 } j = 0 \\ f(i-1, j-1) + 1 & i > 0 \text{ 且 } j > 0 \text{ 且 } s_1[i] = s_2[j] \\ \max(f(i, j-1), f(i-1, j)) & i > 0 \text{ 且 } j > 0 \text{ 且 } s_1[i] \neq s_2[j] \end{cases}$$

- (1) 我们用数组中的下标 0 来存储初始的固定值，对于 s_1, s_2 序列的前 0 个元素，他们的最长公共子序列显然是空的，即 $\{\}$ ，因此 $f(i, j) = 0$ ，其中 $i = 0$ 或 $j = 0$ 。
- (2) 若 $s_1[i] = s_2[j]$ ，则显然两个序列的这个部分是公共的，所以 $f(i, j)$ 在 $f(i-1, j-1)$ 的基础上加 1；
- (3) 若 $s_1[i] \neq s_2[j]$ ，则两个序列的这个部分不是公共的，所以 $f(i, j)$ 仍然保持之前的值，为了获取最大值我们会在 $f(i, j-1)$ 和 $f(i-1, j)$ 中选取最大的那个；