A Star Search

A*搜索

问题 1：

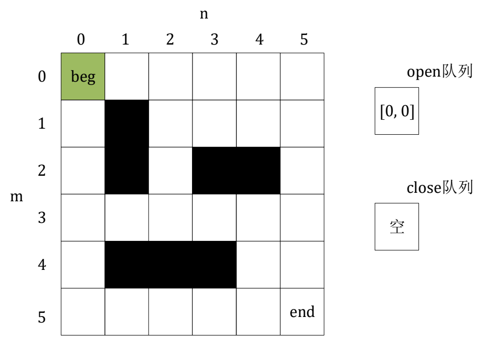
在$m \times n$的二维方格图 s 中从 beg 点移动到 end 点。

解法：

A*搜索算法结合了广度优先搜索、Dijkstra 算法和启发式搜索，能够有效提高搜索效率。与 DFS 和 BFS 这种误差别搜索不同，启发式搜索会设置一个评价函数来计算每个节点的搜索代价（或到目标的距离），优先搜索那些离目标最近的点，从而提高搜索效率。

A*算法的评价函数为$f(x) = g(x) + h(x)$，其中 x 是一个节点，$f(x)$表示 x 点到 end 的估计距离，$g(x)$表示从 beg 到 x 点的距离，$h(x)$表示从 x 点到 end 的估算距离。在 A*算法的等待队列中，总是优先选取$f(x)$最小的点进行搜索。

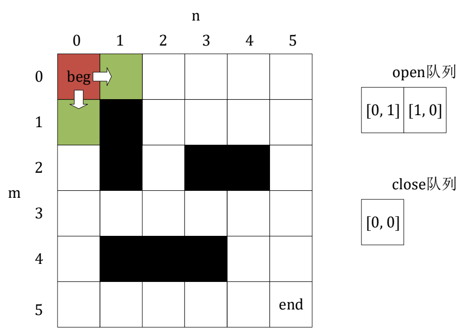
在下面这个6×6的二维方格 s 中，其中黑色的格子代表不能通过。从$beg = [0,0]$移动到$end = [5,5]$，设置 open 队列、close 队列和 g 分数表。x 点$[i,j]$和 end 点$[5,5]$的估算距离$h_{[i,j] \to end} = |5-i| + |5-j|$。过程如下：



g 分数表：$g[i,j]$表示点$[i,j]$到 beg 点所需要的最小距离

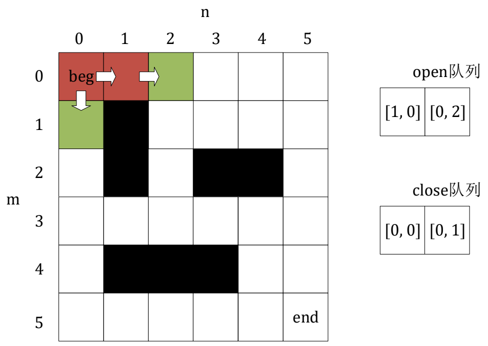
	0	1	2	3	4	5
0	0	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞
1	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞
2	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞
3	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞
4	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞
5	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞

(1) 将 beg 加入 open 队列并染绿，初始化$g[i,j] = +\infty$，其中$i,j \in [0,6)$，$g[0,0] = 0$；



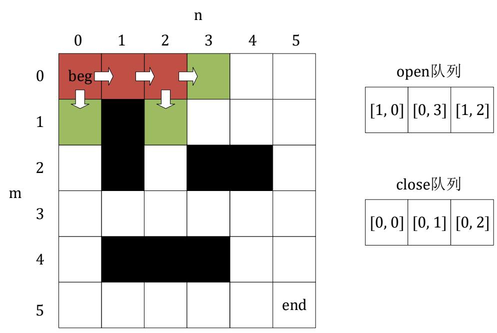
	0	1	2	3	4	5
0	0	1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
1	1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
4	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
5	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

(2) 从 open 队列中取出 f 值最小的$f[0,0] = g[0,0] + h_{[0,0]\to end} = 0 + |5-0| + |5-0|$点$[0,0]$（唯一的），比较$[0,0] \neq end$，将它加入 close 队列并染红，它周围的$[0,1]$、$[1,0]$不属于 open 队列，将这两点加入 open 队列并染绿，令$[0,1]$、$[1,0]$的父节点为$[0,0]$，计算$g[0,1] = g[1,0] = g[0,0] + 1 = 1$；



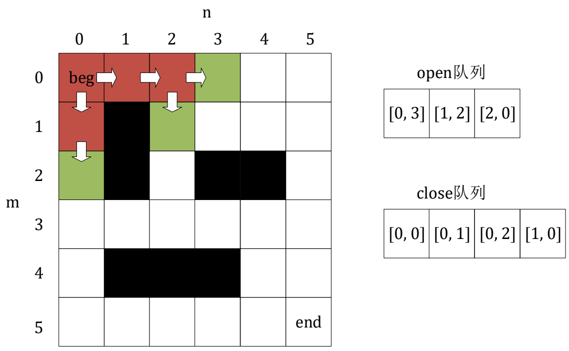
	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
1	1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
4	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
5	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

(3) 从 open 队列中取出 f 值最小的$f[0,1] = g[0,1] + h_{[0,1]\to end} = 1 + |5-0| + |5-1|$点$[0,1]$（多个 f 值相等的点中可以随机选择一个，考虑到目标的估算距离 h 值，在 f 值相等的基础上应该优先选择 h 值最小的，本解答在选取时有疏漏），比较$[0,1] \neq end$，将它加入 close 队列并染红，它周围的$[0,2]$不属于 open 队列并染绿，将该点加入 open 队列，令$[0,2]$的父节点为$[0,1]$，计算$g[0,2] = g[0,1] + 1 = 2$；



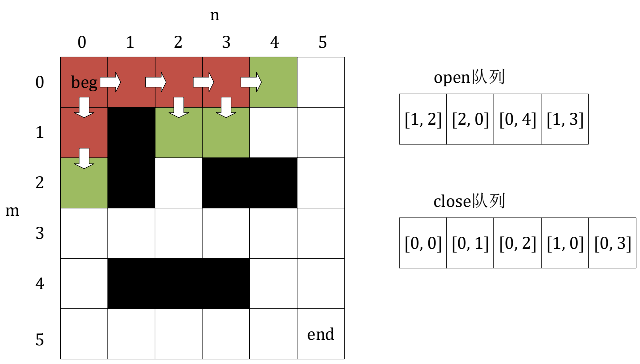
	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	+∞	+∞
1	1	+∞	3	+∞	+∞	+∞
2	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞
3	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞
4	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞
5	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞

(4) 从 open 队列中取出 f 值最小的$f[0,2]=g[0,2]+h_{[0,2]\to end}=2+|5-0|+|5-2|$点$[0,2]$，比较$[0,2]\neq end$，将它加入 close 队列并染红，它周围的$[0,3]$、$[1,2]$不属于 open 队列，将该两点加入 open 队列并染绿，令$[0,3]$、$[1,2]$的父节点为$[0,2]$，计算$g[0,3]=g[1,2]=g[0,2]+1=3$；



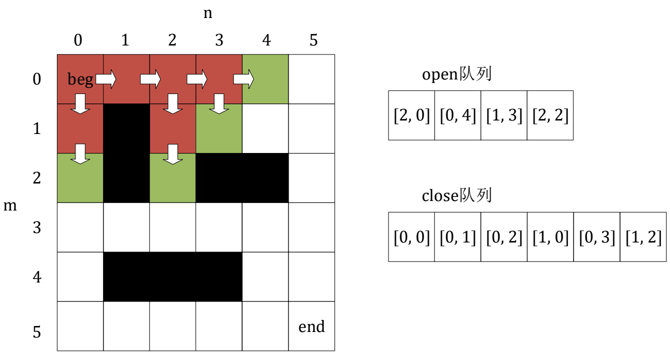
	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	+∞	+∞
1	1	+∞	3	+∞	+∞	+∞
2	2	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞
3	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞
4	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞
5	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞

(5) 从 open 队列中取出 f 值最小的$f[1,0]=g[1,0]+h_{[1,0]\to end}=1+|5-1|+|5-0|$点$[1,0]$，比较$[1,0]\neq end$，将它加入 close 队列并染红，它周围的$[2,0]$不属于 open 队列，将该点加入 open 队列并染绿，令$[2,0]$的父节点为$[1,0]$，计算$g[2,0]=g[1,0]+1=2$；



	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	$+\infty$
1	1	$+\infty$	3	4	$+\infty$	$+\infty$
2	2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
4	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
5	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

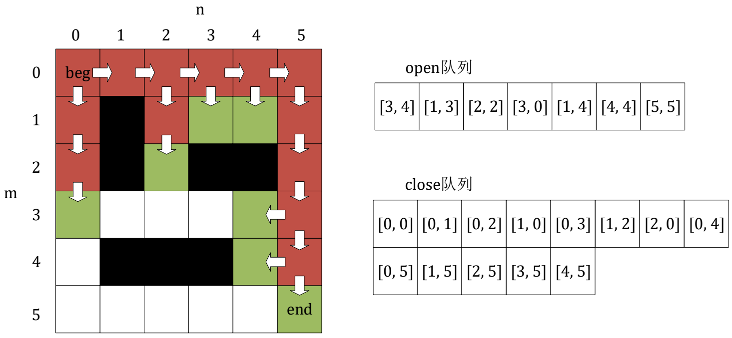
(6) 从 open 队列中取出 f 值最小的$f[0,3]=g[0,3]+h_{[0,3]\to end}=3+|5-0|+|5-3|$点$[0,3]$，比较$[0,3]\neq end$，将它加入 close 队列并染红，它周围的$[1,3]$、$[0,4]$不属于 open 队列，将该两点加入 open 队列并染绿，令$[0,4]$、$[1,3]$的父节点为$[0,3]$，计算$g[1,3]=g[0,4]=g[0,3]+1=4$；



	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	$+\infty$
1	1	$+\infty$	3	4	$+\infty$	$+\infty$
2	2	$+\infty$	4	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
4	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
5	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

(7) 从 open 队列中取出 f 值最小的$f[1,2]=g[1,2]+h_{[1,2]\to end}=3+|5-1|+|5-2|$点$[1,2]$加入 close 队列并染红，它周围的$[2,2]$不属于 open 队列，$[1,3]$已经属于 open 队列，将$[2,2]$加入 open 队列并染绿，令$[2,2]$的父节点为$[1,2]$，计算$g[2,2]=g[1,2]+1=4$，计算$g'[1,3]=g[1,2]+1=g[1,3]$，新的路径并不比老的路径更短，不必更新$[1,3]$点的父节点；

(8) 每一步从 open 队列中取出 f 值最小的（目前 open 队列中所有点的 f 值都相同，可以随机选择任意点，不过考虑到目标的估算距离 h 值，在 f 值相等的基础上应该优先选择 h 值最小的）点 x，比较 x 与 end，(a)若 open 队列为空，算法结束没有找到 end 点，(b)若$x=end$则算法结束找到 end 点，(c)继续寻找，将 x 点加入 close 队列并染红，对于 x 点周围的其他节点 y 有以下可能：(a)若 y 点属于 close 队列为红色则直接跳过该点，(b)若 y 点不属于 close 队列，不属于 open 队列，将 y 点加入 open 队列并染绿，父节点设置为 x，计算$g(y)$、$h(y)$、$f(y)$值，(c)若 y 点不属于 close 队列，属于 open 队列，说明 y 点已经被访问过，重新计算以 x 点为父节点的 y 的$g(y)$、$h(y)$、$f(y)$值，若$f(y)$更小则更新 y 点的信息和父节点为 x 点，若$f(y)$并不比原本的路径更短则保持现在的 y 点不变；



	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	$+\infty$	3	4	5	6
2	2	$+\infty$	4	$+\infty$	$+\infty$	7
3	3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	9	8
4	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	10	9
5	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	10

(9) 跳过中间重复的步骤，最终情况如上图所示，open 队列中包含 end 点，算法结束，beg 点到 end 点的距离为 10，路径通过节点的父节点指针回溯回去；

对于$m \times n$的二维方格 s，A*搜索的过程并不是向四周均匀发散开的，而是沿着 f 值和 h 值最小的方向移动，最坏情况下时间复杂度为$O(m \times n)$。

问题 2（八数码问题）：

对于3×3的矩阵$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & x \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$，x 点可以与上下左右的相邻点交换位置，除此之外不能随意改变位置，将该矩阵变成下面状态：$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & x \end{bmatrix}$。

求最少变换次数以及变化经过，即从起点状态 beg 到终点状态 end 的路径。

解法：

与之前问题不同，本问题将每种矩阵状态看作一个节点，是一种时间上的状态搜索。

从$beg = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & x \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$移动到$end = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & x \end{bmatrix}$，设置 open 队列、close 队列和 g 分数表。x 点和 end 点的估算距离$h_{x \to end} = \sum_{i=0,j=0}^{2}(x_{[i,j]} \neq end_{[i,j]} ? 1 : 0)$，即对于同一个位置$[i,j]$，若$x_{[i,j]} \neq end_{[i,j]}$则 h 值加 1，否则加 0，其中$i,j \in [0,2]$。当 x 点与 end 点相同时，x 点中每个位置的值都和 end 点相同。过程如下：

$$open = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & x \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$close = empty$$

$$g\begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & x \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix} = 0$$

(1) 将 beg 点加入 open 队列，g 分数表中$g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}=0$；

$$open=\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}$$

$$close=\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}$$

$$g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}=0\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=1$$

(2) 从 open 队列中取出 f 值最小的$f=0+9=9$（唯一的）点$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}$，将它加入 close 队列，该点的 x 与上下左右交换位置后的状态有$\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}$，这 3 个状态可以看作该点的相邻点（和问题 1 中二维方格的上下左右 4 个相邻格子类似），这 3 个状态不属于 open 队列和 close 队列，将这 3 个点加入 open 队列并设置父节点都为$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}$并计算 g 值；

$$open=\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}$$

$$close=\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}$$

$$g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}=0\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}=2$$

(3) 从 open 队列中取出 f 值最小的$f=1+8=9$点$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}$，将它加入 close 队列，该点的 x 与上下左右交换位置后的状态有 2 个点$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}$，其中$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}$属于 close 队列，跳过该点，$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}$不属于 open 队列和 close 队列，将该点加入 open 队列，设置父节点为$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}$并计算 g 值；

$$open=\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}$$

$$close=\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}$$

$$g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}=0\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=2$$

(4) 从 open 队列中取出 f 值最小的$f=1+9=10$点$\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}$，将它加入 close 队列，该点的 x 与上下左右交换位置后的状态有 2 个点$\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}$，其中$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}$属于 close 队列，跳过该点，$\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}$不属于 open 队列和 close 队列，将该点加入 open 队列，设置父节点为$\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}$并计算 g 值；

$$open=\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&x&5\end{bmatrix}$$

$$close=\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}$$

$$g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}=0\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=2$$

$$g\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&x&5\end{bmatrix}=2$$

(5) 从 open 队列中取出 f 值最小的$f=1+9=10$点$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}$，将它加入 close 队列，该点的 x 与上下左右交换位置后的状态有 4 个点$\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&x&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}$，其中$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}$属于 close 队列，跳过该点，$\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&x&5\end{bmatrix}$不属于 open 队列和 close 队列，将这 3 点加入 open 队列，设置父节点为$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}$并计算 g 值；

$$open=\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&x&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&5\\6&7&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\x&6&4\end{bmatrix}$$

$$close=\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}$$

$$g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}=0\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=2$$

$$g\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&x&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&5\\6&7&4\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\x&6&4\end{bmatrix}=3$$

(6) 从 open 队列中取出 f 值最小的$f=2+9=11$点$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}$，将它加入 close 队列，

该点的 x 与上下左右交换位置后的状态有 3 个点$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&5\\6&7&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\x&6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}$，

其中$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}$属于 close 队列，跳过该点，$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&5\\6&7&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\x&6&4\end{bmatrix}$不属于 open 队列

和 close 队列，将这 2 点加入 open 队列，设置父节点为$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}$并计算 g 值；

$$open=\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&x&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&5\\6&7&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\x&6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&2&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&7&8\\3&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}$$

$$close=\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}$$

$$g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}=0\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=2$$

$$g\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&x&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&5\\6&7&4\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\x&6&4\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}x&2&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=3$$

$$g\begin{bmatrix}2&7&8\\3&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}=3$$

(7) 从 open 队列中取出 f 值最小的$f=2+9=11$点$\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}$，将它加入 close 队列，

该点的 x 与上下左右交换位置后的状态有 3 个点$\begin{bmatrix}x&2&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&7&8\\3&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}$，

其中$\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}$属于 close 队列，跳过该点，$\begin{bmatrix}x&2&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&7&8\\3&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}$不属于 open 队列

和 close 队列，将这 2 点加入 open 队列，设置父节点为$\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}$并计算 g 值；

$$open=\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&x&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&5\\6&7&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\x&6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&7&8\\3&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&8\\x&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}$$

$$close=\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&2&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}$$

$$g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}=0\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=2$$

$$g\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&x&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&5\\6&7&4\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\x&6&4\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}x&2&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=3$$

$$g\begin{bmatrix}2&7&8\\3&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3&2&8\\x&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=4$$

(8) 从 open 队列中取出 f 值最小的$f=3+8=11$点$\begin{bmatrix}x&2&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}$（open 队列中存在多个

$f = 11$的点，但是该点 h 值最小$h = 8$因此优先选择），将它加入 close 队列，该点的 x 与上下左右交换位置后的状态有 2 个点$\begin{bmatrix}2 & x & 8\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 8\\x & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}$，其中$\begin{bmatrix}2 & x & 8\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}$属于 close 队列，跳过该点，$\begin{bmatrix}3 & 2 & 8\\x & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}$不属于 open 队列和 close 队列，将该点加入 open 队列，设置父节点为$\begin{bmatrix}x & 2 & 8\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}$并计算 g 值；

$$open = \begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\x & 3 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 4 & 7\\6 & x & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & x & 5\\6 & 7 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & 5\\x & 6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 7 & 8\\3 & x & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 8\\x & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 2 & 1\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & x\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

$$close = \begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & x\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & 5\\6 & 4 & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & x\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & x & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & 5\\6 & x & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & x & 8\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 2 & 8\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & x & 1\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

$$g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & x\\6 & 4 & 5\end{bmatrix} = 0 \quad g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & x & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix} = 1 \quad g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & 5\\6 & 4 & x\end{bmatrix} = 1 \quad g\begin{bmatrix}2 & 8 & x\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix} = 1 \quad g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & 5\\6 & x & 4\end{bmatrix} = 2 \quad g\begin{bmatrix}2 & x & 8\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix} = 2$$

$$g\begin{bmatrix}2 & x & 1\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix} = 2 \quad g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\x & 3 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix} = 2 \quad g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 4 & 7\\6 & x & 5\end{bmatrix} = 2 \quad g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & x & 5\\6 & 7 & 4\end{bmatrix} = 3 \quad g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & 5\\x & 6 & 4\end{bmatrix} = 3 \quad g\begin{bmatrix}x & 2 & 8\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix} = 3$$

$$g\begin{bmatrix}2 & 7 & 8\\3 & x & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix} = 3 \quad g\begin{bmatrix}3 & 2 & 8\\x & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix} = 4 \quad g\begin{bmatrix}x & 2 & 1\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix} = 3 \quad g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & x & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix} = 3 \quad g\begin{bmatrix}2 & 1 & x\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix} = 3$$

(9) 从 open 队列中取出 f 值最小的$f = 2 + 9 = 11$点$\begin{bmatrix}2 & x & 1\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}$，将它加入 close 队列，该点的 x 与上下左右交换位置后的状态有 3 个点$\begin{bmatrix}x & 2 & 1\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & x & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & x\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}$，其中$\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & x & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}$属于 close 队列，跳过该点，$\begin{bmatrix}x & 2 & 1\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & x\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}$不属于 open 队列和 close 队列，将这 2 点加入 open 队列，设置父节点为$\begin{bmatrix}2 & x & 1\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}$并计算 g 值；

$$open = \begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\x & 3 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 4 & 7\\6 & x & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & x & 5\\6 & 7 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & 5\\x & 6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 7 & 8\\3 & x & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 8\\x & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & x\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\x & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

$$close = \begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & x\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & 5\\6 & 4 & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & x\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & x & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & 5\\6 & x & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & x & 8\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 2 & 8\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & x & 1\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 2 & 1\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

$$g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & x\\6 & 4 & 5\end{bmatrix} = 0 \quad g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & x & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix} = 1 \quad g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & 5\\6 & 4 & x\end{bmatrix} = 1 \quad g\begin{bmatrix}2 & 8 & x\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix} = 1 \quad g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & 5\\6 & x & 4\end{bmatrix} = 2 \quad g\begin{bmatrix}2 & x & 8\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix} = 2$$

$$g\begin{bmatrix}2 & x & 1\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix} = 2 \quad g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\x & 3 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix} = 2 \quad g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 4 & 7\\6 & x & 5\end{bmatrix} = 2 \quad g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & x & 5\\6 & 7 & 4\end{bmatrix} = 3 \quad g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & 5\\x & 6 & 4\end{bmatrix} = 3 \quad g\begin{bmatrix}x & 2 & 8\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix} = 3$$

$$g\begin{bmatrix}2 & 7 & 8\\3 & x & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix} = 3 \quad g\begin{bmatrix}3 & 2 & 8\\x & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix} = 4 \quad g\begin{bmatrix}x & 2 & 1\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix} = 3 \quad g\begin{bmatrix}2 & 1 & x\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix} = 3 \quad g\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\x & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix} = 4$$

(10) 从 open 队列中取出 f 值最小的$f = 1 + 9 = 10$点$\begin{bmatrix}x & 2 & 1\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}$，将它加入 close 队列，

该点的 x 与上下左右交换位置后的状态有 2 个点$\begin{bmatrix}2 & x & 1\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\x & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}$，其中$\begin{bmatrix}2 & x & 1\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}$属于 close 队列，跳过该点，$\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\x & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}$不属于 open 队列和 close 队列，将该点加入 open 队列，设置父节点为$\begin{bmatrix}x & 2 & 1\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}$并计算 g 值；

$$open=\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 4 & 7\\6 & x & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & x & 5\\6 & 7 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & 5\\x & 6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 7 & 8\\3 & x & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 8\\x & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & x\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\x & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 8 & 1\\2 & 3 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\6 & 3 & 7\\x & 4 & 5\end{bmatrix}$$

$$close=\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & x\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & 5\\6 & 4 & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & x\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & x & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & 5\\6 & x & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & x & 8\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 2 & 8\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & x & 1\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 2 & 1\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\x & 3 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

$$g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & x\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=0\ g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & x & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & 5\\6 & 4 & x\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2 & 8 & x\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & 5\\6 & x & 4\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2 & x & 8\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=2$$

$$g\begin{bmatrix}2 & x & 1\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\x & 3 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 4 & 7\\6 & x & 5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & x & 5\\6 & 7 & 4\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & 5\\x & 6 & 4\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}x & 2 & 8\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=3$$

$$g\begin{bmatrix}2 & 7 & 8\\3 & x & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3 & 2 & 8\\x & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=4\ g\begin{bmatrix}x & 2 & 1\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}2 & 1 & x\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\x & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=4\ g\begin{bmatrix}x & 8 & 1\\2 & 3 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=3$$

$$g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\6 & 3 & 7\\x & 4 & 5\end{bmatrix}=3$$

(11)从 open 队列中取出 f 值最小的$f=2+9=11$点$\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\x & 3 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}$,将它加入 close 队列，该点的 x 与上下左右交换位置后的状态有 3 个点$\begin{bmatrix}x & 8 & 1\\2 & 3 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & x & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\6 & 3 & 7\\x & 4 & 5\end{bmatrix}$，其中$\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & x & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}$属于 close 队列，跳过该点，$\begin{bmatrix}x & 8 & 1\\2 & 3 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\6 & 3 & 7\\x & 4 & 5\end{bmatrix}$不属于 open 队列和 close 队列，将该 2 点加入 open 队列，设置父节点为$\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\x & 3 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}$并计算 g 值；

$$open=\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 4 & 7\\6 & x & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & x & 5\\6 & 7 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & 5\\x & 6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 7 & 8\\3 & x & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & x\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\x & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 8 & 1\\2 & 3 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\6 & 3 & 7\\x & 4 & 5\end{bmatrix}$$

$$close=\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & x\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & 5\\6 & 4 & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & x\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & x & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & 5\\6 & x & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & x & 8\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 2 & 8\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & x & 1\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 2 & 1\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\x & 3 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 8\\x & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 8\\7 & x & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 8\\6 & 7 & 1\\x & 4 & 5\end{bmatrix}$$

$$g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & x\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=0\ g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & x & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & 5\\6 & 4 & x\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2 & 8 & x\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & 5\\6 & x & 4\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2 & x & 8\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=2$$

$$g\begin{bmatrix}2 & x & 1\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\x & 3 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 4 & 7\\6 & x & 5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & x & 5\\6 & 7 & 4\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\3 & 7 & 5\\x & 6 & 4\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}x & 2 & 8\\3 & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=3$$

$$g\begin{bmatrix}2 & 7 & 8\\3 & x & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3 & 2 & 8\\x & 7 & 1\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=4\ g\begin{bmatrix}x & 2 & 1\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}2 & 1 & x\\3 & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\x & 8 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=4\ g\begin{bmatrix}x & 8 & 1\\2 & 3 & 7\\6 & 4 & 5\end{bmatrix}=3$$

$$g\begin{bmatrix}2&8&1\\6&3&7\\x&4&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3&2&8\\7&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}=5\ g\begin{bmatrix}3&2&8\\6&7&1\\x&4&5\end{bmatrix}=5$$

(12) 从 open 队列中取出 f 值最小的$f=4+8=12$点$\begin{bmatrix}3&2&8\\x&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}$,将它加入 close 队列，

该点的 x 与上下左右交换位置后的状态有 3 个点$\begin{bmatrix}x&2&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&8\\7&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&8\\6&7&1\\x&4&5\end{bmatrix}$,

其中$\begin{bmatrix}x&2&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}$属于 close 队列，跳过该点，$\begin{bmatrix}3&2&8\\7&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&8\\6&7&1\\x&4&5\end{bmatrix}$不属于 open 队列

和 close 队列，将该 2 点加入 open 队列，设置父节点为$\begin{bmatrix}3&2&8\\x&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}$并计算 g 值；

$$open=\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&5\\6&7&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\x&6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&7&8\\3&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&x\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\x&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&8&1\\2&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\6&3&7\\x&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\x&6&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&5&x\end{bmatrix}$$

$$close=\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&2&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&2&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&8\\x&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}3&2&8\\7&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&8\\6&7&1\\x&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&x&5\end{bmatrix}$$

$$g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}=0\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=2$$

$$g\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&x&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&5\\6&7&4\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\x&6&4\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}x&2&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=3$$

$$g\begin{bmatrix}2&7&8\\3&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3&2&8\\x&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=4\ g\begin{bmatrix}x&2&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}2&1&x\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3&2&1\\x&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}=4\ g\begin{bmatrix}x&8&1\\2&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}=3$$

$$g\begin{bmatrix}2&8&1\\6&3&7\\x&4&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3&2&8\\7&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}=5\ g\begin{bmatrix}3&2&8\\6&7&1\\x&4&5\end{bmatrix}=5\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\x&6&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&5&x\end{bmatrix}=3$$

(13) 从 open 队列中取出 f 值最小的$f=2+9=11$点$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&x&5\end{bmatrix}$,将它加入 close 队列，

该点的 x 与上下左右交换位置后的状态有 3 个点$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\x&6&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&5&x\end{bmatrix}$,

其中$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}$属于 close 队列，跳过该点，$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\x&6&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&5&x\end{bmatrix}$不属于 open 队列

和 close 队列，将该 2 点加入 open 队列，设置父节点为$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&x&5\end{bmatrix}$并计算 g 值；

$$open=\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&5\\6&7&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\x&6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&7&8\\3&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&x\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&8&1\\2&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\6&3&7\\x&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\x&6&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&5&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\6&8&7\\x&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\8&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}$$

$$close=\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&2&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&2&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&8\\x&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3&2&8\\7&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&8\\6&7&1\\x&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&x&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\x&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}$$

$$g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}=0\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=2$$

$$g\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&x&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&5\\6&7&4\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\x&6&4\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}x&2&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=3$$

$$g\begin{bmatrix}2&7&8\\3&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3&2&8\\x&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=4\ g\begin{bmatrix}x&2&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}2&1&x\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3&2&1\\x&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}=4\ g\begin{bmatrix}x&8&1\\2&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}=3$$

$$g\begin{bmatrix}2&8&1\\6&3&7\\x&4&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3&2&8\\7&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}=5\ g\begin{bmatrix}3&2&8\\6&7&1\\x&4&5\end{bmatrix}=5\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\x&6&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&5&x\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3&2&1\\6&8&7\\x&4&5\end{bmatrix}=5$$

$$g\begin{bmatrix}3&2&1\\8&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}=5$$

(14) 从 open 队列中取出 f 值最小的 $f=2+9=11$ 点 $\begin{bmatrix}3&2&1\\x&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}$，将它加入 close 队列，

该点的 x 与上下左右交换位置后的状态有 3 个点 $\begin{bmatrix}x&2&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\6&8&7\\x&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\8&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}$，

其中 $\begin{bmatrix}x&2&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}$ 属于 close 队列，跳过该点，$\begin{bmatrix}3&2&1\\6&8&7\\x&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\8&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}$ 不属于 open 队列

和 close 队列，将该 2 点加入 open 队列，设置父节点为 $\begin{bmatrix}3&2&1\\x&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}$ 并计算 g 值；

$$open=\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\x&6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&7&8\\3&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&x\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&8&1\\2&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\6&3&7\\x&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\x&6&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&5&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\6&8&7\\x&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\8&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&5\\6&7&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&5\\6&7&4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&5&x\\6&7&4\end{bmatrix}$$

$$close=\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&2&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&2&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&8\\x&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3&2&8\\7&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&8\\6&7&1\\x&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&x&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\x&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&5\\6&7&4\end{bmatrix}$$

$$g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}=0\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=2$$

$$g\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&x&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&5\\6&7&4\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\x&6&4\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}x&2&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=3$$

$$g\begin{bmatrix}2&7&8\\3&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3&2&8\\x&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=4\ g\begin{bmatrix}x&2&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}2&1&x\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3&2&1\\x&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}=4\ g\begin{bmatrix}x&8&1\\2&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}=3$$

$$g\begin{bmatrix}2&8&1\\6&3&7\\x&4&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3&2&8\\7&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}=5\ g\begin{bmatrix}3&2&8\\6&7&1\\x&4&5\end{bmatrix}=5\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\x&6&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&5&x\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3&2&1\\6&8&7\\x&4&5\end{bmatrix}=5$$

$$g\begin{bmatrix}3&2&1\\8&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}=5\ g\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&5\\6&7&4\end{bmatrix}=4\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&5\\6&7&4\end{bmatrix}=4\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&5&x\\6&7&4\end{bmatrix}=4$$

(15) 从 open 队列中取出 f 值最小的 $f=3+9=12$ 点 $\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&5\\6&7&4\end{bmatrix}$，将它加入 close 队列，

该点的 x 与上下左右交换位置后的状态有 4 个点$\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&5\\6&7&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&5\\6&7&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&5&x\\6&7&4\end{bmatrix}$，其中$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}$属于 close 队列，跳过该点，$\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&5\\6&7&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&5\\6&7&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&5&x\\6&7&4\end{bmatrix}$不属于 open 队列和 close 队列，将该 3 点加入 open 队列，设置父节点为$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&5\\6&7&4\end{bmatrix}$并计算 g 值；

$$open=\begin{bmatrix}2&7&8\\3&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&x\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&8&1\\2&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\6&3&7\\x&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\x&6&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&5&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\6&8&7\\x&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\8&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&5\\6&7&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&5\\6&7&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&5&x\\6&7&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\x&7&5\\3&6&4\end{bmatrix}$$

$$close=\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&2&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&2&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&8\\x&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&8\\7&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&8\\6&7&1\\x&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&x&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\x&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&5\\6&7&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\x&6&4\end{bmatrix}$$

$$g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}=0\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=2$$

$$g\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&x&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&5\\6&7&4\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\x&6&4\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}x&2&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=3$$

$$g\begin{bmatrix}2&7&8\\3&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3&2&8\\x&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=4\ g\begin{bmatrix}x&2&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}2&1&x\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3&2&1\\x&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}=4\ g\begin{bmatrix}x&8&1\\2&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}=3$$

$$g\begin{bmatrix}2&8&1\\6&3&7\\x&4&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3&2&8\\7&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}=5\ g\begin{bmatrix}3&2&8\\6&7&1\\x&4&5\end{bmatrix}=5\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\x&6&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&5&x\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3&2&1\\6&8&7\\x&4&5\end{bmatrix}=5$$

$$g\begin{bmatrix}3&2&1\\8&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}=5\ g\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&5\\6&7&4\end{bmatrix}=4\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&5\\6&7&4\end{bmatrix}=4\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&5&x\\6&7&4\end{bmatrix}=4\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\x&7&5\\3&6&4\end{bmatrix}=4$$

(16)从 open 队列中取出 f 值最小的$f=3+9=12$点$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\x&6&4\end{bmatrix}$,将它加入 close 队列，

该点的 x 与上下左右交换位置后的状态有 2 个点$\begin{bmatrix}2&8&1\\x&7&5\\3&6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}$，其中$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}$属于 close 队列，跳过该点，$\begin{bmatrix}2&8&1\\x&7&5\\3&6&4\end{bmatrix}$不属于 open 队列和 close 队列，将该点加入 open 队列，设置父节点为$\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\x&6&4\end{bmatrix}$并计算 g 值；

$$open=\begin{bmatrix}2&1&x\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&8&1\\2&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\6&3&7\\x&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\x&6&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&5&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\6&8&7\\x&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\8&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&5\\6&7&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&5\\6&7&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&5&x\\6&7&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\x&7&5\\3&6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&7&8\\x&3&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&7&8\\3&1&x\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&7&8\\3&4&1\\6&x&5\end{bmatrix}$$

$$close=\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&2&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&2&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&8\\x&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3&2&8\\7&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&8\\6&7&1\\x&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&x&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\x&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&5\\6&7&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\x&6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&7&8\\3&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}$$

$$g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&x\\6&4&5\end{bmatrix}=0\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&4&x\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&x\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=1\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\6&x&4\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=2$$

$$g\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&x&5\end{bmatrix}=2\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&x&5\\6&7&4\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&7&5\\x&6&4\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}x&2&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=3$$

$$g\begin{bmatrix}2&7&8\\3&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3&2&8\\x&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}=4\ g\begin{bmatrix}x&2&1\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}2&1&x\\3&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3&2&1\\x&8&7\\6&4&5\end{bmatrix}=4\ g\begin{bmatrix}x&8&1\\2&3&7\\6&4&5\end{bmatrix}=3$$

$$g\begin{bmatrix}2&8&1\\6&3&7\\x&4&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3&2&8\\7&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}=5\ g\begin{bmatrix}3&2&8\\6&7&1\\x&4&5\end{bmatrix}=5\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\x&6&5\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&4&7\\6&5&x\end{bmatrix}=3\ g\begin{bmatrix}3&2&1\\6&8&7\\x&4&5\end{bmatrix}=5$$

$$g\begin{bmatrix}3&2&1\\8&x&7\\6&4&5\end{bmatrix}=5\ g\begin{bmatrix}2&x&1\\3&8&5\\6&7&4\end{bmatrix}=4\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\x&3&5\\6&7&4\end{bmatrix}=4\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\3&5&x\\6&7&4\end{bmatrix}=4\ g\begin{bmatrix}2&8&1\\x&7&5\\3&6&4\end{bmatrix}=4\ g\begin{bmatrix}2&7&8\\x&3&1\\6&4&5\end{bmatrix}=4$$

$$g\begin{bmatrix}2&7&8\\3&1&x\\6&4&5\end{bmatrix}=4\ g\begin{bmatrix}2&7&8\\3&4&1\\6&x&5\end{bmatrix}=4$$

(17)从 open 队列中取出 f 值最小的$f=3+9=12$点$\begin{bmatrix}2&7&8\\3&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}$,将它加入 close 队列，该点的 x 与上下左右交换位置后的状态有 4 个点$\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&7&8\\x&3&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&7&8\\3&1&x\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&7&8\\3&4&1\\6&x&5\end{bmatrix}$，其中$\begin{bmatrix}2&x&8\\3&7&1\\6&4&5\end{bmatrix}$属于 close 队列，跳过该点，$\begin{bmatrix}2&7&8\\x&3&1\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&7&8\\3&1&x\\6&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&7&8\\3&4&1\\6&x&5\end{bmatrix}$不属于 open 队列和 close 队列，将该 3 点加入 open 队列，设置父节点为$\begin{bmatrix}2&7&8\\3&x&1\\6&4&5\end{bmatrix}$并计算 g 值；

(18)每一步从 open 队列中取出 f 值最小的（f 值相同时优先选 h 值最小的）点 x，比较 x 点与 end 点，(a)若 open 队列为空，则没有找到 end，算法结束，(b)若$x=end$则找到 end 点，算法结束，(c)继续寻找，将 x 点加入 close 队列，x 点相邻的其他节点 y 有以下可能：(a)若 y 点属于 close 队列则直接跳过该点，(b)若 y 点不属于 close 队列，不属于 open 队列，将 y 点加入 open 队列，父节点设置为 x，计算$g(y)$、$h(y)$、$f(y)$值，(c)若 y 点不属于 close 队列，属于 open 队列，说明 y 点已经被访问过，重新计算以 x 点为父节点的 y 的$g(y)$、$h(y)$、$f(y)$值，若$f(y)$更小则更新 y 点的信息和父节点为 x 点，若$f(y)$并不比原本的路径更短则保持现在的 y 点不变；

对于八进制数码问题，A*搜索在最坏情况下时间复杂度为$O(\ 9^9)$。