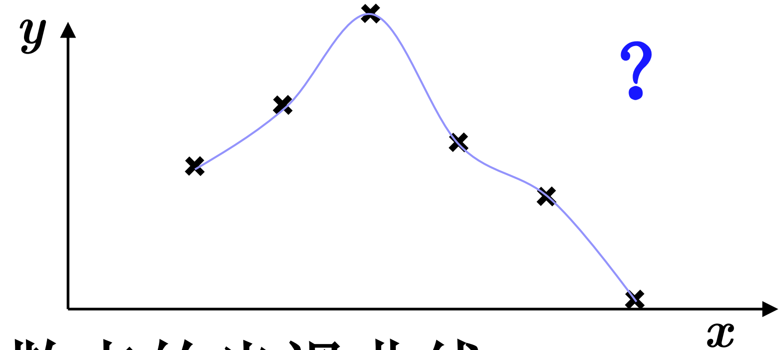
函数插值

- 用简单的函数表示已知的复杂函数或未知函数
  - 逼近：整体上近似 (整体误差最小)
  - 插值：在若干点上两者的值相等 (误差为0)
- 内容
  - 多项式插值 (单项式基、拉格朗日基、 牛顿基)
  - 分段多项式插值
  - 样条函数插值

插值

Word/Power Point中的绘图按钮

- 插值的基本概念
  - 为离散点配上曲线，并要求曲线通过各个离散点
  - 一种特殊的“逼近”



- 目的与用途
  - 图形学/CAD: 画一条通过离散点的光滑曲线
  - 假设数据无误差时做函数“拟合”，估算中间点函数值
  - 快速方便地计算复杂数学函数的函数值
  - 用简单函数近似复杂的或未知函数(用于非线性方程、数值积分与微分、微分方程数值解法)

插值

当数据点多于拟合参数时，最小二乘拟合$\boldsymbol{Ax} \cong \boldsymbol{f}$

当数据点与拟合参数一样多时，用插值

- 插值问题
  - 定义: 设$x_0, x_1, \cdots, x_n$满足$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$, 它们对应的函数$f(x)$值为$y_0, y_1, \cdots, y_n$, 若$P(x) \in C[a,b]$使得$P(x_i) = y_i$，$(i = 0,1,\cdots,n)$, 则$P(x)$为$f(x)$的插值函数
  - 插值节点: $x_0, \cdots, x_n$，要求互不相同
- 问题的类型
  - 多项式插值
  - 分段插值
  - 三角插值
  - 有理分式插值:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

$$P(x) = \begin{cases} \cdots, x \in [x_0, x_1] \\ \cdots, x \in [x_1, x_2] \\ \cdots \end{cases}$$

$$P(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}$$

多项式插值

插值问题的矩阵表述(基函数法)

设$x_0, x_1, \cdots, x_n$满足$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$,互不相同,对应的函数$f(x)$值为$y_0, y_1, \cdots, y_n$,

设 $\boldsymbol{y} = [y_0, \cdots, y_n]^T$, $\boldsymbol{a} = [a_0, \cdots, a_n]^T$

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$$

多项式插值

- 多项式插值
  - 求n次多项式$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$

满足n+1个插值点的条件$P(x_i)=y_i$，$(i=0,1,\cdots,n)$

$a_0,a_1\ldots,a_n$满足线性方程组

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n=y_0 \\ a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_1^n=y_1 \\ \cdots \\ a_0+a_1x_n+\cdots+a_nx_n^n=y_n \end{cases}$$

解存在、唯一吗?

  - 定理: Vandermonde矩阵

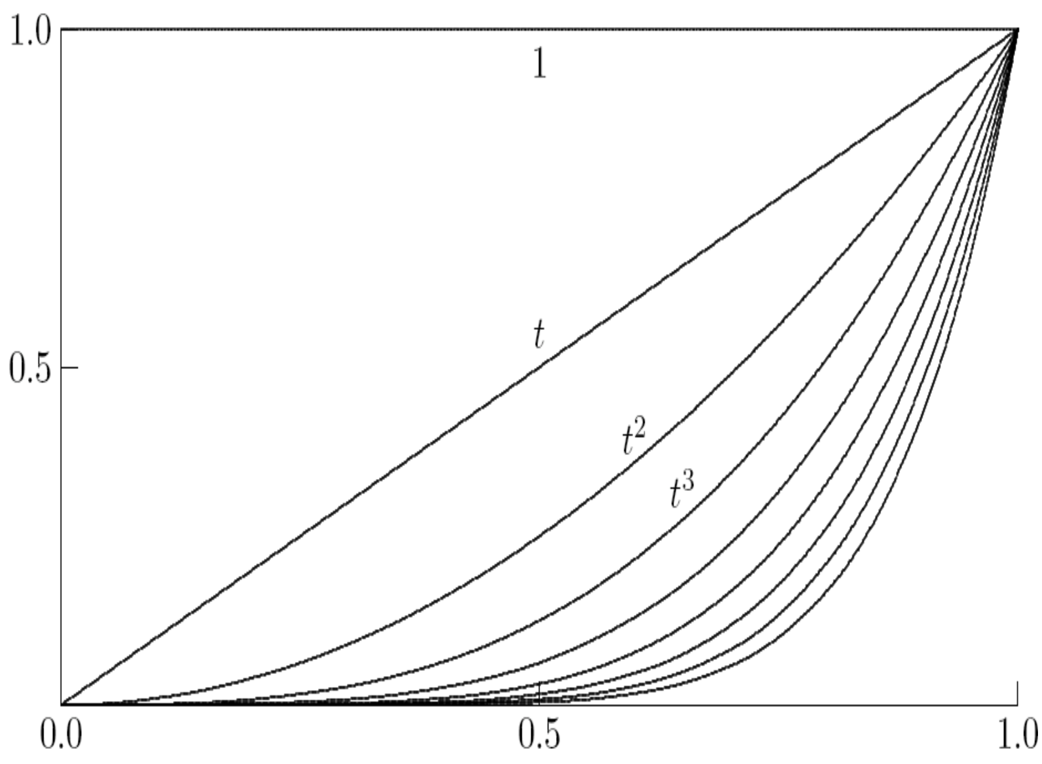
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$ 非奇异

只要插值节点 $\boldsymbol{x_0,x_1,\cdots,x_n}$ 互不相等

证明: 反证法. 设$\boldsymbol{A}$奇异, 则存在一组不全为0的系数$\{a_i\}$, 使$\boldsymbol{Aa}=\boldsymbol{0}$, 这些系数对应的多项式$P(x)$在n+1个点上的值均为0, 即n次多项式方程有n+1个不同的根.　矛盾!

定理: 在次数不超过 n 的多项式集合 $\mathbb{P}_n$ 中, 满足$P(x_i) = y_i$, $(i = 0,1,\cdots,n)$的插值多项式 $P(x) \in \mathbb{P}_n$ 存在并且唯一。

使用最简单的**单项式函数基** $\{x^k\}$, 需要解线性方程组, 构造出的系数矩阵为范德蒙德矩阵, n 较大时是病态矩阵, 求解过程计算量大, 计算误差大.



例: 设有3个数据点(-2, -27), (0, -1)和(1, 0), 用单项式基函数构造二次插值多项式(**待定系数法**)

用单项式基底, 多项式的系数由线性方程组给出.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

对具体的3 个数据点 $(-2, -27), (0, -1), (1,0)$, 方程组为

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

用高斯消去法求解, 得 $[-1,5,-4]^{\mathrm{T}}$, 所以插值多项式为

$$p_2(x) = -1 + 5x - 4x^2$$

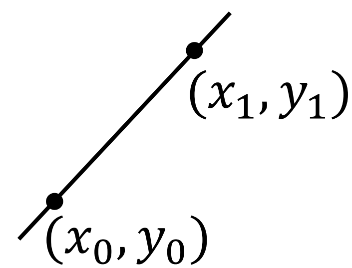
Lagrange(拉格朗日)插值法

- 能不解线性方程组吗?
- n=1的情况
  - 插值节点: x_0, x_1, 函数值: y_0, y_1, 求一次多项式

$$y=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

  - 插值多项式看成是基函数的线性组合

"两点式"直线公式:



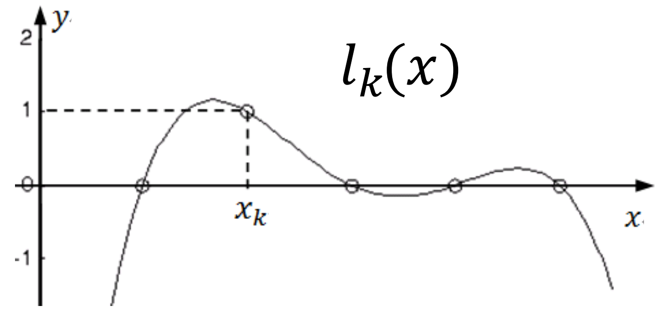
  - 插值基函数$l_k(x)$特点: 1次多项式, 且

$$L_1(x)=y_0 l_0(x)+y_1 l_1(x)$$

$$(k=0,1)$$

$$l_k(x_i)=\begin{cases}1, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases}$$

Lagrange插值法



- 推广到n>1 (求n次多项式$L_n(x)$)
  - 插值节点: $x_0, x_1, \ldots, x_n$, 函数值: $y_0, y_1, \ \ldots, y_n$

Lagrange 插值函数 $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$, 基函数$l_k(x) \in \mathbb{P}_n$, 且$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$

  - 如何求$l_k(x)$?

设$l_k(x) = g \cdot (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)$

根据条件$l_k(x_k) = 1$, 确定g的值

$$\Longrightarrow l_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

设$\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$

则$\omega_{n+1}'(x_k) = \prod_{j \neq k}(x_k - x_j)$ $\Longrightarrow L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\omega_{n+1}'(x_k)}$

Lagrange插值

- **Lagrange插值法**
  - 优点：公式结构对称、便于编程, 便于分析
  - 缺点：增加或减少一个插值节点时, 公式变化较大, 计算函数值不方便

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}$$

拉格朗日插值法得到的系数矩阵为单位矩阵, 不需要求解线性方程组,

但利用插值多项式求未知点处函数值时计算较复杂;

例: 设有3个数据点(-2, -27), (0, -1)和(1, 0), 用**Lagrange**插值基函数构造二次插值多项式

$$L_2(x) = -27 \cdot \frac{x(x-1)}{-2 \cdot -3} + (-1) \cdot \frac{(x+2)(x-1)}{2 \cdot -1}$$

$$= -\frac{9}{2}\left(x^2 - x\right) + \frac{1}{2}(x^2 + x - 2)$$

$$= -4x^2 + 5x - 1$$

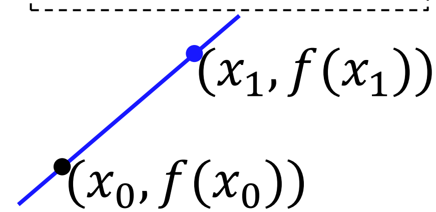
Newton插值

- **Motivation**
  - 插值节点数目逐渐增加: 每增加一个节点, 插值多项式次数增1, 判断其准确度, 若不满意再增一个点…
- **基本思想**
  - 最简单情况: 一个插值点x_0, 函数值$f(x_0)$

插值多项式

$$\boxed{P_0(x)=f(x_0)}$$

  - 增加一节点x_1及$f(x_1)$, 求$P_1(x)$



"点斜式"直线公式: $P_1(x)=f(x_0)+\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)$

  - 向高次多项式插值推广

n个插值节点: $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$

$$P_{n-1}(x) \xrightarrow{\text{增加节点}x_n} P_n(x)=P_{n-1}(x)+c_n\underline{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}$$

怎么算?

牛顿插值公式: $N_n(x) = c_0+c_1(x-x_0)+\cdots+c_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$

Newton插值

- 差商　　　(~ Newton插值的系数)
  - 定义: 函数$f(x)$关于一系列互不相等点的k阶差商

关于x_i的0阶差商:　　$f[x_i]=f(x_i)$

关于x_0,x_i的1阶差商:　　$f[x_0,x_i]=\dfrac{f(x_i)-f(x_0)}{x_i-x_0}$

关于$x_0,x_1,\cdots,x_k$的k阶差商:
(递归定义)
$$f[x_0,x_1,\ldots,x_k]=\frac{f[x_0,\ldots,x_{k-2},x_k]-f[x_0,\ldots,x_{k-2},x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}}$$

- 差商的对称性
  - $f(x)$关于离散点$x_0,x_1,\ldots,x_k$的k阶差商满足

$$f[x_0,\ldots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\prod_{l=0,l\neq j}^{k}(x_j-x_l)} \longrightarrow \omega'_{k+1}(x_j)$$

  - 差商自变量顺序可任意 $f[x_0,x_1,\ldots,x_k]=\cdots=f[x_k,\ldots,x_1,x_0]$

Newton插值

- 差商与Newton插值系数
  - 差商的对称性： $f[x_0,\dots,x_k]=\dfrac{f[x_1,\dots,x_k]-f[x_0,\dots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$ 有k-1个节点相同
  - 如何计算Newton插值系数?

$$N_n(x)=c_0+c_1(x-x_0)+\cdots+c_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

$c_0=f[x_0]$, 0阶差商;　　$N_1(x)=f[x_0]+c_1(x-x_0)$

将$N_1(x_1)=f(x_1)$代入，求c_1 $\Longrightarrow$ $c_1=f[x_0,x_1]$, 1阶差商

$N_2(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)$ $\Longrightarrow$ $c_2=f[x_0,x_1,x_2]$

… , $c_k=f[x_0,\dots,x_k]$, $k=0,1,\cdots,n$

差商表

x_k	$f(x_k)$	1阶差商	2阶差商	3阶差商
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

例: 设有3个数据点(-2, -27), (0, -1)和(1, 0), 分别用牛顿插值法和拉格朗日插值法求二次多项式

- 先做牛顿插值, 构造差商表
- 写出插值多项式

$$N_2(x) = -27 + 13(x+2) - 4(x+2)x$$

$$= -4x^2 + 5x - 1$$

x_k	$f(x_k)$	1阶差商	2阶差商
-2	$\mathbf{-27}$		
0	-1	$\mathbf{13}$	
1	0	$\mathbf{1}$	$\mathbf{-4}$

多项式插值误差估计

为$f(x)$的插值多项式
(插值节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$)

- **Lagrange插值余项** $\quad (R_n(x) \equiv f(x) - L_n(x))$

$f(x) \in C^n[a,b]$, n+1阶导数存在, 则

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),\text{ 其中}\xi \in (a,b),\text{ 且依赖于}x$$

证明: 首先注意到$R_n(x)$在n+1个插值节点上的值为0

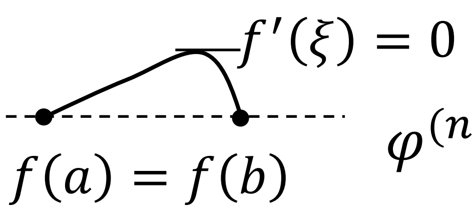
设$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=g(x)(x-x_0)\cdots(x-x_n)=g(x)\omega_{n+1}(x)$

为求$g(x)$, 做辅助函数$\varphi(t)=f(t)-L_n(t)-g(x)(t-x_0)\cdots(t-x_n)$

考察$\varphi(t) = 0$的根, 至少有n+2个: $t=x_i$, $(i = 0, \ldots, n)$, $t=x$

Rolle定理

考察$\varphi'(t)$的零点, 至少有n+1个互不相同的



$\Rightarrow$ … , $\varphi^{(n+1)}(t)$至少有1个零点, 记为ξ

$$\varphi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-g(x)\cdot(n+1)!=0 \Rightarrow g(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

- Newton插值余项 (多项式插值余项的另一种形式)

设$x\in[a,b],\ x\neq x_0,\ldots,x_n$

$f(x)=f(x_0)+f[x,x_0](x-x_0)$,

$f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+f[x,x_0,x_1](x-x_1)$,

$f[x,x_0,x_1]=f[x_0,x_1,x_2]+f[x,x_0,x_1,x_2](x-x_2)$,

$\cdots\quad\cdots$

$f[x,x_0,\ldots,x_{n-1}]=f[x_0,\ldots,x_n]+f[x,x_0,\ldots,x_n](x-x_n)$.

$f(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)$
$+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$
$+\cdots$
$f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})+\cdots$

- $f(x)=N_n(x)+\underline{f[x,x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_n)}$ 插值余项
- 由于插值多项式的唯一性, $f[x,x_0,\ldots,x_n]=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$, $\xi\in(a,b)$
- Newton插值余项公式不要求$f(x)$光滑

但实际无法算

Newton插值余项的应用

(1) 当函数 $f(x)$ 不够光滑, $f^{(n+1)}(x)$ 不存在时, 或 $f(x)$ 本身的表达式未知时, 拉格朗日余项公式无意义, 此时用牛顿插值余项公式估计误差是一个可能的选择。

(2) 牛顿插值余项的一个较实际的应用是, 根据差商大小判断插值阶数 k 是否合适 (若更高阶差商 ≈ 0), 从而自动选一个不太大的阶数, 同时保证较高的精度。

例(牛顿插值余项): 表中给出一些离散点上的 $f(x)$ 函数值, 求合适阶数的牛顿插值多项式, 由它计算 $f(0.596)$ 的近似值, 并估计误差。

x_k	$f(x_k)$	1 阶差商	2 阶差商	3 阶差商	4 阶差商	5 阶差商
0.40	$\underline{0.41075}$					
0.55	0.57815	$\underline{1.11600}$				
0.65	0.69675	1.18600	$\underline{0.28000}$			
0.80	0.88811	1.27573	0.35893	$\underline{0.19733}$		
0.90	1.02652	1.38410	0.43348	0.21300	$\underline{0.03134}$	
1.05	1.25382	1.51533	0.52493	0.22863	0.03126	-0.00012

5 阶差商的值非常接近 0 , 故取 4 次插值多项式 $N_4(x)$ 做近似, 得到

$$N_4(x) = \quad 0.41075 + 1.116(x-0.4) + 0.28(x-0.4)(x-0.55) + 0.19733(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65) + 0.03134(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)(x-0.8),$$

$f(0.596) \approx N_4(0.596) = 0.63192$。

对它估计截断误差，$|R_4(x)| \approx |f[x_0, x_1, \cdots, x_5]\omega_5(0.596)| \leqslant 3.63 \times 10^{-9}$

这说明截断误差很小,可忽略不计。□

多项式插值方法比较

- 单项式基函数:

计算复杂, n较大时病态

$$P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

- Lagrange插值:

$$L_n(x) = \Sigma_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$$

- Newton插值:

先计算差商表, $N_n(x) = f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0) + \cdots + f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$

便于动态增、减插值节点

思考题: 比较3种插值法计算未知点处函数值的计算量

分段多项式插值

高次多项式插值的问题

单个多项式的插值公式：光滑性好、易于理论分析

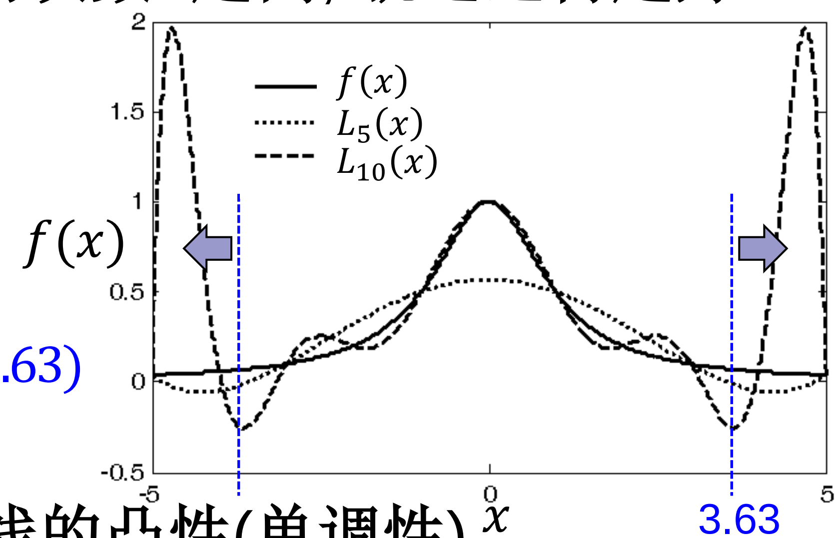
- 收敛性差

  Runge现象：并非插值多项式的次数n越高，就逼近得越好

  $$f(x)=\frac{1}{1+x^2}, x\in[-5,5]$$

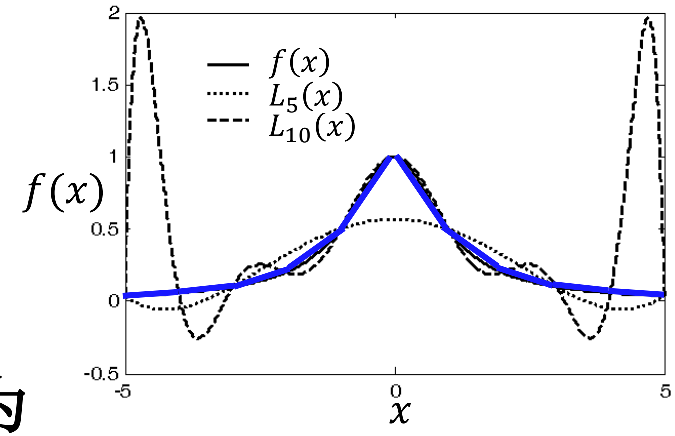
  做等距节点插值，$L_n(x)$

  $$\lim_{n\to\infty} L_n(x)\begin{cases}=f(x), |x|\le c\\ \text{不收敛}, |x|>c\end{cases}, (c\approx 3.63)$$



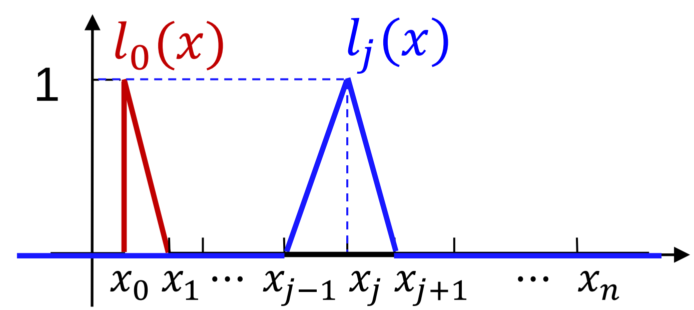
- 保凸性差
  - 有多余拐点(起伏)，违背曲线的凸性(单调性)
- 数值稳定性差：某个插值点函数值的误差影响整个区间

分段线性插值



- 基本思想
  - 插值数据点连成折线
  - 设$x_0 < x_1 < \cdots < x_n$，相应函数值为$f_0, f_1, \cdots, f_n$，则分段线性插值函数$I_h(x)$满足：当$x \in [x_j, x_{j+1}]$时，$I_h(x) = \dfrac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} f_j + \dfrac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} f_{j+1}$
- 整体表达式 $I_h(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j l_j(x)$
  - 基函数

$$l_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & x_{j-1} \le x \le x_j \ (j=0\text{时略去}) \\ \dfrac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}}, & x_j \le x \le x_{j+1} \ (j=n\text{时略去}) \\ 0, & x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}] \end{cases}$$



$l_j(x)$只在x_j附近非零
(局部非零性质)

分段线性插值

- 分段线性插值函数 $I_h(x)=\sum_{j=0}^{n} f_j l_j(x)$
  - $I_h(x) \in C[a,b]$
  - 在每个小区间上是一次多项式 $\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_j)(x-x_{j+1})$
  - 每个小区间内插值误差为Lagrange余项, 则

$$|f(x)-I_h(x)| \le \frac{M_2}{2}\max_{x_j\le x\le x_{j+1}}\left|(x-x_j)(x-x_{j+1})\right| \le \frac{M_2}{8}h^2$$

其中 $M_2=\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$ $\qquad h=\max_j(x_{j+1}-x_j)$

  - 分段线性插值的收敛性

定理6.10: 设$f(x)\in C^2[a,b]$, 则

$$\lim_{h\to 0} I_h(x)=f(x), \forall x\in[a,b]$$, 其中$h=\max_j(x_{j+1}-x_j)$

例 对下列数据作分段线性插值，并计算 $f(1.2), f(3.3)$.

x_i	-3	-1	2	3	9
$f(x_i)$	12	5	1	6	12

解 $P(x)=p_i(x)=\dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}f(x_i)+\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}f(x_{i+1}), x\in[x_i,x_{i+1}]$.

由 $1.2\in[-1,2]$，有

$$P(1.2)=p_1(x)=\frac{1.2-2}{-1-2}\times 5+\frac{1.2+1}{2+1}\times 1=2.0667$$

由 $3.3\in[3,9]$，有

$$P(3.3)=p_3(x)=\frac{3.3-9}{-6}\times 6+\frac{3.3-3}{6}\times 12=6.3$$

分段埃尔米特(Hermite)插值

- 整体Hermite插值
  - 插值条件不仅包括函数值, 还包括导数值

$$P(x_i) = f(x_i)\ ,\ \ P'(x_i) = f'(x_i)$$

  - 常考虑插值条件中函数值与导数值个数相等的情况
  - 在插值节点x_i, $(i = 0, 1, \cdots, n)$上, 记$f(x_i)$为f_i, $f'(x_i)$为f_i'

    求插值多项式$H(x)$, 满足$H(x_i) = f_i, H'(x_i) = f_i'$

    称为埃尔米特插值多项式
  - 解的存在性与唯一性

    2n+2个条件, 确定次数不超过2n+1的多项式$H_{2n+1}(x)$
  - 类似于Lagrange插值的公式

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \left[f_j \alpha_j(x) + f_j' \beta_j(x) \right]$$

分段埃尔米特(Hermite)插值

- 整体Hermite插值 $H_{2n+1}(x)=\sum_{j=0}^{n}\left[f_j\alpha_j(x)+f_j'\beta_j(x)\right]$
  - 基函数须满足如下要求

$$\alpha_j'(x_i)=0$$

$$\alpha_j(x_i)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \Longrightarrow \alpha_j(x)=\left[1-2(x-x_j)l_j'(x_j)\right]l_j^2(x)$$

其中$l_j(x)$为Lagrange插值基函数

$$\beta_j'(x_i)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \Longrightarrow \beta_j(x)=(x-x_j)l_j^2(x)$$

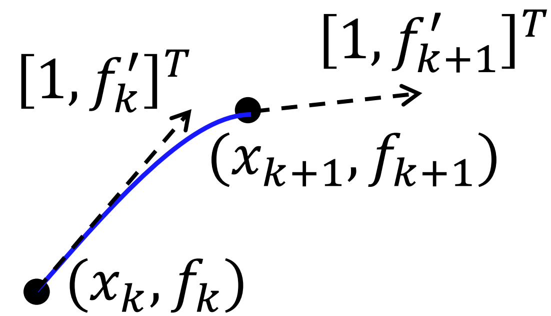
$$\beta_j(x_i)=0$$

函数 $\alpha_i(x)$ 仅当 $x=x_i$ 时值为 1，对其他插值节点的函数值以及所有插值节点上的导数值均为 0，

函数 $\beta_i(x)$ 仅当 $x=x_i$ 时导数值为 1，在其他插值节点上的导数值以及所有插值节点上的函数值均为 0 。

分段埃尔米特(Hermite)插值

- 两点三次埃尔米特插值多项式



即n=1时的整体Hermite插值

设插值节点为x_k, x_{k+1},

基函数: $H_3(x) = f_k\tilde{\alpha}_k(x) + f_{k+1}\tilde{\alpha}_{k+1}(x) + f_k'\tilde{\beta}_k(x) + f_{k+1}'\tilde{\beta}_{k+1}(x)$

$$\tilde{\alpha}_k(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)\left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2$$

$$\tilde{\alpha}_{k+1}(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)\left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2$$

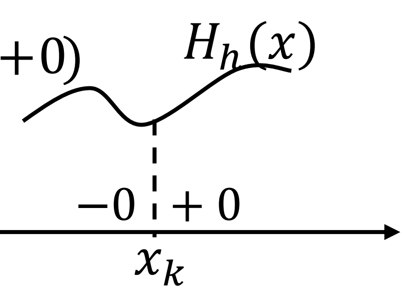
$$\tilde{\beta}_k(x) = (x - x_k)\left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2$$

$$\tilde{\beta}_{k+1}(x) = (x - x_{k+1})\left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2$$

类似于分段线性插值, 可得分段三次埃尔米特插值$H_h(x)$

$H_h'(x_k - 0) = f_k' = H_h'(x_k + 0)$

整体一阶导数连续



例 求次数小于等于 3 的多项式 $P(x)$, 使其满足条件

$$P(0)=0,\ P'(0)=1,\ P(1)=1,\ P'(1)=2.$$

【解】记 $x_0=0, x_1=1$, 则 $f(x_0)=0, f(x_1)=1, f'(x_0)=1, f'(x_1)=2$,

由两点的埃尔米特插值公式 $P(x)=\alpha_0(x)f(x_0)+\alpha_1(x)f(x_1)+\beta_0(x)f'(x_0)+\beta_1(x)f'(x_1)$,

式中 $\alpha_0(x), \alpha_1(x), \beta_0(x), \beta_1(x)$ 是埃尔米特插值基函数,即

$$\alpha_0(x)=\left(1-2\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2=\left(1-2\frac{x-0}{0-1}\right)\left(\frac{x-1}{0-1}\right)^2=(1+2x)(x-1)^2$$

$$\alpha_1(x)=\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2=\left(1+2\frac{x-1}{0-1}\right)\left(\frac{x-0}{1-0}\right)^2=(1+2(1-x))x^2$$
$$=x^2(3-2x)$$

$$\beta_0(x)=(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2=(x-0)\left(\frac{x-1}{0-1}\right)^2=x(x-1)^2$$

$$\beta_1(x)=(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2=(x-1)\left(\frac{x-0}{1-0}\right)^2=(x-1)x^2$$

因此 $P(x)=x^2(3-2x)+x(x-1)^2+2x^2(x-1)=x^3-x^2+x$

分段埃尔米特(Hermite)插值

- 分段三次埃尔米特插值

$H_3^{(k)}(x)$

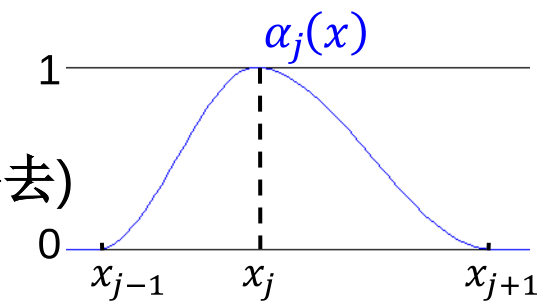
$x\in[x_k,x_{k+1}]$时, $H_h(x)=f_k\tilde{\alpha}_k(x)+f_{k+1}\tilde{\alpha}_{k+1}(x)+f_k'\tilde{\beta}_k(x)+f_{k+1}'\tilde{\beta}_{k+1}(x)$

$\tilde{\alpha}_k(x),\tilde{\beta}_k(x)$表示两点三次埃尔米特插值的两种基函数

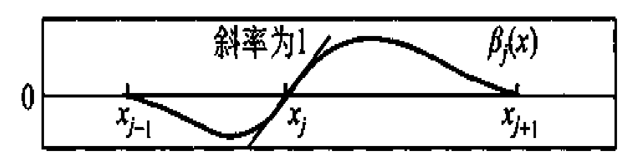
$H_h(x)$的整体公式 $H_h(x)=\sum_{j=0}^{n}[f_j\alpha_j(x)+f_j'\beta_j(x)]$

整体基函数 $\alpha_j(x)=$

$$\begin{cases}\left(1+2\dfrac{x-x_j}{x_{j-1}-x_j}\right)\left(\dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}\right)^2, & x_{j-1}\le x\le x_j\ (j=0\text{时略去})\\ \left(1+2\dfrac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}\right)\left(\dfrac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}\right)^2, & x_j\le x\le x_{j+1}(j=n\text{时略去})\\ 0, & x\notin[x_{j-1},x_{j+1}]\end{cases}$$



局部非零的性质

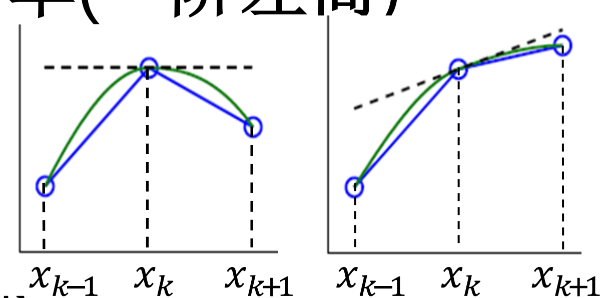


可证分段埃尔米特插值收敛

保形分段插值 (shape-preserving)

- 基本思想
  - 分段Hermite插值需插值节点上导数值, 不便提供
  - 可用插值节点函数值设定导数值, 再做Hermite插值
  - 得到曲线光滑, 且保持与数据点一致的单调性(凸性)
- 节点处导数的设定
  - 对插值节点x_k, 先计算两侧割线斜率(一阶差商)

$$d_{k-1}=\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}},\ d_k=\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$$



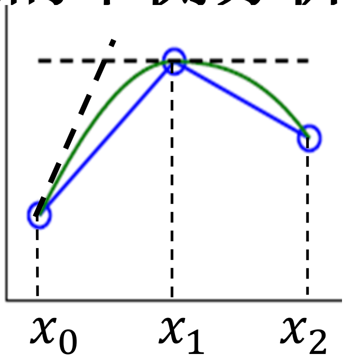
- 若$d_{k-1}d_k \le 0$,令$f_k' = 0$
- 否则取加权调和平均, $\frac{w_{k-1}+w_k}{f_k'}=\frac{w_{k-1}}{d_{k-1}}+\frac{w_k}{d_k}$

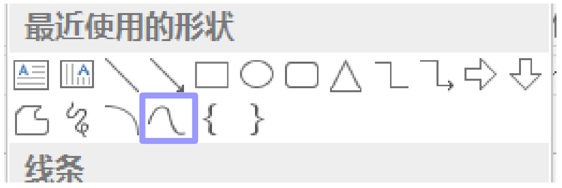
权重$w_{k-1}=h_{k-1}+2h_k,\ w_k=2h_{k-1}+h_k$

比算术/几何平均得到的曲线更平缓

保形分段插值 (shape-preserving)

- 节点处导数的设定 (续)
  - 对两端的插值节点, f_0'和f_n'的计算作类似的单侧分析
  - 一旦设定了导数值, 用分段三次Hermite插值确定插值公式
  - Matlab函数pchip (piecewise cubic Hermite interpolating polynomial)





Word/Power Point中的绘图按钮

三种分段低次插值小结

3种分段低次插值与高次多项式插值相比，具有如下优点：

(1) 收敛性好，避免了类似龙格现象的发生。

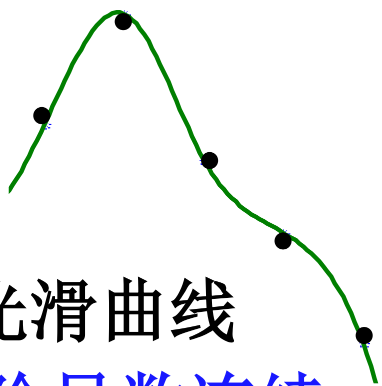
(2) 保凸性好，只使用了较低次数的多项式，因此曲线的拐弯比较少。

(3) 稳定性好，分段低次插值的基函数都具有局部非零性质，若节点x_j处的函数值或1阶导数值有扰动，它仅影响到局部小区间上的插值函数值，误差不会传播到其他部分。

样条函数插值

三次样条插值

- **Motivation**
  - 前面介绍的分段插值二阶导数不连续
  - 样条(spline)是早期工程师绘图所用的薄木条, 将它固定在一些给定点上得到光滑曲线
  - 在物理上, 样条<u>势能达到最小</u>,曲线必二阶导数连续



- 三次样条插值函数
  - 定义6.8: 给定插值节点$x_0, x_1, \cdots, x_n \in [a,b]$, 若函数$S(x)$
    - 在每个小区间$[x_j, x_{j+1}]$上为三次多项式
    - 整体二阶导数连续

    则称$S(x)$为这些节点上的三次样条函数
  - 若还满足$S(x_j) = f(x_j)$, 则$S(x)$为$f(x)$的三次样条插值函数

三次样条插值

- 如何确定$S(x)$?

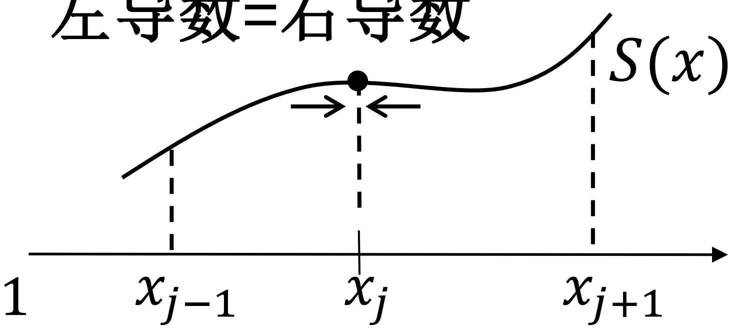
$$S(x)=\begin{cases} s_0(x), & x\in[x_0,x_1] \\ s_1(x), & x\in[x_1,x_2] \\ \vdots & \\ s_{n-1}(x), & x\in[x_{n-1},x_n] \end{cases}$$

其中$s_j(x)$为三次多项式，且

$$\boxed{s_j(x_j)=f_j,\ s_j(x_{j+1})=f_{j+1}}$$

$j=0,1,\cdots,n-1$

左导数=右导数



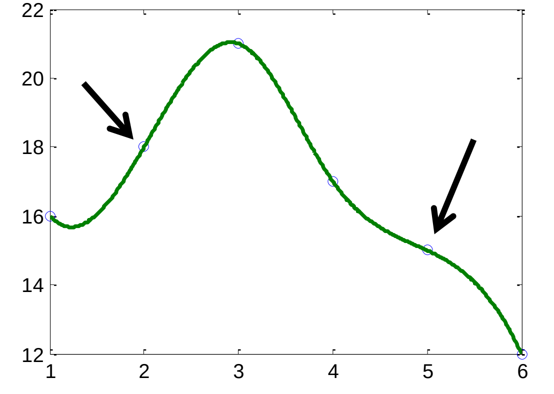
$$S(x)\in C^2[a,b] \Rightarrow \boxed{\begin{cases} s'_{j-1}(x_j)=s'_j(x_j) \\ s''_{j-1}(x_j)=s''_j(x_j) \end{cases}}$$

$j=1,2,\cdots,n-1$

每个$s_j(x)$为三次多项式, 有4个待定系数, 所以共有4n个待定系数, 故需4n个方程才能确定. 前面已经得到 2n+2(n-1) = 4n-2 个方程, 还缺 2 个方程!

三次样条插值

- 确定$S(x)$的额外条件
  - 第1种边界条件: 给定函数在端点处的一阶导数
    $S'(x_0) = f_0', S'(x_n) = f_n'$
  - 第2种边界条件: 给定函数在端点处的二阶导数
    $S''(x_0) = f_0'', S''(x_n) = f_n''$ (若f_0''=f_n''=0, 自然样条插值)
  - 第3种边界条件: 设$f(x)$是以$x_n - x_0$为周期的周期函数
    $S'(x_0) = S'(x_n), S''(x_0) = S''(x_n)$
    (一般应要求$f_0 = f_n$)
  - 第4种边界条件: 设起始、结束的两个小区间上都为统一的三次多项式
    (not-a-knot条件, Matlab中spline函数)



三次样条插值

- 三次样条插值函数的构造

①以节点一阶导数为参数列分段Hermite公式, 再定参数

②以节点二阶导数为参数, 根据插值条件确定它们

介绍第②种方法，设$S''(x_j) = M_j, (j = 0, \ldots n)$

小区间$[x_j, x_{j+1}]$上$S''(x)$为一次多项式

$$S''(x) = M_j\left(\frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}}\right) + M_{j+1}\left(\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}\right)$$

$$= M_j\left(\frac{x_{j+1} - x}{h_j}\right) + M_{j+1}\left(\frac{x - x_j}{h_j}\right)$$

做两次积分, 得

$$S(x) = -\frac{M_j}{6h_j}(x - x_{j+1})^3 + \frac{M_{j+1}}{6h_j}(x - x_j)^3 + a_j x + b_j$$

利用$S(x_j) = f_j$, $S(x_{j+1}) = f_{j+1}$, 确定a_j, b_j的值

三次样条插值

- 三次样条插值函数的构造

$$S(x)=M_j\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}+(f_j-\frac{M_jh_j^2}{6})\frac{x_{j+1}-x}{h_j}+(f_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6})\frac{x-x_j}{h_j}$$

在上述构造过程中，满足了节点上函数值、以及二阶导数连续的插值要求 $x\in[x_j,x_{j+1}]$

利用节点处一阶导数连续、及边界条件确定M_j的值

$$S'(x)=-M_j\frac{(x_{j+1}-x)^2}{2h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^2}{2h_j}+\frac{f_{j+1}-f_j}{h_j}-\frac{M_{j+1}-M_j}{6}h_j,\ x\in[x_j,x_{j+1}]$$

令$x=x_j$, $S'(x_j+0)=-\frac{h_j}{3}M_j-\frac{h_j}{6}M_{j+1}+\frac{f_{j+1}-f_j}{h_j}$

$j\to j-1$,再令$x=x_j$, $S'(x_j-0)=\frac{h_{j-1}}{3}M_j+\frac{h_{j-1}}{6}M_{j-1}+\frac{f_j-f_{j-1}}{h_{j-1}}$

M_{j-1},M_j,M_{j+1}满足的方程

三次样条插值

- 三次样条插值函数的构造
  - 根据节点x_j上一阶导数连续, 得n-1个方程

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j, (j = 1, \dots, n-1)$$

$$\boxed{\mu_j + \lambda_j = 1}$$

  - 第1种边界条件: $S'(x_0)=f_0'$, $S'(x_n)=f_n'$ (2个方程)

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_0}(\frac{f_1 - f_0}{h_0} - f_0') \quad \cdots$$

未知量为位移的二阶导数,
在力学上的意义为“弯矩”

完整的$(n+1)\times(n+1)$
线性方程组
(“三弯矩”方程)

严格对角占优阵
三对角阵
解存在、且唯一

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

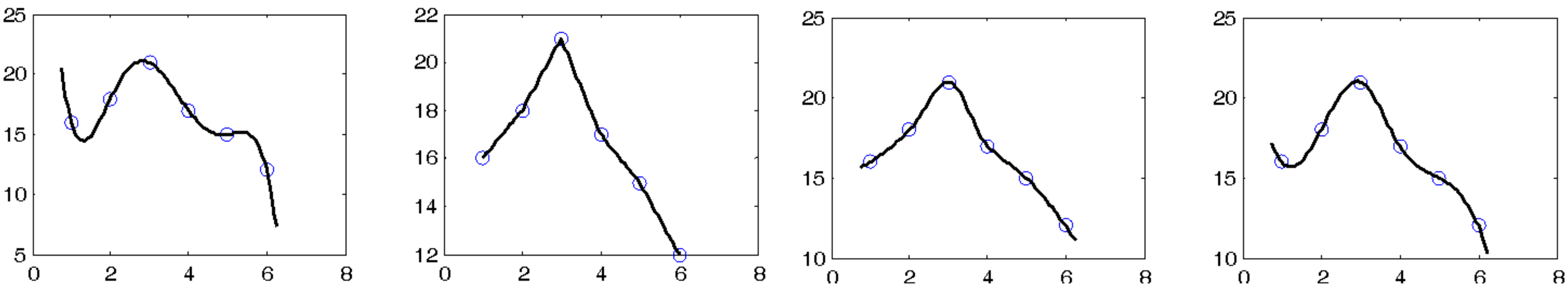
三次样条插值

- 三次样条插值函数的构造
  - 对于第2~4种边界条件, 构造出类似的“三弯矩”方程
  - 解出$M_j, (j=0,\ldots,n)$, 代入公式得三次样条插值函数
  - 解n阶三对角线性方程组, 计算量<<解4n阶的方程组(完全的待定系数法)
  - 收敛性、稳定性、保凸性、光滑性好

例6.12:与其他插值比较

有 6 个插值节点 $x_i = i + 1 (i = 0,1,\cdots,5)$, 对应的函数值为

$$f(x_0) = 16, f(x_1) = 18, f(x_2) = 21, f(x_3) = 17, f(x_4) = 15, f(x_5) = 12$$



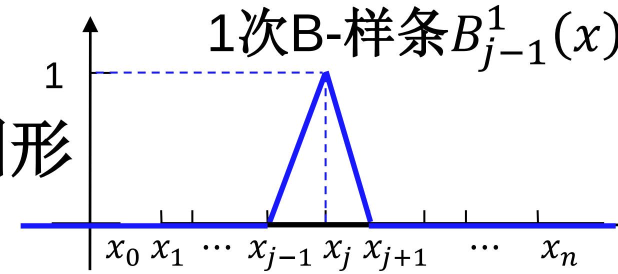
多项式插值　　分段线性插值　　保形分段插值　　三次样条插值

“样条”光滑性好

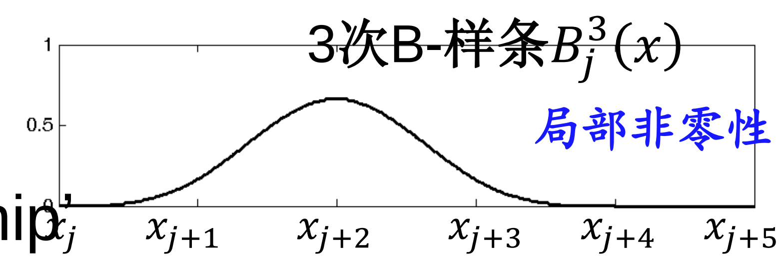
“保形”更反映数据趋势, 且计算简单

样条插值及其他

- B-样条函数
  - 有k-1阶连续导数的分段k次多项式为k次样条函数
  - 可写成基函数的线性组合, 基函数为B-样条函数
  - 1次样条函数为分段线性函数
  - B-样条基函数应用广泛(计算机图形学, 几何建模, 数值求解微分方程)



- Matlab命令
  - yi = interp1(x,y,xi,method)
  - ‘nearest’, ‘linear’, ‘spline’, ‘pchip’
  - interp2, interp3, pchip, spline, “**Spline toolbox**”



二、三维数据的插值　　　　多个函数，含各种边界条件的处理