2013-2014 学年第一学期高等数学试题（A）

一、填空题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分）

1。设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}1+\ln\left(1-2x\right), & x\le 0\\ 3+ae^{x}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$____

2。过点 $\left(1,2\right)$，且切线斜率为 $2x$ 的曲线方程为_________

3。极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x^{2}}-2}{e^{x^{2}}-1}=$___

4。设 $y=y\left(x\right)$ 由方程 $e^{xy}-x+y^{3}-0$ 确定，则 $y'=$____

5。$\int_{-1}^{3}\left|2-x\right|dx=$_____

二、计算题（共 6 小题，每题 10 分，共 60 分）

1. 求不定积分 $\int x\arctan x dx$

2. 设 $f(x)$ 连续，在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0,\quad f'(0)\ne 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{0}^{x}\left(x-t\right)f(t)dt}{x\int_{0}^{x}f(x-t)dt}$

3. 设 $f(x)=x^{2}+\dfrac{2}{x}$，求函数 $f(x)$ 的单调区间，极值，曲线 $y=f(x)$ 的凹凸性、拐点。

4. 求解微分方程 $y''-2y'+y=4xe^{x}$

5. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+xf\left(x\right)}{x^{3}}=0$，求 $f\left(0\right),f'(0),f''\left(0\right)$。

6. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0)=f'(0)=0,f''\left(x\right)>0$，并且在曲线 $y=f(x)$ 上任

意一点 $\left(x,f\left(x\right)\right)\left(x\ne 0\right)$ 处作此曲线的切线，此切线在 x 轴上的截距记为 u，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf\left(u\right)}{uf\left(x\right)}$

三、证明题（共 2 小题，每题 10 分，共 20 分）

1. 设函数 $f(x),g\left(x\right)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g\left(x\right)>0$。证明：存在一点 $\xi\in\left[a,b\right]$，

   使 $\int_{a}^{b}f\left(x\right)g\left(x\right)dx=f(\xi)\int_{a}^{b}g\left(x\right)dx$。

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $\left(a,b\right)$ 上可导，且 $f\left(a\right)=f\left(b\right)=1$。

   证明：存在 $\xi,\eta\in\left(a,b\right)$，使 $e^{\eta-\xi}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=1$。