14-15 学年第一学期高等数学试题（A）

一、 填空题（每题 4 分，共 20 分）：

1．$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=$________

2. 已知$h(x)=e^{1+g(x)}$, $h'(1)=1$, $g'(1)=2$，则$g(1)=$________

3. 写出e^x的n阶麦克劳林公式________

4. 设$f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x<0\\ e^{-x}, & x\geq 0\end{cases}$，则$\int_1^3 f(x-2)\,\mathrm{d}x$ $=$________

5. 设$f(x)$可微，$f(0)=0$, $f'(0)=1$, $F(x)=\int_0^x tf\left(x^2-t^2\right)\mathrm{d}t$ ，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^4}=$ ___

二、选择题（每题 4 分，共 20 分）：

6- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x\sin^2 x}=$________

（A）$\dfrac{1}{2}$ （B）$\dfrac{1}{3}$ （C）$\dfrac{1}{4}$ （D）$\dfrac{1}{6}$

7. $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,\mathrm{d}x$ $=$_____

（A）$\dfrac{2}{5}$ （B）$\dfrac{4}{5}$ （C）$-\dfrac{2}{5}$ （D）$-\dfrac{4}{5}$

8. 函数$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}+xe^x$满足的一个微分方程是________

（A）$y''-y'-2y=3x\mathrm{e}^x$ （B）$y''-y'-2y=3\mathrm{e}^x$

（C）$y''+y'-2y=3x\mathrm{e}^x$ （D）$y''+y'-2y=3\mathrm{e}^x$

9. 曲线$y=\dfrac{1}{x}+\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)$的渐近线的条数为________

（A）3 （B）2 （C）1 （D）0

10._设$f(x)$在$[a,b]$上可导，$f'(a)f'(b)<0$，下述命题

（1）至少存在一点$x_0\in(a,b)$使$f(x_0)>f(a)$

（2）至少存在一点$x_0\in(a,b)$使$f(x_0)>f(b)$

（3）至少存在一点$x_0\in(a,b)$使$f'(x_0)=0$

（4）至少存在一点 $x_0 \in (a,b)$ 使 $f(x_0)=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$

其中正确的个数为________

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

三、计算（每题 10 分，共 60 分）：

11.（10 分）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\frac{1}{3}t^3+t+\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3}t^3-t+\frac{1}{3} \end{cases}$ 确定，求 $y=y(x)$ 的极值和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点

12.（共 2 小题，每小题 5 分）

1. 求微分方程 $y''-3y'+2y=2x\mathrm{e}^x$ 的通解

2. 求 $\int \frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

13.（共 2 小题，每小题 5 分）

1. 求由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 所确定的函数的导函数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

14.（10 分）设函数 $f(x),g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x),\quad g'(x)=2\mathrm{e}^x-f(x)$，且 $f(0)=0,\quad g(0)=2$，求 $\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x$

15.（共 2 小题，每小题 5 分）

1. 设 $0<a<b$，证明不等式 $\frac{2a}{b^2+a^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$

2. 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$0<f(x)<1$，且 $f'(x)\neq 1$，证明：方程 $f(x)=x$ 在 $(0,1)$ 内有唯一的根

16.（10 分）$F(x)=\begin{cases} \frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，其中 $f(x)$ 有连续的导数，且 $f(0)=0$，

（1）研究 $F(x)$ 的连续性;（2）求 $F'(x)$，并研究 $F'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性