Discrete Mathematics 2 模拟题解析

程俊皓出品

选择

可重组和

1. 如果一个小猪储钱罐中有1美分、5美分、10 美分、25美分、50 美分等硬币，那么20个硬币有(D)种不同的组合.

   A. 53130　　　B. 10626　　　C. 42504　　　D. 12650

解：有5样东西可以选择，允许重复，我们想选择20样东西，顺序不重要. 因此，根据定理2，答案是 $C(5+20-1,20)=C(24,20)=C(24,4)=10626.$

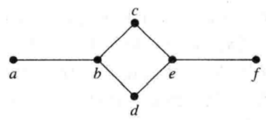
定理2 n 个元素的集合中允许重复的 r 组合有 $C(n+r-1,r)=C(n+r-1,n-1)$ 个.

证: 当允许重复时， n 元素集合的每个 r 组合可以用 $n-1$ 条竖线和 r 颗星的列表来表示.
这 $n-1$ 条竖线用来标记 n 个不同的单元. 当集合的第 i 个元素出现在组合中时，第 i 个单元就包含1颗星. 例如，4元素集合的一个6组合用3条竖线和6颗星来表示. 这里$**|*||***$代表了恰包含2个第一元素、1个第二元素、0个第三元素和3个第四元素的组合.

正如我们已经看到的，包含 $n-1$ 条竖线和 r 颗星的每一个不同的表对应了 n 元素集合的允许重复的一个 r 组合. 这种表的个数是 $C(n-1+r,r)$， 因为每个表对应了从包含 r 颗星和 $n-1$ 条竖线的 $n-1+r$ 个位置中取 r 个位置来放 r 颗星的一种选择. 这种表的个数还等于 $C(n-1+r,n-1)$，因为每个表对应于取 $n-1$ 个位置来放 $n-1$ 条竖线的一种选择.

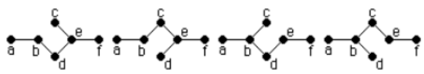
生成树个数

2. 下列简单图的生成树个数为(C)



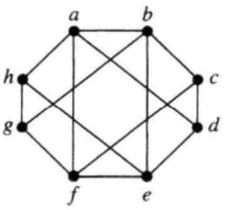
   A. 2　　　B. 3　　　C. 4　　　D.5

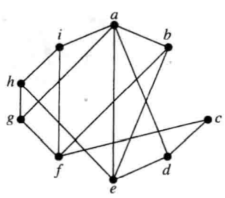
解：我们可以去掉中间方块的四条边中的任何一条，以产生一个生成树，如图所示

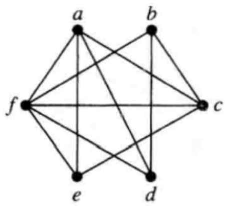


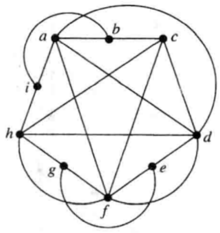
判断平面图英语

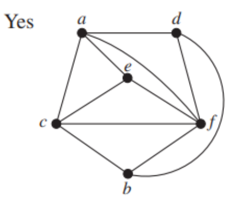
3. 下面是平面图的是(C)

A. 

B. 

C. 

D. 

解：C的同构为平面图 

解析略.

数列递推

4. 递推关系 $a_n=3a_{n-1}+2n$ 的所有解,具有 $a_1=2$ 的解是(D)

   A.$a_n=n-7/2+1/2\cdot 3^{n+1}$　　　B.$a_n=n-1/2+1/2\cdot 3^n$

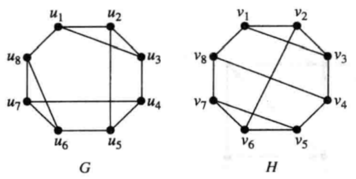
   C.$a_n=-n+3/2+1/2\cdot 3^n$　　　D.$a_n=-n-3/2+1/2\cdot 3^{n+1}$

解: 为求解这个常系数线性非齐次递推关系，我们需要求解与它相伴的线性齐次方程并且找到一个关于给定非齐次方程的特解. 相伴的线性齐次方程是 $a_n = 3a_{n-1}$.它的解是 $a_n^{(h)} = \alpha 3^n$, 其中 α 是常数.
我们现在找一个特解。因为 $F(n) = 2n$ 是 n 的1次多项式，所以解的一个合理的尝试就是 n 的线性函数，比如说 $p_n = cn + d$, 其中 c 和 d 是常数. 为确定是否存在这种形式的解，假设 $p_n = cn + d$,是一个这样的解. 那么方程 $a_n = 3a_{n-1} + 2n$ 就变成 $cn + d = 3(c(n-1) + d) + 2n$. 简化和归并同类项得 $(2+2c)n + (2d - 3c) = 0$. 从而， $cn + d$ 是一个解当且仅当 $2 + 2c = 0$ 和 $2d - 3c = 0$. 这说明 $cn + d$ 是一个解当且仅当 $c = -1$ 和 $d = -3/2$. 因此，$a_n^{(p)} = -n - 3/2$ 是一个特解.
根据定理5，所有的解都是形如 $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = -n - 3/2 + \alpha \cdot 3^n$ 其中 α 是常数.
为找出具有 $a_1 = 2$ 的解，在得到的通解公式中令 $n = 1$. 我们有 $2 = -1 - 3/2 + 3\alpha$，这就推出 $\alpha = 3/2$. 我们要找的解是 $a_n = -n - 3/2 + 1/2 \cdot 3^{n+1}$.

填空

同构

5. 下列两图之间的一个同构是( )（写出点的对应关系）



解：我们注意到，每个图中有两个顶点不在大小为4的循环中. 因此，让我们尝试构建一个与之匹配的同构体，比如 $u_1 \leftrightarrow v_2$ 和 $u_8 \leftrightarrow v_6$. 现在 u_1 与 u_2 和 u_3 相邻，v_2 与 v_1 和 v_3 相邻，所以我们尝试 $u_2 \leftrightarrow v_1$ 和 $u_3 \leftrightarrow v_3$. 然后，由于 u_4 是与 u_3 相邻的另一个顶点，v_4 是与 v_3 相邻的另一个顶点（而且我们已经匹配了 u_3 和 v_3），我们必须有 $u_4 \leftrightarrow v_4$. 沿着类似的思路，我们可以用 $u_5 \leftrightarrow v_8$、$u_6 \leftrightarrow v_7$、$u_7 \leftrightarrow v_5$ 来完成这个双射. 在找到唯一可能的同构关系后，我们检查G的12条边与H的12条边完全对应，我们就证明了这两个图是同构的.

普通排列组合题

6. 从一个m元集到一个n元集存在( )个一对一函数.

解: 首先注意当 $m > n$ 时没有从 m 元集到 n 元集的一对一函数. 现在令 $m \le n$. 假设定义域中的元素是 $a_1, a_2, \ldots, a_m$. 有 n 种方式选择函数在 a_1 的值. 因为函数是一对一的，所以可以有 $n-1$ 种方式选择函数在 a_2 的值(因为 a_1 用过的值不能再用). 一般地，有 $n-k+1$ 种方式选择函数在 a_k 的值. 由乘积法则，从一个 m元集到一个 n 元集存在着 $n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$ 个一对一函数.

奥尔定理英语

7. If G is a simple graph with n vertices with $n \ge 3$ such that ( ) for every pair of nonadjacent vertices u and v in G, then G has a Hamilton circuit.

解：由奥尔定理，答案为 deg(u) + deg(v) ≥ n.

不定方程解数

8. 方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29$ 有( )个解使得其中 $x_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 是非负整数，并且 $x_1 < 8, x_2 > 8$.

解： $x_2 \ge 9$（按要求）但不限制 x_1 的解的数量为 $C(6 + 20 - 1, 20) = C(25, 20) = 53130$. 违反附加限制的解的数量是：$x_1 \ge 8$, 共 $C(6 + 12 - 1, 12) = C(17, 12) = 6188$ 个. 因此答案是 $53130 - 6188 = 46942$个.

大题

图证明

9. 设图G中有9个结点，每个结点的度不是5就是6. 试证明G中至少有5个6度结点或至少有6个5度结点.

证明：反证法：假设6度结点小于5个且5度结点小于6个，则只可能有5个5度结点，4个6度结点(其他情况结点数的和小于9).
此时，各结点度数之和为：$5\times 5 + 4\times 6 = 25 + 24 = 49$, 与结点度数之和为偶数(边数两倍)矛盾.
故 G 中至少有5个6度结点或至少有6个5度结点.

恒等式证明

10. 证明：$\sum_{j=2}^{n} C(j,2) = C(n+1,3)$, 其中 n 是大于1的整数.

证明：用数学归纳法，$n=2$时，左边$=C(2,2)=1=C(3,3)=$右边

假设 $n=k$ 成立，$\sum_{j=2}^{k} C(j,2) = C(k+1,3)$，考虑 $n=k+1$ 时，

$\sum_{j=2}^{k+1} C(j,2) = \sum_{j=2}^{k} C(j,2) + C(k+1,2) = C(k+1,3) + C(k+1,2) = c((k+1)+1,3)$. 最后一步是因为帕斯卡恒等式

$C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n,k)$. 故由数学归纳法，原命题成立！

容斥原理应用

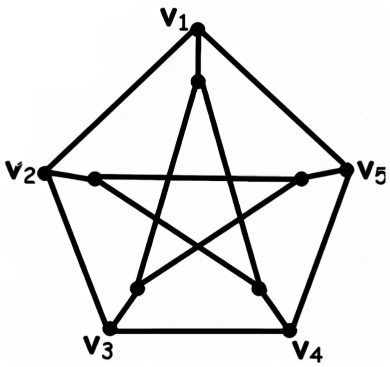
11. 设 D_n 为 n 个物体的错位排列数，试证明：
    (1) $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$，$n \geq 2$
    (2) $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$，$n \geq 1$

证明：(1) 在一个从1到 n 的错位排列中，数字1不可能先出现，所以让 $k \neq 1$ 成为第一个出现的数字. k 有 $n-1$ 种选择. 现在有两种方法可以得到一个以 k 为先的错位排列. 一种方法是将1放在第 k 个位置. 如果我们这样做，那么正好有 D_{n-2} 种方法来改变其余的的数字. 另一方面，如果1没有进入第 k 位，那么就把数字1看作是 k . 在这种情况下，通过找到数字2至 n 的位置上的错位排列，所以有 D_{n-1} 个这样的数字. 将所有这些结合起来，通过乘积规则和规则，我们得到了所需的递归关系. 初始条件是 $D_0 = 1, D_1 = 0$.

(2) 根据(1)，我们有 $D_n - nD_{n-1} = -[Dn - 1 - (n-1)D_{n-2}]$. 迭代后，我们有
$D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}] = -[-(D_{n-2} - (n-2)D_{n-3}] = D_{n-2} - (n-2)D_{n-3} = \ldots = (-1)^n(D_2 - 2D_1) = (-1)^n$
，因为 $D_2 = 1$ 且 $D_1 = 0$.

图证明

12. 证明：彼得森图不是哈密顿图.



证明思路1：将彼得森图中的15条边分为3种：

1类边：连接外部大五边形顶点的5条边。

2类边：连接内部小五角星顶点的5条边。

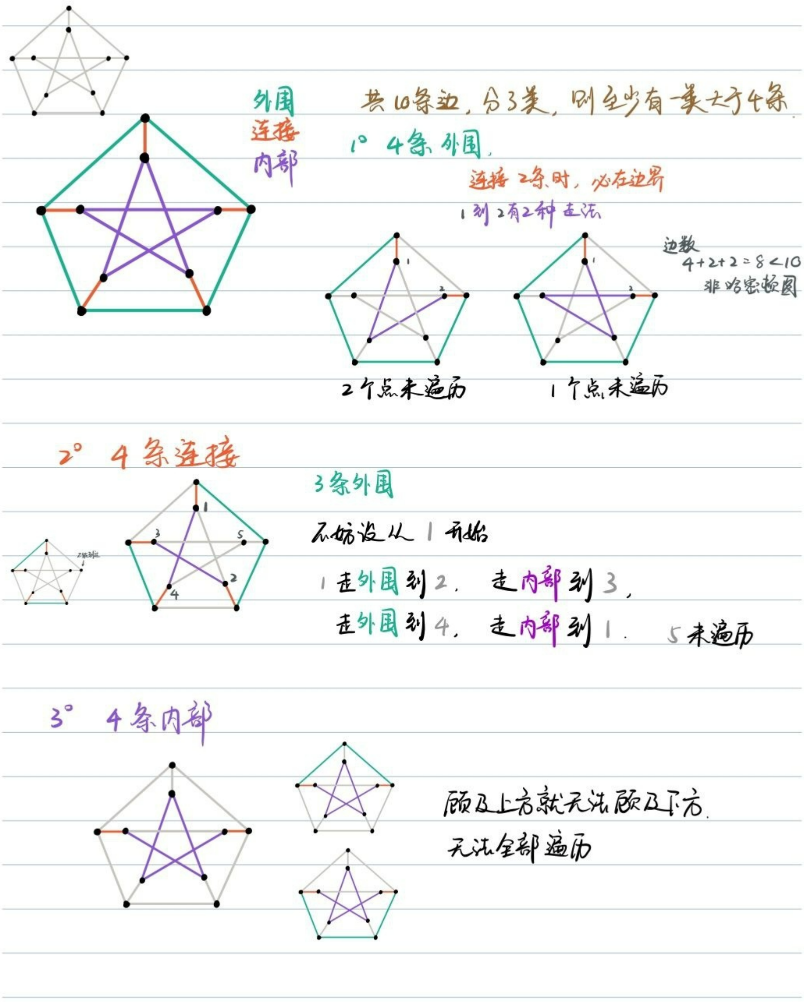
3类边：连接内外顶点的5条边。

如果彼得森图是哈密尔顿图，那么存在一条10条边组成的回路（10个顶点），该回路中的3类边有2条或4条（回到内圈或外圈的起点）。

若有2条3类边， 则外圈必须有4条1类边将五个外圈顶点连接，此时需要使用4条边2类边将内圈不相邻的两顶点连接，显然不可行。

若有4条3类边，则有一个还未连接的外圈顶点必有2条1类边与相邻外圈顶点相连，同理未连接的内圈顶点也必须有2条2类边与相邻的内圈顶点相连。此时须用两条边把剩余4个顶点相连，显然问题无解。

另解：



数列递推应用

13. 求解联合递推关系

$$a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1}$$
$$b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$$

其中$a_0 = 1, b_0 = 2.$

解：首先，我们把这个系统简化为一个递推关系和只涉及 a_n 的初始条件. 如果我们把两个方程相减，我们得到 $a_n - b_n = 2a_{n-1}$ ，这就得到 $b_n = a_n - 2a_{n-1}$. 我们将其代入得到 $a_n = 3a_{n-1} + 2(a_{n-1} - 2a_{n-2}) = 5a_{n-1} - 4a_{n-2}$ ，这就是我们想要的单变量递归关系. 值得注意的是，原始方程中的第一个方程给了我们必要的第二个初始条件. 即 $a_1 = 3a_0 + 2b_0 = 7$. 现在我们以通常的方式解决 $\{a_n\}$ 的问题. 特征方程 $r^2 - 5r + 4 = 0$的根是1和4，在求出系数后，其解是 $a_n = -1 + 2 \cdot 4^n$. 最后，我们将其代入方程 $b_n = a_n - 2a_{n-1}$ 中，发现 $b_n = 1 + 4^n$.

图论证明

14. 证明：在连通图中，任意两条最长路必有公共顶点.

证: 若 P_1, P_2 是连通图 G 中的两条最长路,它们没有公共顶点. 设 V_1, V_2 分别是 P_1, P_2 中顶点的集合，由于 G 连通，所以存在一条从 V_1 到 V_2 的路 (u, v)，其中 u 是 P_1 的顶点，v 是 P_2 的顶点，且该路不再含有 V_1 和 V_2 的顶点，顶点 u 将 P_1 分为两段，选取其中长度较长的一段，同样顶点 v 将 P_2 分为两段，也选取其中长度较长的一段，则这两段与路 (u, v) 一起，构成一条更长的路，矛盾.