非线性方程求根

- 二分法
- 不动点迭代法
- 牛顿法
- 牛顿法的改进
- 实用求根技术
- 非线性方程组求解

非线性方程基本理论

- 非线性方程 $f(x)=0$，(默认实数域上)

- 一般地，解的存在性和个数很难确定

  (1) $e^x+1=0$. 此方程无实数解.

  (2) $e^{-x}-x=0$. 此方程有一个解.

  (3) $\cos x=0$. 此方程有无穷多个解.

  (4) $x^3-6x^2+5x=0$. 此方程有三个解.

- 特例是n次多项式方程
- 实际问题中，一般求区间$[a,b]$上的实数解

非线性方程基本理论

若 $m=1$, 即 $f(x^*)=0, f'(x^*)\neq 0$ 时, 称 x^* 为**单根**。

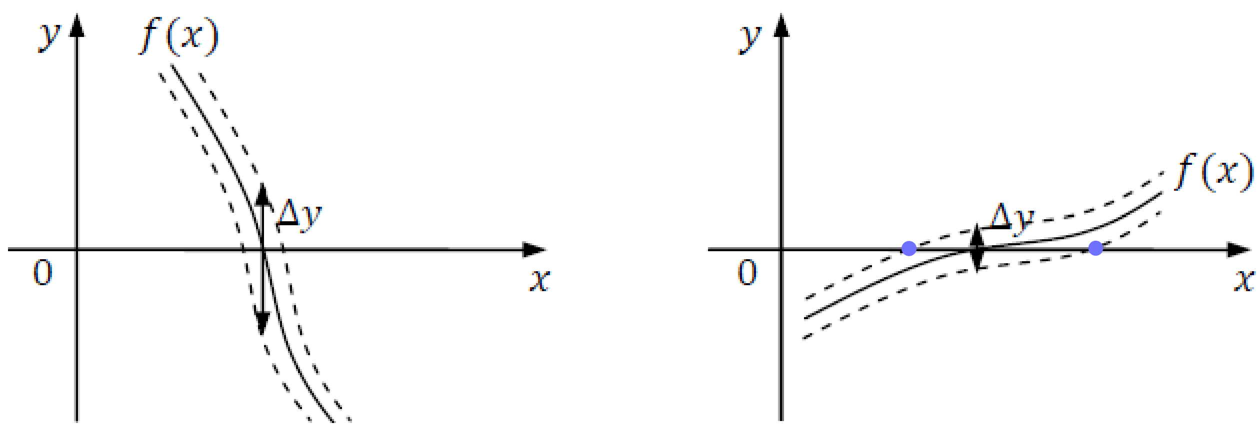
$f^{(m)}(x^*)\neq 0, m>1$

- **m重根**x^*: $f(x^*)=f'(x^*)=\cdots=f^{(m-1)}(x^*)=0$
- 问题的敏感性: <u>输入数据</u>扰动对<u>解</u>的误差的影响
- 一种易于分析的情况：设$f(x)=y$, 求$y=0$对应的x

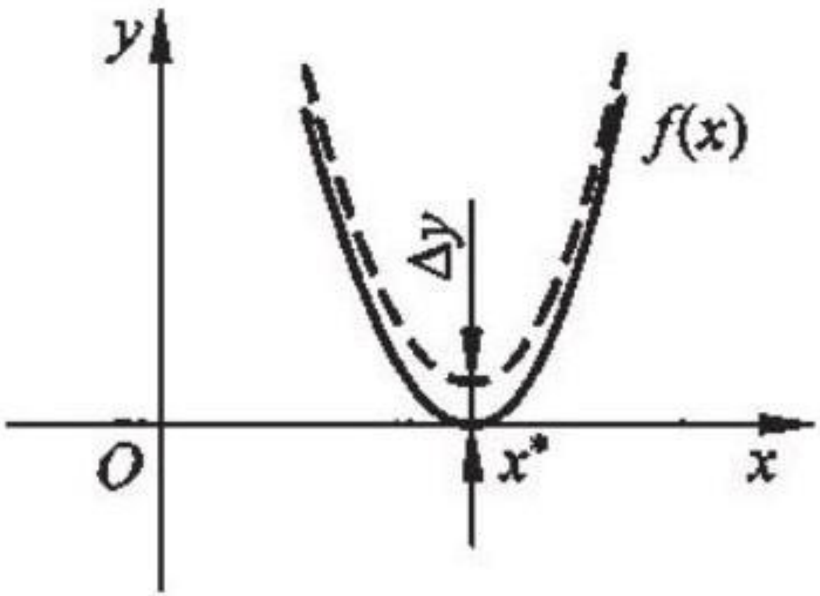
解　输入

绝对条件数 $\left|\dfrac{\Delta x}{\Delta y}\right| \approx \left|\dfrac{1}{f'(x^*)}\right|$

- $|f'(x^*)|$越小，问题越敏感



当x^*是重根时($f'(x^*)=0$)，求根问题很敏感, 原问题的微小扰动将造成很大的解误差, 甚至改变解的存在性和唯一性.

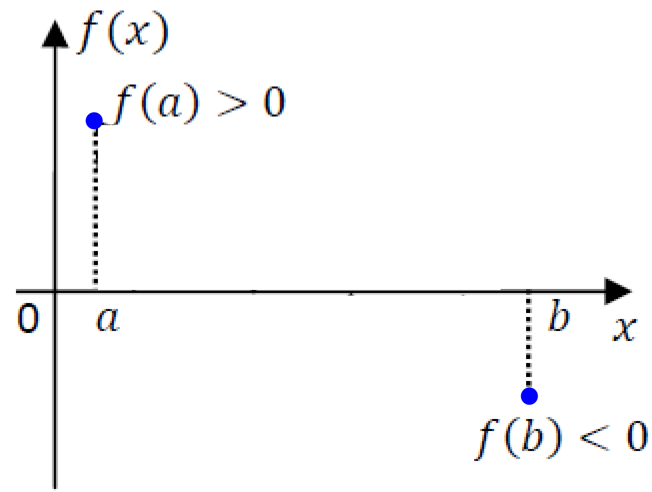


对于敏感的非线性方程求根问题, $f(x)\approx 0$ 并不意味着 x 很接近 x^*

二分法

二分法(interval bisection method)

(连续函数)



- 定理2.1：若$f(x)\in C[a,b]$，且$f(a)f(b)<0$，则区间(a,b)内至少有一实根
- 有根区间, 可以逐渐让它缩小
- 二分法: 逐次将有根区间一分为二，得到区间序列$\{(a_k,b_k)\}$，近似解$x_k=(a_k+b_k)/2$. 并且

$$|x_k-x^*|<(b_k-a_k)/2=(b_0-a_0)/2^{k+1},k=0,1,\cdots$$

- 可估计要达到某个<u>误差限</u>所需的<u>二分次数</u>, 也是计算函数值的次数

二分法

算法2.1：二分法

输入：a，b, 函数$f(x)$; 输出：x.

While $(b-a) > \varepsilon$ **do**

$x := a + (b-a)/2$;

If $\mathrm{sign}(f(x)) = \mathrm{sign}(f(a))$ **then**

$a := x$;

Else

$b := x$;

End

End

$x := a + (b-a)/2$.

sign()表示取符号的函数。这里忽略了$f(x)$或$f(a) = 0$的情况（若成立, 直接退出）

- 算法稳定性: 运算简单, 误差逐渐缩小, 比较稳定

例 (二分法): 求方程 $f(x) = x^4 - x - 2 = 0$在区间 [1.0,1.5] 上的一个实根, 要求四舍五入到小数点后第二位 。

【解】首先验证 (1.0,1.5) 是否是一个有根区间, $f(1.0) < 0, f(1.5) > 0$， (1.0,1.5) 作为二分法的初始区间。

若 $(b-a)/2^{k+1} \leqslant 0.5 \times 10^{-2}$, 则 $|x_k - x^*| < 0.5 \times 10^{-2}$,

代入 $a = 1.0, b = 1.5$,

$$k \geqslant \log_2 \frac{0.5}{0.5 \times 10^{-2}} - 1 = 5.6$$

取最小的整数值 $k = 6$ 。二分 6 次, 就可得到满足精度要求的近似解 $x = 1.356$ (准确解为 1.353210)。

二分法

- 浮点运算下, 二分法的结果准确度的极限

例:求解方程$f(x) = x^2 - 2 = 0$，初始区间为[1, 2].
程序运行，迭代**52**次后, 区间不再缩小
打印出的最后几个区间端点值

a = 3ff6a09e667f3bc8

a = 3ff6a09e667f3bcc

b = 3ff6a09e667f3bce

b = 3ff6a09e667f3bcd

(按16进制显示)

相邻的两个浮点数

$= \lfloor \log_2 |x^*| \rfloor$

- 最小的有根区间长度为: $2^E \cdot 2\varepsilon_{\text{mach}}$，$E$为准确解$x^*$的浮点数指数

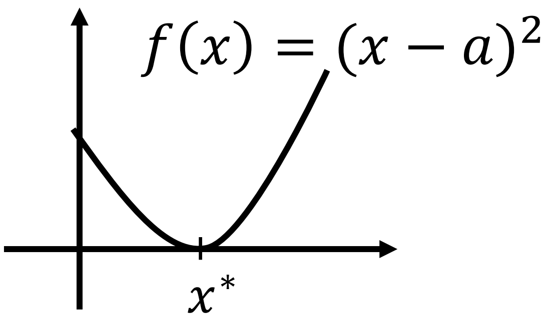
双精度下, 解的误差限最小为2^{E-52}

$|e_r| \leq 2\varepsilon_{\text{mach}}$

算法**2.1**中误差阈值$\boldsymbol{\varepsilon}$不能太小，$\max\{|a|, |b|\} \cdot 2\varepsilon_{\text{mach}}$

二分法的总结

- 求单变量方程$f(x)=0$的实根的可靠算法，它逐次缩小解的范围，总能收敛.
- 在实际浮点数系统上，解的误差有下限.
- 缺点：收敛速度较慢; 无法求偶数重根；初始有根区间有时不方便确定、可能从多个根中随机得一个
- 常将二分法与其他方法结合起来使用



不动点迭代法

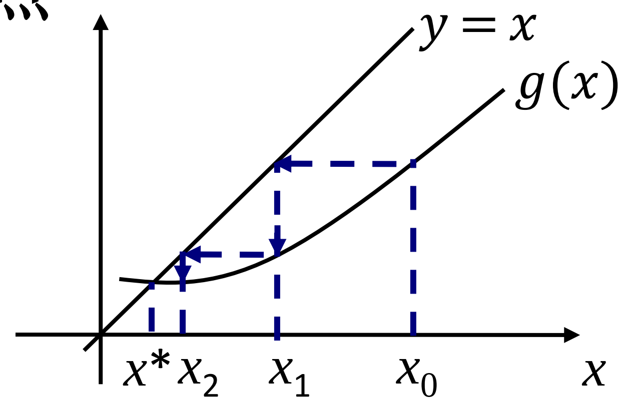
不动点迭代(fixed-point iterative method)

$$f(x)=0 \Longleftrightarrow x=g(x)$$

推出迭代法: $\begin{cases} x_{k+1}=g(x_k), & (k=0,1,\cdots) \\ \text{给定}x_0 \end{cases}$

- 若$\{x_k\}$序列收敛到x^*，则x^*是原方程的解
- 满足$x=g(x)$的x称为$g(x)$的不动点，
  几何意义是$y=g(x)$与$y=x$的交点
- 上述求解$f(x)=0$的方法称为
  不动点迭代法

计算过程的几何含义



不动点迭代

$$f(x)=0 \Longleftrightarrow x=g(x) \Longrightarrow x_{k+1}=g(x_k)$$

例2.4：求$x^4-x-2=0$在$x_0=1.5$附近的根

变形(A): $x=\sqrt[4]{x+2}$ $\Longrightarrow \begin{cases} x_{k+1}=\sqrt[4]{x_k+2} \\ x_0=1.5 \end{cases}$

x_1=1.3678, x_2=1.3547, … … , x_4=1.3532, x_5=1.3532

(5位有效数字不变)

变形(B): $x=x^4-2$ $\begin{cases} x_{k+1}=x_k^4-2 \\ x_0=1.5 \end{cases}$ **(计算量较小)**

x_1=1.5⁴-2= 3.1, x_2= x_1^4 -2≈ 85, …, 越来越大，发散！

问题：如何判断收敛性？

全局收敛的充分条件

- **定理2.3** $g(x) \in C[a,b]$, 若

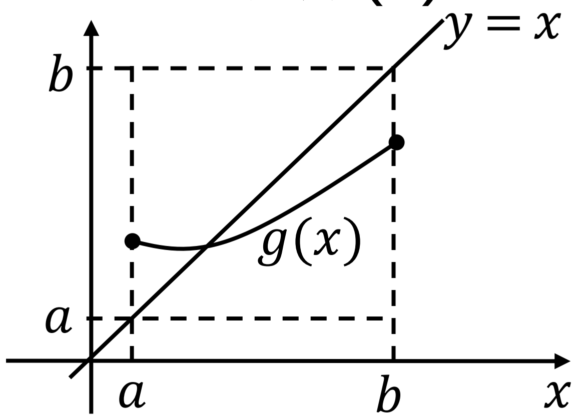
  可改为$<|x_1-x_2|$

  (1) 对$\forall x \in [a,b]$，有$a \le g(x) \le b$

  (2) $\exists L \in (0,\ 1)$, $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$有 $|g(x_1)-g(x_2)| \le L|x_1-x_2|$

  则$g(x)$在$[a,b]$上存在不动点，且唯一

说明: 条件(1)保证了存在不动点，可用图形解释



$g(x)$曲线在虚线正方形内, 水平方向横跨$[a,b]$, 则必与对角线相交, 这是连续函数的性质

【证明】 **不动点的存在性**

(1) 若$g(a)=a$, 或$g(b)=b$, 则 a 或 b 为不动点。

(2) 若$g(a)\neq a$ 且$g(b)\neq b$, 则$g(a)>a, g(b)<b$ 。令$\varphi(x)=g(x)-x$, 则$\varphi(x)$ 为连续函数, 且$\varphi(a)>0, \varphi(b)<0$ 。根据连续函数性质, 必有 $x^*\in(a,b)$, 使$\varphi(x^*)=0$, 即$g(x^*)=x^*, x^*$ 为不动点。

不动点的唯一性

假设有两个不同的不动点 $x_1^*, x_2^*\in[a,b]$, 它们满足

$$g(x_1^*)=x_1^*, g(x_2^*)=x_2^*,\ x_1^*\neq x_2^*。$$

根据(2) 中的条件推出

$$|x_1^*-x_2^*|=|g(x_1^*)-g(x_2^*)|\leqslant L|x_1^*-x_2^*|<|x_1^*-x_2^*|$$

产生矛盾。所以假设 $x_1^*\neq x_2^*$ 不成立, 不动点是唯一的。

全局收敛的充分条件 $f(x)=0 \Rightarrow x_{k+1}=g(x_k)$

- **定理2.4** (充分条件) 若$g(x)$满足条件

  (1) 对$\forall x\in[a,b]$，有$a\le g(x)\le b$

  (2) $\exists L\in(0,\ 1)$, $\forall x_1,x_2\in[a,b]$有 $|g(x_1)-g(x_2)|\le L|x_1-x_2|$

  则对$\forall x_0\in[a,b]$, 不动点迭代法$x_{k+1}=g(x_k)$都收敛到不动点x^*, 且 $|x_k-x^*|\le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$

证明: 考察误差序列 (条件(1)是算法执行的前提)

$$|x_k-x^*|=|g(x_{k-1})-g(x^*)|\le L|x_{k-1}-x^*|\le\cdots\le L^k|x_0-x^*|$$

$$\lim_{k\to\infty}L^k|x_0-x^*|=0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty}x_k=x^*$$

$$|x_k - x^*| \leqslant L|x_{k-1} - x^*| \leqslant L|x_{k-1} - x_k + x_k - x^*|$$
$$\leqslant L|x_k - x_{k-1}| + L|x_k - x^*|$$

$$\Rightarrow |x_k - x^*| \leqslant \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|$$

$$|x_k - x_{k-1}| = |g(x_{k-1}) - g(x_{k-2})| \leqslant L|x_{k-1} - x_{k-2}| \leqslant$$
$$\cdots \leqslant L^{k-1}|x_1 - x_0|$$

$$\Rightarrow |x_k - x^*| \leqslant \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

全局收敛的充分条件 $f(x)=0 \Rightarrow x_{k+1}=g(x_k)$

- 定理2.4 (充分条件) 若$g(x)$满足两个条件

  (1) 对$\forall x \in [a,b]$，有$a \le g(x) \le b$

  (2) $\exists L \in (0,\ 1)$, $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$有 $|g(x_1)-g(x_2)| \le L|x_1-x_2|$

  则对$\forall x_0 \in [a,b]$, 不动点迭代法$x_{k+1}=g(x_k)$都收敛, …

说明: 可用于判断不动点迭代法的全局收敛, 但条件(2)不够直观, 常替换为 (2)' $\forall x \in [a,b]$, $|g'(x)|<1$,便于使用.

这就是定理2.5

$$|g(x_1)-g(x_2)|=|g'(\xi)(x_1-x_2)|$$

定义域为 $\mathbb{R}$ 时,条件(1)不需要。

$$\because |g'(x)| \le L \Rightarrow |g(x_1)-g(x_2)| \le L|x_1-x_2|$$

$L=|g'(\bar{x})|$为最大值 (闭区间上的有界函数一定有最大值)

例 (不动点迭代法的收敛性): 求 $f(x) = x^4 - x - 2 = 0$ 在 $x_0 = 1.5$ 附近的根, 考查两种方法的全局收敛性。

方法 (A): $x_{k+1} = x_k^4 - 2, (k = 0,1,2,\cdots)$ 。

方法 (B): $x_{k+1} = \sqrt[4]{x_k + 2}, (k = 0,1,2,\cdots)$ 。

【解】在区间 [1,2] 上考查两种不动点迭代法的收敛性:

方法 (B) 符合定理 2.5 中的条件 (1), 而 $\varphi'(x) = \frac{1}{4}(x+2)^{-3/4}$ 也符合条件 (2), 因此方法 (B) 具有全局收敛性。

方法 (A) 不符合定理中的条件 (1), 因此无法根据定理 2.5 说明其具有全局收敛性。

局部收敛

$f(x)=0 \Rightarrow x_{k+1}=g(x_k)$

- **定义2.2** 若$g(x)$有不动点x^*, $\exists x^*$的邻域D: $[x^*-\delta, x^*+\delta]$, 使$\forall x_0 \in$D, 迭代法$x_{k+1}=g(x_k)$都收敛到x^*, 则称该方法<u>局部收敛</u> (强调<u>存在</u>某个邻域)
- **定理2.6** 设x^*是$g(x)$的不动点, 若$|g'(x^*)|<1$, 且$g'(x)$在x^*的某邻域上连续, 则迭代法$x_{k+1}=g(x_k)$局部收敛

证明: 证明$\exists x^*$的邻域D, 在它上迭代法全局收敛.

首先, $|g'(x^*)|<1$且局部连续, 则存在x^*的某个邻域D使$\forall x \in$D, $|g'(x)|\le L<1$, 这个L是介于$g'(x^*)$与1之间的数. 因此满足条件(2)'.

又$\forall x\in$D, $|g(x)-x^*|\le L|x-x^*|<|x-x^*|$, $\therefore g(x)\in$D 满足条件(1). 根据定理2.5, 收敛！

$|g'(x^*)|$越小收敛越快

局部收敛

注意:

1.只需看$g'(x^*)$, 因此局部收敛易判断

2.$|g'(x^*)|<1$是充分条件，某种程度上也算是必要性.

因为若$|g'(x^*)|>1$, 则在x^*附近局部$|g'(x)|$**>1.**

$$|x_{k+1}-x^*| = |g(x_k)-x^*| = |g'(\xi)(x_k-x^*)| \overset{\text{可能}}{>} |x_k-x^*|$$

误差有放大的趋势

$|g'(x^*)|=1$的例子: $x_{k+1}=b-x_k$　不收敛

$$x_{k+1}=\frac{x_k^3}{3}-x_k$$ 收敛 (在0附近的区间上)

稳定性与收敛阶

- 与二分法类似, 由于每步迭代计算后都通过判停准则来估计解的准确度, 因此只要解收敛, 误差即越来越小, 计算过程是稳定的. (合理设置判停准则, 稍后介绍)

  只需关心收敛性

- 收敛阶 (评估收敛快慢)

例: 误差$|x_k - x^*|$按如下3种情形缩小, 哪种收敛更快?

情形1: $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, \cdots$

情形2: $10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-7}, \cdots$

} 线性

情形3: $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}, \cdots$ 平方(超线性)

稳定性与收敛阶

- **定义2.3**: 迭代解序列$\{x_0, x_1, \cdots, x_k, \cdots\}$收敛. 若误差 $e(x_k) = x_k - x^*$满足 $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|e(x_{k+1})|}{|e(x_k)|^p} = c, \qquad (c \neq 0)$

  则称p阶收敛 (收敛阶为p) (不考虑舍入误差)

注意: 对一个收敛的迭代法(过程), 上述数值p是唯一的

例: 二分法的收敛阶？ 大体上是线性(**1**阶)收敛, $c = 0.5$

- **定理2.7** 迭代法$x_{k+1} = g(x_k)$, 若$g^{(p)}(x)$在不动点x^*附近连续, 整数p≥2, 则该方法在x^*的邻域上p阶收敛⟺

  $g'(x^*) = g''(x^*) = \cdots = g^{(p-1)}(x^*) = 0$，且$g^{(p)}(x^*) \neq 0.$

  推论： $g'(x^*)$= 0 ⇔ 至少2阶局部收敛

稳定性与收敛阶

充分性. 易知局部收敛。在x^*处做Taylor展开

$$e(x_{k+1}) = g(x_k) - g(x^*)$$

$$= \cancel{g'(x^*)(x_k - x^*)} + \cancel{\frac{g''(x^*)}{2}(x_k - x^*)^2} + \cancel{\cdots}$$

$$+ \cancel{\frac{g^{(p-1)}(x^*)}{(p-1)!}}(x_k - x^*)^{p-1} + \frac{g^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k - x^*)^p$$

$$e(x_{k+1}) = \frac{g^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k - x^*)^p$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e(x_{k+1})|}{|e(x_k)|^p} = \lim_{k\to\infty}\frac{\left|g^{(p)}(\xi_k)\right|}{p!} = \frac{\left|g^{(p)}(x^*)\right|}{p!} \neq 0$$

必要性用反证法: 设x^*处直到$g(x)$的q阶导数才≠0, (q≠p)

⟹ 方法q阶收敛. 矛盾!

定理 2.8: 对于不动点迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$, 若在所求根 x^* 的邻域上函数 $\varphi(x)$ 的 1 阶导数连续,

（1）如果 $\varphi'(x^*)\neq 0$, 且 $|\varphi'(x^*)|<1$, 则该迭代法在 x^* 的邻域上**线性收敛**;

（2）如果该迭代法在 x^* 的邻域上线性收敛,则 $\varphi'(x^*)\neq 0$, 且 $|\varphi'(x^*)|\leqslant 1$ 。

局部收敛 $\Longleftrightarrow$ 至少是线性收敛

例(不动点问题) 非线性方程 $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ 的根为 $x^* = 2$ 和 $x^* = -1$. 等价的不动点问题包括

(1) $g(x) = x^2 - 2$;

(2) $g(x) = \sqrt{x+2}$;

(3) $g(x) = 1 + 2/x$;

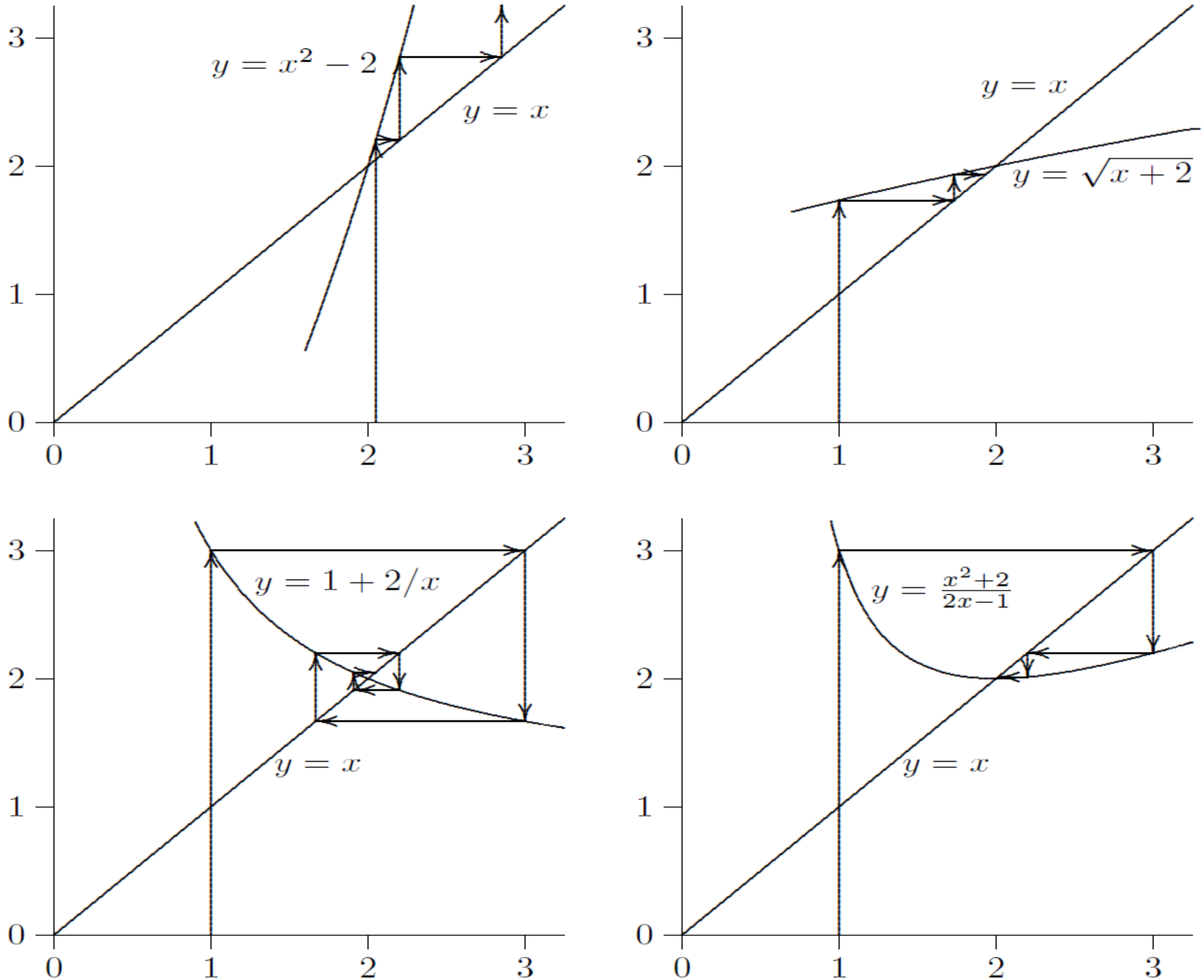
(4) $g(x) = \left(x^2 + 2\right)/(2x - 1)$.

(1) $g'(x) = 2x$, $g'(2) = 4$, 不动点迭代发散.

(2) $g'(x) = 1/(2\sqrt{x+2})$, $g'(2) = 1/4$, 不动点迭代线性收敛, 且 $C = 1/4$. $g'(2)$ 的符号为正, 迭代从一侧接近不动点.

(3) $g'(x) = -2/x^2$, $g'(2) = -1/2$, 不动点迭代线性收敛, 且 $C = 1/2$. $g'(2)$ 的符号为负, 迭代代左右两端交替接近不动点.

(4) $g'(x) = \left(2x^2 - 2x - 4\right)/(2x - 1)^2$, $g'(2) = 0$, 不动点迭代二次收敛.



$y = x^2 - 2$
$y = x$
$y = x$
$y = \sqrt{x+2}$
$y = 1 + 2/x$
$y = x$
$y = \frac{x^2+2}{2x-1}$
$y = x$

迭代法的判停准则

- 算法2.2 不动点迭代法

  $k := 0$;

  While $|f(x_k)| > \varepsilon_1$ 或 $|x_k - x_{k-1}| > \varepsilon_2$ **do**

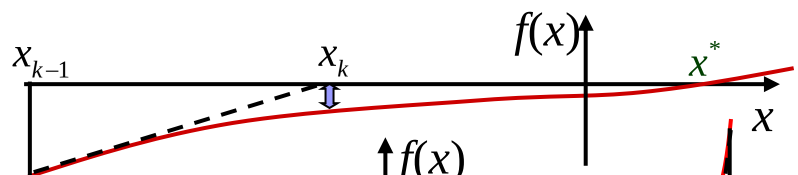
  $\quad x_{k+1} := g(x_k)$;

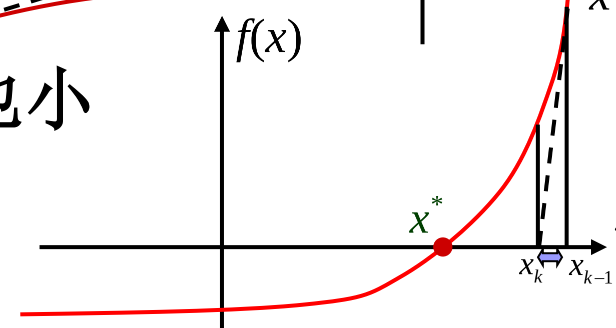
  $\quad k := k + 1$;

  End

判停准则决定了解的准确度、及迭代步数(计算量)

相比二分法, 较难设置





- $|f(x_k)| \le \varepsilon_1$, 称为残差判据

  缺点: $f(x_k)$小并不意味着$x_k - x^*$也小
- $|x_k - x_{k-1}| \le \varepsilon_2$, 称为误差判据

  缺点: 并不意味着$x_k - x^*$很小
- $|x_k - x_{k-1}| \le \varepsilon_3 |x_k|$, 称为相对误差判据

  特点: 阈值为相对量, 常用

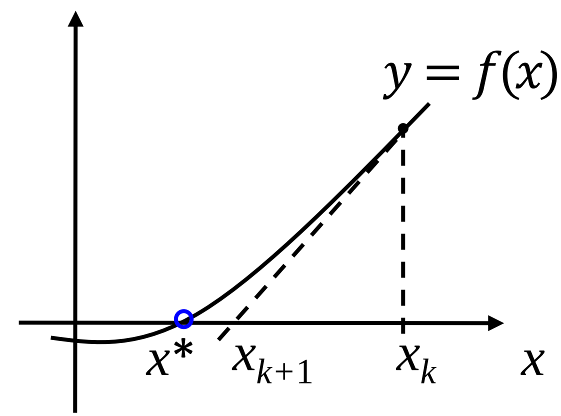
有时可能需要三种组合起来

牛顿法

牛顿法　解$f(x)=0$

- 也叫Newton-Raphson方法
- 优点: 1.减少不动点迭代法构造的盲目性

  2.较好的收敛性 (收敛阶)
- 原理: 用切线近似曲线$f(x)$



切线方程$P(x)=f(x_k)+(x-x_k)f'(x_k)=0$

$$\Rightarrow x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$ (假设$f'(x_k)\neq 0$)

也是不动点迭代法

- 考察局部收敛性

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$g'(x)=1-\frac{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

设$f'(x^*)\neq 0$, 即单根 $\Rightarrow$ $g'(x^*)=0$

牛顿法

解$f(x)=0$，$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

- 迭代函数$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$， $g'(x^*)=0\Rightarrow$ 至少**2阶收敛**

  又$g''(x^*)=\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}\neq 0$ (一般情况下) $\therefore$**一般为2阶收敛**

- **定理2.9** 设x^*是方程$f(x)=0$的**单根**，且$f(x)$在x^*附近有连续的二阶导数，则牛顿法<u>至少局部二阶收敛</u>.

  $\longrightarrow g(x)$的一阶导连续

- 方程$f(x)=0$有重根的情况
  - 只有<u>线性阶</u>的收敛速度，不比二分法(若可行)更好

牛顿法

解$f(x)=0$, $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

例2.7 求方程$f(x)=x^4-x-2=0$在1.5附近的根

解: 牛顿法公式

将$x_0=1.5$代入, 计算结果收敛速度比二分法、不动点迭代法都快. (4步, 5位精度)

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=\frac{3x_k^4+2}{4x_k^3-1},\quad k=0,1,2\ldots$$

k	0	1	2	3	4
x_k	1.5	1.375	1.3538	1.3532	1.3532

牛顿法

例2.8 求方程$f(x)=x^2-c=0,(c>0)$的正根

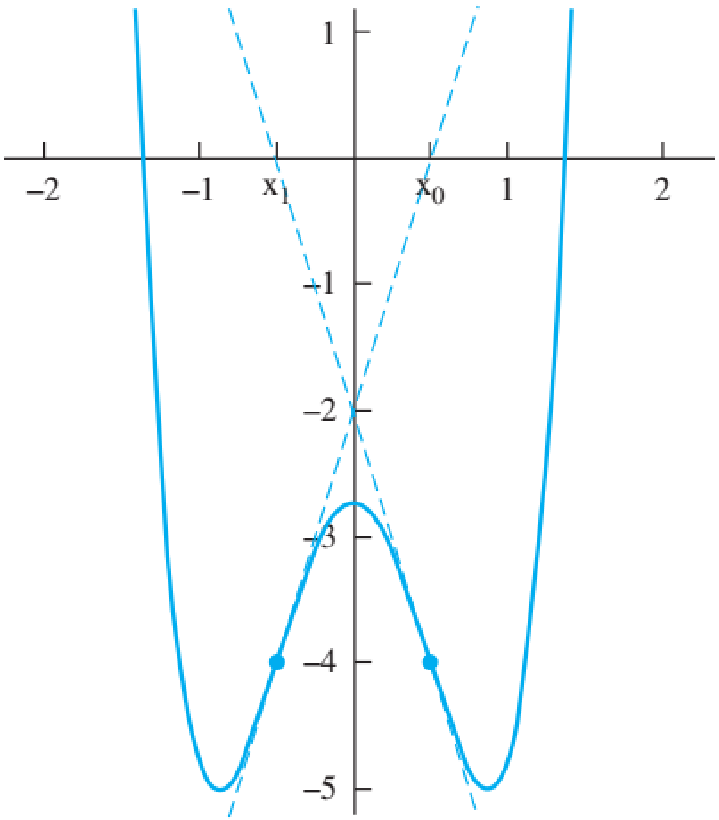
解: 牛顿法公式 $x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-c}{2x_k}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{c}{x_k}),\ k=0,1,2\ldots$

由于是单根, 此迭代法局部2阶收敛

事实上, 上述公式在(0, +∞)上全局收敛，是计算$\sqrt{c}$稳定、有效的方法(计算机中使用).

例 对 $f(x)=4x^4-6x^2-\frac{11}{4}=0$ 使用牛顿方法求根, 初始估计 $x_0=1/2$.

由于函数是连续函数, 在 $x=0$ 时取负值, 并且对于 x 的大的正数和负数则取无穷大的正值, 因此一定存在根.



牛顿公式 $x_{i+1}=x_i-\frac{4x_i^4-6x_i^2-\frac{11}{4}}{16x_i^3-12x_i}$

初始估计 $x_0=1/2$， 通过替代得到 $x_1=-1/2$, 进一步 $x_2=1/2$. 迭代的结果在 $1/2$ 和 $-1/2$ 之间变化, 但是二者都不是根, 牛顿方法求解根的过程失败.

牛顿法的问题

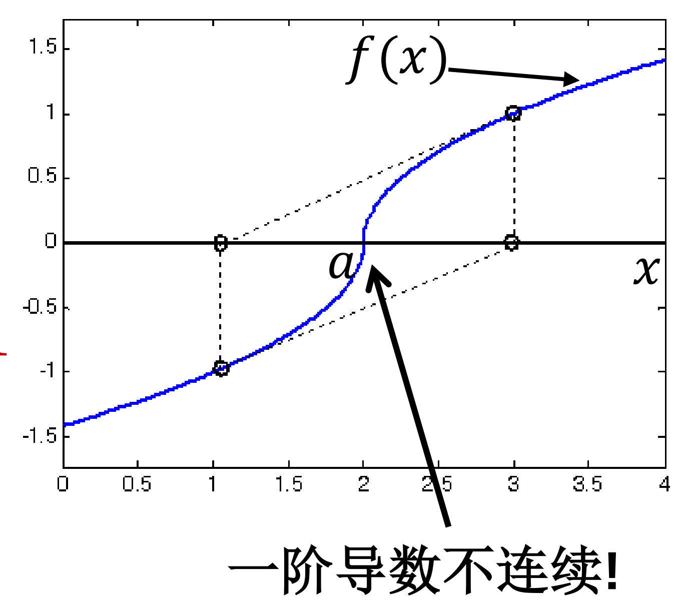
- 局部收敛, 依赖于初始解的设定
- 对$f(x)$的连续性要求高
  - 由于连续性不好，对任意初值都不收敛的例子

$$f(x) = \text{sign}(x-a)\sqrt{|x-a|} = 0$$

$$x_{k+1} = x_k - 2(x_k - a)$$
$$\Longrightarrow x_{k+1} - a = -(x_k - a)$$

$$g'(x^*) = -1$$

迭代解围绕$x = a$点来回跳动

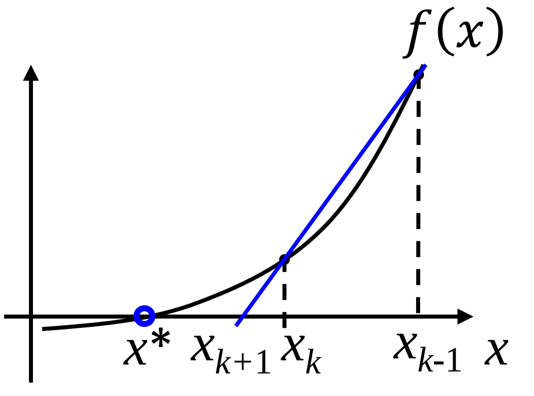


- 需要计算导数$f'(x)$

割线法与抛物线法

- 割线法 (secant method)
  - 为避免导数计算，用割线$P(x)$近似$f(x)$
  - 过x_k, x_{k-1}对应函数曲线上点的割线方程

$$P_1(x) = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k)$$



  - 求$P_1(x) = 0$的解，令其为x_{k+1}

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

  - 是一种广义的不动点迭代法.

割线法

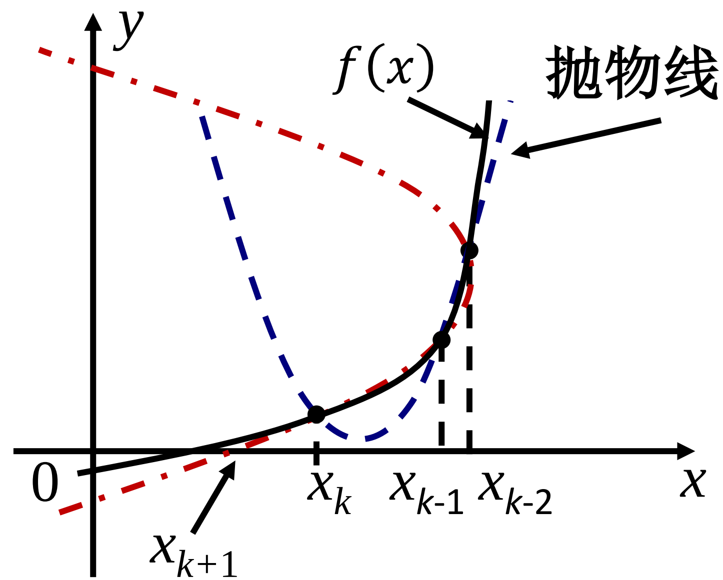
- 定理2.9 若$f(x)$在根x^*某邻域内二阶连续可导且$f'(x) \neq 0$, 当x_0, x_1充分接近x^*时, 割线法按$p \approx 1.618$阶收敛(超线性)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k| \cdot |e_{k-1}|} = c$$

- 割线法
  - 避免了牛顿法中的导数计算, 且具有超线性的收敛速度
  - 需要两个初始值。
  - 属于拟牛顿法 (quasi-Newton method)

抛物线法

- $x_k, x_{k-1}, x_{k-2} \longrightarrow x_{k+1}$
- 二次多项式近似$f(x)$, y看成x的抛物线函数，可能与横轴无交点
- x看成是y的二次函数(侧向抛物线), 一定能得到x_{k+1}(3个y值各不相同)
- 这个方法叫逆二次插值法, 局部收敛阶 $p \approx 1.839$



实用的求根技术

牛顿下山法

- 防止牛顿法迭代过程发散
- 一系列阻尼因子$\lambda_i \in (0,1]$,

令$x_{k+1} = x_k - \lambda_i f(x_k)/f'(x_k)$

保证$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$.

λ_i的值从1开始递减，也叫"下山"因子

使用因子序列$\{\lambda_i\}$

算法2.5：牛顿下山法

$k := 0$;
While 不满足收敛判据 **do**
  $s := f(x_k)/f'(x_k)$;
  $x_{k+1} := x_k - s$;
  $i := 0$;
  While $|f(x_{k+1})| \ge |f(x_k)|$ **do**
    $x_{k+1} := x_k - \lambda_i s$;
    $i := i + 1$;
  End
  $k := k + 1$;
End
$x := x_k$.

通用求根算法

- 求解$f(x) = 0$的方法比较
  - 割线法/抛物线法: 需要局部收敛性、函数的光滑性，但收敛速度快
  - 二分法: 全局收敛、只需函数连续，但收敛较慢
  - 将两者结合, 得稳定快速的**Brent**方法(1973)
- 算法的特点/优点
  - 不要求函数$f(x)$具有光滑性
  - 不需要计算导数$f'(x)$
  - 初始解为有根区间，不需要接近准确解
  - 按“逆二次插值, 割线法, 二分法”的优先顺序生成下一步解，保证较快的收敛速度

非线性方程组求解

非线性方程组的求解

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$ $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 函数$\boldsymbol{f}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

- 不动点迭代法仍是可行思路 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$
- 收敛性如何判断? $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_k)$, k= 0,1,2 …
  - 对单个方程问题, (局部)收敛性由$|g'(x^*)|$决定
- 定义 多元向量函数$\boldsymbol{g}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$的雅可比矩阵$\boldsymbol{J}_g(\boldsymbol{x})$为n阶方阵, 元素值为 $\{\boldsymbol{J}_g(\boldsymbol{x})\}_{ij} = \frac{\partial g_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}, (i, j = 1,2,\cdots,n)$
- 定理 不动点迭代法$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_k)$, 设$\boldsymbol{x}^*$为准确解, 若雅可比矩阵$\boldsymbol{J}_g(\boldsymbol{x}^*)$的特征值λ都满足$|\lambda| < 1$, 则该迭代法局部收敛

最大特征值<1

牛顿法解非线性方程组$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$

- 思路
  - 对可微函数$\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, 在任一点$\boldsymbol{x}$处作一阶泰勒展开
    $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{J}_f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{s}$，当$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_k$, 解$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)+\boldsymbol{J}_f(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{s}=\mathbf{0}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{x}_k - \left[\boldsymbol{J}_f(\boldsymbol{x}_k)\right]^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$$

单个方程牛顿法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

算法 解非线性方程组的牛顿法

输入：$\boldsymbol{x}_0$, n维多元函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$; **输出**：$\boldsymbol{x}$.

$k := 0$;

While 不满足收敛条件 **do**

  解线性方程组$\boldsymbol{J}_f(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{s}_k = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$，求$\boldsymbol{s}_k$;

  $\boldsymbol{x}_{k+1} := \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{s}_k$;

  $k := k + 1$;

End

$\boldsymbol{x} := \boldsymbol{x}_k$

牛顿法解非线性方程组

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - \left[J_f(\boldsymbol{x}_k)\right]^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$$

例

- 用牛顿法解 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - 2 \\ x_1^2 + 4x_2^2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，初值$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

解:

该方程的Jacobi矩阵 $J_f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2x_1 & 8x_2 \end{bmatrix}$

算$J_f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix}$，解方程 $J_f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{s}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$

得$\boldsymbol{s}_0 = [1.83,\ 0.58]^T$，$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{s}_0 = \begin{bmatrix} -0.83 \\ 1.42 \end{bmatrix}$

算$J_f(\boldsymbol{x}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1.67 & 11.3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4.72 \end{bmatrix}$，解方程$J_f(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{s}_1 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)$

得$\boldsymbol{s}_1 = [-0.64,\ 0.32]^T$，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -0.19 \\ 1.10 \end{bmatrix}$ …，$\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} -0.02 \\ 1.01 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} -0.00 \\ 1.00 \end{bmatrix}$

牛顿法解非线性方程组

- 与单个方程的情况相比, 求解非线性方程组的牛顿法也具有类似的优点, 但它每步迭代, 都需要求解线性方程组, 当 n 较大时, 计算量非常大。
- 为了提高计算效率和保证稳定的收敛, 可以将拟牛顿法、阻尼牛顿法等技术推广到多维情况。
- 求解单个非线性方程的方法并不都能推广到非线性方程组, 因此牛顿法及其改进方法成为求解非线性方程组的主要方法。