山东大学 2016--2017 学年上学期 高等数学（1）课程试卷评分标准

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	阅卷人
得分												

得分	阅卷人

一、填空题（本大题包含 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）。只要与下列答案等价即得满分，其他酌情给分.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 的 $\varepsilon - N$ 的定义是对 $\forall \varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时总有 $|a_n| < \varepsilon$.

2. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$，$x \neq 0$. 此题不写 $x \neq 0$ 不扣分.

3. 函数 $\sqrt{1+x}$ 的带佩亚诺型余项的 n 阶麦克劳林公式是 $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2^2\cdot 2}x^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n n!}x^n+o(x^n)$，$(x\to 0)$. 此题不写 $(x\to 0)$ 扣 1 分.

4. $|x|$ 的一个原函数是 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, x\geq 0\\ -\frac{1}{2}x^2, x<0\end{cases}$.

5. 方程 $y'+y=1$ 的通解为 $y=1+Ce^{-x}$.

得分	阅卷人

二、选择题(请将答案写入下面每题的空格里。本大题包含 5 小题，每小题 4 分，共 20 分)。

1.A　2.B　3.B　4.B　5.B

1. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-nx^2}{1+nx}$，则其定义域为

A. $(-\infty,+\infty)$.　B. $\{x \mid x \neq -\frac{1}{n}, n=1,2,3,\cdots\}$.

C. $\{x \mid x\neq 0, x\in R\}$.　D. 以上皆不正确.

2. 设当 $x\to 0$ 时，$\sin x-(ax^2+bx)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，则

A. $a=\frac{1}{6}, b=1$.　B. $a=0, b=1$.　C. $a=-\frac{1}{6}, b=1$.　D. $a=-1, b=0$.

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶导数存在，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x^2}=1$，则

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

C. $(0, f(0))$ 是 $f(x)$ 的拐点.

D. $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0, f(0))$ 也不是 $f(x)$ 的拐点.

4. 设 $f(x)=\int_0^x t^2 e^{-t^2}dt$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上

A. 单调增加，凸的.　B. 单调增加，凹的.

C. 单调减少，凸的.　D. 单调减少，凹的.

5. $\int_{-1}^{1}(1+x)\sqrt{1-x^2}\,dx=$

A. π.　B. $\frac{\pi}{2}$.　C. 2π.　D. $\frac{\pi}{4}$.

得分	阅卷人

三、计算题(本大题包含 8 小题，前两小题每题 5 分，后六小题每题 6 分，共 46 分。 请写出解答步骤)。

1. 计算微分 $d\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 原式 $=\dfrac{1+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x+\sqrt{1+x^2}}dx$ ……(4 分)

$=\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ ……(5 分)

2. 计算高阶导数 $(x^2e^{2x})^{(10)}$.

解 由莱布尼兹公式得

$$(x^2e^{2x})^{(10)}=\sum_{n=0}^{10}C_{10}^n(x^2)^{(n)}(e^{2x})^{(10-n)}$$

$=x^2(e^{2x})^{(10)}+C_{10}^1(x^2)'(e^{2x})^{(9)}+C_{10}^2(x^2)''(e^{2x})^{(8)}$ ……(3 分)

$=(2^{10}x^2+10\cdot 2^{10}x+45\cdot 2^9)e^{2x}$ ……(5 分)

姓名　学号　级　专业　学院

密　封　线

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+(x-1)}$.

解 此极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型，利用洛必达法则，

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{\dfrac{-1}{e-x}+1}\ \cdots\cdots(3\text{分})$$

$$=\frac{2e}{e-1}\ \cdots\cdots(6\text{分})$$

或利用 Taylor 公式，

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x+o(x))-(1-x+o(x))}{(1-\frac{1}{e}x+o(x))+(x-1)}\ \cdots\cdots(3\text{分})$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x+o(x)}{(1-\frac{1}{e})x+o(x)}$$

$$=\frac{2e}{e-1}\ \cdots\cdots(6\text{分})$$

4. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(2\sqrt[n]{2}-1)^n$.

解 $\text{原极限}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln(2\sqrt[n]{2}-1)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(2\cdot2^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\frac{1}{n}}}$，……(2 分)

利用洛必达法则，可得

$$\lim_{x\to0+}\frac{\ln(2\cdot2^x-1)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{2\cdot2^x\ln2}{2\cdot2^x-1}=\ln4，\ \cdots\cdots(5\text{分})$$

所以由海涅定理，知原极限 $=e^{\ln4}=4$ ……(6 分)

或

$$\text{原极限}=\lim_{n\to\infty}(2e^{\frac{1}{n}\ln2}-1)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}[2(1+\frac{1}{n}\ln2+o(\frac{1}{n}))-1]^n\ \cdots\cdots(2\text{分})$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}\ln4+o(\frac{1}{n}))^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\ln4+o(\frac{1}{n})\right)^{\frac{1}{\frac{1}{n}\ln4+o(\frac{1}{n})}}\right)^{\ln4+o(1)}\ \cdots\cdots(5\text{分})$$

$$=e^{\ln4}=4\ \cdots\cdots(6\text{分})$$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-x}, & x\le0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$.

解 做变换 $t=x-1$，则

$$\int_0^2 f(x-1)dx=\int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^0\frac{1}{2-x}dx+\int_0^1\sin x\,dx\ \cdots\cdots(3\text{分})$$

$$=-\ln|2-x|\Big|_{-1}^{0}-\cos x\Big|_{0}^{-1}$$

$$=1-\cos1-\ln2+\ln3\ \cdots\cdots(6\text{分})$$

6. 求积分 $\int\dfrac{x^2}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

解 做变换 $x=2\sin t$，$t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，则

$$\text{原式}=\int\frac{4\sin^2t}{(4-4\sin^2t)^{\frac{3}{2}}}2\cos t\,dt$$

$$=\int\tan^2t\,dt\ \cdots\cdots(3\text{分})$$

$$=\int(\sec^2t-1)dt$$

$$=\tan t-t+C$$

$$=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}-\arcsin\frac{x}{2}+C\ \cdots\cdots(6\text{分})$$

或 $\text{原式}=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{xd(4-x^2)}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int xd\left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)$ ……(3 分)

$$=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}-\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

姓名 学号 级 专业 学院 密 封 线

$= \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} - \arcsin\frac{x}{2} + C$ ……………………………………………………………(6 分)

7. 求初值问题 $\begin{cases} y' - 2xy = e^{x^2} \\ y|_{x=0} = 1 \end{cases}$ 的解.

解 此是一阶线性非齐次常微方程, 可利用常数变易法或通解公式, 得通解为

$y = e^{x^2}(x + C)$ ……………………………………………………………(4 分)

代入初始条件, 得 $C = 1$, 所以特解为 $y = e^{x^2}(x+1)$ ………………………(6 分)

或 用凑微分法, 原方程等价于

$e^{-x^2}dy - 2xye^{-x^2}dx = dx$,

即 $e^{-x^2}dy + yde^{-x^2} = dx$,

所以 $d(ye^{-x^2}) = dx$,

因此 $ye^{-x^2} = x + C$, 下略.

8. 求微分方程 $y'' + 2y' + y = \sin x$ 的通解.

解 对应的特征方程为 $r^2 + 2r + 1 = 0$, 得特征根 $r = -1, -1$ ………………………(2 分)

令原方程的特解 $y = a\sin x + b\cos x$, 代入方程, 得 $a = 0, b = -\frac{1}{2}$ ……………(4 分)

所以所求通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x$ ……………………………………(6 分)

得分	阅卷人

四、综合题(本大题包含 2 小题，第一小题 8 分，第二小题 6 分，共 14 分，请写出解答步骤)。

1. 要设计一垃圾桶: 下底面是半径为 r 的圆盘, 侧面是高为 h 的圆柱形, 上底面是向上凸的半球面. 当表面积一定时, 问 $\frac{h}{r}$ 为何值时桶的体积最大?

解 由题设, 桶的表面积 $S = \pi r^2 + 2\pi rh + 2\pi r^2 = 3\pi r^2 + 2\pi rh$,

由此得 $h = \frac{S}{2\pi r} - \frac{3}{2}r$.

注意到 $h > 0$, 可知 $0 < r < \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$ ……………………………………(2 分)

而桶的容积 $V(r) = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{S}{2}r - \frac{5}{6}\pi r^3$, ……………………………………(4 分)

由 $V'(r) = \frac{S}{2} - \frac{5}{2}\pi r^2 = 0$, 得唯一驻点 $r = \sqrt{\frac{S}{5\pi}} \in (0, \sqrt{\frac{S}{3\pi}})$, ……………………(6 分)

$V''(\sqrt{\frac{S}{5\pi}}) = -\sqrt{5\pi S} < 0$, 所以, $V(\sqrt{\frac{S}{5\pi}})$ 是 $V(r)$ 的最大值…,

此时 $h = r$, 即 $\frac{h}{r} = 1$. ……………………………………………………………(8 分)

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且对任意的 $x \in [0,1]$，都有 $f(x) > \int_0^x f(t)dt$，证明对任意的 $x \in [0,1]$，都有 $f(x) > 0$.

证 首先注意到 $f(0) > \int_0^0 f(t)dt = 0$ ……………………………………………………(1 分)

令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 则 $F(0) = 0$, $F(x)$ 在 $[0.1]$ 连续, 且在(0,1)上可导, $F'(x) = f(x)$.

所以 在 $(0,1)$ 上, $F'(x) > F(x)$,.

由此得 $(e^{-x}F(x))' = e^{-x}(F'(x) - F(x)) > 0$ ……………………………………(3 分)

对任意的 $x \in (0,1]$, $G(t) = e^{-t}F(t)$ 在 $[0.x]$ 连续, 且在 $(0,x)$ 上可导,

利用拉格朗日中值定理, 可得 存在 $\xi \in (0,x)$ 使得 $G(x) - G(0) = G'(\xi)x > 0$,

因此 $G(x) > G(0) = F(0) = 0$, 即 $e^{-x}F(x) > 0$,

所以 $F(x) > 0$ 因此有 $f(x) > F(x) > 0$ ……………………………………(6 分)

总之结论成立.