Discrete Mathematics 2 讲义

Discrete Mathematics 2 讲义1

1. **如果无向图中恰有两个奇顶点，证明这两个奇顶点间必有简单通路.**

证明：假设无向图G中恰有两个奇数度顶点，分别为u和v，若u与v不连通，即它们之间无任何通路，则G至少有两个连通分支G_1、G_2，u与v分别属于G_1和G_2，于是G_1与G_2中各含一个奇度顶点，这与握手定理（度数和为偶数$\Sigma d_i = 2E$）的推论"在任何图中，度数为奇数的顶点个数必定是偶数个"相矛盾，因而u与v必须是连通的。

2. **若G是一个平面图，证明：**$v - e + f = \omega(G) + 1$.

证明：设G有$\omega(G)$个连通分支，对每个连通分支，由欧拉公式，$v_i - e_i + f_i = 2$，结合$v = \sum v_i, e = \sum e_i$，
$f = \sum_{i=1}^{k} f_i - (\omega(G) - 1)$(这是由于每个连通分支的外部面被算了$\omega(G)$次)
对所有连通分支求和，有$\sum v_i - \sum e_i + \sum f_i = 2\omega(G)$，即$v - e + f + \omega(G) - 1 = 2\omega(G)$，故$v - e + f = \omega(G) + 1$.

3. **证明大于一个顶点的树，最长路径的起点和终点均为叶节点.**

证明：设$P = v_1v_2...v_k$是非平凡树T的一条最长路，其中v_1为起点，v_k为终点.采用反证法，若v_k不是叶节点，则$d(v_k) \geq 2$,取v_k不同与v_{k-1}的邻接点v，若v是除P中顶点外的其他顶点，则P可以继续延长成$v_1v_2...v_kv$，这与P是最长路矛盾；若v在P中，则构成圈，这与树的定义矛盾.故不存在这样的点v，即假设错误，v_k是叶节点.同理有v_1是叶节点，原命题得证.

4. **无向简单图G有n个顶点，e条边，若$e > (n-1)(n-2)/2$，证明G是连通图.**

证明1：在图G中，它的结点数为n，设v是G中任一结点，若把v去掉后，其它$n-1$结点，每个结点度数最多有$n-1$度，因此$n-1$个结点之间最多只有$(n-1)(n-2)/2$条边，而e>$(n-1)(n-2)/2$,所以至少有一条边连接v和其它结点。
下面用数学归纳法进一步证明：
（1）容易证明当$n = 1, 2$时，结论成立
（2）假设当$n = k$时，结论成立，即若e>$(k-1)(k-2)/2$时结论成立
（3）当$n = k+1$时，若此时每个结点度数为k，则结论显然成立，否则必存在一个结点v度数至多只有$k-1$度，即这个结点最多只有$k-1$条边和它相连。因为此时总的边数$e > k(k-1)/2$,则其它k个结点之间的边数e'>$k(k-1)/2 - (k-1) = (k-1)(k-2)/2$。根据归纳假设，显然这k个结点之间是连通的，而根据上面我们知道，至少有一条边使v和其它结点相连，所以此时这个图是连通的。 结论成立。

证明2：(假设不连通，则至少有两个连通分支，证明它可能的最大边数（无向完全图）小于等于$(n-1)(n-2)/2$条边，命题得证)
假设图是不连通的，则可以把n个结点分成m, $(n-m)$两部分($0 < m < n$)，两部分不连通。所以此简单图最多只能有$C(m,2) + C(n-m,2) = m(m-1)/2 + (n-m)(n-m-1)/2 = [n^2 - 2mn + 2m^2 - n]/2$条边。要令其$> (n-1)(n-2)/2$，则需要$n - m(n-m) > 1$, 即$(m-1)(m-n+1) > 0$，而在$m = 1$或$m = n-1$时左式为0，而在$1 < m < n-1$时左式小于0，所以$m$不存在，即假设不成立，故图是连通的.

Discrete Mathematics 2 讲义2

1. **设G是n个结点的连通简单平面图，若 $n \geq 3$，则G中必有一个结点度数不超过5.**

证明：由握手定理，$\Sigma dev(v_i) = 2|E|$，反证法，设每个节点度数都超过5，即$dev(v_i) \geq 6$，则$2|E| = \Sigma dev(v_i) \geq 6n$，故$|E| \geq 3n$，结合推论1知矛盾，故原命题成立.

推论1：设图G是有n个结点、$|E|$条边的连通平面简单图，其中 $n\geq 3$，则有：$|E|\leq 3n-6$
证明：由图G的面度数之和$\sum dev(r_i)$为边数的二倍，即2$|E|$。又因为G是平面简单图，每一个面的度数至少为3，则2$|E|\geq 3r$，由欧拉公式$n-|E|+r=2$有：$|E|\leq 3n-6$

2. **设G是由 n个结点，e条边，$\omega(\omega\geq 2)$个连通分支的平面图，G的每个面至少由$k(k\geq 3)$条边围成，证明：**
$e\leq \dfrac{k(n-\omega-1)}{k-2}$

证明: 设 G 的面数为 f, 各面的度数之和为 $T, T=2e$ 。因为 G 的每个面至少由 k 条边围成, 所以 $k^*f\leq T=2e$ 。 由欧拉公式的推广（即上一次的例题2），$f=\omega+1+e-n, k^*(\omega+1+e-n)\leq 2e$. 所以命题成立。

3. **证明无向图G是不连通的，则它的补图是连通的**

证明:
令图 $G=(V,E)$ 是不连通的，由若干个连通分量组成:

$$V=V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_k$$

令图 $G'=(V',E')$ 是图 G 的补图，则有 $\forall u\in V_i, v\in V_j, i\neq j$，有 $(u,v)\in E'$ 。
考虑任意的一对 G' 中的顶点 s 和 t 。

- 若 $s\in V_i, t\in V_j, i\neq j$，则 s 能直接到 t，即存在路径 $[s,t]$
- 若 $s\in V_i, t\in V_i$，则 $\forall u\in V_j, j\neq i, (s,u)\in E', (u,t)\in E'$，即存在路径 $[s,u,t]$
  所以图 G' 中任意两点可以相互到达，所以图 G' 连通

4. 20**名选手参加**14**场单打比赛，每名选手都至少参加过**1**场，证明必有某**6**场比赛的参赛者是**12**名不同的选手.**
（美国数学奥林匹克试题，1989年）

证明：我们用20个点$v1$、$v2$、$......$、$v20$代表20名成员，两名选手比赛过，则在相应的顶点间连一条边，则可得到图G。由题意可知，图G中有14条边，并且有$d(v_i)\geq 1$，$i=1$，2，$......$，20.由握手定理$d(v1)+d(v2)+......+d(v20)=2\times 14=28.$

在每个顶点v_i处抹去$d(v_i)-1$条边，由于一条边可能同时被两个端点抹去，所以抹去的边最多是
$(d(v_1)-1)+(d(v_2)-1)+...+(d(v_{20})-1)=28-20=8$（条），故所抹去这些边后所得的图$F$中至少还有$14-8=6$条边，且图$F$中每个顶点的度至多为1。从而这6条边所相邻的12个人是各不相同的，即这6条边所对应的6场比赛的参赛者各不相同.

Discrete Mathematics 2 讲义3

1. **证明：带有奇数个顶点的二分图没有哈密顿回路.**

证明：假设 $G=(V，E)$ 是满足 $V=V_1\cup V_2$ 的偶图，其中没有边连接 V_1 里的顶点与 V_2 里的顶点。假设 G 有哈密顿回路。这样的回路必然是形如 $a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_k,b_k,a_1,b_1$, 其中对 $i=1,2,\ldots,k$ 来说，有 $a_i\in V_1$和 $b_i\in V_2$. 因为哈密顿回路访问每个顶点恰好一次，所以除了回路开始和结束的 a_1 之外，图中的顶点数等于 $2k$，它是偶数。因此，带奇数个顶点的偶图不可能有哈密顿回路。

2. **证明： 简单图中的一条边是割边， 当且仅当它不属于该图任何一条简单回路。**

```
A当且仅当B，也就是A的充分必要条件是B。B是条件，A是结论。
充分性：条件=>结论，B=>A
必要性：结论=>条件，A=>B
```

证明： 1）必要性 e为割边 =〉e不包含于G的任何圈中
假设e包含在某一圈Ci中，那么删除此边，但边关联的两个邻接点依然连通，所以没有破坏原图的连通性。因此不是割边，矛盾。所以假设不成立，既e不包含于G的任何圈中；
2）充分性 e包含于G的任何圈中 =〉e为割边
假设e不为割边，那么删除此边，生成子图依然连通。e关联的两个邻接点有基本道路存在，此基本道路连同e构成一个圈。与题设矛盾。所以假设不成立，既e为割边。

根据1），2)可知，题设结论成立。

3. **一棵满m叉树T有81个树叶并且高度为4.**
a)给出m的上界和下界.
b)若T也是平衡的，则m是多少?

解：我们注意到这样的树必须有$i=80/(m-1)$内顶点。这必须是一个整数，所以$m-1$必须除以80。通过列举80的除数，我们认为m可以等于2，3，5，6，9，11，17，21，41或81。然而，其中一些不符合高为4的要求。

(a)由于高度为4，所以我们不可能有$m=2$，因为这将给我们最多$1+2+4+8+16=31$的顶点。下面说明一棵有81叶和4高的树的m值中最多21。如果我们使顶点小于4个内顶点，我们可以得到m^4叶，如果只在每个水平上放置一个内部顶点，我们就可以得到很少的$4(m-1)+1$叶。在前一种情况，取$m=3$即可得到81叶。如果$m>21$，我们将被迫有超过81个叶。因此，m的范围为$3\leq m\leq 21$.

(b)如果T必须平衡，那么当三级只有一个内顶点和m^3-1叶时，得到最小的叶数，使T中的叶总数为m^3-1+m叶，则叶的最大数目为m^4。有了这些限制，我们认为$m=5$已经太大了，因为这至少需要$5^3-1+5=129$叶。因此，唯一的可能性是m=3.

4. **有多少个8位位串包含3个连续的0或者4个连续的1.**

答案：147个 验证.txt

思路1

首先考虑这样的一个问题：8bit二进制串有几种可能性？答案是2^8个。
其次，这里面仅仅由长度为1和2的全0（或全1）串（下面简称为L1串和L2串）组合在一起的有几个？
这是个递归问题，假设f(n)是仅有L1串和L2串组合在一起的，长度为n的二进制串的组合数，我们很容易知道：
- f(1) == 1 长度为1bit的二进制串只有一种组合
- f(2) == 2 长度为2bit的有两种组合（00和10）
- f(n) = f(n-1) + f(n-2) 自己去思考为嘛是这个

所以很容易得出其实这个序列是fab(n-1)，其中fab是斐波那契数列。
那么答案是，仅有L1和L2串组成的8bit二进制串有fab(9)*2 = 68个

那么，初步筛选满足要求的串（必定含有一个L3及以上的串）有256-68=188个
而根据跟上面一样的原理，我们可以求出，同时由L1，L2，L3组成，但没有L4及以上的字符串的个数，一共是162个。
所以，一定包含L3却不包含L4以上的块有162-68 = 94个
那么可以得出，必定包含L4及以上的块有188-94 = 94个
这94个块分别包含两种L4串，所以肯定满足要求（要么是四个0，则满足三个0的要求，要么是四个1，则满足四个1的要求），所以可以得出结论必定包含L4的块94个全部满足要求。

再看一定包含L3却不包含L4及以上的那94个块。
其中包含三个连续0的有94/2 = 47个。
其中同时包含三个0和三个1的有12个（它们正反都满足要求，被多减了）：
111 000 1 0
111 000 1 1
000 111 0 1
000 111 0 0
1 000 111 0
0 111 000 1
000 1 0 111
111 0 1 000
0 1 111 000
0 0 111 000
1 0 000 111
1 1 000 111
所以，一共有47+(12/2) = 53个
总共满足要求的有53+94 = 147个

思路2

先看含有3个连续的0的,
$000*****$，$2^5=32$(含3个“4个连续1”)

$1000****$，$2^4=16$(含1个“4个连续1”)

$*1000***$，$2^4=16$
$**1000**$，$2^4=16$
$***1000*$，$2(2^3-1)=14$(减去$***$是000的情况，含2个“4个连续1”)
$****1000$，$2^4-3=13$(减去$****$是0000、0001、1000的情况，含2个“4个连续1”).
下面是4个连续1的：
$1111****$，$2^4=16$
$01111***$，$2^3=8$
$*01111**$，$2^3=8$
$**01111*$，$2^3=8$
$***01111$，$2^3=8$

根据容斥原理$107+48-8=148$

5. **证明：25个女孩和25个男孩围坐一个圆桌，总有一个人的邻座都是男孩.**

证明：将圆桌的座位从1~50进行编号，50号座位与1号座位相邻。有25个奇数号座位，25个偶数号座位。如果最多有12 个男生获得了奇数号座位，那么至少有13 个男生获得偶数号座位，反之依然。
一般地，假设至少有13个男生获得了25个奇数座位中的一-些位置，那么这些男生中至少有两个会获得连续的奇数号，这样坐在他们中间的人就会是左右都与一个男生相邻。

Discrete Mathematics 2 讲义4

1. **证明：在任何两个或两个以上人的组内，存在两个人在组内有相同个数的朋友.**

证明：将每个人对应成相应的顶点，若两人是朋友，则对应的两个顶点间连上一条无向边，作出一个简单无向图。则原命题相当于在该无向图中一定存在两个顶点的度数相等。

设该简单无向图中有n个顶点，则图中n个顶点的度数只能为 $0，1，2，...，n-1$ 。若图中有两个或两个以上的顶点度数为0，则结论显然成立。否则所有顶点的度数都大于等于1。现用反证法证明该无向图中一定存在两个顶点的度数相等。

设该简单无向图中 n 个顶点中任何一对顶点的度数都不相等，即这n个顶点的度数两两不同。但每个顶点的度数只能是 $1,2,...,n-1$（因为0度和 $n-1$ 度不能同时出现）这 $n-1$ 个数中的某一种，这显然产生了矛盾。

因此该无向图中一定存在两个顶点的度数相等。从而在任何两个或两个以上人的组内，存在两个人在组内有相同个数的朋友。

2. **在一个有 n 个顶点的 $G=<V,E>$ 中，$u,v\in V$. 若存在一条从 u 到 v 的一条通路，则必有一条从 u 到 v 的长度不超过 $n-1$ 的通路.**

证明：设 $v_0e_1v_1e_2...e_lv_l$ 是从 $u=v_0$ 到 $v=v_l$ 的长为 l 的通路。

若 $l\le n-1$，则结论显然成立。

否则因为 $l+1>n$，故 $v_0,v_1,...,v_l$ 中必有一个顶点是重复出现的。不妨设 $v_i=v_j(0\le i<j\le l)$，则新通路 $v_0e_1v_1e_2...v_ie_{j+1}v_{l+1}e_{j+2}v_{j+2}...e_lv_l$ 是一条从 u 到 v 的通路，且此通路长度比原通路长度至少少1。

若新通路的长度$\le n-1$，则结论得证。否则对新通路重复上述过程，必可以得到一条从 u 到 v 的长为 $n-1$ 的通路。

3. **有8本书，其中有2本相同的数学书，3本相同的语文书，其余3本为不同的书籍，一人去借，且至少借一本的借法有多少种.**

解:数学书的本数可以是$0,1,2$三种;语文书的本数可以是$0,1,2,3$四种，其余3本书每本都有2种取法，由分步计数原理，共有$3*4*2*2*2-1=95$种借法.

4. **疫情期间，山东某医院安排5名专家到3个不同的区级医院支援，每名专家只去一个区级医院，每个区级医院至少安排一名专家，则不同的安排方法共有( )种**

解: 5 名专家到 3 个不同的区级医院，分为 $1，2，2$ 和 $1,1,3$ 两种情况:

分为 $1,2,2,$ 时安排有 $\dfrac{C_5^1C_4^2C_2^2}{A_2^2}A_3^3$;分为 $1,1,3$ 时安排有 $\dfrac{C_5^1C_4^1C_3^3}{A_2^2}A_3^3$ 所以一共有 $\dfrac{C_5^1C_4^2C_2^2}{A_2^2}A_3^3+\dfrac{C_5^1C_4^1C_3^3}{A_2^2}A_3^3=150.$

5. **证明: 每个由 n^2+1 个不同实数构成的序列都包含一个长为 $n+1$ 的严格单调子序列.**

证：令 $a_1,a_2,\cdots,a_{n^2+1}$ 是 n^2+1 个不同实数的序列。与序列中的每一项 a_k 相关联着一个 有序对, 即 (i_k,d_k), 其中 i_k 是从 a_k 开始的最长的递增子序列的长度, d_k 是从 a_k 开始的最长的递减子序列的长度.

假定没有长为 $n+1$ 的递增或递减子序列。那么 i_k 和 d_k 都是小于或等于 n 的正整数, $k=1,2,\cdots,n^2+1$ 。因此, 由乘积法则，关于 (i_k,d_k) 存在 n^2 个可能的有序对。根据鸽巢原理,n^2+1 个有序对中必有两个相等。换句话说, 存在项 a_s 和 $a_t,s<t$, 使得 $i_s=i_t$ 和 $d_s=d_t$ 。我 们将证明这是不可能的。由于序列的项是不同的, 所以不是 $a_s<a_t$ 就是 $a_s>a_t$ 。如果 $a_s<a_t$, 那么由于 $i_s=i_t$, 所以把 a_s 加到从 a_t 开始的递增子序列前面就构造出一个从 a_s 开始的长度为 i_s+1 的递增子序列。从而产生矛盾。类似地, 如果 $a_s>a_t$, 可以证明 d_s 一定大于 d_t, 从而也 产生矛盾.

Discrete Mathematics 2 讲义5

1. **The chromatic number of K_4 is , the chromatic number of $K_{3,2}$ isand the chromatic number of C_4 is.**

答案：色数 4,2,2

拓展

1- 对于 $G=(V,E),|\mathrm{G}|=\mathrm{N},1\le\chi(G)\le N$
证明:
G 的顶点数为 N ，用N种颜色对其顶点着色使得每个顶点颜色均不相同，必然可以保证相邻顾点不同色。
当 G 的 N 个顶点全都不连通时，可全部用同一种颜色着色。所以， $1\le\chi(G)\le N$ 。

2- $G=(V,E),|G|=N,\chi(G)=N \Leftrightarrow G$ 是完全图
证明:
充分性: 如果G是完全图， $\forall u,v\in V\rightarrow(u,v)\in E$，即任意两顶点相邻，所以任意两个顶点必须着不同颜色， $\chi(G)=N.$
必要性: 我们假设存在 G，G 不是完全图，且 $\chi(G)=N$。由于 G 不是完全图， $\exists u,v,(u,v)\notin E.$ 我们设 u 的着色 $\mathrm{c(u)}$，v 的着色为 $\mathrm{c(v)}$。由于 $\mathrm{u,v}$ 并不相邻，且 u 和v的颜色与其它顶点的颜色均不相同，我们可以令 $\mathrm{c(v)}=\mathrm{c(u)}$,即给 v 着 u 的颜色。这样依然可 以保证相邻顶点不同色，所以 $\chi(G)<N$，产生矛盾。所以如果 $\chi(G)=N$， G 必 须 是 完 全 图 。

4- $G=(V,E)$，$\Delta(G)$ 为 G 中顶点度的最大值， $\chi(G)\le\Delta(G)+1$
证明:
由定义可知， $\forall v\in V,d(v)\le\Delta(G),N(v)+1\le\Delta(G)+1$。采用 $\Delta(G)+1$ 种颜色，对于每个顶点 v， 我们都可以 让它自己和所有邻居点全部采用不同的颜色。这样就可以产生一种正确的着色方式。

5- $G=(V,E)$，G 为二部图当且仅当 $\chi(G)=2$
证明:
必要性: 当 G 为二部图时， G 可以分为两个部分 G_1 和 G_2，且 G_1 和 G_2 内部的点无边相连。所以我们可以直接为 G_1 和 G_2 中的点分别赋予不同的颜色。
充分性: $\chi(G)=2\rightarrow$ 图中不存在长度为奇数的圈。假设图中存在长度为奇数的圈 $C=\{v_1,v_2,\ldots,v_{2k},v_{2k+1}\}$,2种颜 色一定无法着色。由于相邻点无法着相同的颜色，我们令 $v_{2t-1}=c_1,v_{2t}=c_2,c_1,c_2$ 为两种不同的颜色。最终 v_1 和 v_{2k+1} 也 会是相同的颜色，但它们是相邻的点。所以如果图中存在长度为奇数的圈， $\chi(G)>2$。即 $\chi(G)=2\rightarrow$ 图中不存在长度为奇 数的圈 $\rightarrow G$ 为二部图。

2. **G是n个顶点的简单图，满足$e=C(n-1,2)+2$,证明 G 是哈密顿图**

证明：根据汉密顿图的判别条件，在无向简单图$G=<V,E>$.中，若能找到u,v两个顶点，使得$deg(u)+deg(v)>=|V|$，则G是哈密顿图, 在该题中，$|v|=n$，首先，所有顶点的度数之和为：$2E=(n-1)(n-2)+4=n^2-3n+6$
其次，在该图中，任意去掉两个顶点u和v后，一个有$(n-2)$个顶点的无向完全图来说，共有$(n-2)(n-3)/2$条边，即一个有$(n-2)$个顶点的无向图中所有点的度数之和最大为$(n-2)(n-3)=n^2-5n+6$，所以，与顶点u和v相关的边的度数之和大于等于$(n^2-3n+6)-(n^2-5n+6)=2n$，即$deg(u)+deg(v)\ge n$。所以G是哈密顿图。

3. **10个相同的方块，2个红色、3个黄色、2个蓝色、3个绿色，排成一列，求方法数.**

答案：$\frac{10!}{2!2!3!3!}$

拓展：假设在 n 个球中，球共有 k 个种类，那么这堆球的 n 排列有多少个?
这个问题就是要求 $\{n_1个a_1,n_2个a_2,\ldots,n_k个a_k\}$ 的 n 排列，其中 $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$
假设这 n 个球全都不同（也即 $k=n$ 的情况），那么这 n 个球的全排列个数是 n！
但是，这 n 个球未必是全都不同的：事实上，它们被划分为 k 个种 类，在第 i 种里，有 n_i 个相同的球 $(i=1,2,\ldots,k)$。当我们把这 n 个球全排列时，第 i 种内的 n_i 个球也被全排列了，也即计数了 $n_i!$ 次。但由于这 n_i 个球是相同的，所以它们应该只被计数 1 次，从 而全排列会导致第 i 种的球被重复计数 n_i！倍，故最终真正的 n 排列 个数应是 $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$。

预备知识
为方便起见，定义如下记号：

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_t}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}$$

其中 $n_1,n_2,\cdots,n_t$ 是非负整数，满足 $n_1+n_2+\cdots+n_t=n$
意义: 将 n 个元素分为 t 组，使得第 i 组有 n_i 个元素的方式数，重数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_t$ 的 t 类元素的排列数。
多项式系数的Pascal公式

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_t}=\binom{n-1}{n_1-1,n_2,\cdots,n_t}+\binom{n-1}{n_1,n_2-1,\cdots,n_t}+\cdots+\binom{n-1}{n_1,n_2,\cdots,n_t-1}$$

多项式定理:
设 n 是正整数，则对 t 个实数 $x_1,x_2,\cdots x_t$ 有

$$(x_1+x_2+\cdots x_t)^n=\sum_{n_i\ge0,n_1+n_2+\cdots+\cdots+n_t=n}\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_t}\prod_{1\le i\le t}x_i^{n_i}$$

$$\text{其中}\ \binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_t}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}.$$

定理证明
$(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n$ 是 n 个因式 $(x_1+x_2+\cdots+x_t)$ 的乘积，其展开式中共有 t^n 项，我们可以按如下方法将这些项 进行分类，设 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ 是展开式中任一项，如果在 $x_{i_1},x_{i_2},\cdots x_{i_n}$ 中有 n_1 个 x_1，n_2 个 x_2， $\cdots,n_t$ 个 x_t (其中有 $n_1+n_2+\cdots+n_t=n$)，则把 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ 归于 $(n_1,n_2,\cdots,n_t)$ 类。显然，属于 $(n_1,n_2,\cdots,n_t)$ 类的项的个数等于 由 n_1 个 x_1，n_2 个 x_2， $\cdots$， n_t 个 x_t 作成的全排列数，为 $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}$。 因此，在 $(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n$ 的展开式中 (合 并同类项之后)， $\prod_{1\le i\le t}x_i^{n_i}$ 的系数为 $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}$，至此该定理得证.

4. **1,2,3,4,5组成的四位数有多少；不含重复字符的四位数有**

答案：$5^4=625$；$5!=120$

5. **工人8小时做了40个零件，第一小时做了6个，第8小时4个，证明：存在连续两个小时做了至少10个零件.**

证明：每两小时为一组，共七组$12，23，34，45，56，67，78$

一共做了$2*40-6-4=70$个

由鸽巢原理，存在一组做了至少10个，即证.

Discrete Mathematics 2 讲义6

1. **n 个结点的简单图 G，$n>2$ 且 n 奇数，G 和 G 补图中度数为奇数的结点个数是否相等?请证明或给出反例.**

解: 一定相等。因为 $n>2$ 且 n 奇数，则对于奇数个结点的完全图，每个结点的度数必为偶数。若 G 中度数为奇数的结点个数是 m ，则 G 的补图中 m 个结点的度数为(偶数-奇数) =奇数。G 中度数为偶数的结点，在 G 的补图中这些结点的度数仍为(偶数-偶数) =偶数。
所以命题成立。

2. **有多少种方法把52张标准的扑克牌发给4个人使得每个人有5张牌.**

解: 我们将使用乘积法则求解这个问题。 开始时，第一个人得到5张牌可以有 $C(52,5)$ 种方式。第二个人得到5张牌可以有 $C(47,5)$ 种方式，因为只剩下47张牌。第三个人得到5张牌可以有 $C(42,5)$ 种方式。最后，第四个人得到5张牌可以有 $C(37,5)$ 种方式。因此，发给4个人每人5张牌的方式总数是 $C(52,5)C(47,5)C(42,5)C(37,5)=\frac{52!}{47!5!}\cdot\frac{47!}{42!5!}\cdot\frac{42!}{37!5!}\cdot\frac{37!}{32!5!}=\frac{52!}{5!5!5!5!32!}$

3. **设 n 是正整数. 证明：在任意一组 n 个连续的正整数中恰好有一个被 n 整除.**

证明：令 $a，a+1,\ldots a+n-1$为一组连续的正整数序列。由于当 $0\le k<j\le n-1$ 时，$0<(a+j)-(a+k)$,所以整数$(a+i) mod\, n(i=0，1,2,\ldots n-1)$互不相同。由于 $(a+i)mod\,n$会产生 n 个不同的值，并且在序列中只有 n 个不同的正整数，所以这些正整数恰好只能被取出一次。所以该正整数序列中恰好存在一个整数能够被 n 整除。

4. **证明：如果 n 和 k 是整数，其中 $1\le k\le n$ ，则 $\binom{n}{k}\le\frac{n^k}{2^{k-1}}$.**

证明：$k=1$ 时，显然左边$=\binom{n}{1}=n=\frac{n^1}{2^{1-1}}$，不等式成立（取等）

$k\ge 2$ 时，$n\ge k\ge 2$, $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots 2}\le\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}\le\frac{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}{2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}=\frac{n^k}{2^{k-1}}$. 不等式成立

5. **求解递推关系**$a_n=6a_{n-1}-12a_{n-2}+8a_{n-3}$，$a_0=-5,a_1=4,a_2=88$.

解：特征方程：$r^3-6r^2+12r-8=0$, 由猜根法结合 r 为偶数猜2，代入根式化简得原特征方程为 $(r-2)^3=0$ ，即2为三重根。

由定理4可知 $a_n=\alpha_1 2^n+\alpha_2 n2^n+\alpha_3 n^2 2^n$, 代入 $a_0=-5,a_1=4,a_2=88$ 可算得 $\alpha_1=-5,\alpha_2=1/2,\alpha_3=13/2$ 故递推关系的解为 $a_n=-5\cdot 2^n+n/2\cdot 2^n+13n^2/2\cdot 2^n=(13n^2+n-10)\cdot 2^{n-1}$.

定理4：设 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 是实数, 假设特征方程

$$r_k-c_1r^{k-1}-\cdots-c_k=0$$

有 t 个不相等的根 $r_1,r_2,\cdots,r_t$, 其重数分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_t$, 满足 $m_i\geqslant 1,i=1,2,\cdots,t$, 且 $m_1+m_2+\cdots+m_t=k$。那么序列 $\{a_n\}$ 是递推关系

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\cdots+c_ka_{n-k}$$

的解, 当且仅当

$$\begin{aligned}a_n=&\left(\alpha_{1,0}+\alpha_{1,1}n+\cdots+\alpha_{1,m_1-1}n^{m_1-1}\right)r_1^n\\&+\left(\alpha_{2,0}+\alpha_{2,1}n+\cdots+\alpha_{2,m_2-1}n^{m_2-1}\right)r_2^n\\&+\cdots+\left(\alpha_{t,0}+\alpha_{t,1}n+\cdots+\alpha_{t,m_1-1}n^{m_1-1}\right)r_t^n\end{aligned}$$

$n=0,1,2,\cdots$, 其中 $\alpha_{i,j}$ 是常数, $1\leqslant i\leqslant t$ 且 $0\leqslant j\leqslant m_i-1$.

Discrete Mathematics 2 讲义7

1. **记平面上一个 $3n$ 点集为"形影不离的", 若其中任意 $n+1$ 个点中有两个点距离为 1 ,试求"形影不离"的点集中距离为 1 的点对数的最小值.**

解：所求最小值为 $3n$.
一方面，取 n 个边长为1的正三角形且它们两两中心距足够大(如100)，则易知这 $3n$ 个点是"形影不离的"，此时距离为1的点对数为 $3n$；

另一方面，构造含 $3n$ 个点的图 G , 若两点距离为1则将之连一条边, 问题转换为：
证明一个 $3n$ 阶图 G ，若任 $n+1$ 个点间至少连一条边，则 G 中至少有 $3n$ 条边.

取 G 的最大孤立点集 T_1，并记 $T_2=G\setminus T_1$ 由题，$|T_1|\leq n$.由 T_1 的最大性知, 对 $\forall A\in T_2$，存在 $B\in T_1$ 使 A,B 相邻，故 T_1 中的点与 T_2 中的点之间至少连有 $3n-n=2n$ 条边.
取 G 限制在 T_2 上的生成子图中最大的独点集 T_3. 由题，$|T_3|\leq n$. 从而，$|T_2\setminus T_3|\geq n$. 同理，T_3 中的点与 $T_2\setminus T_3$ 中的点之间至少连有 n 条边. 从而图 G 中至 $2n+n=3n$ 条边, 命题成立!

2. **证明：** $\sum\limits_{k=0}^{r}C_m^kC_n^{r-k}=C_{m+n}^r$.

证明: 原式右边为 $m+n$ 个元素中选 r 个元素的组合数 C_{m+n}^r .今将这 $m+n$ 个元素分成两组，第一组为 m 个元素,剩下的 n 个元素为第二组,把取出的 r 个元素, 按在第一组取出的元素个数 $k(k=0,1,2,\ldots,r)$进行分类,这一类的取法数为 $C_m^kC_n^{r-k}$.于是,在 $m+n$ 个元素中取 r 个元素的取法数又可写成 $\sum\limits_{k=0}^{r}C_m^kC_n^{r-k}$.故原式成立.

3. **10个节目中有 6 个演唱和 4 个舞蹈，要求每两个舞蹈之间至少安排一个演唱， 则不同的安排方式有_______种.**

答案：605800. 解析: 先将6个演唱节目任意排成一列，有 A_6^6 种排法，再从演唱节目之间和前后共7个位置中选出4 个安排舞蹈，有 A_7^4 种方法,故共有 $A_7^4\times A_6^6=604800$ 种方式.

4. **正整数集合 A_k 的最小元素为 1 , 最大元素为 2007 , 并且各元素可以从小到大排成一个公差为 k 的等差数列，则并集 $A_{17}\cup A_{59}$中的元素个数为_______.**

答案：151. 解析：用 $|A_k|$表示集 A_k 的元素个数,设 $|A_k|=n+1$,由 $2007=1+nk$,得 $n=\dfrac{2006}{k}$，于是
$|A_{17}|=\dfrac{2006}{17}+1=119$，$|A_{59}|=\dfrac{2006}{59}+1=35,|A_{17}\cap A_{59}|=|A_{1003}|=\dfrac{2006}{17\times 59}+1=3$;从而
$|A_{17}\cup A_{59}|=|A_{17}|+|A_{59}|-|A_{1003}|=119+35-3=151.$

5. **将两个16 和两个18 共四个数字填在 4×4 的方格内. 每个方格内至多 1 个数字, 若使相同数字既不同行也不同列, 则不同的填法共有_______种.**

答案: 3960. 解析: 使两个16既不同行也不同列的填法有 $C_4^2\cdot A_4^2=72$ 种. 同样, 使两个18既不同行也不同列的填法也有 $C_4^2\cdot A_4^2=72$ 种，由分步计数原理，这样的填法共有 72^2 种. 其中不符合要求的有两种情况:
①两个16所在方格内部填有18的情况有72种;
②两个16所在方格仅有1个方格内填有18的情况有 $C_{16}^1\cdot A_9^2=16\times 72$ 种.
综上,符合条件的填法共有 $72^2-72-16\times 72=3960$ 种.

Discrete Mathematics 2 模拟题

选择

可重组和

1. **如果一个小猪储钱罐中有1美分、5美分、10 美分、25美分、50 美分等硬币，那么20个硬币有( )种不同的组合.**

有5样东西可以选择，允许重复，我们想选择20样东西，顺序不重要. 因此，根据定理2，答案是
$C(5+20-1,20)=C(24,20)=C(24,4)=10626.$

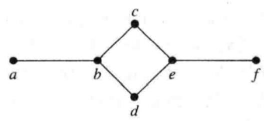
定理2 n 个元素的集合中允许重复的 r 组合有 $C(n+r-1,r)=C(n+r-1,n-1)$ 个.

证: 当允许重复时， n 元素集合的每个 r 组合可以用 $n-1$ 条竖线和 r 颗星的列表来表示.
这 $n-1$ 条竖线用来标记 n 个不同的单元. 当集合的第 i 个元素出现在组合中时，第 i 个单元就包含1颗星. 例如，4元素集合的一个6组合用3条竖线和6颗星来表示. 这里$**|*||***$代表了恰包含2个第一元素、1个第二元素、0个第三元素和3个第四元素的组合.

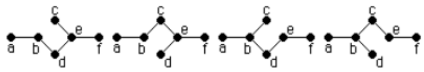
正如我们已经看到的，包含 $n-1$ 条竖线和 r 颗星的每一个不同的表对应了 n 元素集合的允许重复的一个 r 组合. 这种表的个数是 $C(n-1+r,r)$ ， 因为每个表对应了从包含 r 颗星和 $n-1$ 条竖线的 $n-1+r$ 个位置中取 r 个位置来放 r 颗星的一种选择. 这种表的个数还等于 $C(n-1+r,n-1)$，因为每个表对应于取 $n-1$ 个位置来放 $n-1$ 条竖线的一种选择.

生成树个数

2. **The number of spanning trees of the following simple graph is ( )**

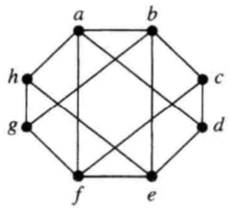
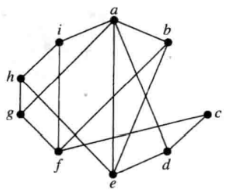
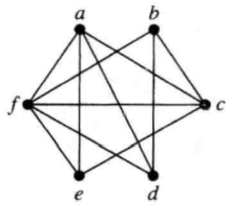
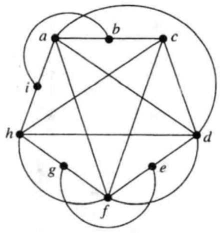


我们可以去掉中间方块的四条边中的任何一条，以产生一个生成树，如图所示



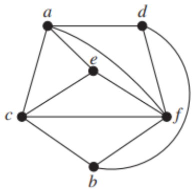
判断平面图英语

3. **下面是平面图的是( )**

A.  B.  C.  D. 

Yes

C



数列递推

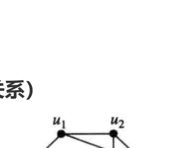
4. **递推关系 $a_n = 3a_{n-1} + 2n$ 的所有解,具有 $a_1 = 2$ 的解是( )**

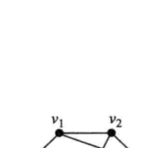
解: 为求解这个常系数线性非齐次递推关系，我们需要求解与它相伴的线性齐次方程并且找到一个关于给定非齐次方程的特解. 相伴的线性齐次方程是 $a_n = 3a_{n-1}$.它的解是 $a_n^{(h)} = \alpha 3^n$, 其中 α 是常数.
我们现在找一个特解。因为 $F(n) = 2n$ 是 n 的1次多项式，所以解的一个合理的尝试就是 n 的线性函数，比如说 $p_n = cn + d$, 其中 c 和 d 是常数. 为确定是否存在这种形式的解，假设 $p_n = cn + d$,是一个这样的解. 那么方程 $a_n = 3a_{n-1} + 2n$ 就变成 $cn + d = 3(c(n-1) + d) + 2n$. 简化和归并同类项得 $(2+2c)n + (2d - 3c) = 0$. 从而， $cn + d$ 是一个解当且仅当 $2 + 2c = 0$ 和 $2d - 3c = 0$. 这说明 $cn + d$ 是一个解当且仅当 $c = -1$ 和 $d = -3/2$. 因此，$a_n^{(p)} = -n - 3/2$ 是一个特解.
根据定理5，所有的解都是形如 $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = -n - 3/2 + \alpha \cdot 3^n$ 其中 α 是常数.
为找出具有 $a_1 = 2$ 的解，在得到的通解公式中令 $n = 1$. 我们有 $2 = -1 - 3/2 + 3\alpha$，这就推出 $\alpha = 3/2$. 我们要找的解是 $a_n = -n - 3/2 + 1/2 \cdot 3^{n+1}$.

填空

同构

5. **下列两图之间的一个同构是( )（写出点的对应关系）**


G


H

解：我们注意到，每个图中有两个顶点不在大小为4的循环中. 因此，让我们尝试构建一个与之匹配的同构体，比如 $u_1 \leftrightarrow v_2$ 和 $u_8 \leftrightarrow v_6$. 现在 u_1 与 u_2 和 u_3 相邻，v_2 与 v_1 和 v_3 相邻，所以我们尝试 $u_2 \leftrightarrow v_1$ 和 $u_3 \leftrightarrow v_3$. 然后，由于 u_4 是与 u_3 相邻的另一个顶点，v_4 是与 v_3 相邻的另一个顶点（而且我们已经匹配了 u_3 和 v_3），我们必须有 $u_4 \leftrightarrow v_4$. 沿着类似的思路，我们可以用 $u_5 \leftrightarrow v_8$、$u_6 \leftrightarrow v_7$、$u_7 \leftrightarrow v_5$ 来完成这个双射. 在找到唯一可能的同构关系后，我们检查G的12条边与H的12条边完全对应，我们就证明了这两个图是同构的.

普通排列组合题

6. **There exist ( ) one-to-one functions from an m-element set to an n-element set.**

解: 首先注意当 $m > n$ 时没有从 m 元集到 n 元集的一对一函数. 现在令 $m \leq n$. 假设定义域中的元素是 $a_1, a_2, \ldots, a_m$. 有 n 种方式选择函数在 a_1 的值. 因为函数是一对一的，所以可以有 $n-1$ 种方式选择函数在 a_2 的值(因为 a_1 用过的值不能再用).
一般地，有 $n-k+1$ 种方式选择函数在 a_k 的值. 由乘积法则，从一个 m元集到一个 n 元集存在着 $n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$ 个一对一函数.

奥尔定理英语

7. **If G is a simple graph with n vertices with $n \geq 3$ such that ( ) for every pair of nonadjacent vertices u and v in G, then G has a Hamilton circuit.**

deg(u) + deg(v) ≥ n

不定方程解数

8. **方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29$ 有( )个解使得其中 $x_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 是非负整数，并且 $x_1 < 8, x_2 > 8$.**

解：$x_2 \geq 9$（按要求）但不限制 x_1 的解的数量为 $C(6 + 20 - 1, 20) = C(25, 20) = 53130$. 违反附加限制的解的数量是：$x_1 \geq 8$ ，共 $C(6 + 12 - 1, 12) = C(17, 12) = 6188$ 个. 因此答案是 $53130 - 6188 = 46942$个.

大题

图证明

9. **设图G中有9个结点，每个结点的度不是5就是6. 试证明G中至少有5个6度结点或至少有6个5度结点.**

反证法：假设6度结点小于5个且5度结点小于6个，则只可能有5个5度结点，4个6度结点(其他情况结点数的和小于9).
此时，各结点度数之和为：$5 \times 5 + 4 \times 6 = 25 + 24 = 49$, 与结点度数之和为偶数(边数两倍)矛盾.
故 G 中至少有5个6度结点或至少有6个5度结点。

恒等式证明

10. **证明：$\sum_{j=2}^{n} C(j, 2) = C(n + 1, 3)$, 其中 n 是大于1的整数.**

证明：用数学归纳法，$n = 2$时，左边= $C(2, 2) = 1 = C(3, 3)$ =右边

假设 $n = k$ 成立，$\sum_{j=2}^{k} C(j, 2) = C(k + 1, 3)$，考虑 $n = k + 1$ 时，

$\sum_{j=2}^{k+1} C(j, 2) = \sum_{j=2}^{k} C(j, 2) + C(n + 1, 2) = C(n + 1, 3) + C(n + 1, 2) = c((n + 1) + 1, 3)$. 最后一步是因为帕斯卡恒等式

$C(n + 1, k) = C(n, k - 1) + C(n, k)$. 故由数学归纳法，原命题成立！

容斥原理应用

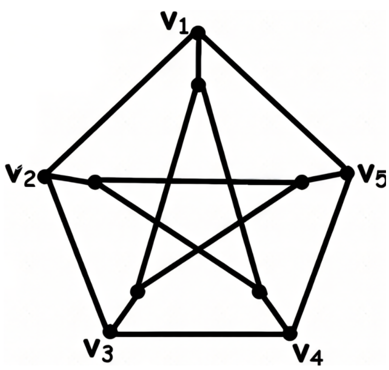
11. **Let D_n be the number of misaligned arrangements of n objects, and try to prove that：**
    - **(1)** $D_n = (n - 1)(D_{n-1} + D_{n-2})$，$n \geq 2$
    - **(2)** $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$，$n \geq 1$

(1) 在一个从1到 n 的错位排列中，数字1不可能先出现，所以让 $k \neq 1$ 成为第一个出现的数字. k 有 $n - 1$ 种选择. 现在有两种方法可以得到一个以 k 为先的错位排列. 一种方法是将1放在第 k 个位置. 如果我们这样做，那么正好有 D_{n-2} 种方法来改变其余的的数字. 另一方面，如果1没有进入第 k 位，那么就把数字1看作是 k . 在这种情况下，通过找到数字2至 n 的位置上的错位排列，所以有 D_{n-1} 个这样的数字. 将所有这些结合起来，通过乘积规则和规则，我们得到了所需的递归关系. 初始条件是 $D_0 = 1, D_1 = 0$.

(2) 根据(1)，我们有 $D_n - nD_{n-1} = -[Dn - 1 - (n - 1)D_{n-2}]$. 迭代后，我们有
$D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n - 1)D_{n-2}] = -[-(D_{n-2} - (n - 2)D_{n-3}] = D_{n-2} - (n - 2)D_{n-3} = \ldots = (-1)^n(D_2 - 2D_1) = (-1)^n$ ，因为 $D_2 = 1$ 且 $D_1 = 0$.

图证明

12. **证明：彼得森图不是哈密顿图.**



将彼得森图中的15条边分为3种：

1类边：连接外部大五边形顶点的5条边。

2类边：连接内部小五角星顶点的5条边。

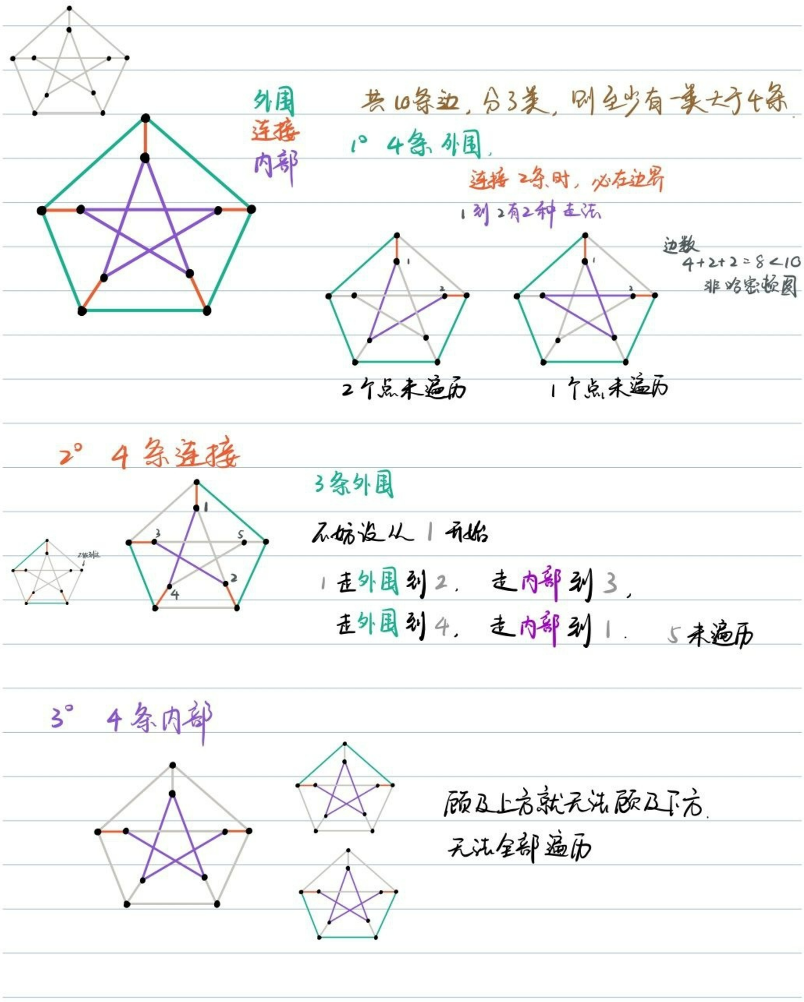
3类边：连接内外顶点的5条边。

如果彼得森图是哈密尔顿图，那么存在一条10条边组成的回路（10个顶点），该回路中的3类边有2条或4条（回到内圈或外圈的起点）。

若有2条3类边， 则外圈必须有4条1类边将五个外圈顶点连接，此时需要使用4条边2类边将内圈不相邻的两顶点连接，显然不可行。

若有4条3类边，则有一个还未连接的外圈顶点必有2条1类边与相邻外圈顶点相连，同理未连接的内圈顶点也必须有2条2类边与相邻的内圈顶点相连。此时须用两条边把剩余4个顶点相连，显然问题无解。

另解：



数列递推应用

13. **求解联合递推关系**

$$a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1}$$
$$b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$$

其中$a_0 = 1, b_0 = 2$.

解：首先，我们把这个系统简化为一个递推关系和只涉及 a_n 的初始条件. 如果我们把两个方程相减，我们得到 $a_n - b_n = 2a_{n-1}$ ，这就得到 $b_n = a_n - 2a_{n-1}$. 我们将其代入得到 $a_n = 3a_{n-1} + 2(a_{n-1} - 2a_{n-2}) = 5a_{n-1} - 4a_{n-2}$ ，这就是我们想要的单变量递归关系. 值得注意的是，原始方程中的第一个方程给了我们必要的第二个初始条件. 即 $a_1 = 3a_0 + 2b_0 = 7$. 现在我们以通常的方式解决 $\{a_n\}$ 的问题. 特征方程 $r^2 - 5r + 4 = 0$的根是1和4，在求出系数后，其解是 $a_n = -1 + 2 \cdot 4^n$. 最后，我们将其代入方程 $b_n = a_n - 2a_{n-1}$ 中，发现 $b_n = 1 + 4^n$.

图论证明

14. **Prove that: In a connected graph, any two longest paths must have a common vertex.**

证: 若 P_1, P_2 是连通图 G 中的两条最长路,它们没有公共顶点. 设 V_1, V_2 分别是 P_1, P_2 中顶点的集合，由于 G 连通，所以存在一条从 V_1 到 V_2 的路 (u, v)，其中 u 是 P_1 的顶点，v 是 P_2 的顶点，且该路不再含有 V_1 和 V_2 的顶点，顶点 u 将 P_1 分为两段，选取其中长度较长的一段，同样顶点 v 将 P_2 分为两段，也选取其中长度较长的一段，则这两段与路 (u, v) 一起，构成一条更长的路，矛盾。