Aplicación del algoritmo de transformación de Householder en mínimos cuadrados para un análisis de la pobreza en el Perú

Ayrton Fabio Coronado Huamán [1], Guillermo Joel Borjas Córdova [2], Israel Danilo Blas Salas [3], Tomás García Sifuentes [4]

Facultad de Ciencias 1*, Universidad Nacional de Ingeniería* 1*, e-mail:*
Facultad de Ciencias 2*, Universidad Nacional de Ingeniería* 2*, e-mail:*

Palabras Claves:

Keywords:

1. Introduccíon

En este proyecto nos dedicaremos a construir un algoritmo eficiente, en términos de tiempo de ejecución, del método matemático "Transformación de Householder", el cual nos permite obtener un tipo de descomposición de matrices llamado "Descomposición QR". Esto nos servirá en la resolución de un sistema de ecuaciones proveniente del ajuste de una curva utilizando la técnica de mínimos cuadrados donde intervienen una variable dependiente y una independiente, y en la cual la relación entre ellas se aproxima por medio de una línea recta, todo esto con la finalidad de poder aplicarse a una situación particular en el campo de la economía, más concretamente, para hacer un análisis de la pobreza en el Perú y de esta manera hacer predicciones o pronósticos que nos ayudarán a tener un mejor entendimiento de este problema.

Con el fin de llevar a cabo este proyecto, se emplearán los datos tomados de una muestra real, extraídos de un informe hecha por el INEI de pobreza, pobreza extrema y el coeficiente de Gini (indicador de la desigualdad económica en una población) en los años 2010 - 2013 de los principales departamentos del Perú.

Muchos autores que han hecho estudios sobre modelos de regresión, entre los que se pueden citar a: Anderson, D. R., Sweeney, D. J., & Williams, T. A. (2001), Devore, J. L. (2005), Evans, M., & Rosenthal, J. S. (2005), Freund, J. E., & Simon, G. A. (1994), Levin, R. I., & Rubin, D. S. (2004) y Miller, I. (2000); coinciden en que siempre que se analizan datos observados o recopilados para llegar a una función o ecuación matemática que describa la relación entre las variables por medio de una regresión, se deben enfrentar tres problemas:
1. Decidir qué clase de curva muestran los puntos y por tanto qué clase de ecuación se debe usar.
2. Encontrar la ecuación particular que mejor se ajuste a los datos.
3. Demostrar que la ecuación particular encontrada cumple con ciertos aspectos referentes a los méritos de ésta para hacer pronósticos.

Para decidir qué clase de función podría ajustarse a la curva, debe hacerse una gráfica de dispersión de los datos observados. Si en dicha gráfica se aprecia que los puntos se distribuyen alrededor de una recta, se procede a realizar un análisis de regresión lineal.

2. Conceptos Previos

Al igual que en el problema del análisis de pobreza, a menudo coleccionamos datos e intentamos encon-

trar una relación funcional entre las variables. Si los datos son $n+1$ puntos del plano, es posible encontrar un polinomio de grado n o inferior que pasa por todos los puntos. Este polinomio se llama polinomio de interpolación. Dado que los datos tienen en general error experimental, no hay razón para pedir que las funciones pasen por todos los puntos. De hecho, polinomios de grado inferior que no pasan por los puntos de manera exacta, dan una mejor descripción de la relación entre variables. Por ejemplo, si la relación entre variables es actualmente lineal y los datos tienen un pequeño error, sería desastroso usar un polinomio de interpolación.
Dada una tabla de datos

x	x_1	x_2	...	x_m
y	y_1	y_2	...	x_m

deseamos encontrar una función lineal

que mejor aproxima los datos en el sentido de mínimos cuadrados. Si se pide que obtenemos un sistema de m ecuaciones en dos incognitas La función lineal cuyos coeficientes son la solución de mínimos cuadrados de viene a ser la aproximación de mínimos cuadrados a los datos con una función lineal.
Si los datos no aparecen en relación lineal, se podria usar un polinomio de grado mayor. Es decir, para encontrar los coeficientes $c_0, c1, ..., c_n$ de la mejor aproximación por mínimos cuadrados a los datos con un polinomio de grado n, tenemos que encontrar la solución de mínimos cuadrados al sistema

2.1. LAS TRANSFORMACIONES DE HOUSEHOLDER

Debido a las posibles dificultades numéricas del uso de las ecuaciones normales, los modernos métodos de mínimos cuadrados se han desarrollado basándose en las transformaciones ortogonales, que preservan las distancias euclídeas y no empeoran las condiciones de la matriz A. La idea es transformar un problema de mínimos cuadrados de manera que sea fácil de resolver, reduciendo la matriz A a la forma que revela el rango. El término forma triangular que revela el rango una matriz genérica $m \times n$ de rango r correspondiente a la matriz $T' =$,con T_{11} matriz rxr no singular triangular superior y T_{12} matriz $r \times (n-r)$. CuandoT' tiene rango lleno de filar entonces no aparecen ambos bloques de ceros; si T' es de rango lleno de columna, la matriz T_{12} y el bloque de ceros derecho no aparecerán. Mas en general, el rango de una matriz $m \times n$, F' , es r si F' es de la forma $F' =$, con F matriz $r \times n$ y las filas de F son linealmente independientes. Dado que ya no estamos resolviendo ecuaciones, el conjunto de transformaciones que se puede aplicar a A sin cambiar la solución está restringido. Las transformaciones ortogonales son obvias en este contexto dado que estas no alteran la norma l_2. Sea A una matriz no nula $m \times n$, con rango igual a r. Supóngase que se pueda encontrar una matriz $m \times m$ ortogonal Q que produzca la forma que revela el rango donde F es una matriz $r \times n$ y tiene las filas linealmente independientes; el bloque de ceros no aparece si $r = m$. La forma (XX.1) nos permite resolver el problema de mínimos cuadrados usando las matrices Q y F . Sea d el vector transformado $Q^t b$, descompuesto en Usando esta definición y la estructura mostrada en (XX.1), se puede escribir el vector residual transformado como Dado que la matriz Q^t es ortogonal, su aplicación al vector residual no altera la norma euclídea, y Combinando esta relación con la forma especial del vector residual transformado, se concluye que que significa que $||b - Ax||_2$ no puede ser menor que $||d_{m-r}||$ 2 para

cualquier vector x. El valor más pequeño posible para $||b - Ax||_2^2$ es la cota inferior. Igualdades con la cota inferior se obtienen si y sólo si el vector x satisface Dado que el rango de la matriz F es igual a r, el sistema $Fx = d_r$ tiene que ser compatible. Cuando $Fx = d_r$, el vector residual transformado satisface Q^t y $||b - Ax||_2 = ||dm - r||_2$. Esto demuestra que cualquier vector x que satisfaga $Fx = d_r$ será una solución de mínimos cuadrados. Suponiendo que los sistemas en los cuales aparecen las matrices F son fáciles de resolver, se sigue que el problema de mínimos cuadrados se puede resolver encontrando una matriz ortogonal Q_t que nos dé la forma (XX.1). Antes de presentar la factorización QR para resolver el problema de mínimos cuadrados, es necesario introducir las transformaciones de Householder.
La técnica más popular para construir una matriz ortogonal que reduzca la matriz A en forma triangular usa una clase especial de matrices que son simultaneamente simétricas, elementales y ortogonales. Para cualquier vector no nulo u, la correspondiente transformación de Householder (o matriz de Householder, o reflector de Householder) es una matriz de la forma donde el vector u es el vector de Householder Teorema XX.1 Si H es la matriz definida en (XX.7), entonces 1) $H = H^t$, 2) $H = H^1$, que es lo mismo que decir que la matriz H es simétrica y ortogonal.

Entonces, las matrices de Householder son simétricas y ortogonales, y dependen sólo de la dirección del vector u. En el contexto de las reducciones a matrices triangulares, las matrices de Householder poseen dos propiedades cruciales: - para cualquier par de vectores distintos de igual norma l_2 , existe una transformación de Householder que transforma el uno en el otro, con $||a||_2 = ||b||_2$. Esto implica que el vector u tiene que satisfacer la condición es decir, u es un múltiplo de $b - a$; - cualquier vector c transformado por una matriz de Householder posee una forma especial: de manera que Hc es la diferencia entre el vector original c y un múltiplo especial del vector de Householder u. Claramente el vector c no varía si $u^t c = 0$. Además, calcular el producto Hc no necesita los elementos explícitos de H, sino sólo el vector u y el escalar β.

2.2. LA FACTORIZACIÓN QR

Para una matriz genérica A, $n \times n$, no singular, las propiedades que se acaban de describir permiten construir una sucesión de $n - 1$ matrices de Householder tales que donde R es una matriz $n \times n$ no singular y triangular superior. El primer paso de este proceso es construir una matriz de Householder H_1 que transforma a_1 (la primera columna de A) en un múltiplo de e_1 , es decir, se desean crear ceros en las componentes 2 hasta n del vector a_1 . La norma euclídea se conserva bajo transformaciones ortogonales, de manera que donde $|r_{11}| = ||a_1||_2$. De la expresión (XX.9) sabemos que el vector u_1 tiene que ser un múltiplo de $||a_1||_2 e_1 - a_1$, y dado que H_1 depende sólo de la dirección de u_1 , podemos elegir el vector u_1 como Al definir u_1 , el signo de r_{11} se puede eligir positivo o negativo (excepto cuando a_1 es ya un múltiplo de e_1), y para evitar el problema de la cancelación de términos parecidos, usualmente se escoge el signo opuesto al signo de $a_1 1$, de manera que Después de la primera aplicación de las transformaciones de Householder, la primera columna de la matriz parcialmente reducida $A^{(2)} = H_1 A$es un múltiplo de e_1 , y los demás elementos han sido alterados En muy importante notar que a diferencia de la eliminación Gaussiana, la primera fila de la matriz A viene modificada por efecto de la transformación de Householder H. Al construir la segunda transformación de Householder, el objetivo principal es reducir la segunda columna a la forma correcta, sin alterar la primera fila y la primera columna de la matriz parcialmente reducida. Debido a la propiedad (XX.10), se puede obtener este resultado definiendo el segundo vector de Householder u_2 con la primera componente nula. Habiendo escogido así el vector u_2 , la aplicación de la matriz de Householde H_2 a un vector genérico no cambia la primera componente, y la aplicación a un múltiplo de e_1 deja el vector entero como está. Si A es una matriz no singular, se pueden efectuar $n-1$ pasos de reducción de Householder, para obtener $H_{n-1}...H_2H_1A = R$, con R una matriz triangular superior no singular. Si se denota con Q^t la matriz ortogonal $n \times n$ Cualquiera de las dos formas se conoce como la factorización QR de la matriz A. Una vez conocida la factorización QR de A, ecuación (XX.17), la solución al sistema $Ax = b$ se obtiene resolviendo el sistema triangular superior $Rx = Q^tb$. En general, es necesario un intercambio de columnas para asegurar que el rango está plenamente revelado. Sin el intercambio de columnas la reducción de Householder terminaría inmediatamente con una matriz no nula cuya primera columna es cero. Si las demás columnas son también ceros, la reducción termina. De otra manera, existe por lo menos una columna no nula, la columna pivote, que se puede eligir como candidata para la siguiente reducción. Como en la eliminación gaussiana, una estrategia de pivoteo pide que se escoja la columna pivote como la primera columna de norma máxima (otra posibilidad es escoger la columna "menos reducida"). En general, si A es $m \times n$ de rango r, se necesitarán r permutaciones P_k y r matrices de Householder H_k, $k = 1, ..., r$. Después de estos r pasos, la configuración final será donde es triangular superior que nos revela el rango, y R_{11} es una matriz $r \times r$ no singular triangular superior. Con una correcta estrategia de pivoteo, dependiente del problema original, y aritmética exacta, este procedimiento de Householder terminará después de r pasos, cuando la matriz restante se transformará en cero. Combinando los intercambios de columnas en una sola matriz de permutación P y las transformaciones de Householder en una sola matriz ortogonal Q^t , se obtiene o equivalentemente, y Las filas de la matriz RP^t son linealmente independientes, de manera que la matriz transformada Q^tA tiene la forma deseada (XX.1), con $F = RP^t$. El problema de mínimos cuadrados se puede entonces resolver con el siguiente algoritmo: (i) Calcular la factorización QR de la matriz A, usando la reducción de Householder (que determina el rango r, y las matrices P , Q y R); (ii) Formar el vector $d = Q^tb$, y denotar con d_r las primeras r componentes de d; (iii) Calcular cualquier solución y del sistema $R_y = d_r$; (iv) Formar $x = Py$. El número de operaciones requerido para resolver el problema de mínimos cuadrados de esta manera es del orden de $2 \cdot m \cdot n \cdot r - r^2(m + n) + \frac{2}{3}n^3$. Si la matriz A posee columnas linealmente independientes ($r = n$), la matriz R es no singular, la solución de $Ry = d_r$ es única, y la solución del problema de mínimos cuadrados es única. En este caso resolver el problema con el método QR es aproximadamente dos veces más costoso que resolviendolo con las ecuaciones normales. Cuando las columnas de A son linealmente dependientes, de manera que $r < n$, el sistema $r \times n$ $Ry = d_r$ posee un número infinito de soluciones. Dado que R es de la forma $R = (R_{11}R_{12})$, con R_{11} triangular superior no singular, es posible escoger un vector $y = (y_B, 0)^t$ tal que R y = d r y con la propiedad de que R 11 y B = d r . Si y posee esta forma, la solución $x = Py$ es sencillamente una reordenación de y, y es llamada una solución básica del problema de mínimos cuadrados.

3. ANÁLISIS

4. OBSERVACIONES

5. CONCLUSIONES

1. I.K. Argyros, *Newton-like methods under mild differentiability conditions with error analysis,* Bull. Austral. Math. Soc. **37** (1988), 131-147.
2.