

# Técnicas de Programação II

# Árvores AVL

# Sumário

- Árvores AVL
  - Definição;
  - Exemplo e contra-exemplo;
  - Balanceamento;
  - Exemplo.
- Referências

# Definições

- Criada por Adelson-Velskii e Landis;
- É uma árvore de pesquisa binária balanceada

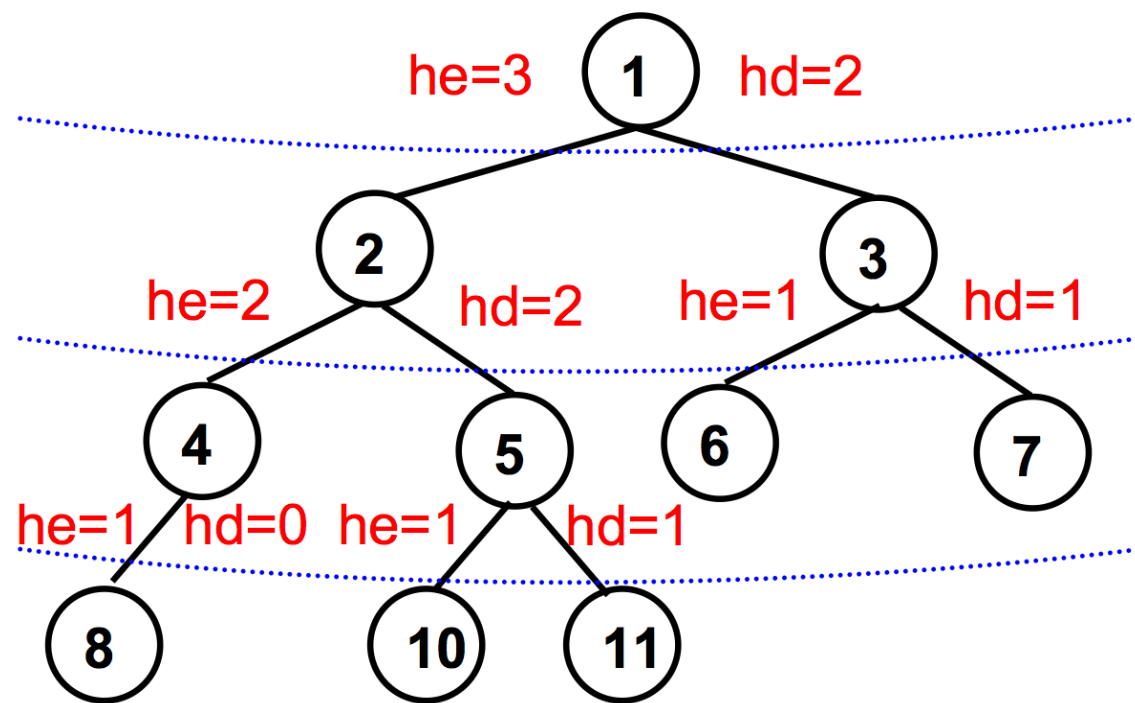
$$|h_e - h_d| < 1$$

# Definições

Em outras palavras, o valor do balanceamento de cada nó de uma árvore AVL é igual a 1, 0 ou  $-1$ .

Caso contrário, a árvore binária **NÃO** é AVL, pois estará desbalanceada.

# Definições



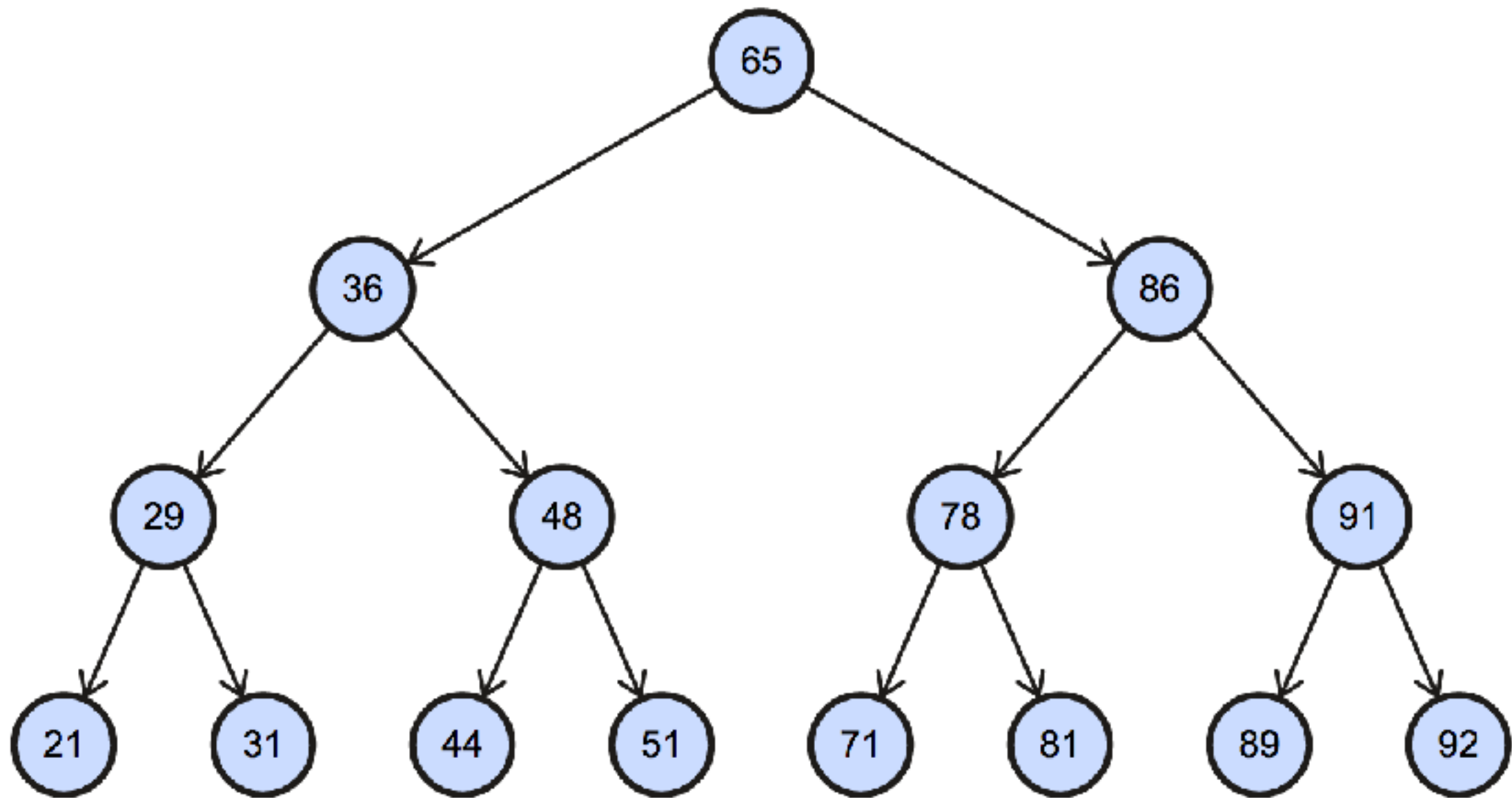
Árvore Binária Balanceada

Considere

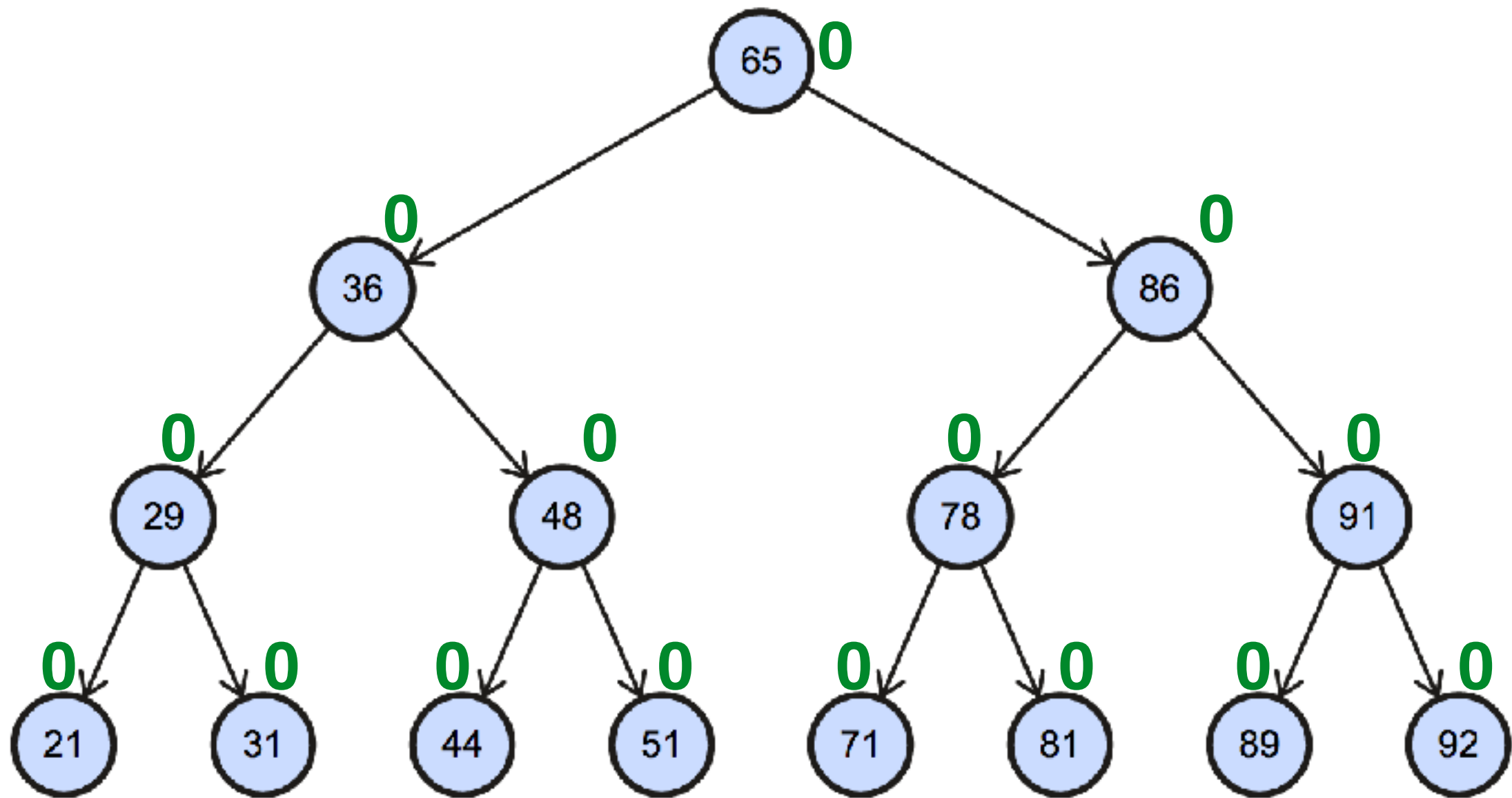
**$he(x)$**  como altura da sub-árvore esquerda e  
 **$hd(x)$**  como a altura da sub-árvore direita

Para cada nível a diferença entre as alturas das sub-árvores ( **$abs(he-hd)$** ) não ultrapassa 1.

# É AVL ou não?

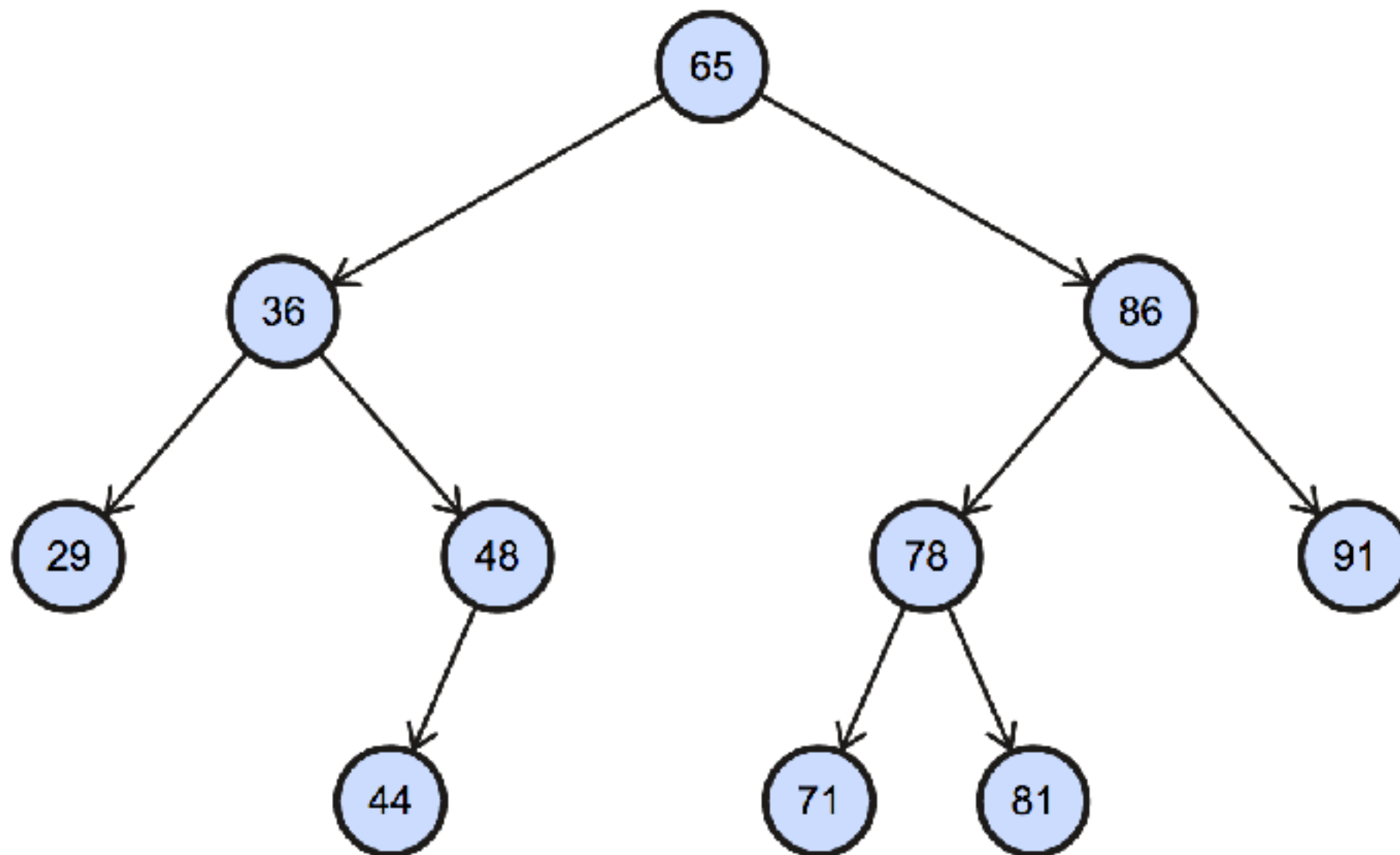


# É AVL ou não?

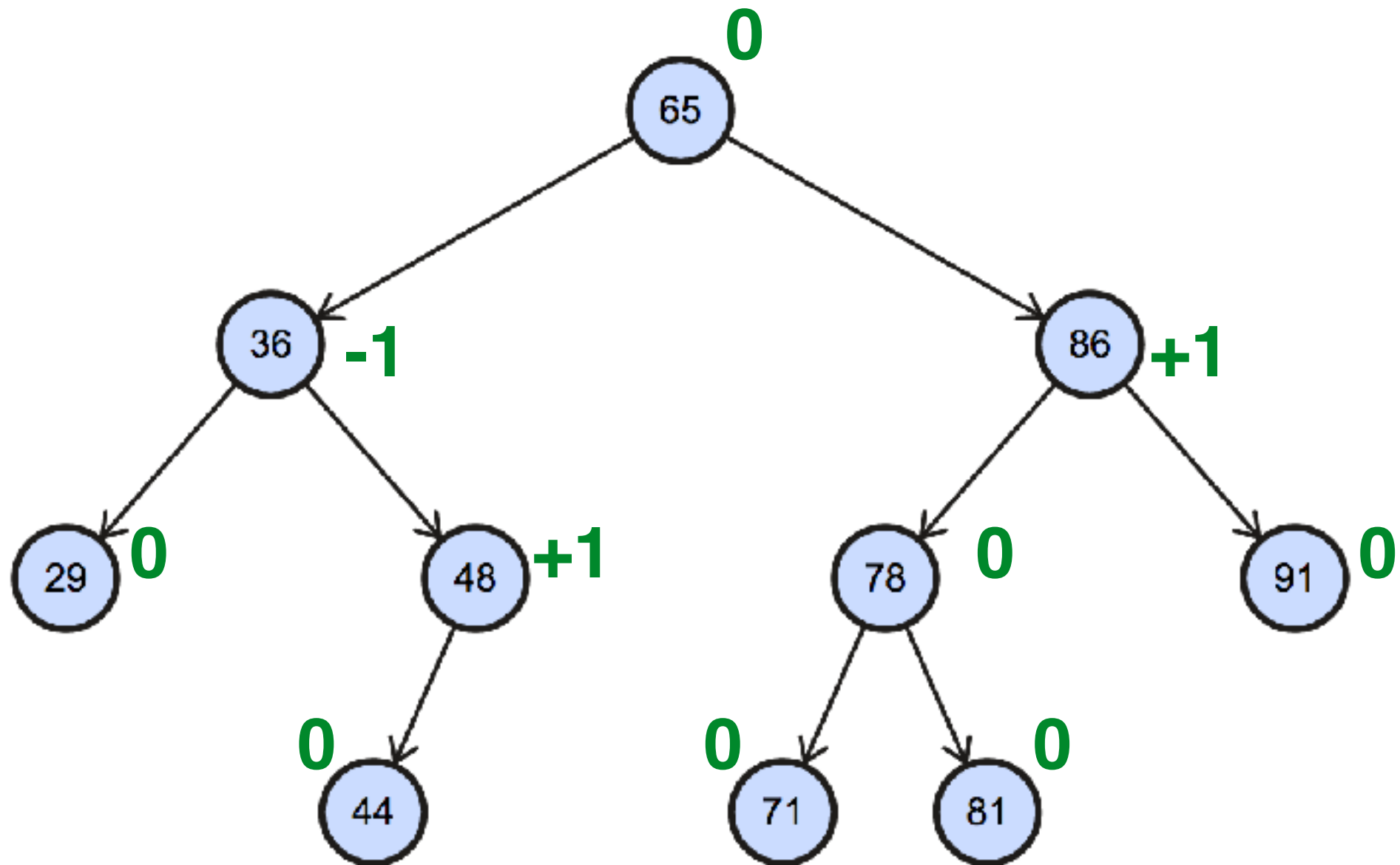




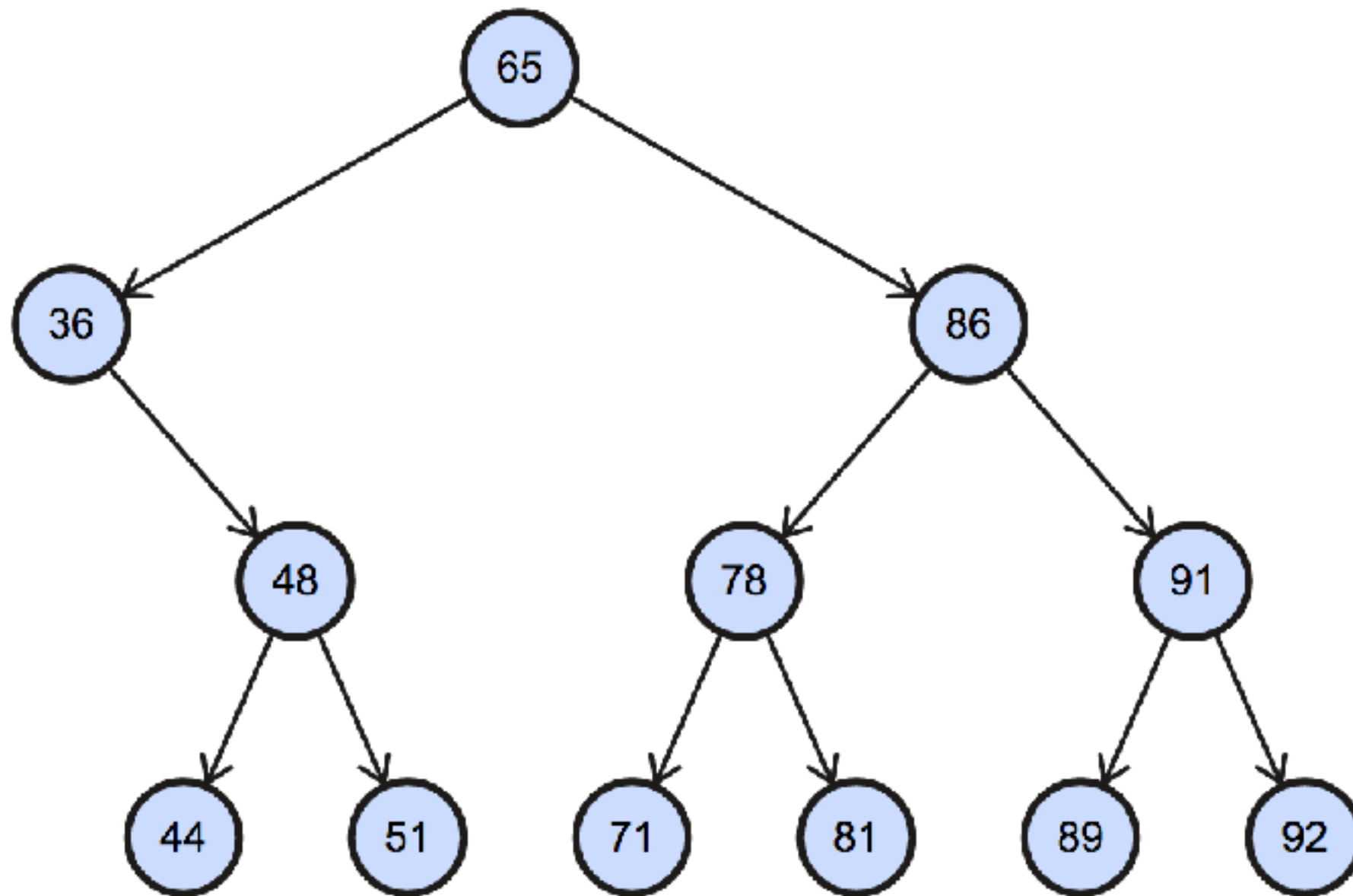
# É AVL ou não?



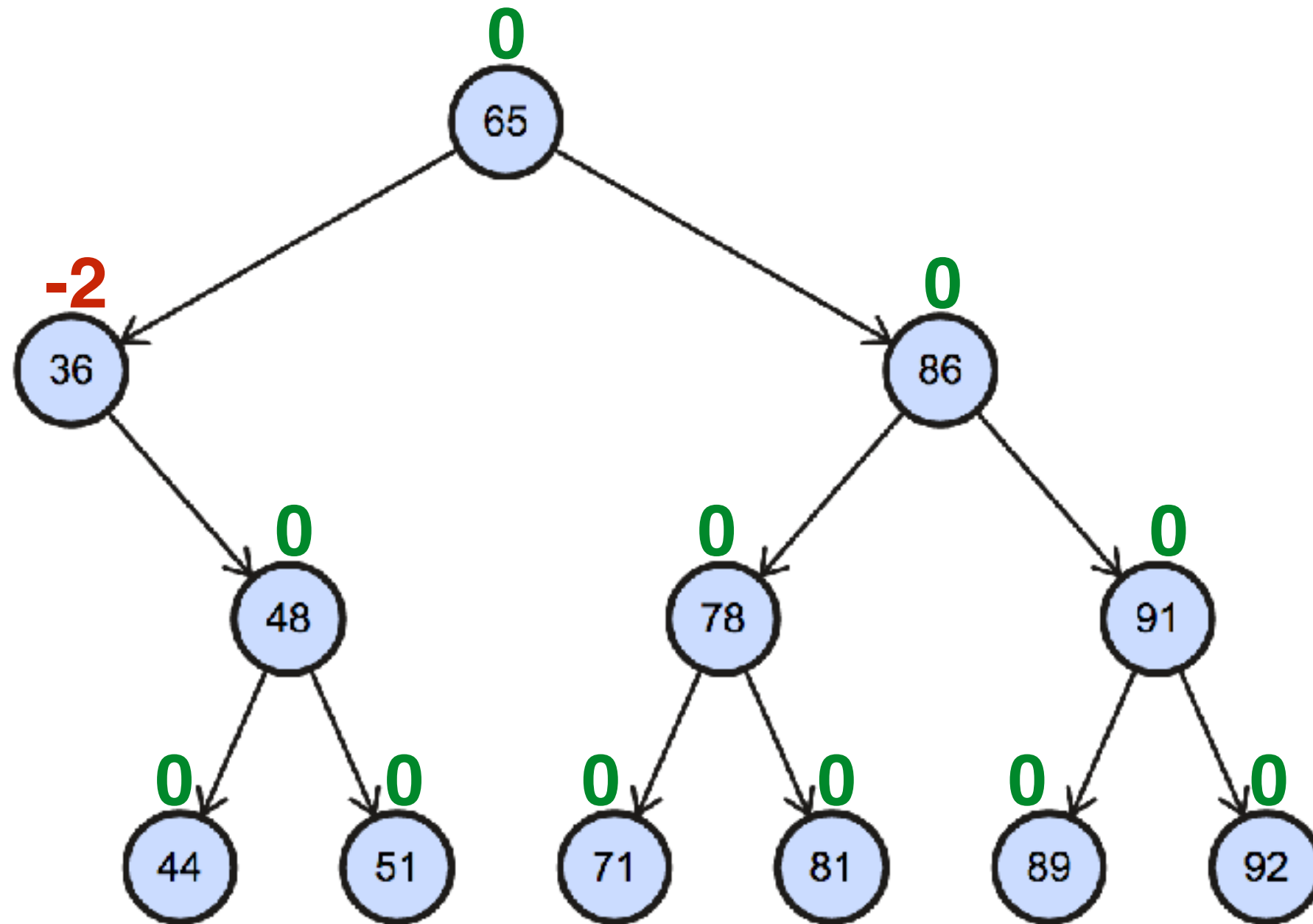
# É AVL ou não?



# É AVL ou não?



# É AVL ou não?



# É AVL ou não?

Como manter uma árvore AVL sempre balanceada após uma inclusão ou exclusão?

Através de uma operação de **ROTAÇÃO**

# É AVL ou não?

## **Tipos de rotação:**

- Rotação simples:
  - para a direita
  - para a esquerda
- Rotação dupla:
  - para a direita
  - para a esquerda

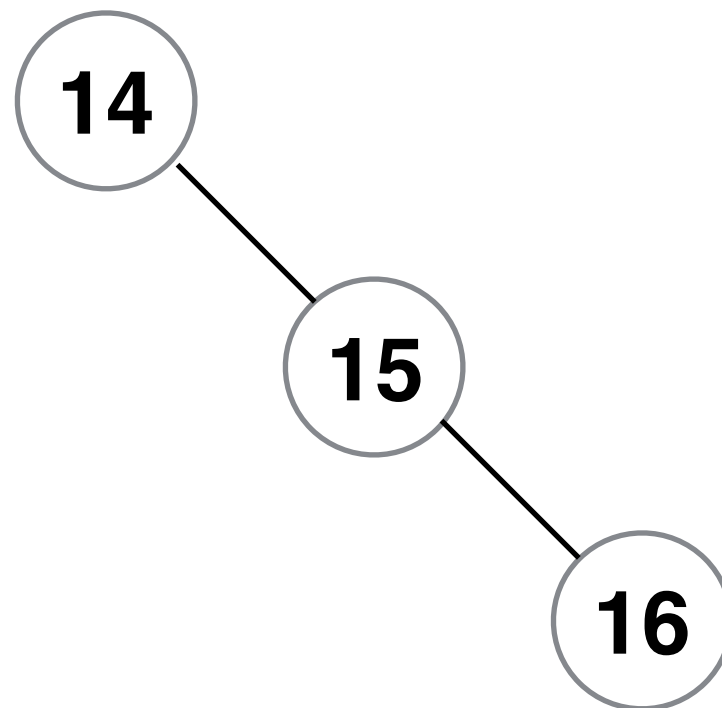
# Balanceamento

l <sub>he</sub> - h <sub>dl</sub> Nó desbalanceado	l <sub>he</sub> - h <sub>dl</sub> Nó filho do nó desbalanceado	Tipo de Rotação
-2	-1	Simples à esquerda
	0	Simples à esquerda
	+1	Dupla com à direita e pai à esquerda
+2	-1	Dupla com à esquerda e pai à direita
	0	Simples à direita
	+1	Simples à direita

# Exemplo

## Rotação Simples

**Inserindo: 14, 15 e 16.**

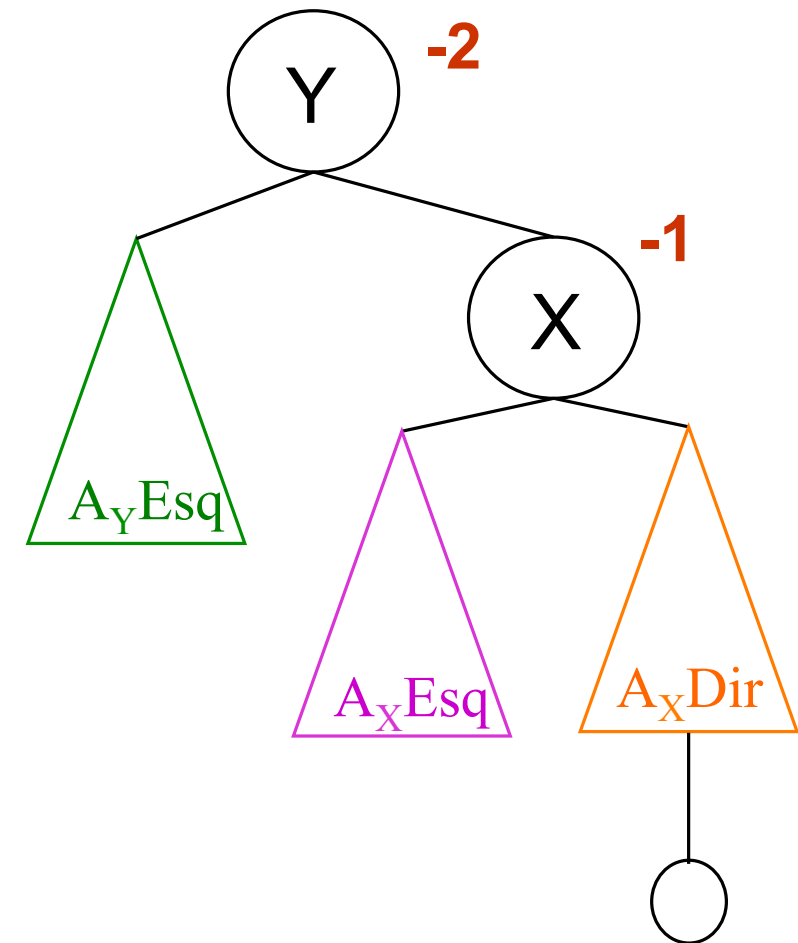
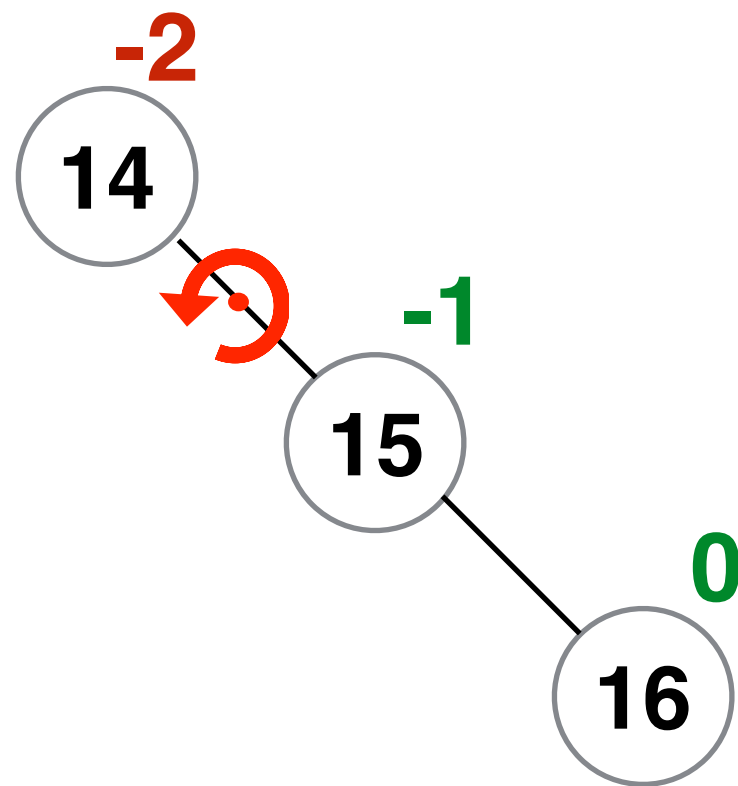




# Exemplo

## Rotação Simples

**Inserindo: 14, 15 e 16.**

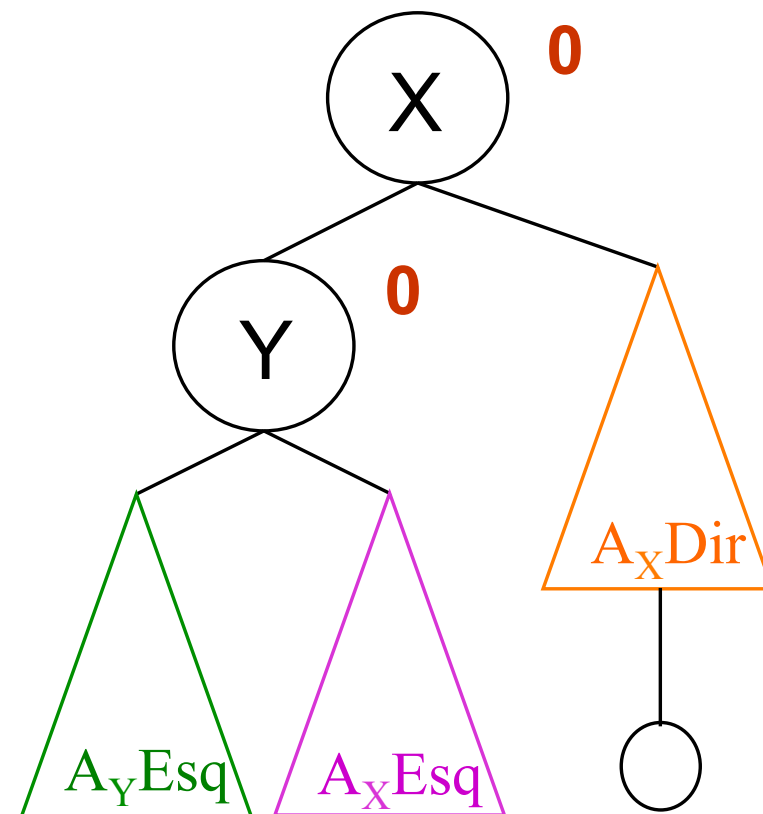
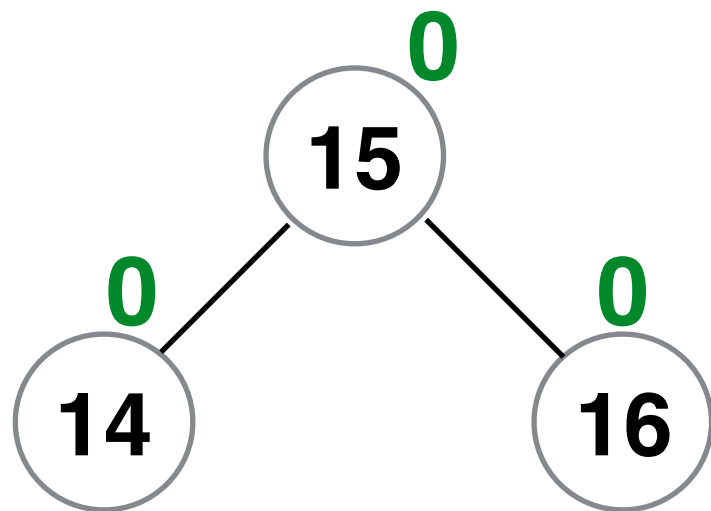


Rotação simples à esquerda

# Exemplo

## Rotação Simples

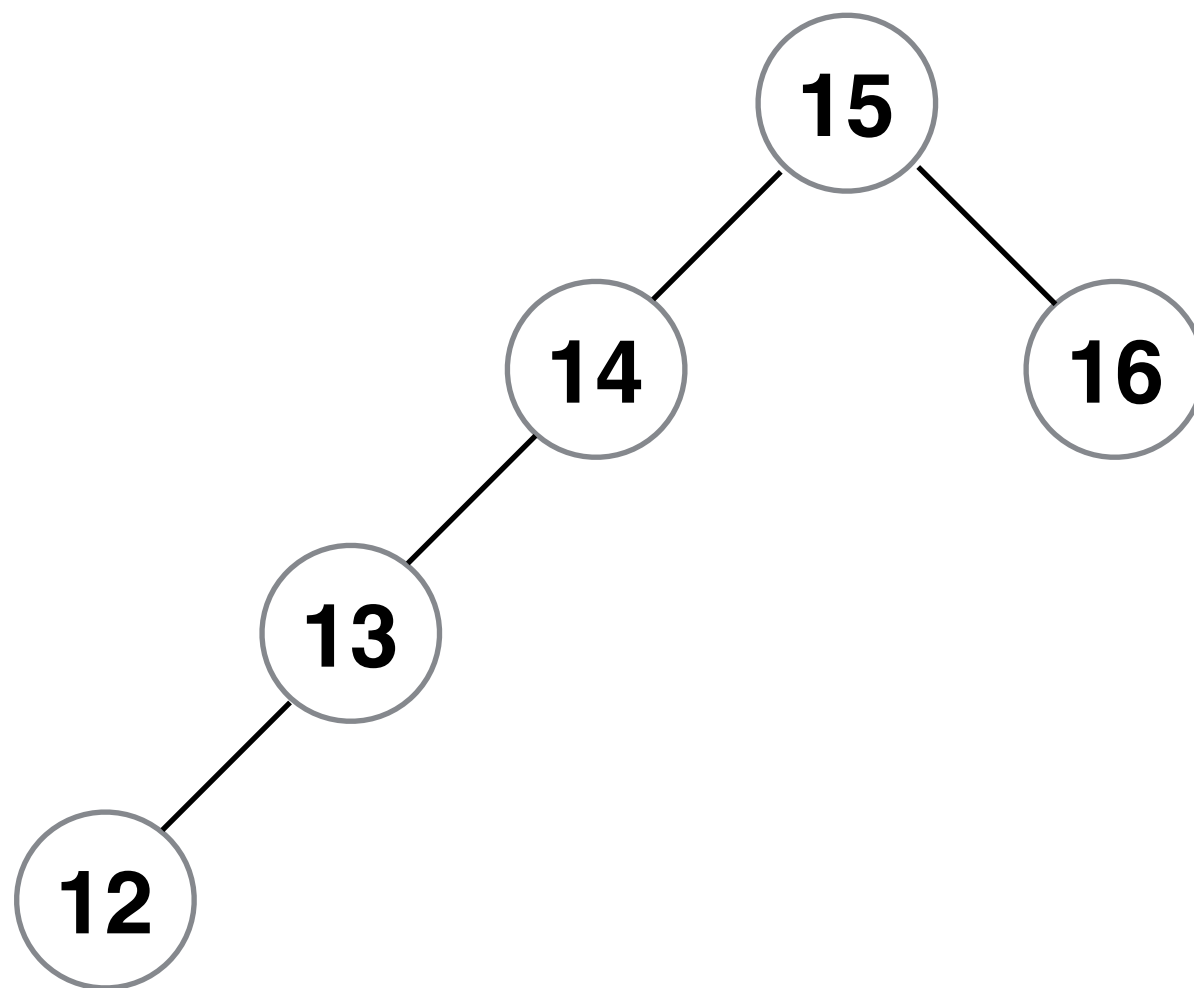
**Inserindo: 14, 15 e 16.**



# Exemplo

## Rotação Simples

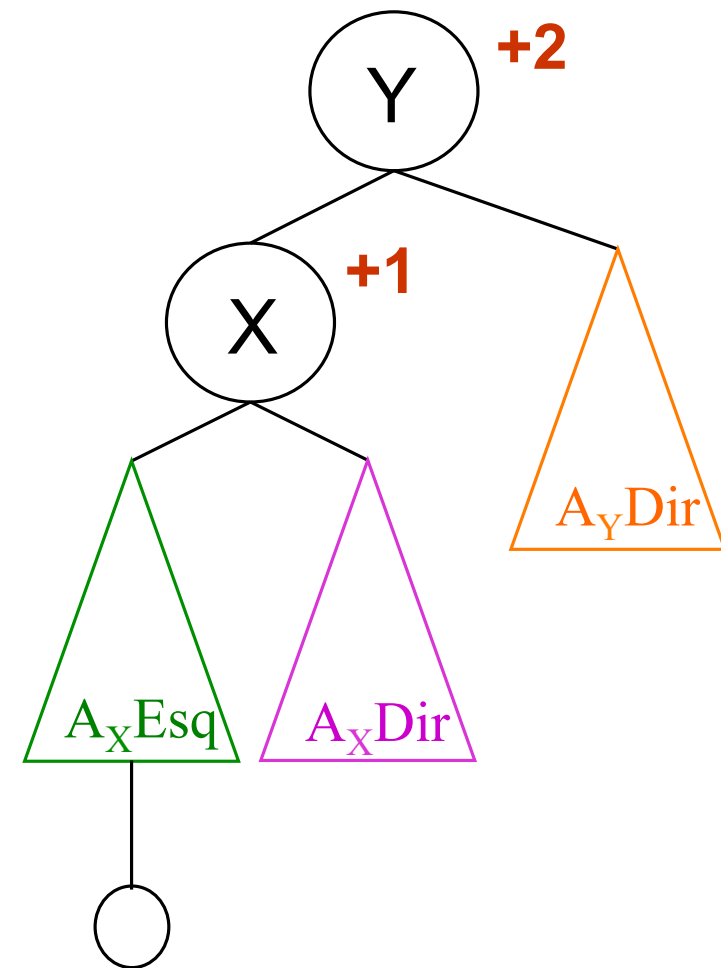
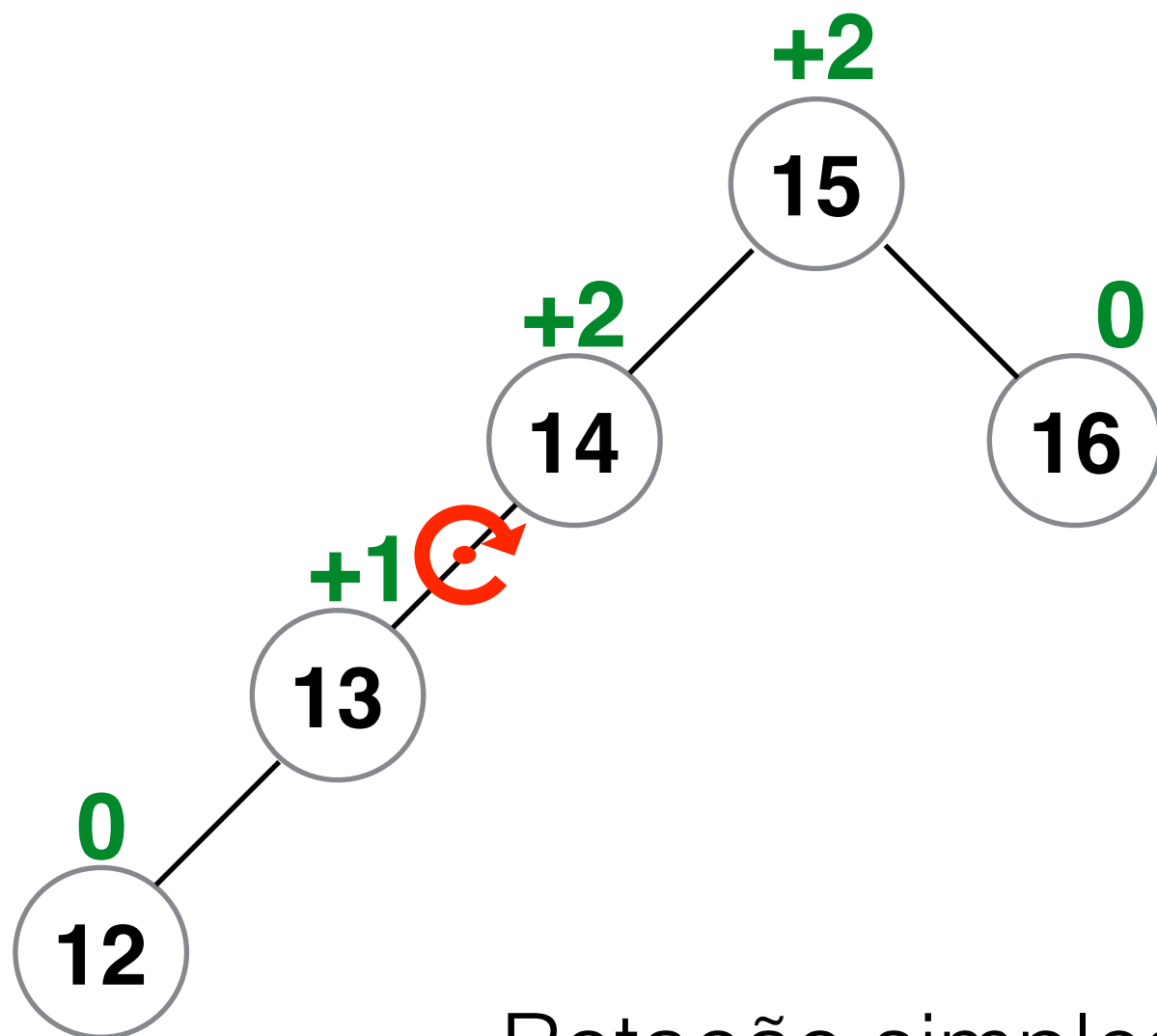
**Inserindo: 13 e 12.**



# Exemplo

## Rotação Simples

**Inserindo: 13 e 12.**

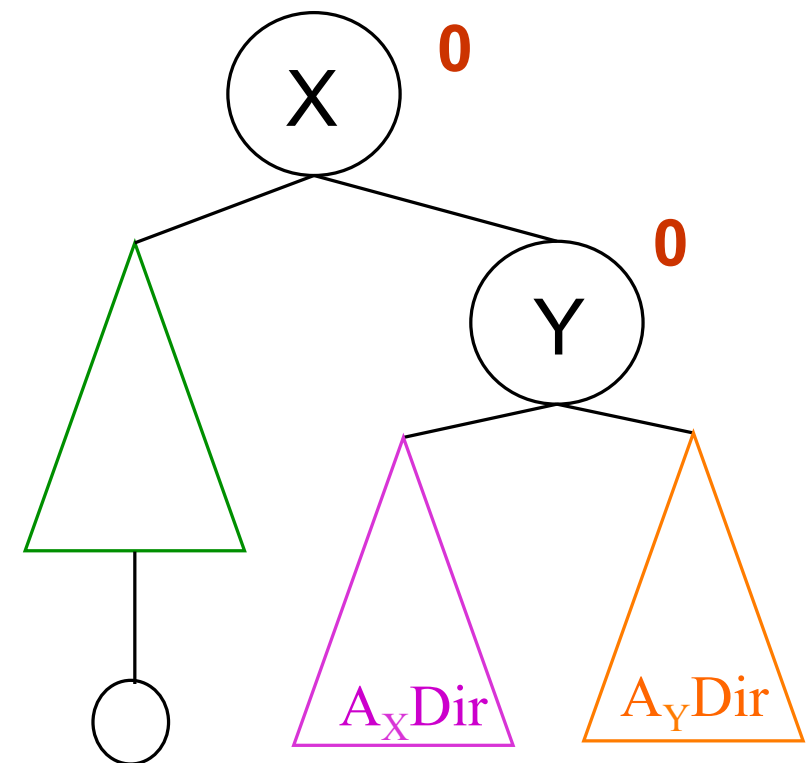
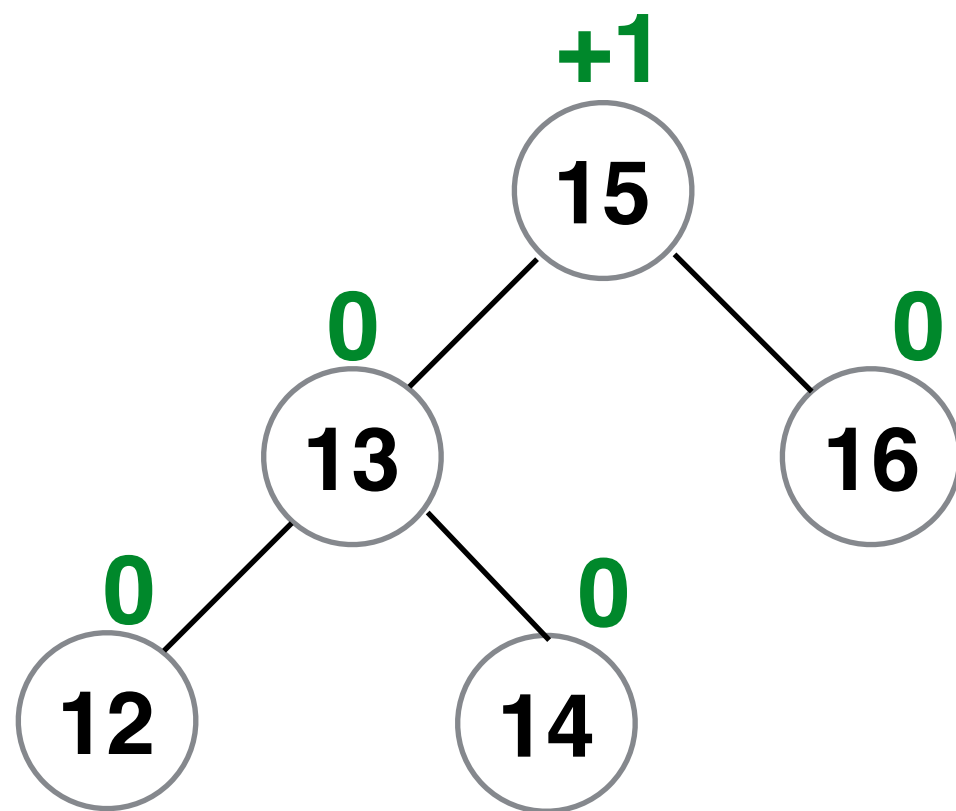


Rotação simples à direita

# Exemplo

## Rotação Simples

**Inserindo: 13 e 12.**

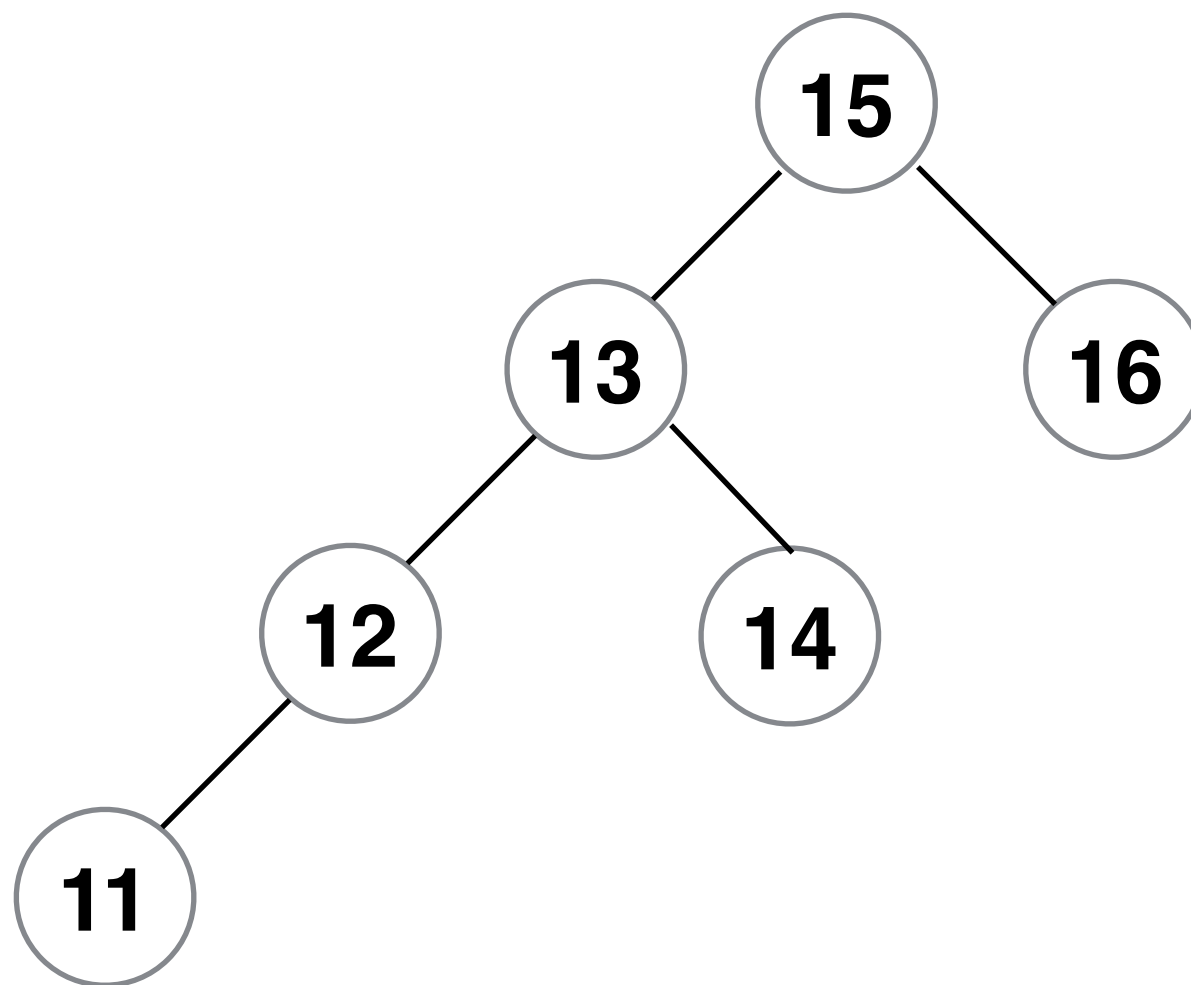


Rotação simples à direita

# Exemplo

## Rotação Simples

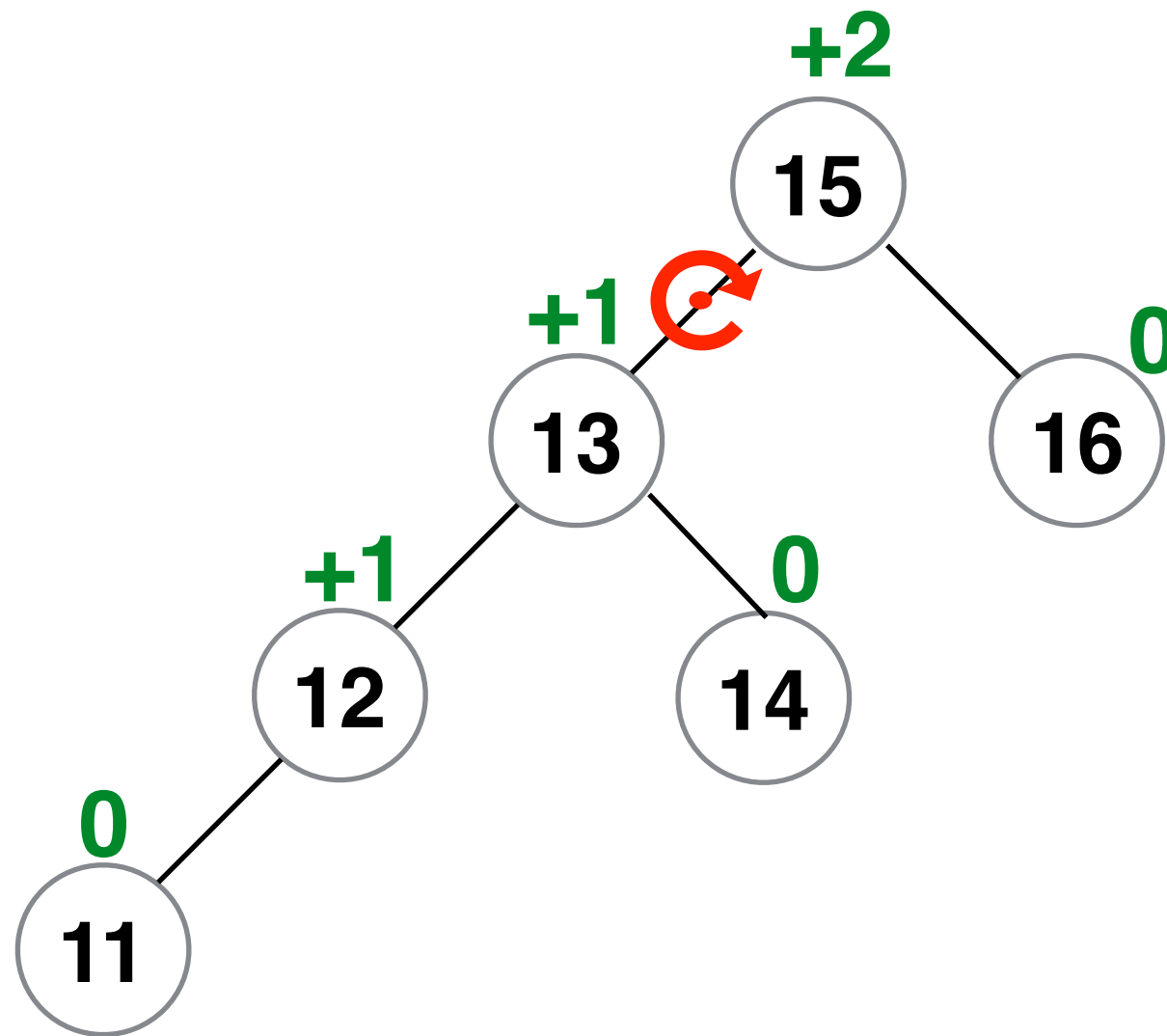
**Inserindo: 11**



# Exemplo

## Rotação Simples

**Inserindo: 11**

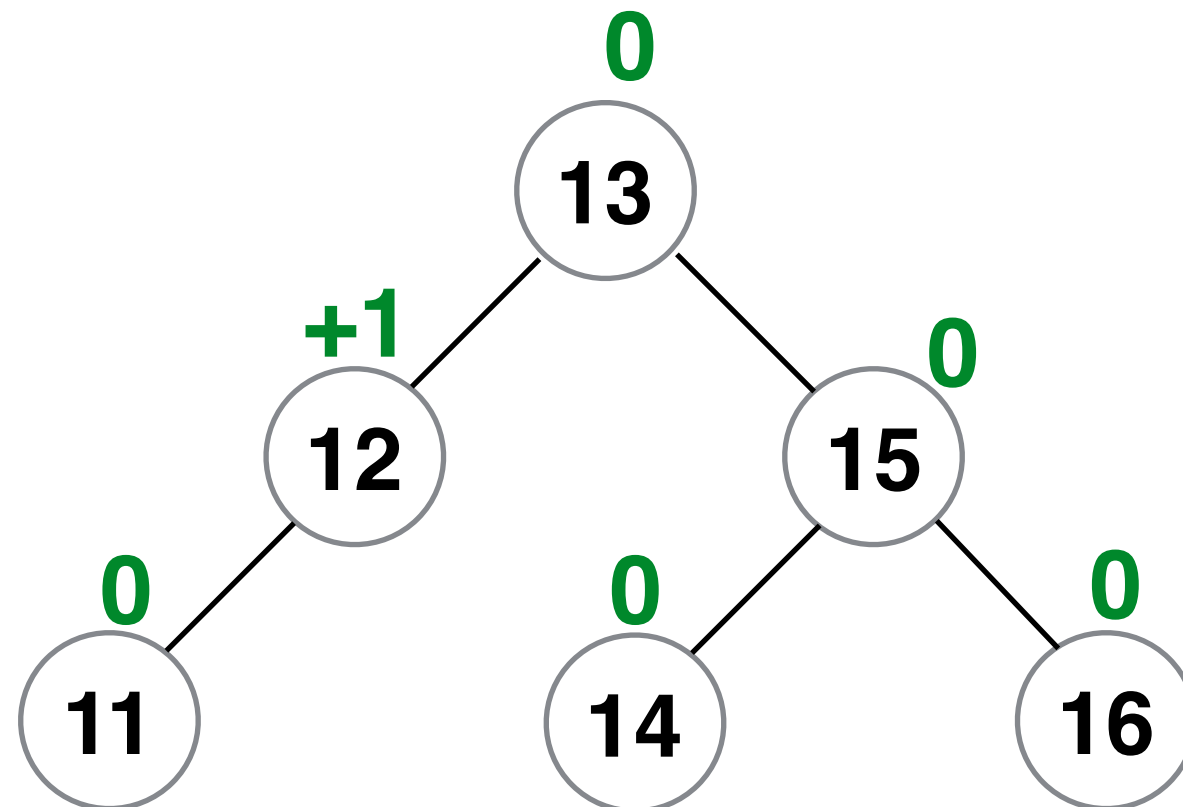


Rotação simples à direita

# Exemplo

## Rotação Simples

**Inserindo: 11**

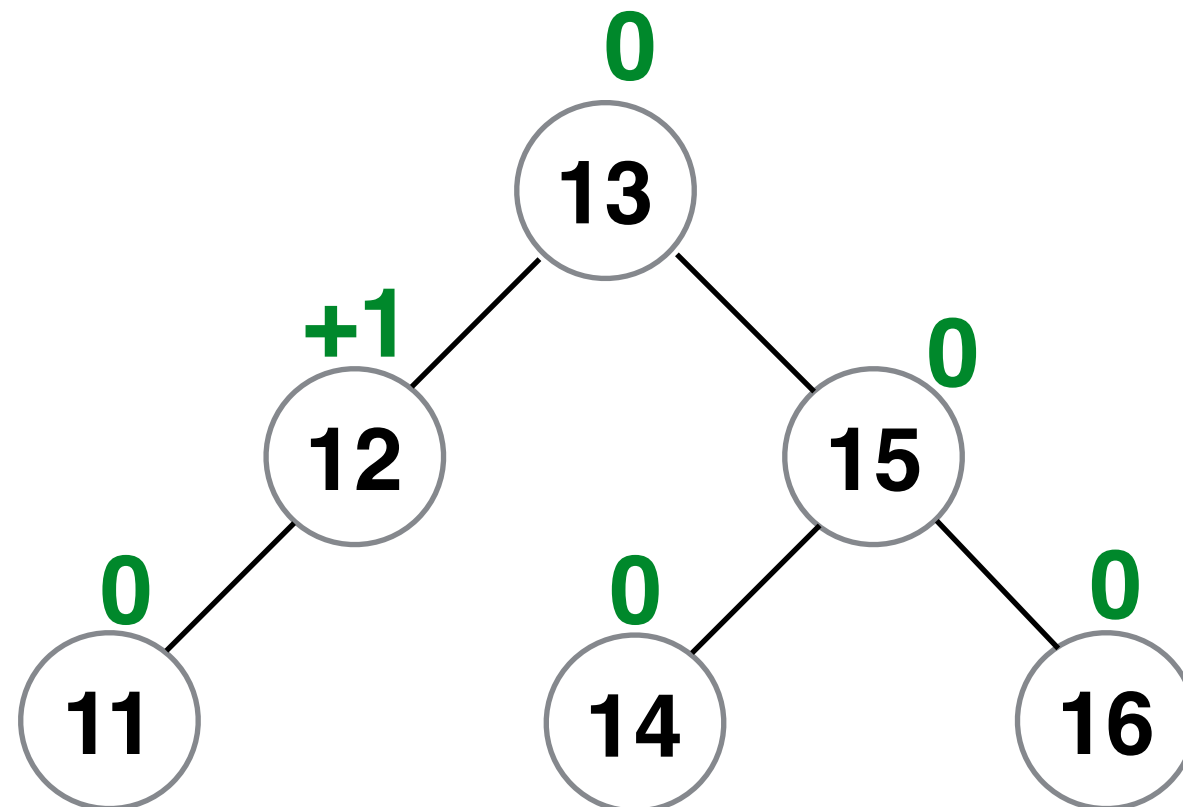




# Exemplo

## Rotação Simples

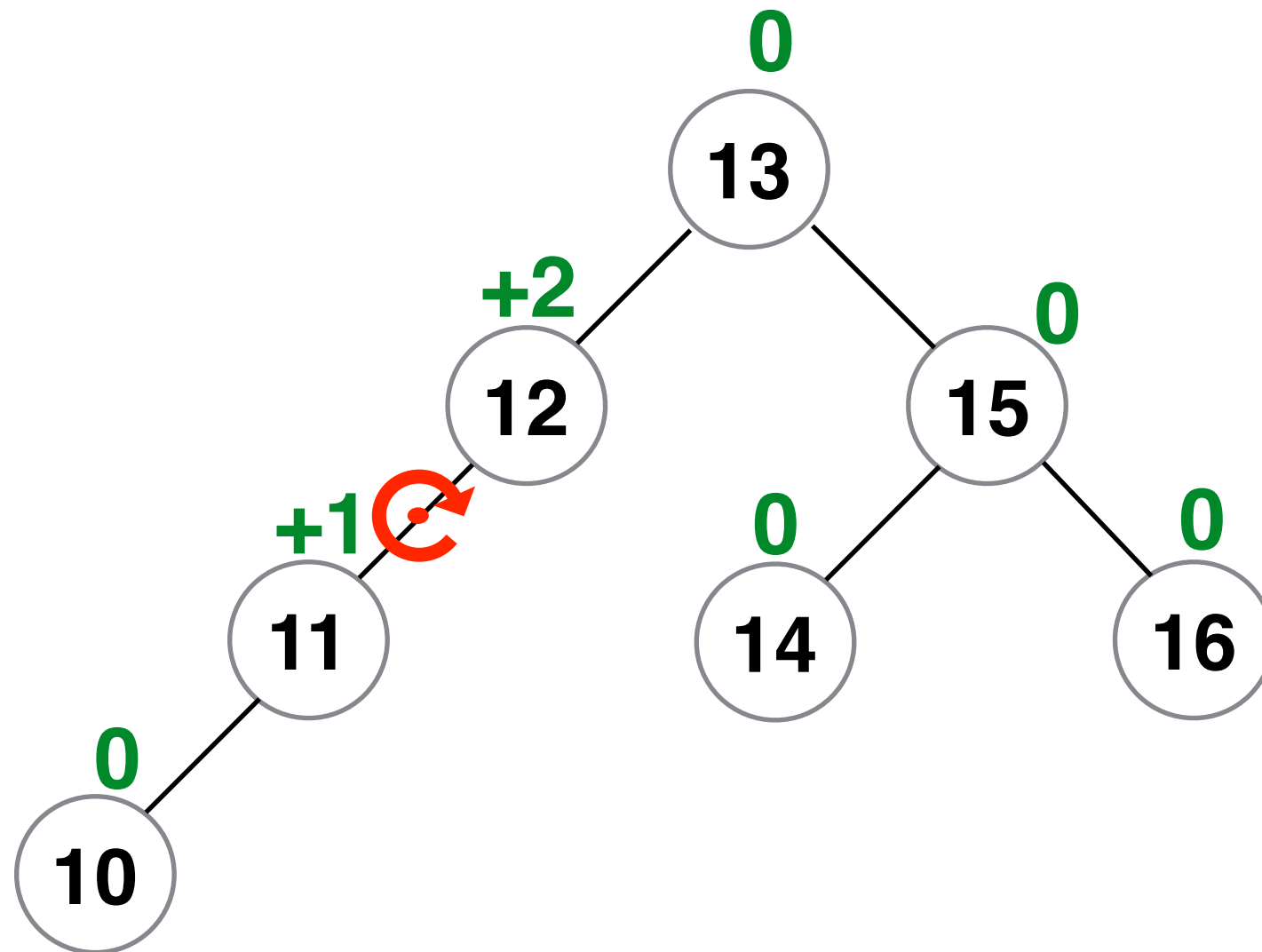
**Inserindo: 10**



# Exemplo

## Rotação Simples

**Inserindo: 10**

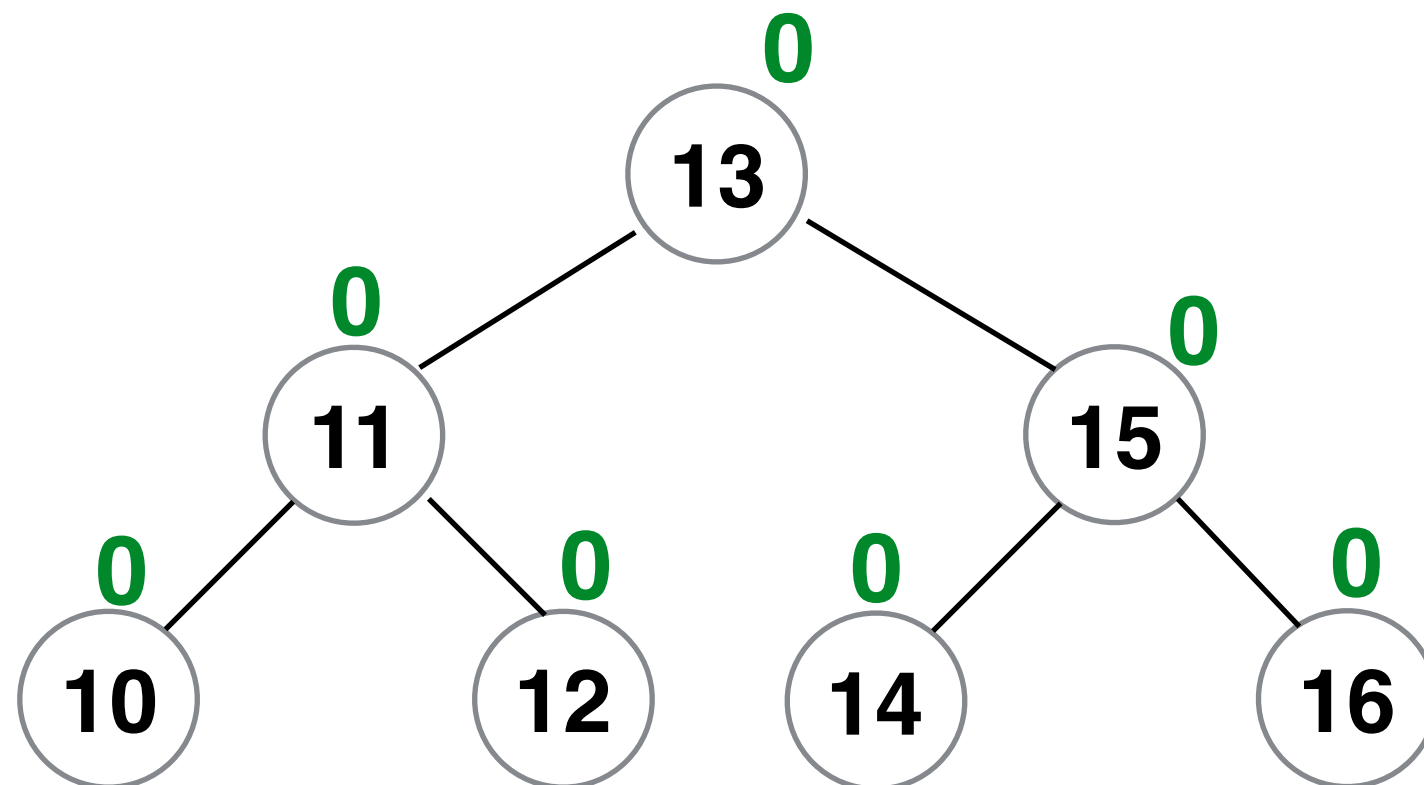


Rotação simples à direita

# Exemplo

## Rotação Simples

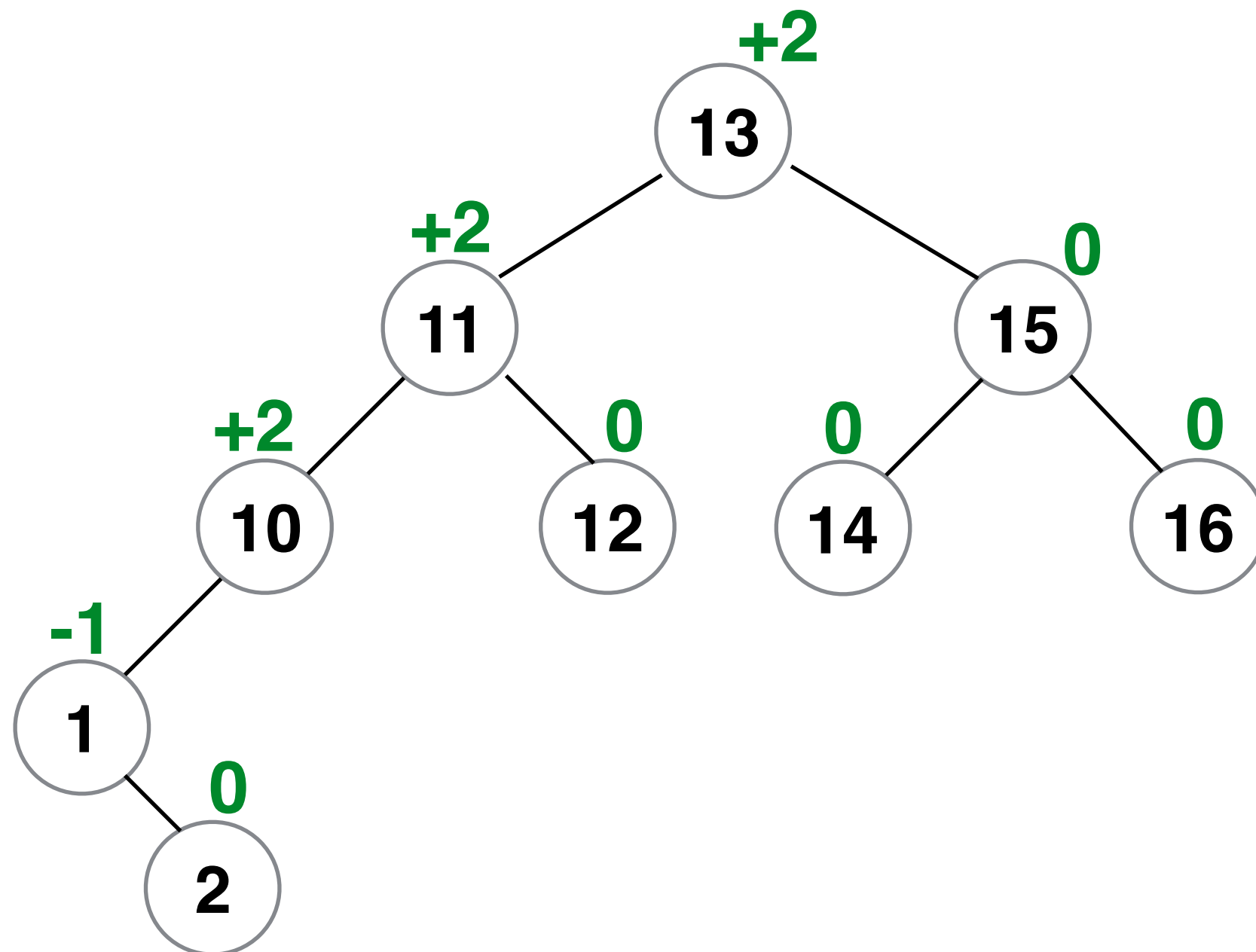
**Inserindo: 10**



# Exemplo

## Rotação Dupla

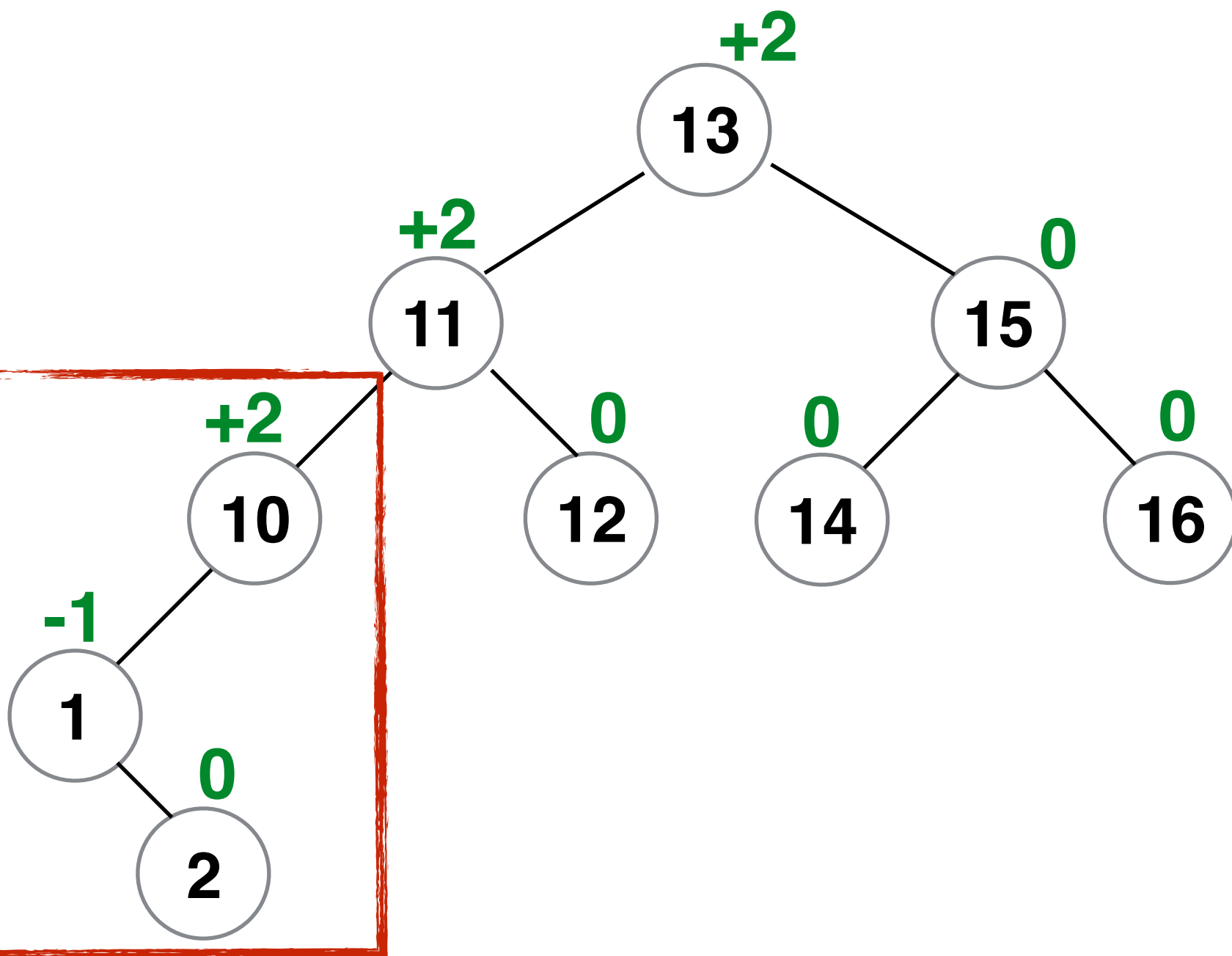
**Inserindo: 1 e 2**



# Exemplo

## Rotação Dupla

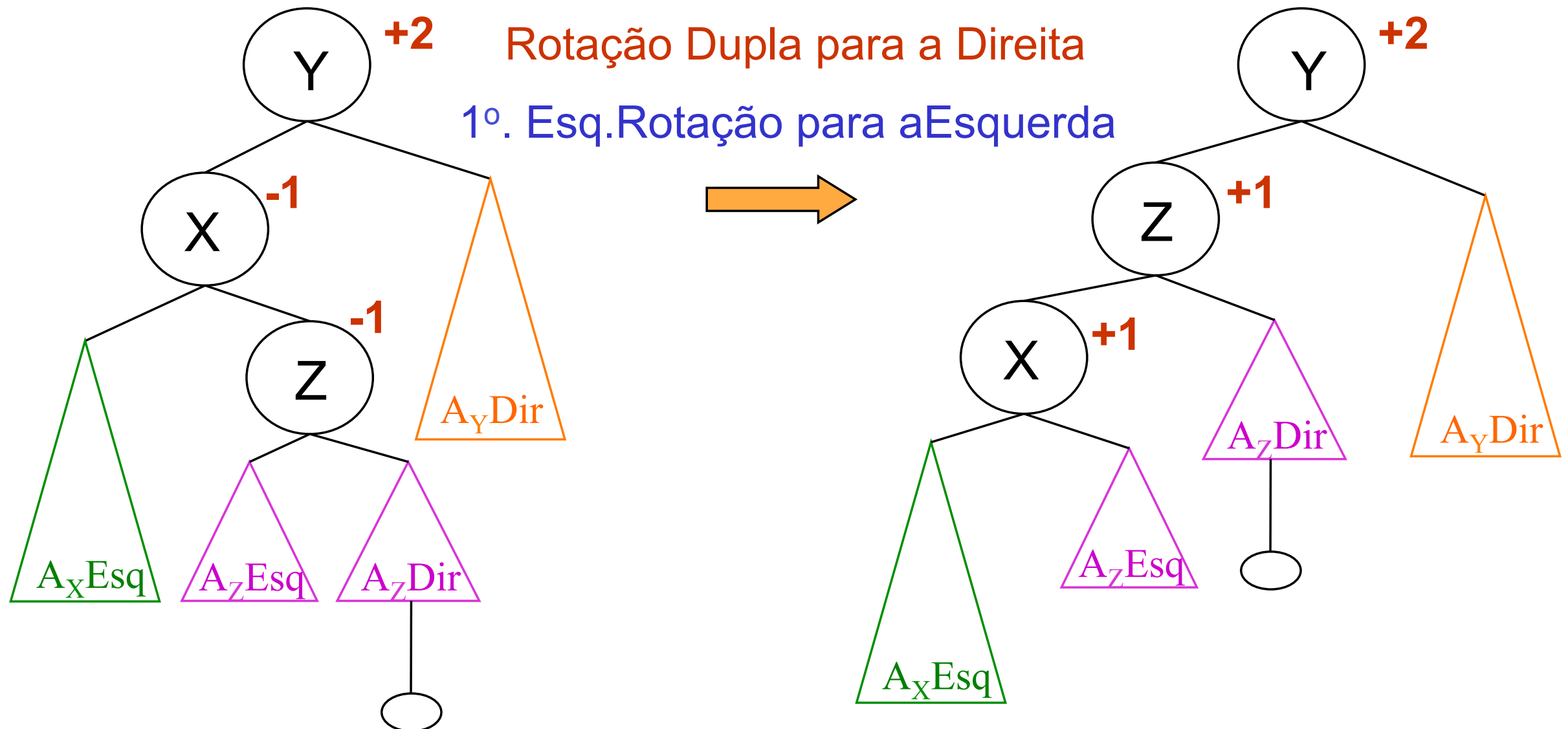
**Inserindo: 1 e 2**



# Exemplo

## Rotação Dupla

Inserindo: 1 e 2



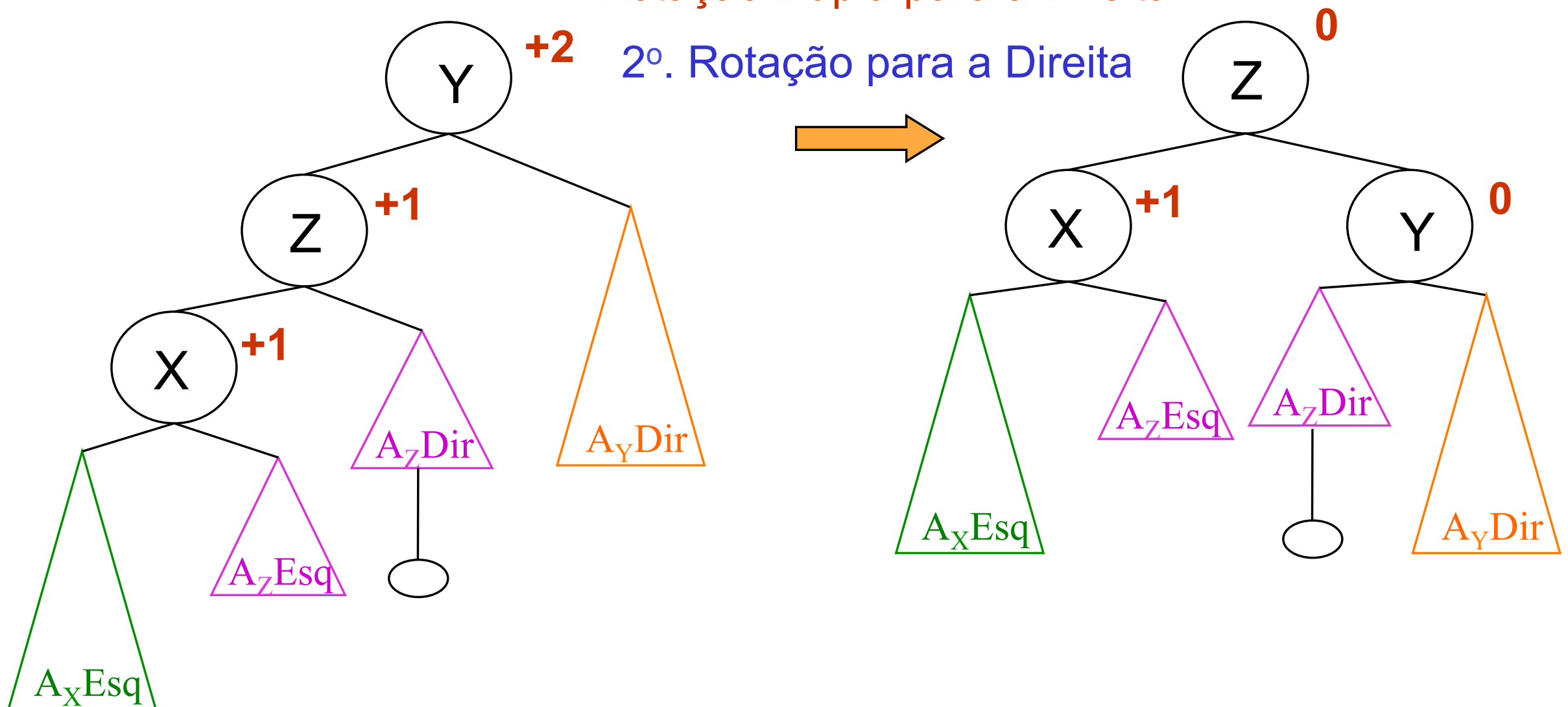
# Exemplo

## Rotação Dupla

Inserindo: 1 e 2

Rotação Dupla para a Direita

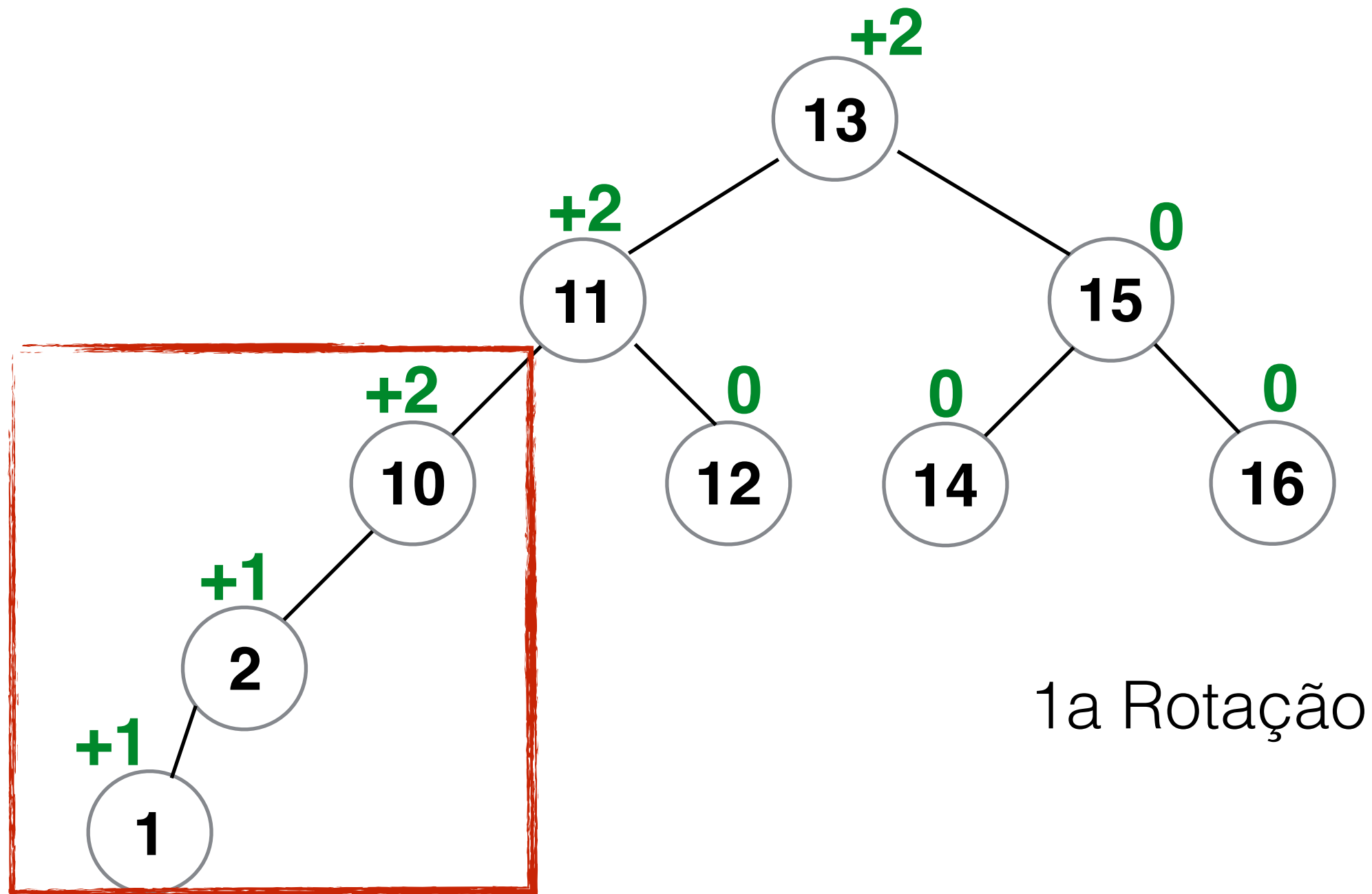
2º. Rotação para a Direita



# Exemplo

## Rotação Dupla

**Inserindo: 1 e 2**

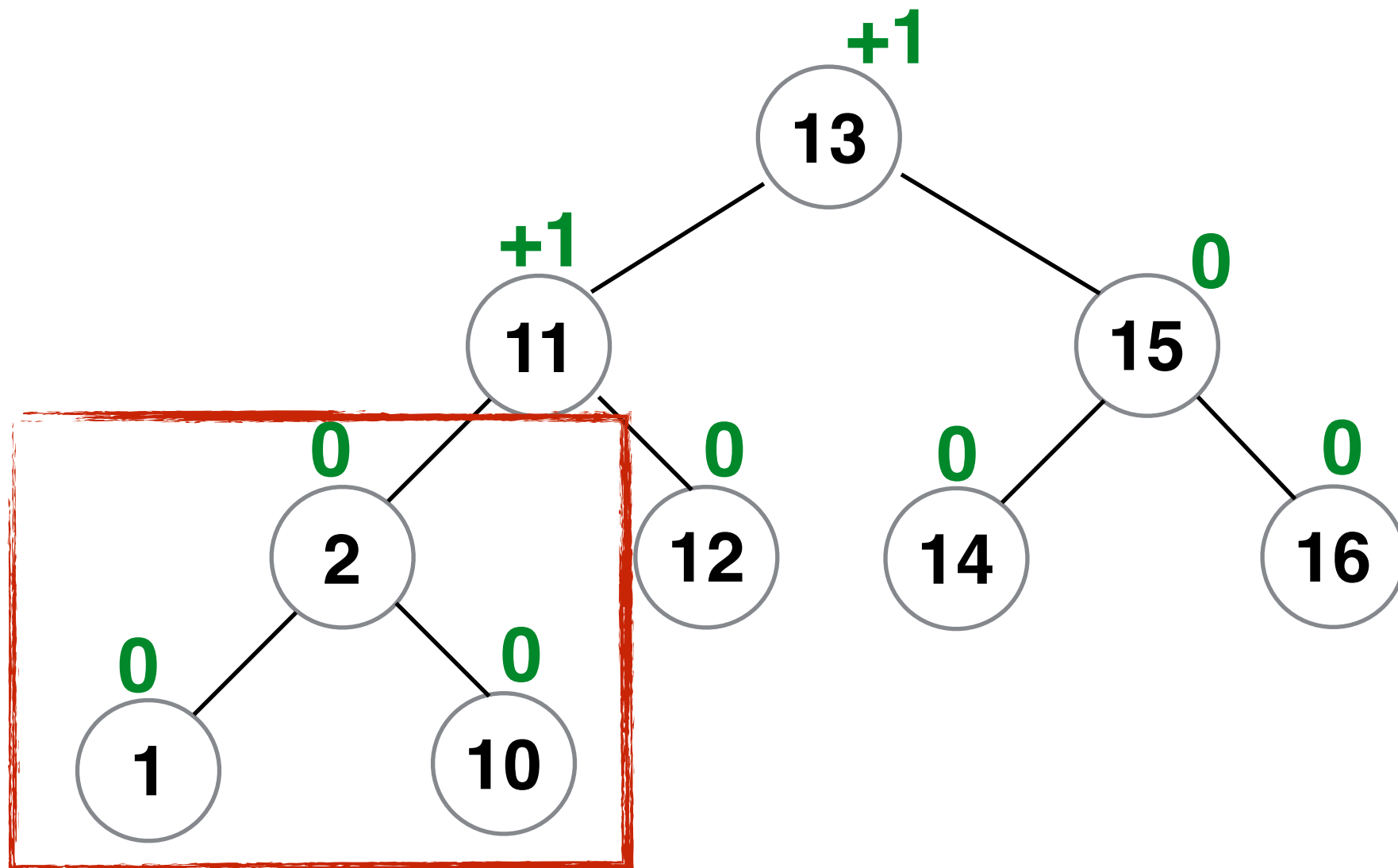




# Exemplo

## Rotação Dupla

**Inserindo: 1 e 2**

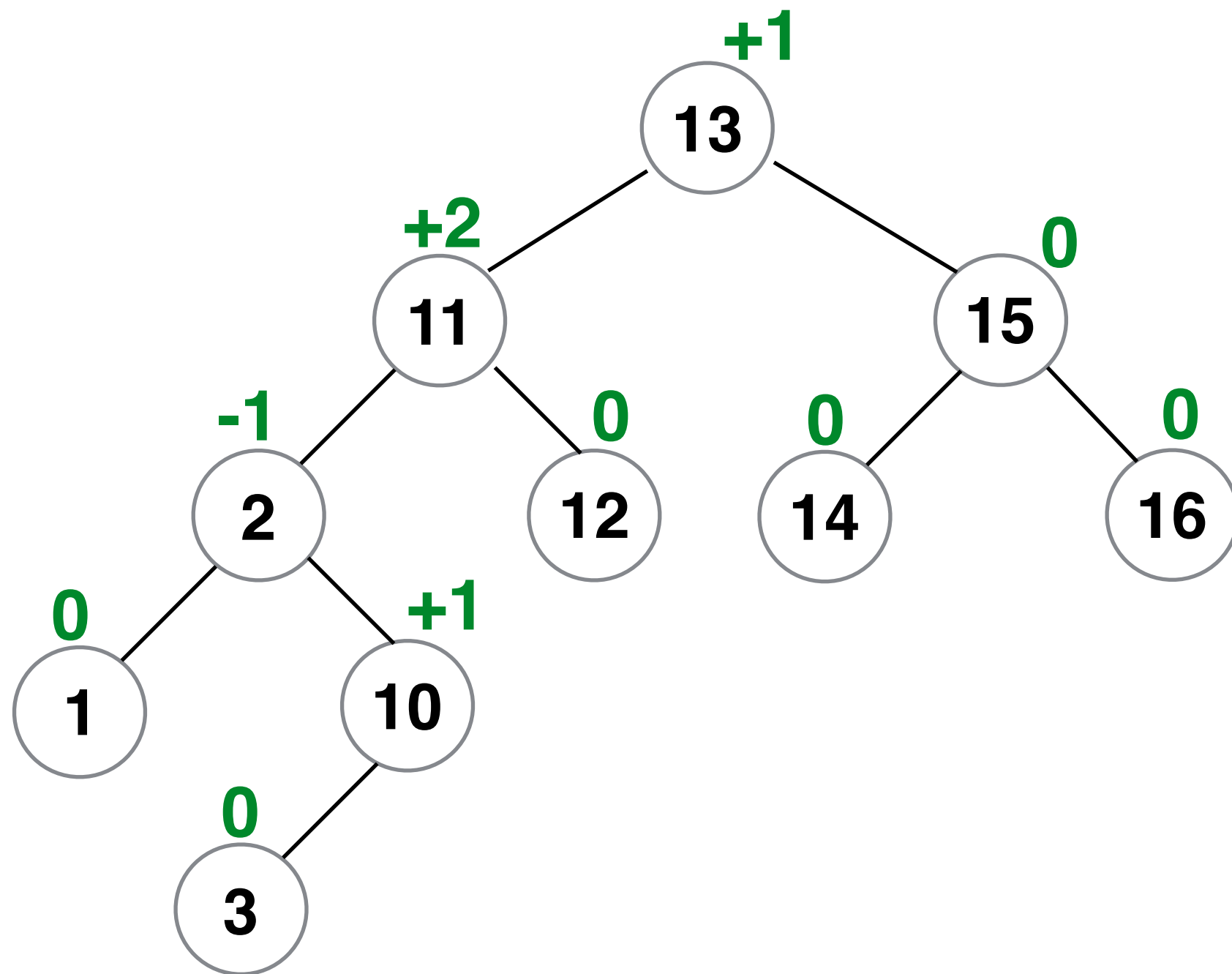


2a Rotação

# Exemplo

## Rotação Dupla

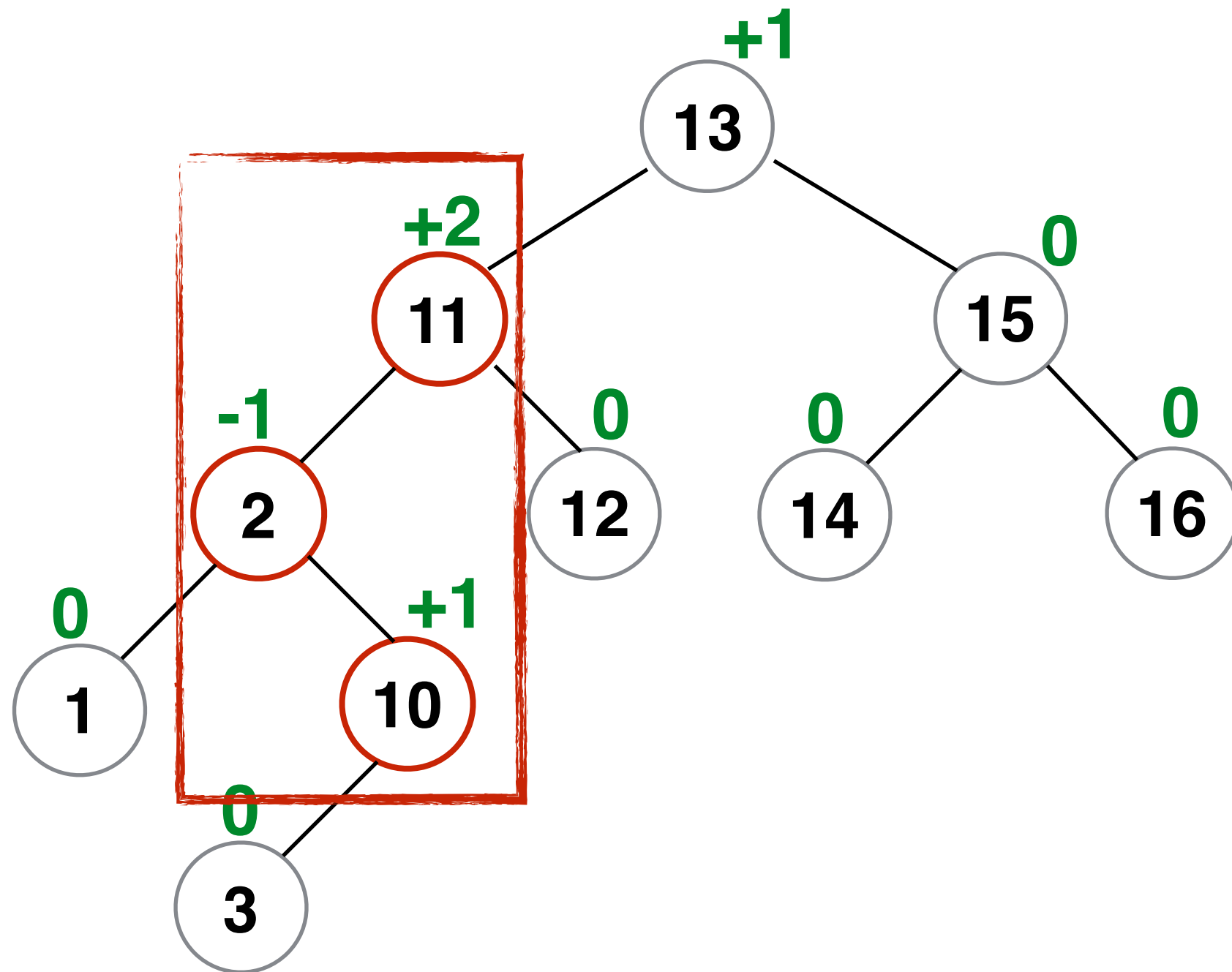
**Inserindo: 3**



# Exemplo

## Rotação Dupla

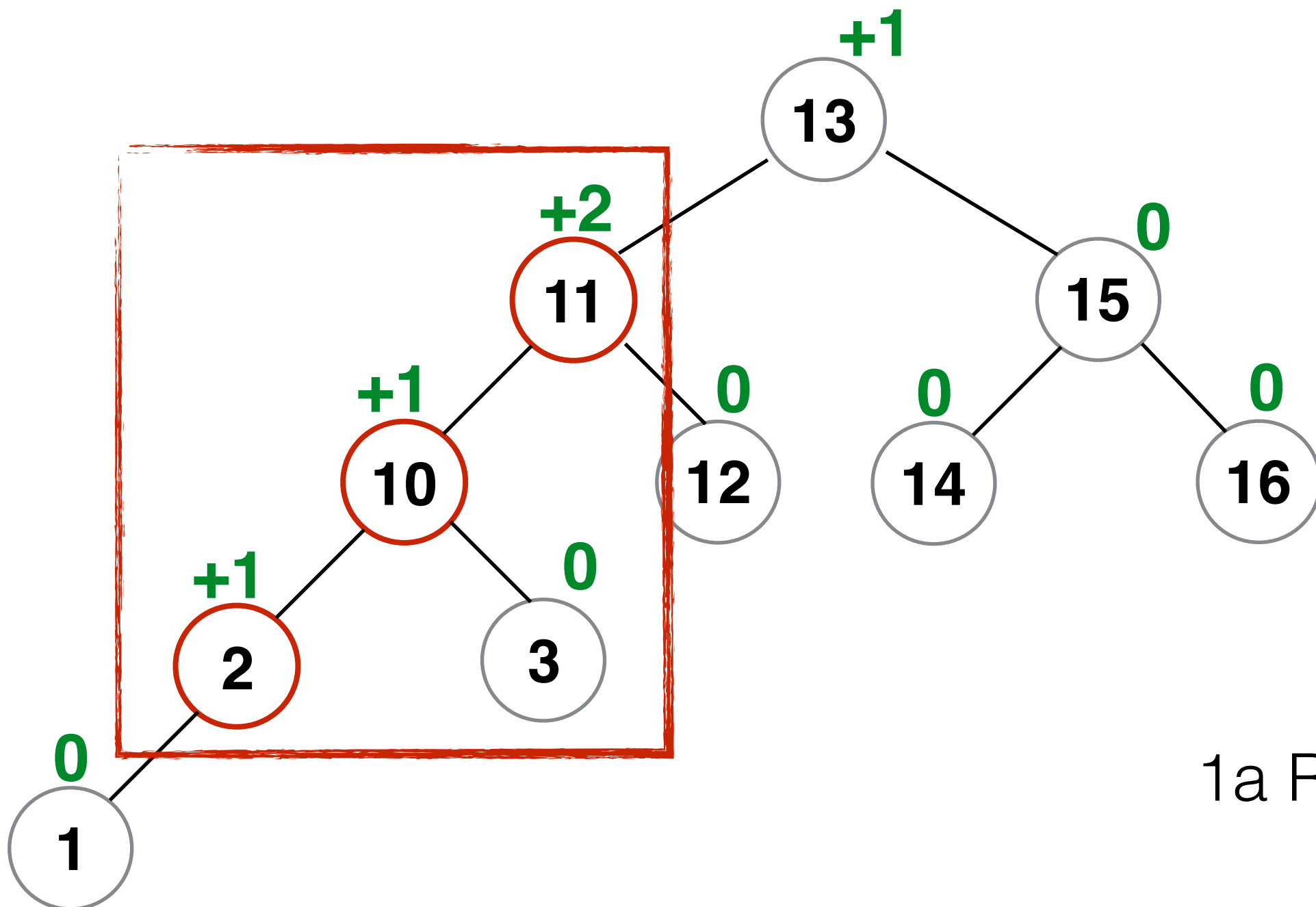
**Inserindo: 3**



# Exemplo

## Rotação Dupla

**Inserindo: 3**

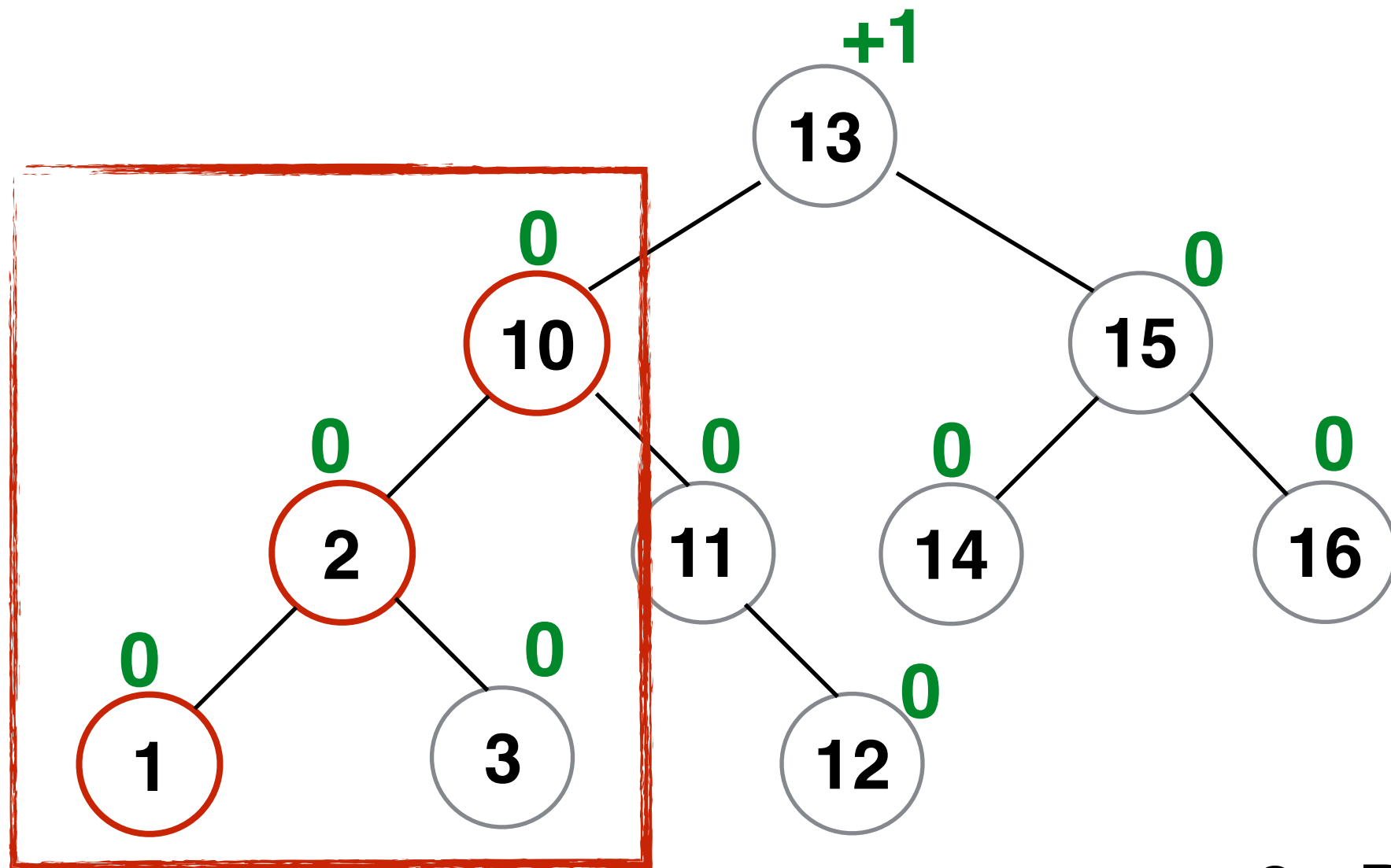


1a Rotação

# Exemplo

## Rotação Dupla

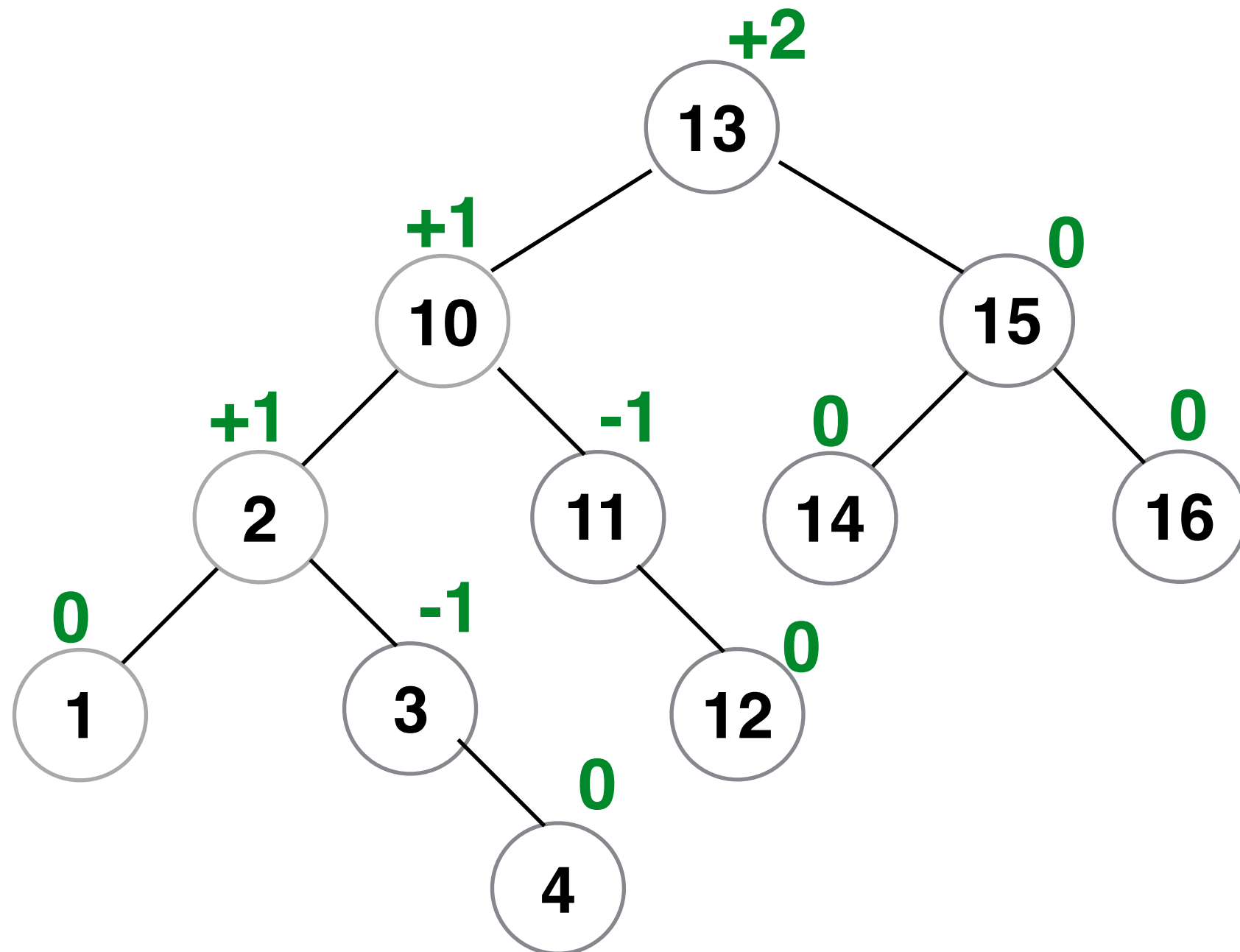
**Inserindo: 3**



2a Rotação

# Exemplo

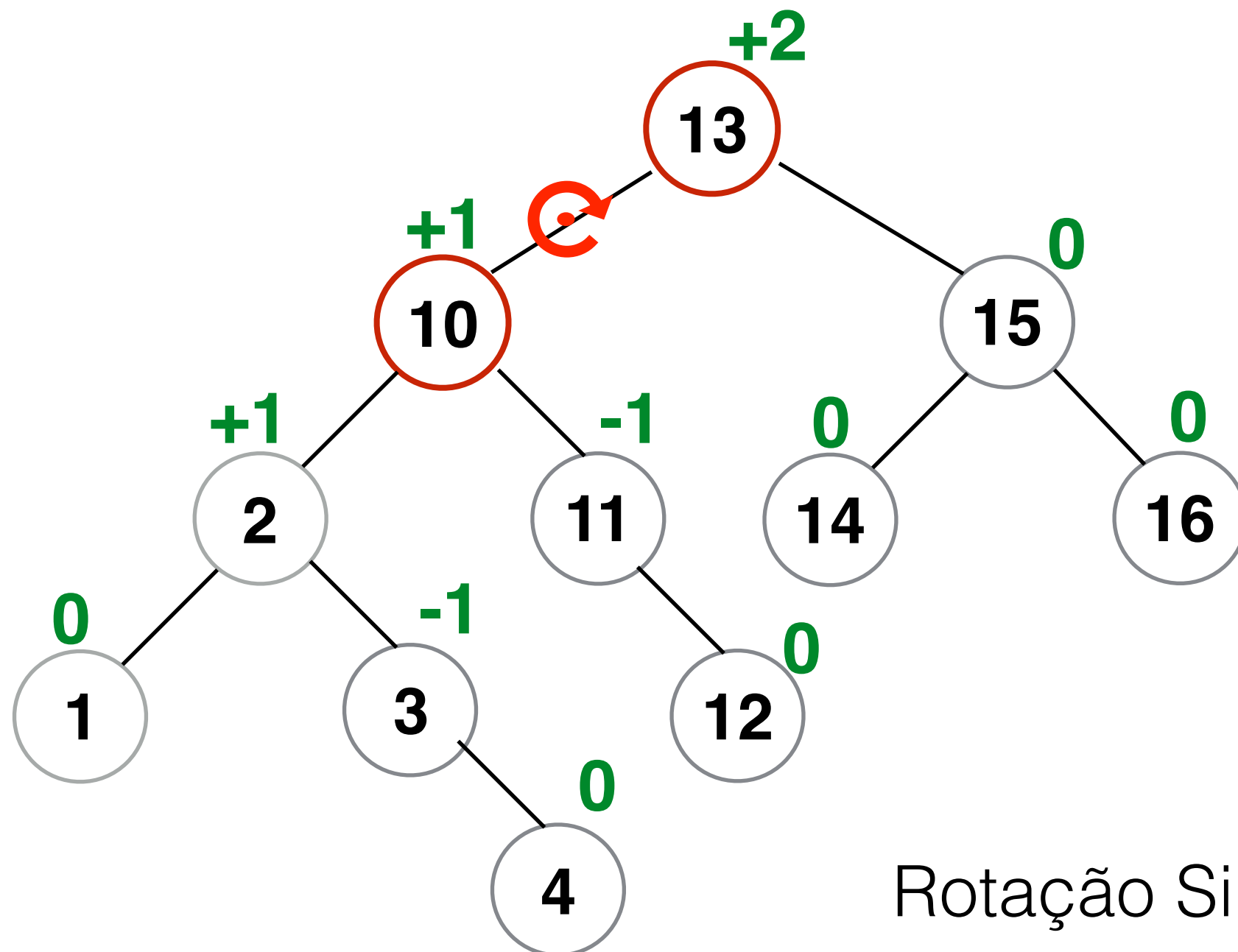
**Inserindo: 4**



# Exemplo

## Rotação Simples

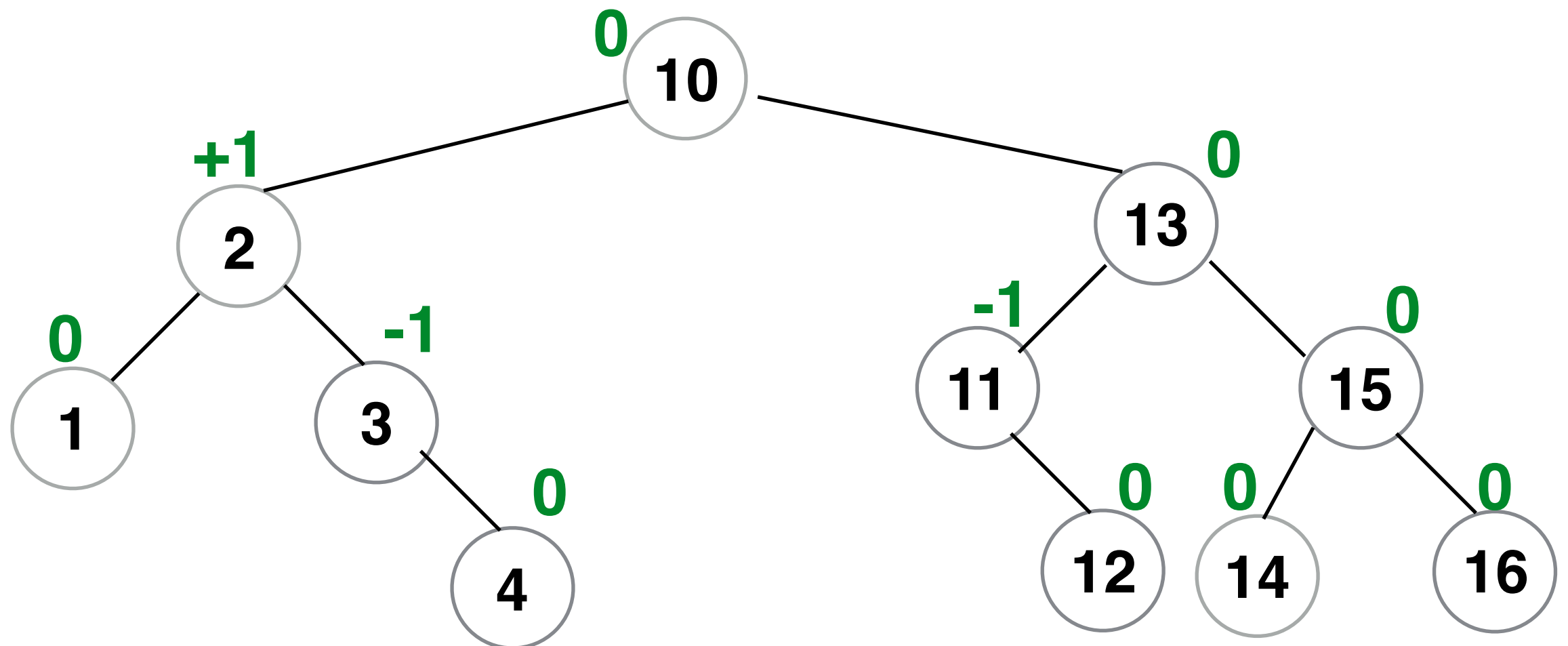
**Inserindo: 4**



# Exemplo

## Rotação Simples

**Inserindo: 4**

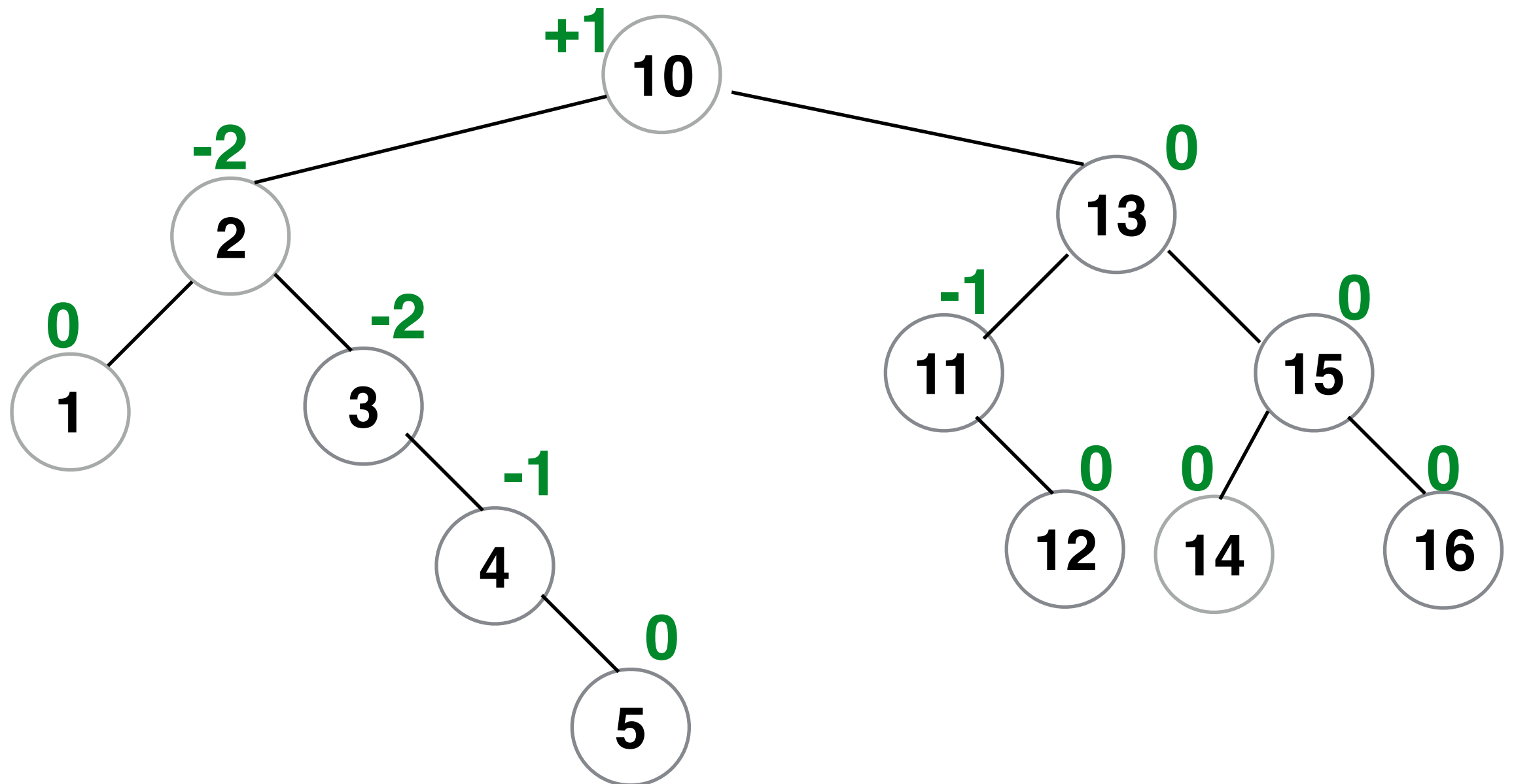


**Rotação Simples à direita**



# Exemplo

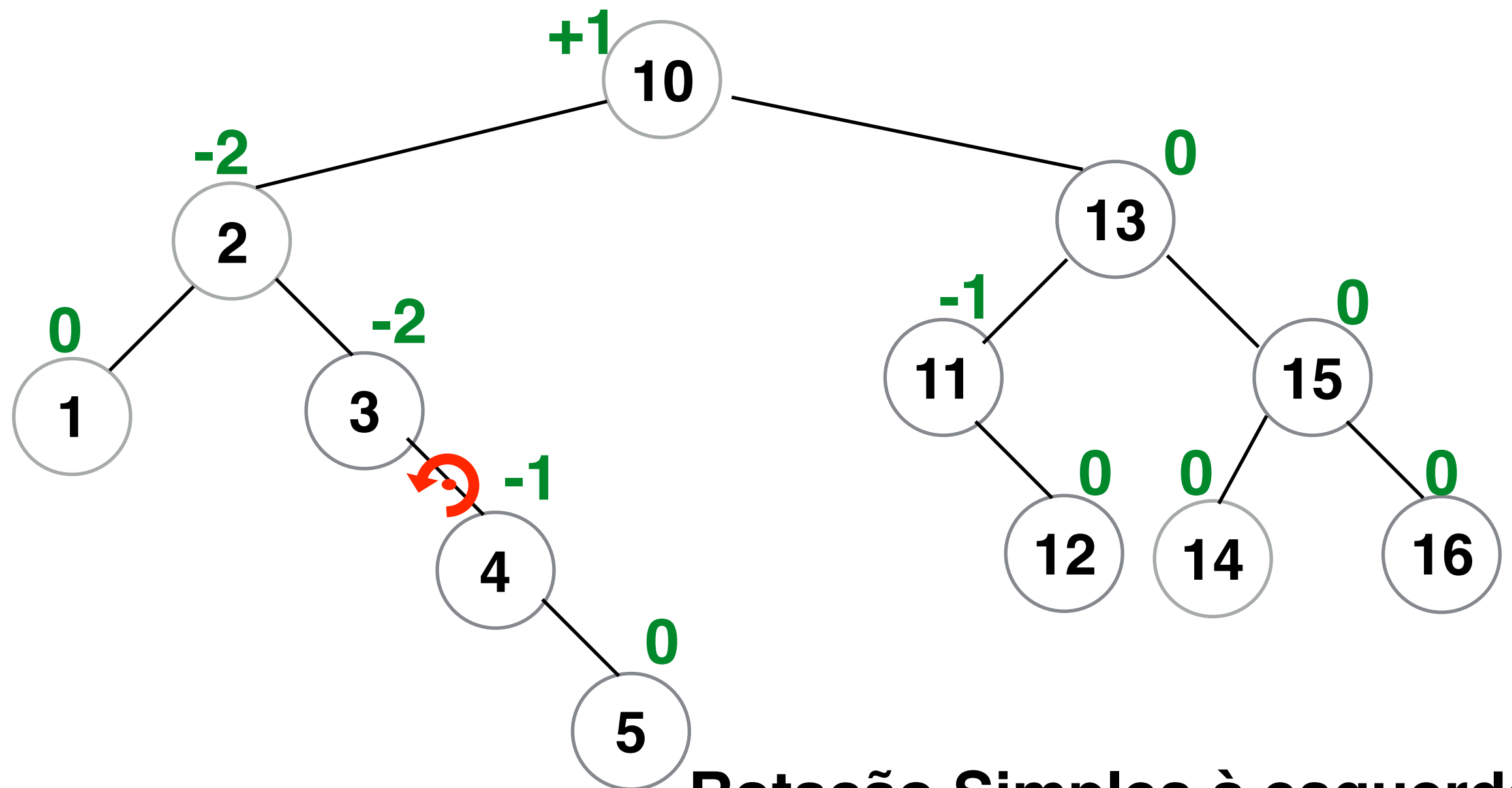
**Inserindo: 5**



# Exemplo

## Rotação simples

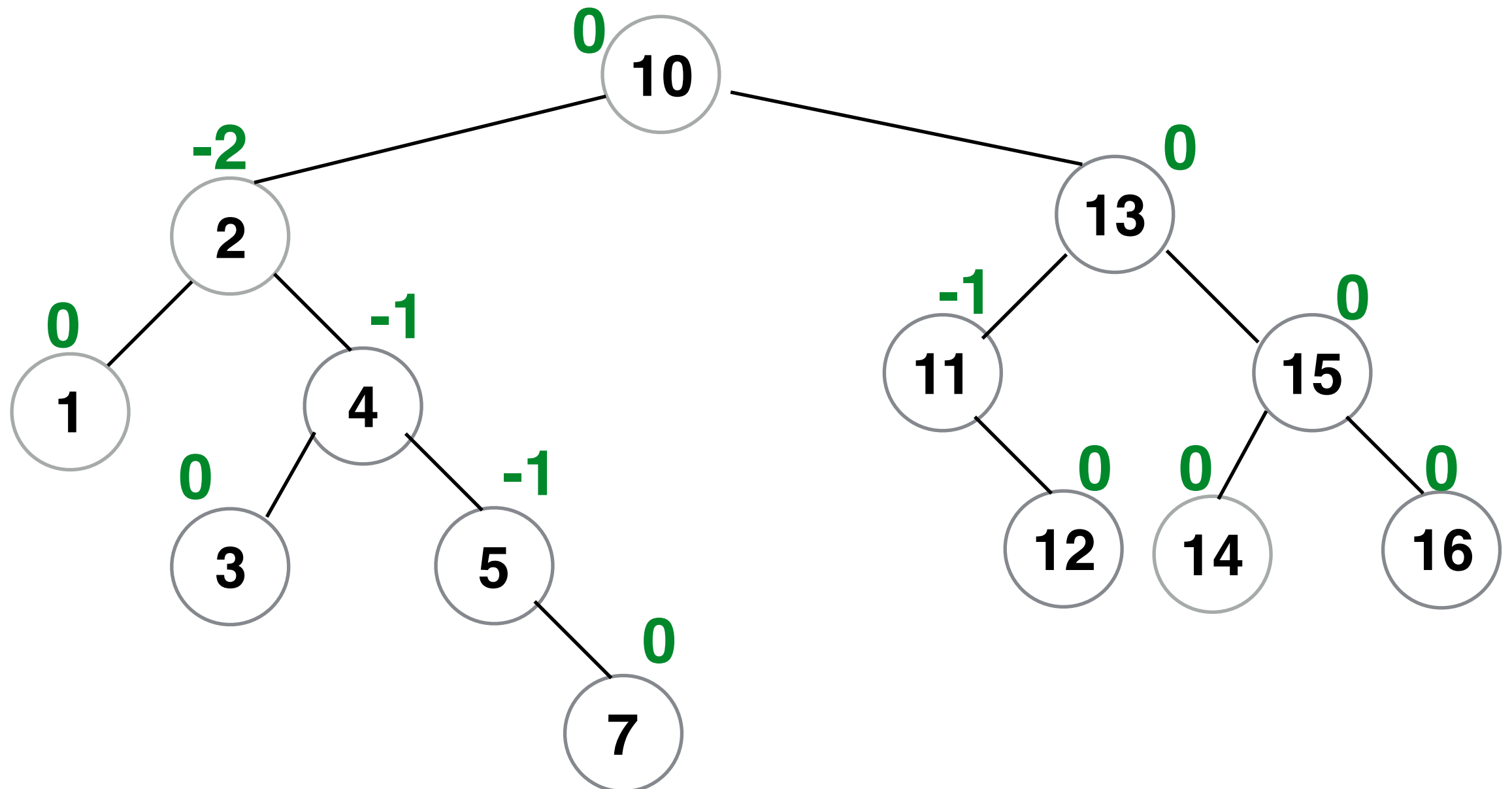
**Inserindo: 5**



**Rotação Simples à esquerda**

# Exemplo

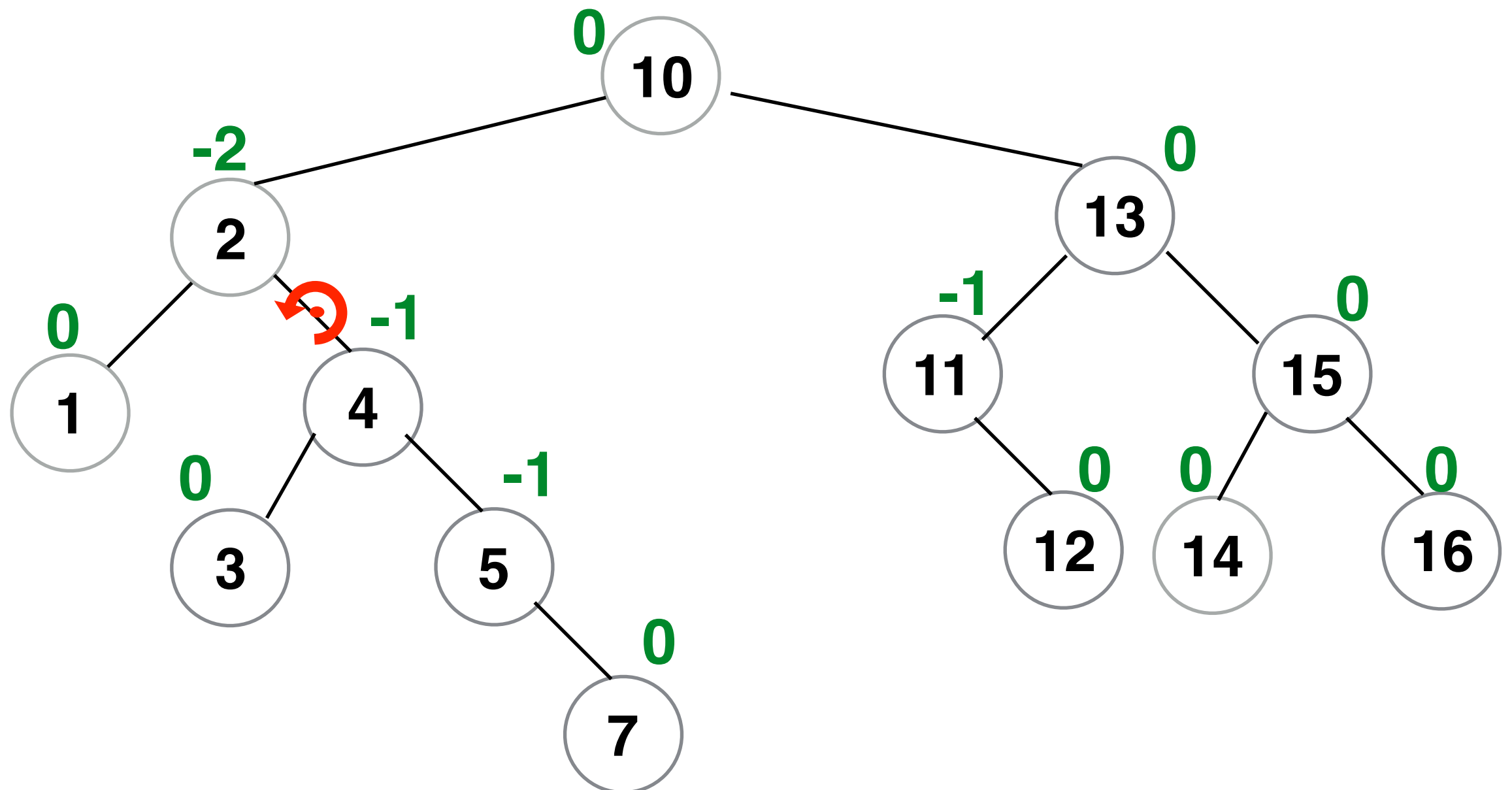
**Inserindo: 7**



# Exemplo

## Rotação Simples

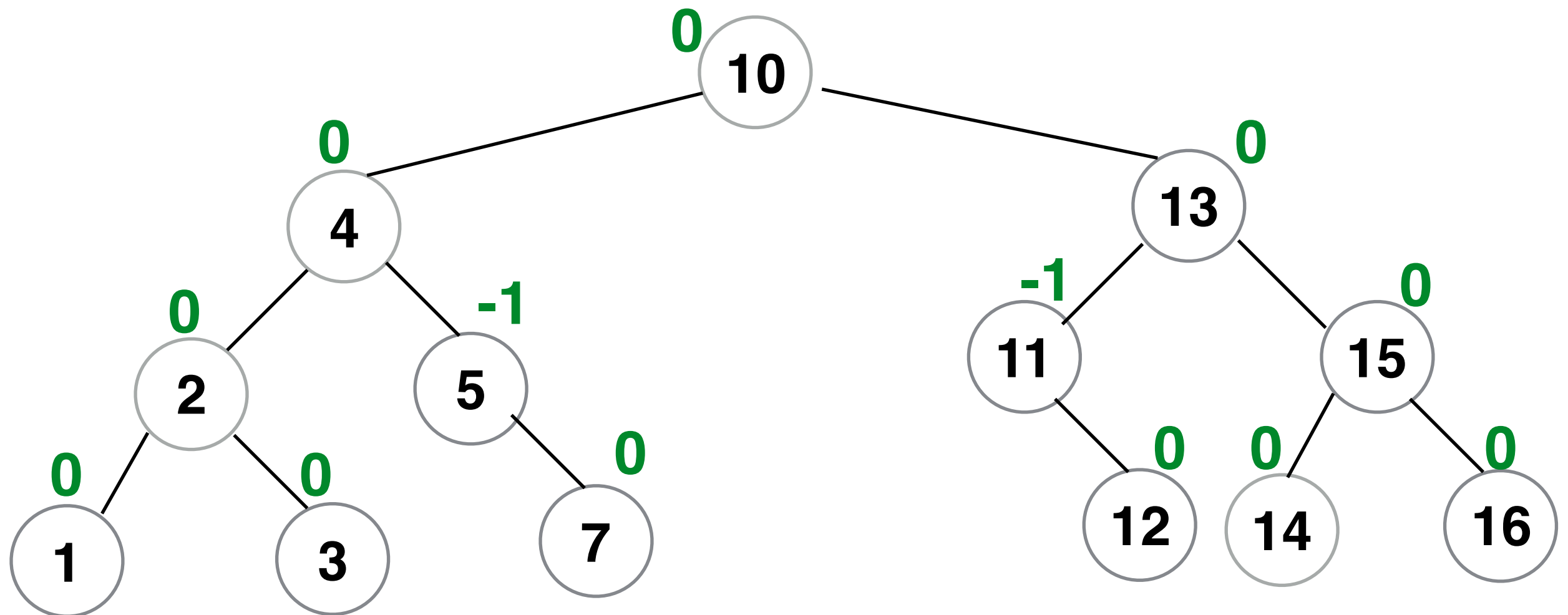
**Inserindo: 7**



# Exemplo

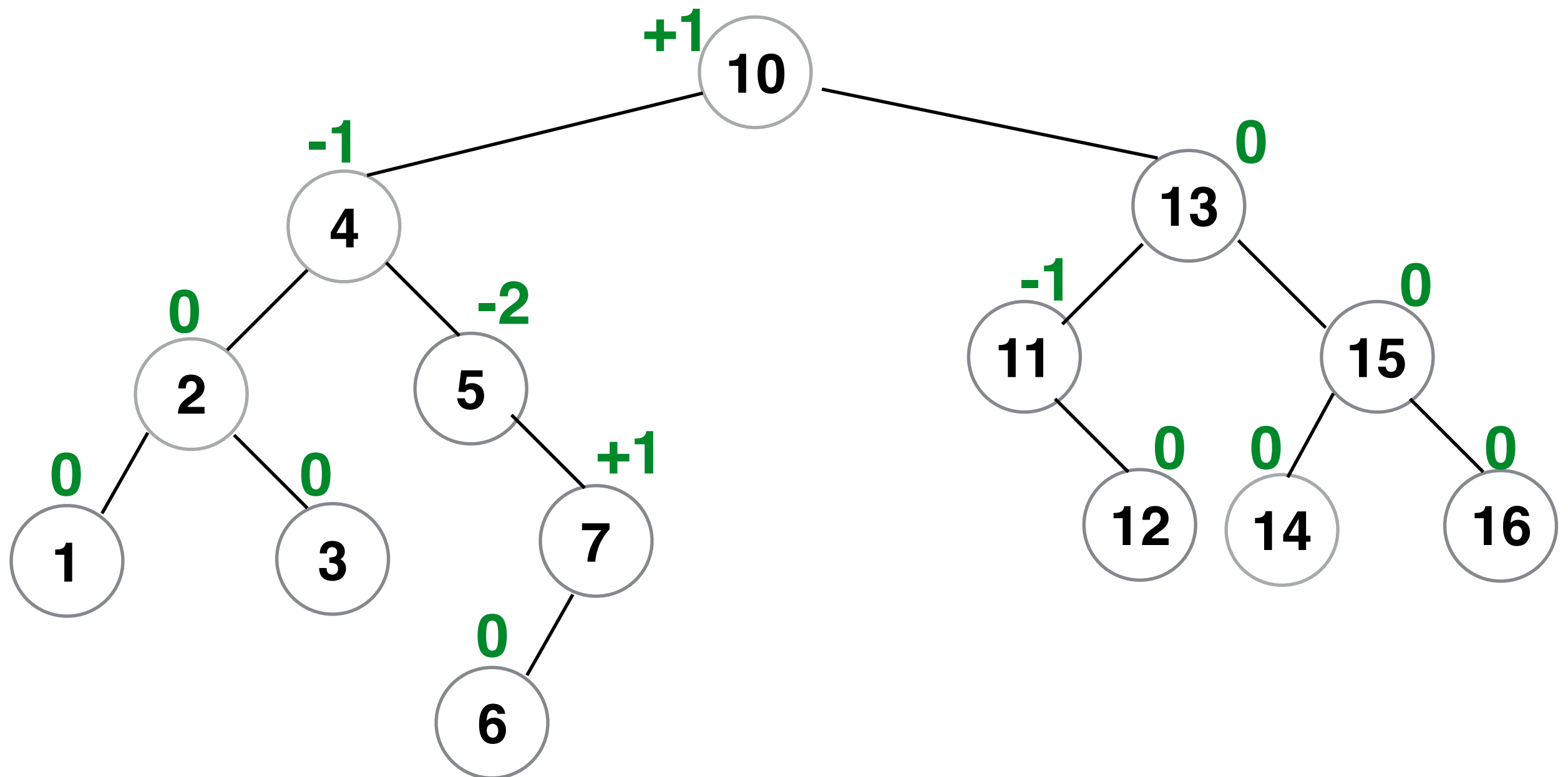
## Rotação Simples

**Inserindo: 7**



# Exemplo

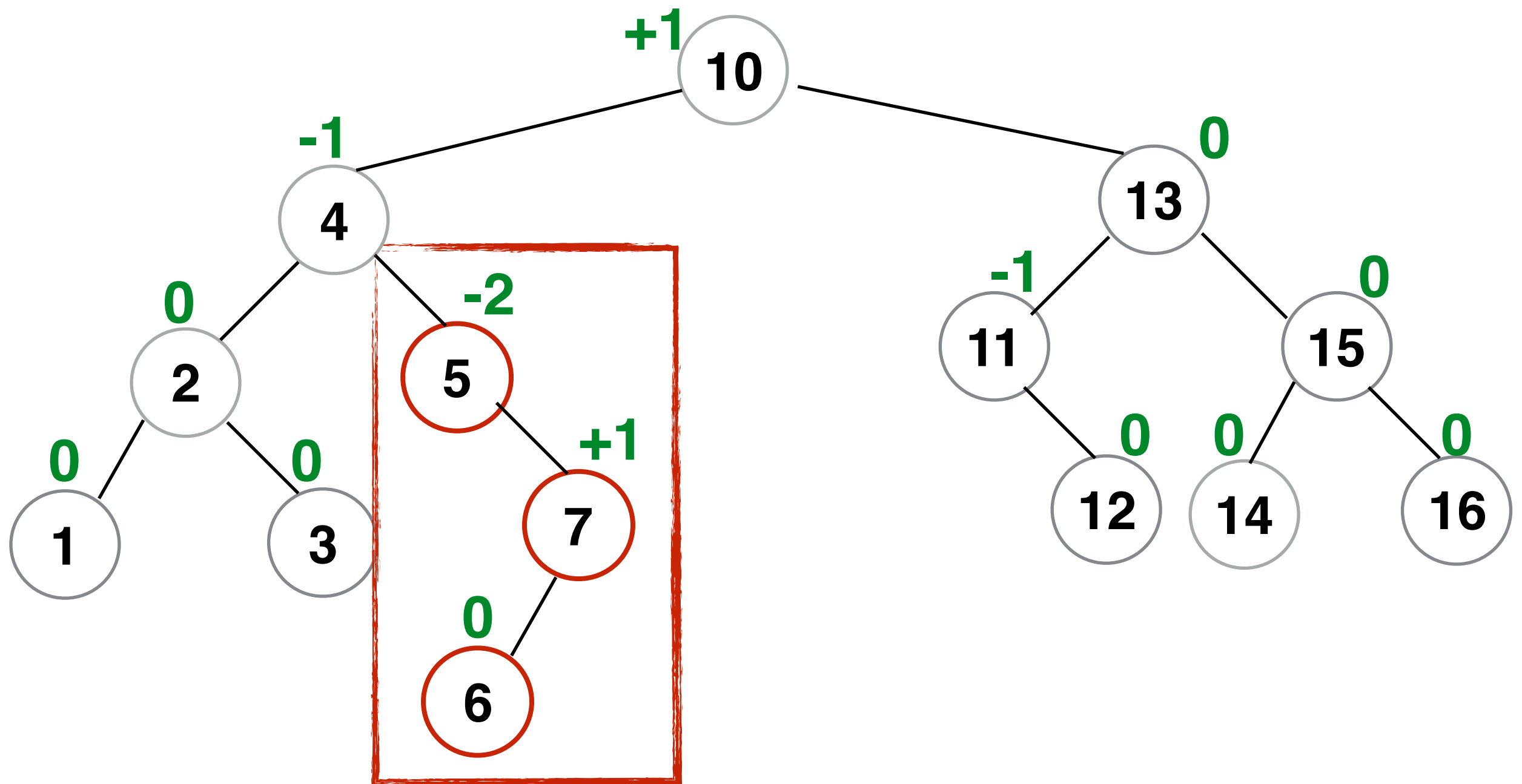
**Inserindo: 6**



# Exemplo

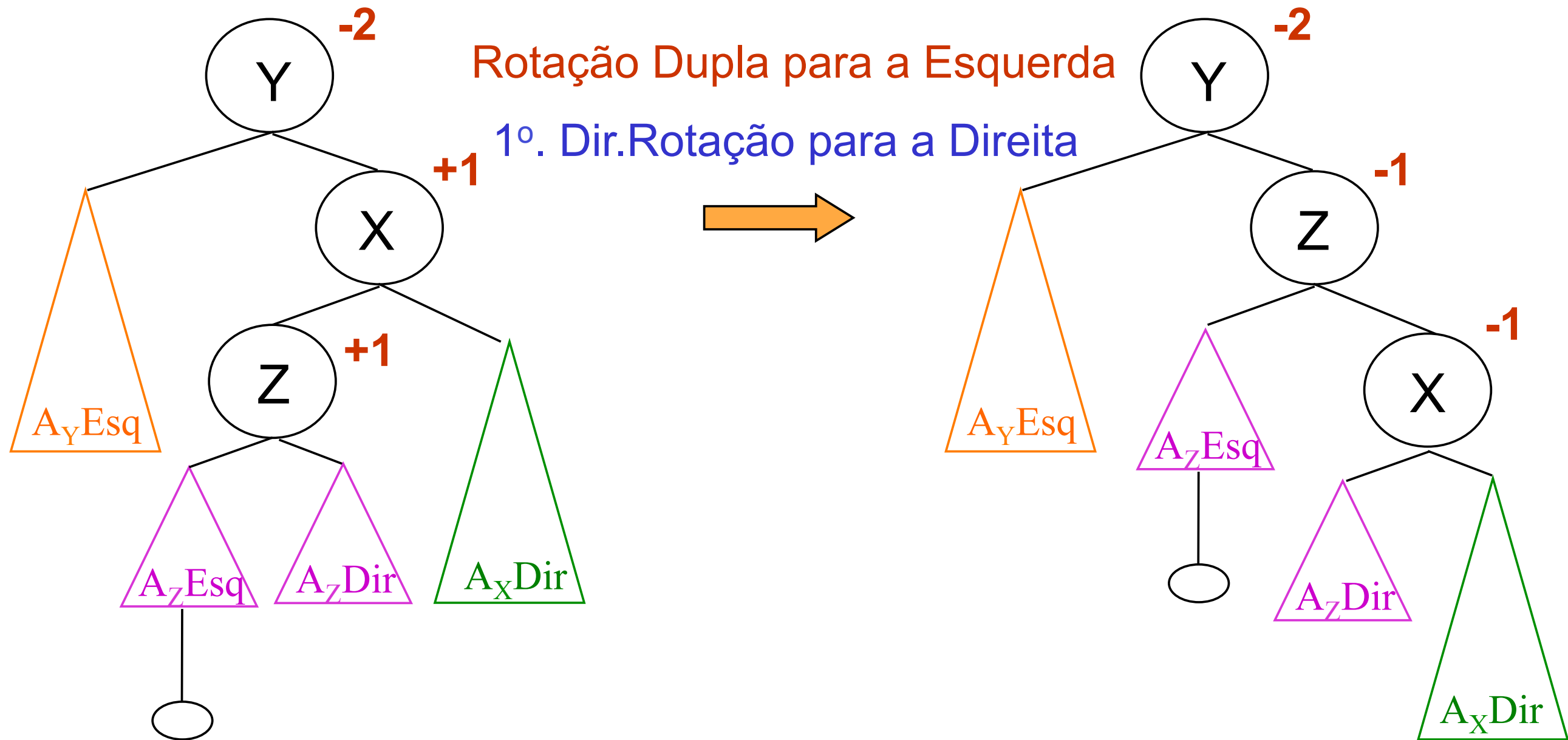
## Rotação Dupla

**Inserindo: 6**



# Exemplo

## Rotação Dupla



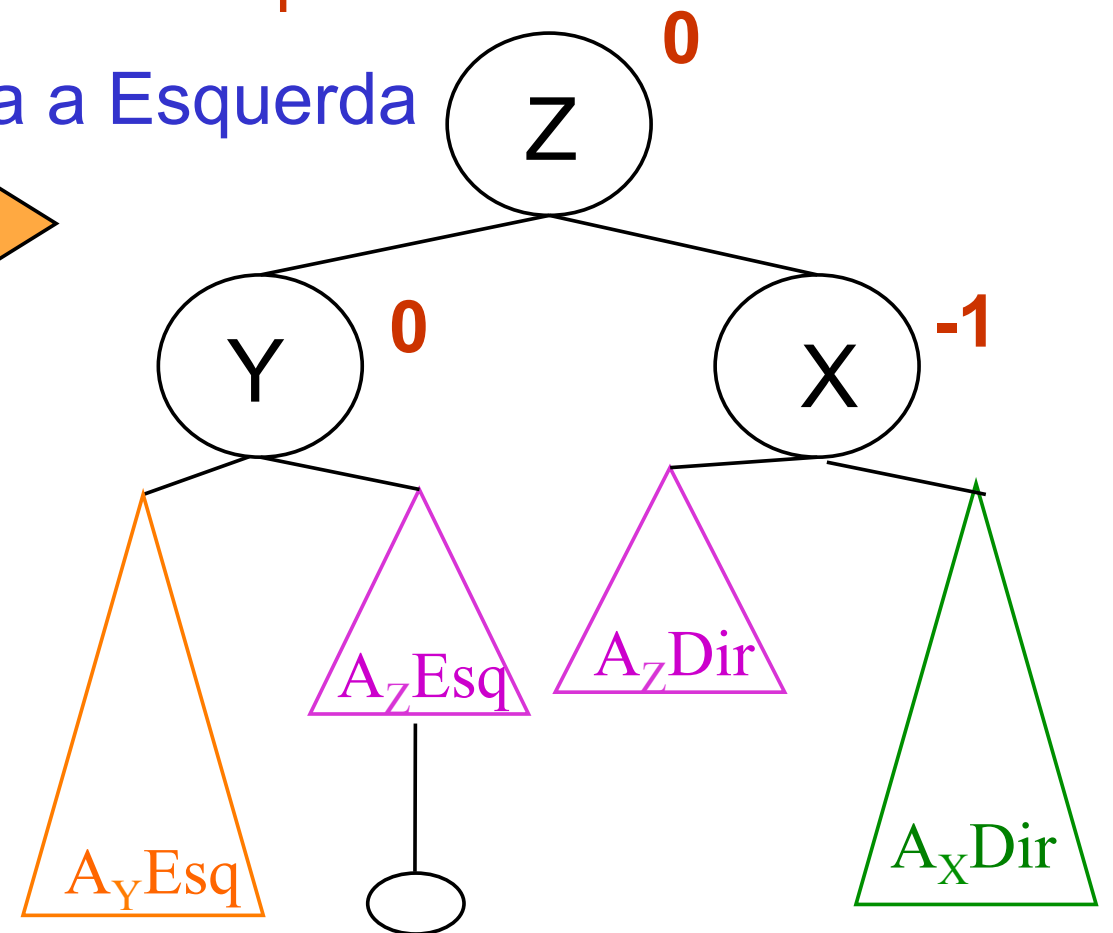
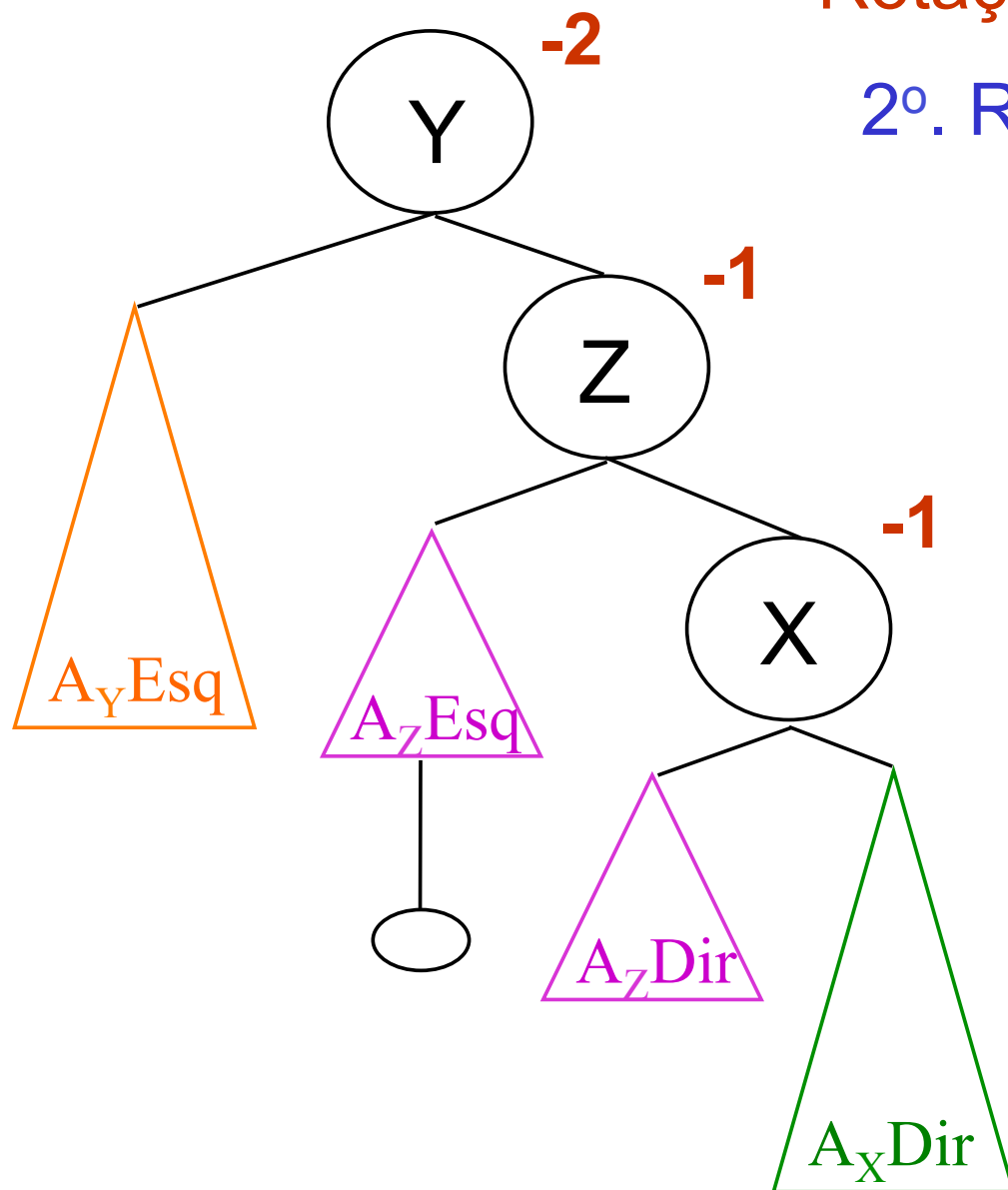


# Exemplo

## Rotação Dupla

Rotação Dupla para a Esquerda

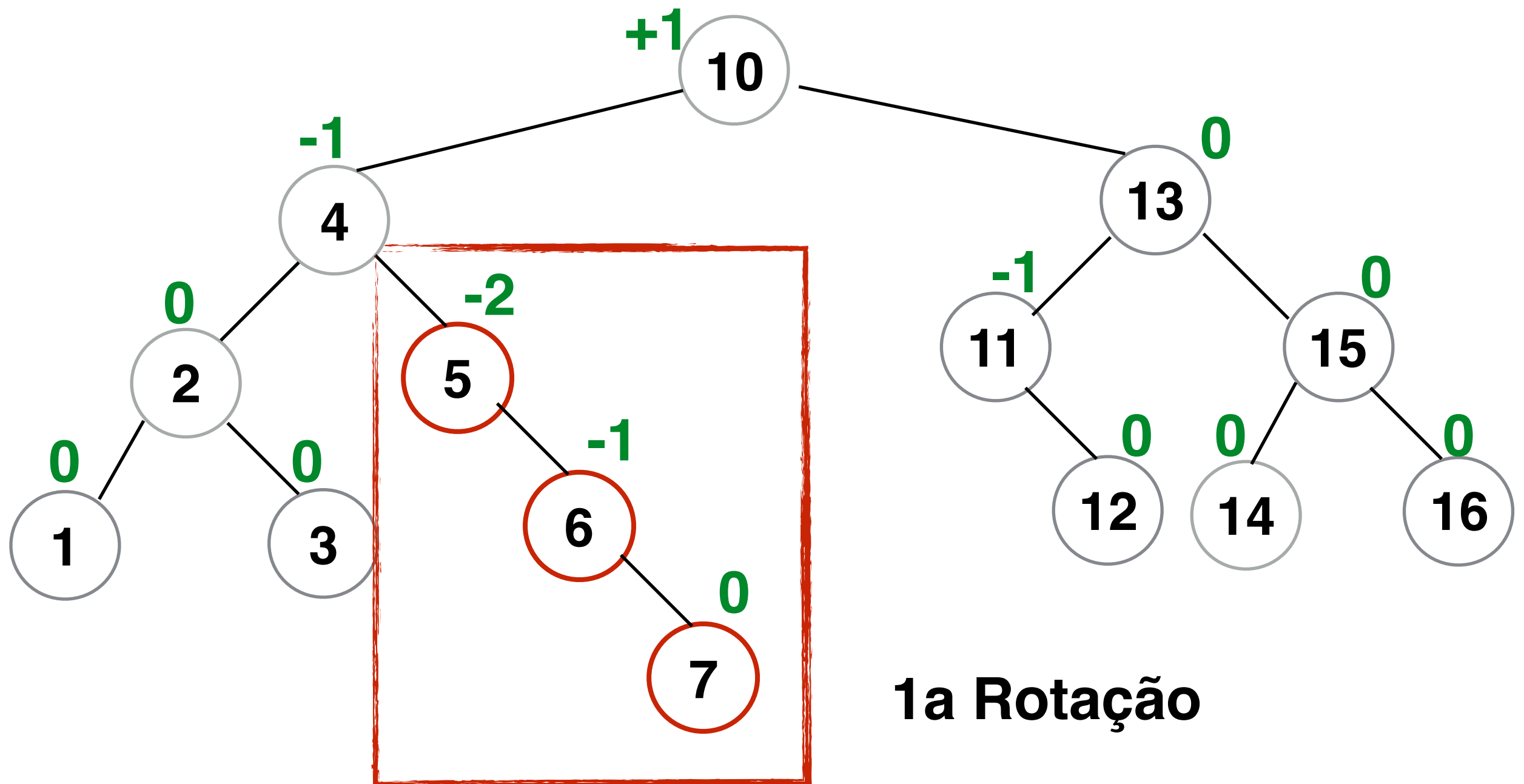
2º. Rotação para a Esquerda



# Exemplo

## Rotação Dupla

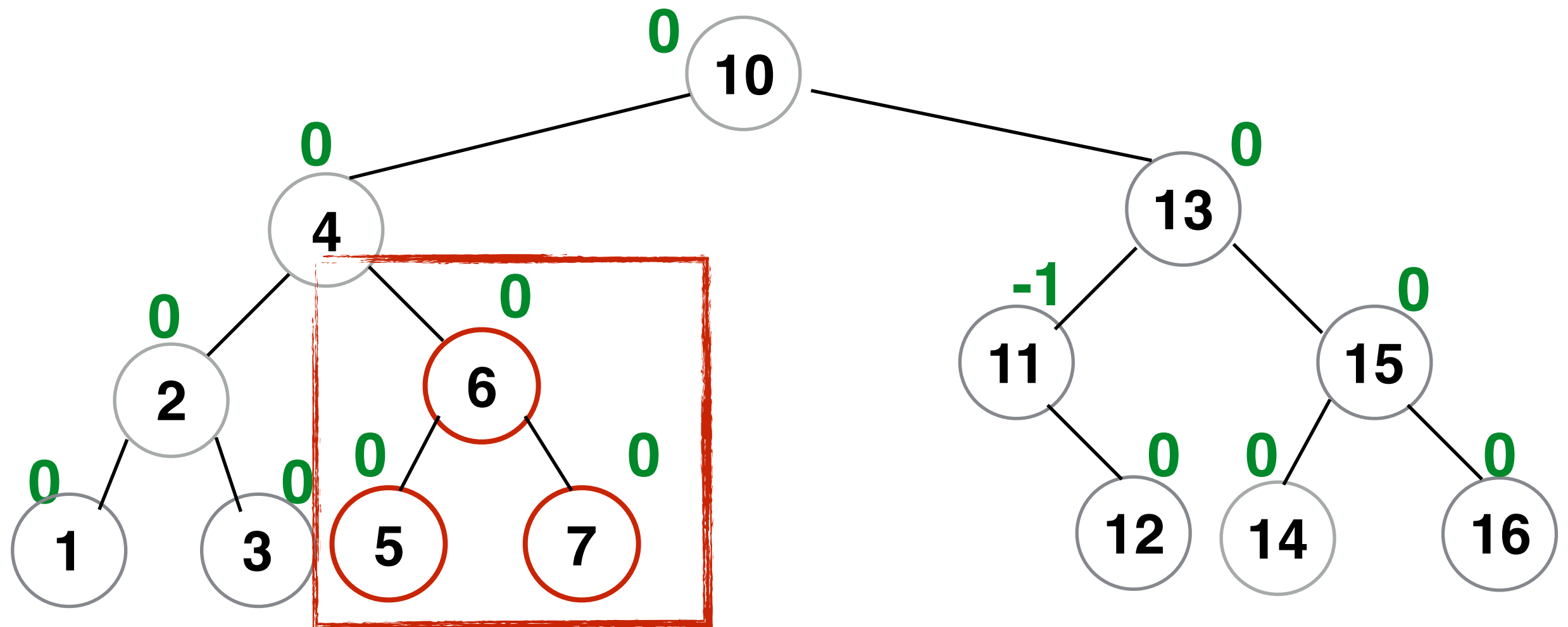
**Inserindo: 6**



# Exemplo

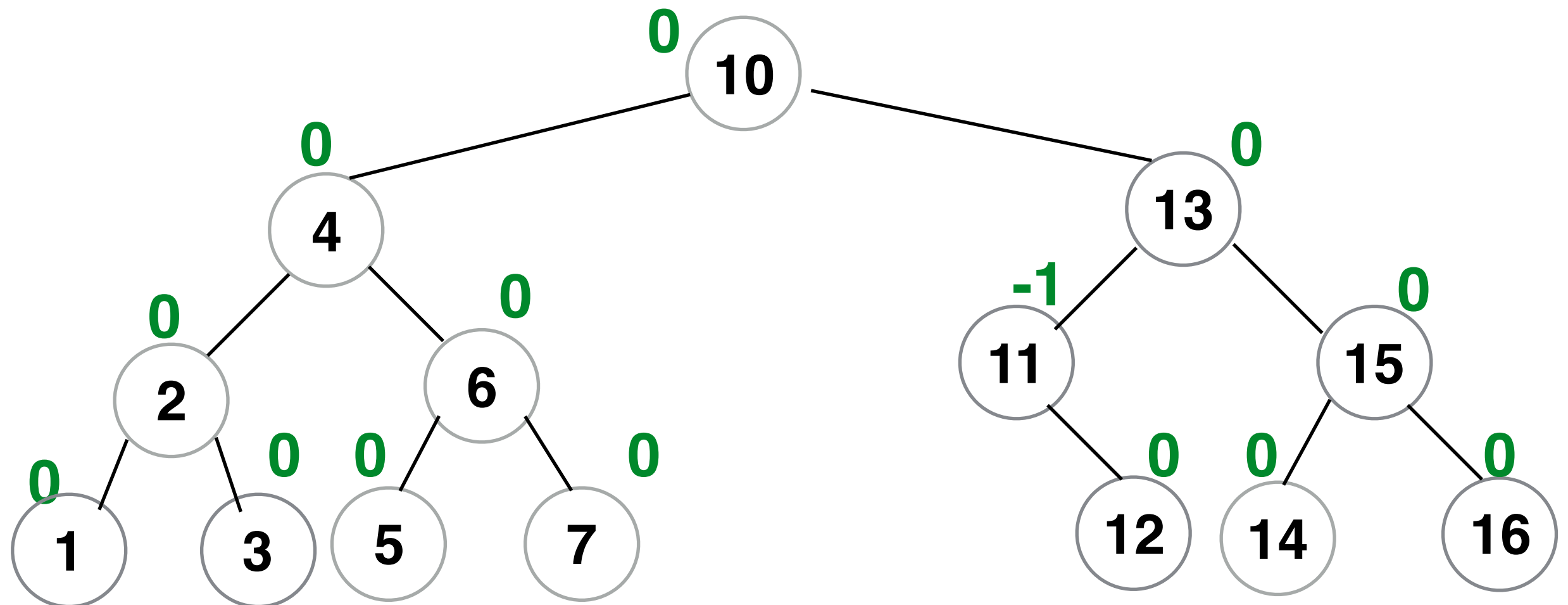
## Rotação Dupla

**Inserindo: 6**



**2a Rotação**

# Exemplo



# Balanceamento

l <sub>he</sub> - h <sub>dl</sub> Nó desbalanceado	l <sub>he</sub> - h <sub>dl</sub> Nó filho do nó desbalanceado	Tipo de Rotação
-2	-1	Simples à esquerda
	0	Simples à esquerda
	+1	Dupla com à direita e pai à esquerda
+2	-1	Dupla com à esquerda e pai à direita
	0	Simples à direita
	+1	Simples à direita

# Referências

ASCENCIO, A. F. G; ARAÚJO, G. S. **Estruturas de Dados: algoritmos, análise da complexidade e implementações em JAVA e C/C++**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

SZWARCFITER, J. L.; MARKENZON, L. **Estruturas de Dados e seus Algoritmos**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1994.