Integral: mudança de variável

Profª Tânia Camila Kochmanscky Goulart

MUDANÇA DE VARIÁVEL

Nem sempre temos pela frente o cálculo de uma integral de uma função elementar, mas de uma composição delas. Por exemplo

$$\int sen^2 x \cos x \, dx$$

Entretanto, fazendo algumas transformações, por mudança de variável, podemos chegar a expressões com funções elementares. No exemplo, se olharmos com cuidado, vemos que :

$$\cos x dx = d(senx)$$

Podemos então fazer a transformação

$$u = senx$$

$$entao$$

$$du = \cos dx$$

A integral torna-se:

$$\int u^2 \, du = \frac{u^3}{3} = sen^3 x + C$$

O princípio desta técnica se apóia nas propriedade da derivada que vimos anteriormente. Dada a integral da função f(x), podemos imaginar x como uma função de outra variável t.

$$x = \varphi(t)$$
$$dx = \varphi'(t)dt$$

Então

$$\int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt$$

Para mostrar, derivemos o membro esquerdo em relação a x

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Derivemos o direito em relação a x, lembrando que temos uma função de t:

$$\left(\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt\right)'_x = \left(\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt\right)'_t \frac{dt}{dx}$$

Mas

$$\left(\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt\right)'_t = f[(t)]\varphi'(t)$$

$$e$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}$$

Então

$$\left(\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt\right)'_x = \left(\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt\right)'_t \frac{dt}{dx} = f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(x)$$

Que é o resultado encontrado antes.

Exemplo

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx$$

$$t = 1 + x^2$$

$$dt = 2xdx$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\ln t = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Exemplo

$$\int \frac{senx}{\cos x}dx$$

$$t = cox$$

$$dt = -senxdx$$

$$\int \frac{senx}{\cos x}dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln t = -\ln(\cos x) + C$$

Exemplo

$$\int e^{5x}\,dx$$

$$t = 5x$$

$$dt = 5dx$$

$$\int e^{5x}\,dx = \int e^{t}\,\frac{dt}{5} = \frac{1}{5}e^{t} = \frac{1}{5}e^{5x} + C$$