Exercícios resolvidos – Integrais indefinidas: mudança de variável

Mudança de variável: Se f é uma função que se apresenta na forma $f(x) = g(u(x))u'(x)$, ou seja, se na expressão de f aparecer uma função e sua derivada, então a sua integral em relação a x pode ser calculada do seguinte modo: $\int f(x)\,dx = \int g(u(x))u'(x)\,dx = \int g(u)\,du$, onde $du = u'(x)dx$.

Este método de integração é chamado de mudança de variável, no qual mudamos a variável x para u, calculamos a integral em relação a u e depois retornamos a resposta para x.

Exemplos:

1) Calcule as integrais abaixo:

a) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

Seja $u(x) = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx$. Substituindo no integrando, temos:

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln(x^2+1) + C$$, já que $x^2 + 1 > 0$ para todo x.

b) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

Seja $u(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}dx$. Substituindo no integrando, temos:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

c) $\int \frac{e^t\,dt}{\cos^2(e^t - 2)}$

Seja $u(t) = e^t - 2 \Rightarrow du = e^t\,dt$. Substituindo no integrando, temos:

$$\int \frac{e^t\,dt}{\cos^2(e^t-2)} = \int \frac{du}{\cos^2 u} = \int \sec^2 u\,du = tg\,(u) + C = tg(e^t) + C.$$

d) $\int x^4 \cos(x^5)\,dx$

Seja $u(x) = x^5 \Rightarrow du = 5x^4\,dx \Rightarrow x^4\,dx = \dfrac{du}{5}$. Substituindo no integrando, temos:

$$\int x^4 \cos(x^5)\,dx = \int \frac{\cos u\,du}{5} = \frac{1}{5}\int \cos u\,du = \frac{1}{5}\,sen\,u + C = \frac{1}{5}\,sen\,(x^5) + C$$