Organização dos Modelos de Implementação

A Figura 2.27 revela a organização dos modelos implementação de reconhecedores e autômatos em relação aos capítulos do livro.

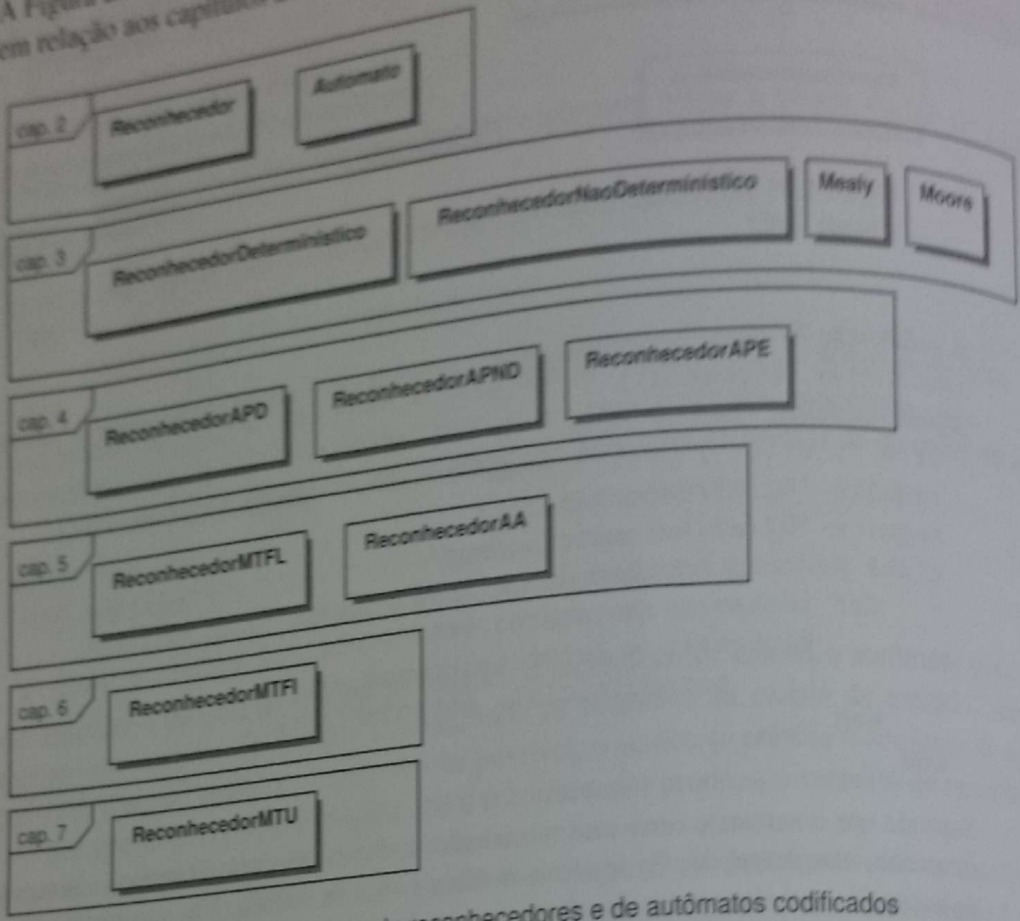

Figura 2.27 Categorias de reconhecedores e de autômatos codificados em Ruby (diagrama de classes UML)

Ensaios de exploração e algoritmos envolvendo gramáticas acompanham os capítulos, complementando os modelos destacados na Figura 2.27.

2.8 Exercícios

Símbolos e cadeias

1. Definir indutivamente as seguintes operações:
   a) Concatenação de cadeias de símbolos;
   b) Reversão de cadeias de símbolos;
   c) Decomposição de uma cadeia de símbolos em todas as suas subcadeias;
   d) Obtenção do conjunto de todas as subcadeias unitárias de uma dada cadeia de símbolos.

Linguagens

2. Defina o que você entende por linguagem. Cite três maneiras distintas através das quais se podem definir linguagens, mencionando as características, principais aplicações, vantagens e desvantagens de cada método.
3. O que significa definir formalmente uma linguagem? Apresente pelo menos dois motivos que justifiquem a importância de se definir linguagens formalmente.
4. O que significa dizer que uma linguagem é definida por enumeração? Por que as enumerações são pouco utilizadas na definição formal de linguagens? Que alternativas se apresentam para contornar a dificuldade no emprego das enumerações?
5. Conceitue e dê exemplos:
   a) Símbolo;
   b) Alfabeto;

c) Cadeia;
d) Linguagem;
e) Sentença;
f) Gramática;
g) Reconhecedor.

6. Considere o alfabeto $\Sigma = \{a, ab, abc\}$. Dê os seguintes exemplos sobre Σ:
   a) Símbolo;
   b) Cadeia qualquer;
   c) Cadeia de comprimento 2;
   d) Cadeia de comprimento 4;
   e) Linguagem finita;
   f) Linguagem infinita (descrita de forma finita).

7. Usando os símbolos $\boxdot, \boxplus, \boxminus$ e $\boxtimes$, apresente:
   a) Um exemplo de alfabeto;
   b) Um exemplo de cadeia;
   c) Um exemplo de linguagem finita;
   d) Um exemplo de linguagem infinita.

8. Determine os casos em que:
   a) Uma linguagem L coincide com $L^* - \{\varepsilon\}$;
   b) Uma linguagem L não coincide com $L^* - \{\varepsilon\}$;
   c) Uma linguagem L faz com que L^+ coincida com $L^* - \{\varepsilon\}$;
   d) Uma linguagem L faz com que L^+ não coincida com $L^* - \{\varepsilon\}$;
   e) Uma linguagem L faz com que L^* coincida com $L^+ \cup \{\varepsilon\}$.
   f) Uma linguagem L faz com que L^* não coincida com $L^+ \cup \{\varepsilon\}$.

9. Apresente uma linguagem L sobre $\{a, b\}$ que coincida com L^R.

10. Seja Σ um alfabeto qualquer. Defina, utilizando operações sobre conjuntos:
    a) A menor linguagem sobre Σ;
    b) A maior linguagem sobre Σ;
    c) A maior linguagem sobre Σ que não inclua sentenças de comprimento menor ou igual a 3;
    d) O conjunto de todas as linguagens que podem ser definidas sobre Σ;
    e) O conjunto de todas as linguagens não-vazias que podem ser definidas sobre Σ.

11. Seja $L \neq \emptyset$ uma linguagem tal que $L - \{\varepsilon\}$ exibe a propriedade do sufixo próprio. Para essa linguagem, determine:
    a) $(L - \{\varepsilon\})/(L - \{\varepsilon\})$. Justifique sua resposta.
    b) $(L \cup \{\varepsilon\})/(L \cup \{\varepsilon\})$. Justifique sua resposta.

12. Seja Σ um alfabeto, $A \subseteq \Sigma, B \subseteq \Sigma, A \cap B = \emptyset$. Utilizando apenas as operações de fechamento, união e concatenação sobre Σ, A e B, defina as maiores linguagens sobre Σ cujas sentenças α satisfaçam aos seguintes requisitos:
    a) α contém no mínimo um símbolo do conjunto A;
    b) α contém pelo menos um símbolo de A como prefixo e pelo menos dois símbolos de B como sufixo;
    c) α contém exatamente três símbolos de A, porém α pode conter qualquer quantidade de outros símbolos;
    d) α contém exatamente um símbolo de A e um símbolo de B, sendo o símbolo de B justaposto imediatamente após o símbolo de A. Nenhum outro símbolo de A ou B comparece em α, embora possa conter um número arbitrário de outros símbolos quaisquer.

13. Conceitue, em termos de linguagens e cadeias, as seguintes representações:
    a) $\{\}$;
    b) $\{\varepsilon\}$;
    c) ε;
    d) "ε";
    e) $\emptyset$;
    f) $\{\emptyset\}$;
    g) "$\emptyset$";
    h) "";
    i) $\{\emptyset, \{\}$, "ε", ε, "", $\{\emptyset\}, \{\varepsilon\}$, {"$\varepsilon$"}, "$\emptyset$", {"$\emptyset$"}}.

14. Descreva, sucintamente, a diferença entre os seguintes pares de conceitos:
    a) Substituição e homomorfismo;
    b) Homomorfismo e isomorfismo.

15. Demonstre que não existe $w \in \{a, b\}^*$ tal que $aw = wb$.

16. Se $w \in \{a, b\}^*$ e $abw = wab$, demonstre que $w = (ab)^n, n \geqslant 0$.

Gramáticas

17. Verifique se cada uma das gramáticas abaixo relacionadas está bem formada, justificando suas respostas.

    a) $(\{S, 0, 1\}, \{0, 1\}, \{S \to 01, S \to 0S1\}, X)$;
    b) $(\{S, 0, 1\}, \{\}, \{S \to 01, S \to 0S1\}, S)$;
    c) $(\{S, 0, 1\}, \{0, 1\}, \{\}, S)$;
    d) $(\{S, 0, 1\}, \{0, 1\}, \{X \to 01, X \to 0S1\}, X)$;
    e) $(\{S, 0, 1\}, \{0, 1\}, \{X \to 01, X \to 0S1\}, S)$;
    f) $(\{S, 0, 1\}, \{S, 0, 1\}, \{S \to 01, S \to 0S1\}, S)$;
    g) $(\{S, 0, 1\}, \{2, 3\}, \{S \to 01, S \to 0S1\}, S)$;
    h) $(\{S, 0, 1\}, \{0, 1\}, \{S \to 23, S \to 2S3\}, S)$;

i) $(\{S,0,1\},\{0,1\},\{S \to 01, 01 \to 10\},S)$;

j) $(\{S,0,1\},\{0,1\},\{S \to 00, \varepsilon \to 11\},S)$;

k) $(\{S,0,1\},\{0,1\},\{S \to 01, S \to 0S1\},S)$;

l) $(\{S,0,1\},\{0,1\},\{S \to 0S, S \to 1S, S \to 0, S \to 1\},S)$;

m) $(\{S,0,1\},\{0,1\},\{S \to SS, S \to 0, S \to 1, S \to 0S0, S \to 1S1\},S)$.

18. Verifique se cada uma das gramáticas abaixo relacionadas está bem formada, justificando suas respostas.

a) $(\{0,1\},\{S,0,1\},\{S \to 01, S \to 0S1\},S)$;

b) $(\{\},\{0,1\},\{S \to 01, S \to 0S1\},S)$;

c) $(\{0,1\},\{S,0,1\},\{S \to 01, S \to 0S1\},S)$;

d) $(\{S,0\},\{1\},\{S \to 01, S \to 0S1\},S)$;

e) $(\{S,0,1,2,3\},\{2,3\},\{S \to 0, S \to 1, 0 \to 12, 1 \to 03, 0 \to 3, 1 \to 2\},S)$;

f) $(\{0,1,S\},\{S\},\{0 \to S0, 0 \to 1, 1 \to SS\},0)$.

19. Considere a gramática $G = (\{S,X,Y,a,b,c\}, \{a,b,c\}, \{S \to XY, X \to aXcc, X \to b, Y \to Yc, Y \to \varepsilon\}, S)$:

a) Essa gramática está corretamente construída? Justifique sua resposta.

b) $L(G)$ é finita ou infinita? Justifique sua resposta.

c) Verifique se as cadeias *aabccccc* e *aaabccccc* são geradas por essa gramática. Em caso afirmativo, mostre a seqüência de derivações correspondente. Em caso negativo, justifique sua resposta.

d) Descreva, com suas próprias palavras, e da forma mais concisa e objetiva possível, a linguagem $L(G)$.

20. Considere a gramática $G = (\{S,X,Y,a,b,c\}, \{a,b,c\}, \{S \to aXc, X \to aXc, X \to Yb, Y \to bY, Y \to b\}, S)$:

a) Obtenha uma sentença qualquer de comprimento no mínimo igual a oito, mostrando todos os passos da sua derivação;

b) Verifique se a cadeia *aaabbbccc* pertence à linguagem gerada por essa gramática. Justifique sua resposta;

c) Descreva em português, da forma mais precisa possível, a linguagem gerada por essa gramática.

21. Construa gramáticas para as seguintes linguagens:

a) $\{x \in \{a,b\}^* \mid x$ apresenta simultaneamente *aabb* e *bbaa* como subcadeias$\}$;

b) $\{x \in \{a,b\}^* \mid x$ não apresenta nem *aaa* nem *bbb* como subcadeias$\}$.

22. Dadas as regras gramaticais seguintes, identificar a linguagem por elas descrita (S é a raiz da gramática): $\{S \to SaS, S \to SbS, S \to c\}$.

23. Defina, de maneira informal e com suas próprias palavras, as linguagens geradas pelas seguintes gramáticas:

a) $G = (\{S,L,(,),;,a\},\{(,),;,a\},P,S)$
$P = \{S \to (L), S \to a, L \to L;S, L \to S\}$

b) $G = (\{S,a,b,c\},\{a,b,c,\},P,S)$
$P = \{S \to SaS, S \to SbS, S \to c\}$

24. Descreva, através de uma gramática, a linguagem dos números decimais em notação científica (números com ou sem sinal, com parte inteira e/ou decimal, com ou sem expoente, o qual, se existir, pode ser também com ou sem sinal).

25. Descreva uma gramática para a linguagem das expressões aritméticas simples, formadas por operandos x, operadores "+" e "$*$", e parênteses para agrupar subexpressões.

26. Construa uma gramática G que gere a linguagem formada pelas cadeias, sobre o alfabeto $\Sigma = \{a,+,-,/,*\}$, que representem expressões aritméticas na notação RPN (polonesa reversa, ou pós-fixada). Expressões RPN são definidas recursivamente da seguinte forma:

a) a é por definição uma expressão RPN;

b) se X e Y são duas expressões RPN, então também são expressões RPN:

i. $XY+$

ii. $XY-$

iii. $XY/$

iv. $XY*$

São exemplos de sentenças dessa linguagem:

- a
- $aa*$
- $aaa+/$
- $aa*a+aa/-$

Obtenha uma derivação para cada uma dessas sentenças na sua gramática.

27. Defina uma gramática G que gere a linguagem composta pelas cadeias sobre o alfabeto $\Sigma = \{a,b,c,d\}$, de tal forma que $L(G) = \{wdw^R \mid w \in \{a,b,c\}\}$.

28. Defina formalmente, através de gramáticas, as seguintes linguagens:

a) conjunto vazio;

b) conjunto contendo apenas a cadeia vazia;

c) conjunto contendo todas as cadeias sobre $\{a,b,c,d\}$, incluindo ε.

29. Considere a definição formal de gramáticas $G = (V,T,P,S)$. A relação "$\to$", empregada na especificação das regras de substituição do conjunto P, pode ser denotada como uma relação sobre conjuntos. Como poderia ser feita uma definição formal dessa relação?

30. Defina:
   a) Gramática;
   b) Símbolo terminal;
   c) Símbolo não-terminal;
   d) Derivação;
   e) Forma sentencial;
   f) Sentença;
   g) Linguagem gerada por uma gramática.
31. Defina formalmente, através de gramáticas, as seguintes linguagens:
   a) Todas as sentenças de comprimento ímpar sobre o alfabeto $\{a,b\}$ em que o primeiro símbolo de cada sentença coincida com o símbolo situado no centro da mesma sentença. Exemplos: $bba, babba, aabaabb$ etc;
   b) Todas as sentenças de comprimento par sobre o alfabeto $\{a,b,c,d\}$ em que haja simetria entre os símbolos da metade inicial de cada sentença com os da segunda metade da mesma sentença. Exemplos: $aa, abcddcba, cbbc$;
   c) Todas as sentenças de comprimento qualquer, sobre o alfabeto $\{a,b,c,d\}$, que sejam simétricas.

Linguagens, gramáticas e conjuntos

32. Considere o alfabeto $\Sigma = \{a,b\}$. Proponha gramáticas diferentes G_1 e G_2 que gerem linguagens sobre esse alfabeto, de tal forma que:
   - $G_1 \neq G_2$;
   - $L_1(G_1) \subseteq \Sigma^*$;
   - $L_2(G_2) \subseteq \Sigma^*$;
   - L_1 seja infinita;
   - L_2 seja infinita.

   e, adicionalmente:

   a) $L_1 \cap L_2 = \emptyset$;
   b) $L_1 \subset L_2$ e $L_1 \neq L_2$;
   c) $L_1 = \Sigma^* - L_2$;
   d) $L_1 = L_2 = \Sigma^*$;
   e) $L_1 \cap L_2 = (ab)^*$;
   f) $L_1 - L_2 = \{a, ab, b\}$;
   g) $L_1 \cup L_2 = \Sigma^*$ e $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.
33. Considere o alfabeto $\{a,b,c\}$. Defina, através de gramáticas, linguagens infinitas L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 e L_6 que se relacionem conforme especificado abaixo. Construa uma figura, similar à Figura 2.5, que represente, na forma de conjuntos, a relação entre essas linguagens.
   a) L_1 qualquer;
   b) $L_2 \mid (L_2 \subseteq L_1)$;
   c) $L_3 \mid (L_3 \subseteq L_1) \wedge (L_3 \neq L_2) \wedge (L_2 \cap L_3 \neq \emptyset)$;
   d) $L_4 \mid (L_4 \subseteq L_1) \wedge (L_4 \cap L_2 \neq \emptyset) \wedge (L_4 \cap L_3 \neq \emptyset)$;
   e) $L_5 \mid (\exists w \in L_2 \mid w \in L_5) \wedge (\exists w \in L_4 \mid w \in L_5)$;
   f) $L_6 \mid (L_3 \subseteq L_6) \wedge (\exists w \in L_5 \mid w \in L_6)$.
34. Considere o alfabeto $\{a,b,c\}$. Proponha quatro linguagens infinitas e diferentes entre si, $L_i \subseteq \Sigma^*, 1 \leqslant i \leqslant 4$, tais que todas as seguintes condições sejam verificadas simultaneamente:
   - L_1 qualquer;
   - $L_2 \mid (L_2 \subset L_1)$;
   - $L_3 \mid (L_3 \cap L_2 \neq \emptyset) \wedge (L_3 \cap (\Sigma^* - L_1) \neq \emptyset) \wedge (L_3 \not\supseteq L_1)$;
   - $L_4 \mid (L_4 \cap L_1 = \emptyset) \wedge (L_4 \cap L_3 = \emptyset)$.

   Pede-se:
   a) Descrever L_1, L_2, L_3 e L_4 informalmente;
   b) Desenhar um diagrama mostrando a relação de inclusão que há entre essas quatro linguagens;
   c) Apresentar pelo menos uma cadeia $w \in \Sigma^*$ que ilustre cada um dos seguintes casos:
      i. $w \notin L_1, w \notin L_3, w \notin L_4$;
      ii. $w \in L_1, w \notin L_2, w \notin L_3$;
      iii. $w \in L_1, w \notin L_2, w \in L_3$;
      iv. $w \notin L_1, w \in L_3$;
      v. $w \in L_2, w \in L_3$;
      vi. $w \in L_4$.
35. Sejam L_1 e L_2 duas linguagens quaisquer. Prove:
   a) $(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* L_2^*)^*$;
   b) $L_1(L_2L_1)^* = (L_1L_2)^*L_1$;
   c) $L_1^* \cup L_2^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$;
   d) $(L_1 \cap L_2)^* \subseteq L_1^* \cap L_2^*$.
36. Sejam L_1 e L_2 duas linguagens quaisquer. Prove:
   a) $(L^2)^* \subseteq (L^*)^2$;
   b) $(L^*)^2 \nsubseteq (L^2)^*$.
37. Seja L uma linguagem qualquer. Prove:
   a) $LL^R \cup L^RL \neq \Sigma^*$;
   b) $L\overline{L} \cup \overline{L}L \neq \Sigma^*$.
38. Seja L uma linguagem qualquer. Prove que $(\overline{L})^R = \overline{(L^R)}$.

Reconhecedores

39. Traduza, de forma clara e concisa, o significado das seguintes afirmações:
   a) "As gramáticas G_1 e G_2 são equivalentes";
   b) "A gramática G e o autômato M são equivalentes";
   c) "Os autômatos M_1 e M_2 são equivalentes".

40. Seja G uma gramática e M um reconhecedor. O que se pode afirmar a respeito da relação entre $L(G)$ e $L(M)$, se:
    a) Toda cadeia gerada por G é aceita por M?
    b) Toda cadeia aceita por M é gerada por G?
    c) Algumas cadeias geradas por G são aceitas por M?
    d) Nenhuma das cadeias geradas por G é aceita por M?
    e) Nenhuma das cadeias aceitas por M é gerada por G?
    f) Não existe nenhuma cadeia que seja simultaneamente gerada por G e aceita por M?
41. Considere G_1 e G_2 duas gramáticas quaisquer, e M_1 e M_2 dois reconhecedores quaisquer. Em que circunstâncias se diz que:
    a) G_1 e G_2 definem a mesma linguagem?
    b) G_1 e G_2 definem linguagens complementares?
    c) M_1 e M_2 definem a mesma linguagem?
    d) M_1 e M_2 definem linguagens diferentes?
    e) M_1 define uma linguagem que é um subconjunto próprio da linguagem definida por M_2?
    f) G_1 e M_1 definem a mesma linguagem?
    g) G_1 e M_1 definem linguagens disjuntas?
42. Do ponto de vista prático, quais são as principais aplicações:
    a) Das gramáticas?
    b) Dos reconhecedores?
    c) Das linguagens?
43. Responda às perguntas:
    a) Quais são os quatro componentes básicos de um reconhecedor?
    b) Como se caracteriza a configuração de um reconhecedor?
    c) Qual a diferença entre uma transição e uma movimentação em um reconhecedor?
    d) O que difere um reconhecedor determinístico de um outro, não-determinístico?
    e) Do ponto de vista prático, quais as implicações dessas diferenças?
    f) Como se caracteriza formalmente a linguagem definida por um reconhecedor?
44. Formalmente, como são representados os seguintes componentes de um reconhecedor genérico?
    a) Configuração inicial;
    b) Configuração final;
    c) Função de transição;
    d) Linguagem definida pelo reconhecedor.
45. Considere um reconhecedor cuja função de transição δ contenha os seguintes elementos:

$$\begin{aligned}\delta \supseteq \{ & (q_0,(\alpha,\sigma\beta),\gamma_0) \to (q_1,(\alpha,\beta),\gamma_1),\\ & (q_1,(\alpha,\sigma\beta),\gamma_0) \to (q_1,(\alpha,\beta),\gamma_1),\\ & (q_0,(\alpha,\sigma\beta),\gamma_0) \to (q_2,(\alpha,\beta),\gamma_1)\}\end{aligned}$$

com $q_0,q_1,q_2 \in Q, \gamma_0,\gamma_1 \in \Gamma^*, \alpha,\beta \in \Sigma^*, \sigma \in \Sigma$.
    a) Pode-se afirmar que o reconhecedor seja não-determinístico?
    b) E se
    $\delta = \delta - \{(q_0,(\alpha,\sigma\beta),\gamma_0) \to (q_1,(\alpha,\beta),\gamma_1)\}$?
Justifique suas respostas.
46. Responda às perguntas:
    a) O que são transições em vazio?
    b) A presença de transições em vazio torna os reconhecedores necessariamente não-determinísticos? Justifique.
47. Um reconhecedor atinge um impasse, ou seja, ele não consegue evoluir para uma nova configuração. Pode-se, neste caso, dizer que a cadeia de entrada foi rejeitada pelo reconhecedor? Justifique sua resposta.
48. Em que condições é possível dizer que um impasse caracteriza a aceitação da cadeia de entrada em um autômato? E quanto à caracterização da rejeição?

Hierarquia de Chomsky

49. Responda às perguntas:
    a) Em que consiste a Hierarquia de Chomsky?
    b) Quais são as classes de gramáticas por ela definidas?
    c) Identifique as diferenças entre os diversos tipos de gramáticas definidas por Chomsky;
    d) Quais são as classes de linguagens por ela representadas?
    e) Quais são as características que distinguem entre si as linguagens geradas pelas gramáticas definidas pela Hierarquia de Chomsky?
    f) Discorra sobre a hierarquia de inclusão própria das classes de gramáticas na Hierarquia de Chomsky.
    g) Discorra sobre a hierarquia de inclusão própria das classes de linguagens na Hierarquia de Chomsky.
    h) Qual a importância prática da Hierarquia de Chomsky para a implementação de linguagens artificiais?
50. Considere a gramática:

$$G = (\{S,a,b\},\{a,b\},P,S), \text{ com}$$