

KARTKA 1

ZAD.1. (5p) Narysuj wykres funkcji $y = \log_3 x$. Następnie wyznacz dziedzinę funkcji

$$f(x) = \log_3 (\sqrt{2x+5} - 5 + x)$$

ZAD.2. (3p) Narysuj wykres funkcji $y = \arctg x$. Następnie wyznacz funkcję odwrotną do

$$g(x) = \arctg \frac{3-x}{4+x}$$

KARTKA 2

ZAD.3. Rozwiąż

(a) (5p) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x \geq 1$

(b) (5p) $\sin^2(2x) = 2(\sin^2 x - 1)(5 \cos x + 1)$

KARTKA 3

ZAD.4. (a) (4p) Zbadaj monotoniczność i ograniczoność ciągu

$$a_n = \frac{4}{3+1} + \frac{4^2}{3^2+2} + \frac{4^3}{3^3+3} + \dots + \frac{4^n}{3^n+n}$$

(b) (4p) Oblicz granice

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n^2 + 5n} - \sqrt{3n^2 + n + 2}) \quad , B = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n + 2}{2^n} \right)^{2^n + 1}$$

(c) (2p) Korzystając z definicji granicy właściwej ciągu, pokaż że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_{n+1} 5 = 0$$

KARTKA 4

ZAD.5. (a) (6p) Wyznacz, o ile istnieją, wartości parametrów $A, B \in \mathbb{R}$, tak aby funkcja $f(x)$ była ciągła w swojej dziedzinie.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x(A+1) + A}{x^2 - 3x + 2} & , x < 1 \\ 2 \sin \left(\arctg \left(1 + \frac{2}{x-3} \right) \right) & , 1 \leq x < 3 \\ 1 + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{x} + B \right) & , x \geq 3 \end{cases}$$

(b) (2p) Oblicz granice

$$C = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x+1)}{x^2 - x - 2}, \quad D = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\arctg \left(\frac{1}{x} \right) \cdot (4 - 4^x) \right]$$