Arkusz 1

Zad.1. (a)*(2p)* Naszkicuj wykresy poniższych funkcji. Wyraźnie zaznacz punkty przecięcia z osiami, asymptoty i/lub końce przedziałów.

$$f(x) = x^{4/5} \qquad g(x) = \log_2 |x| \qquad p(x) = 2^{-x} \qquad r(x) = \arccos(-x)$$

(b)*(2p)* Czy złożenie dwóch funkcji nieparzystych jest funkcją parzystą, nieparzystą. czy ani taką ani taką ? Odpowiedź uzasadnij.

Zad.2. (a)*(2p)* Oblicz

$$A = \arccos\left(\sin\frac{6\pi}{5}\right), \qquad B = (\log 2)^2 + \log 5 \cdot \log 20$$

(b)*(2p)* Wyznacz $\cos 2x$ wiedząc, że

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} 2x + 7$$

Arkusz 2

Zad.3. *(2p)* Wyznacz i zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów (x, y), których współrzędne spełniają nierówność

$$\log_x\left(\log_y x\right) > 0$$

Zad.4. (a)*(4p)* Oblicz granice ciągów i funkcji

$$A = \lim_{x\to\infty}\left[(1-x)\log\left(\frac{10x}{x+1}\right)\right] \qquad B = \lim_{x\to-\infty}\left[\operatorname{arc\,tg}(x)\cdot(2^x+1)\right]$$

$$C = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2(n+1)}{n+1} \qquad D = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{4n-1}\right)^{3n}$$

(b) *(2p)* Pokaż, że jeżeli (b_n) jest ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich, to ciąg o wyrazie ogólnym $c_n = \log_p(b_n)$, $p > 0, p \neq 1$ jest ciągiem arytmetycznym.

Arkusz 3

Zad.5. Rozwiąż

(a) *(3p)* $\cos x + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin 3x$

(b) *(3p)* $x^{3(2\log_4 x)^3 - 11\log_2 x} \leq 16$

Arkusz 4

Zad.6. *(4p)* Czy poniższe ciągi są zbieżne ? Odpowiedzi uzasadnij.

$$a_n = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{2}{(n+1)!}$$

$$b_n = \frac{(2^n + (-2)^n)^n}{\cos(n\pi)}$$

Zad.7. *(4p)* Wyznacz, o ile istnieją, wartości parametrów $a, b, c \in R$, tak aby funkcja $f(x)$ była ciągła.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{2\pi} \cdot \operatorname{arc\,tg}(b - x) & , x \leq 1 \\ 3^{-\frac{1}{(x-2)^2}} + \frac{b}{12} & , 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2}\log^2 c - \frac{1}{3}\log c & , x = 2 \\ \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4} & , x \geq 2 \end{cases}$$