Zad.1. (a) *(2p)* Naszkicuj wykresy poniższych funkcji. Wyraźnie zaznacz punkty przecięcia z osiami, asymptoty i/lub końce przedziałów.

$$f(x) = x^{6/2} \qquad g(x) = \log_2(-x) \qquad p(x) = -2^x \qquad r(x) = \arcsin|x|$$

(b) *(2p)* Znajdź zbiór wartości poniższej funkcji

$$g(x) = \frac{5^x - 5^{-x}}{5^x + 5^{-x}}$$

Zad.2. (a) *(1p)* Oblicz

$$A = \operatorname{arc\,ctg}\left(\operatorname{tg}\frac{4\pi}{5}\right), \qquad B = \cos\left(\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{3}{7}\right)\right)$$

(b) *(2p)* Wyznacz dziedzinę funkcji

$$f(x) = \sqrt{2 + \cos 2x - \sin 2x \cdot \operatorname{tg} x}$$

Zad.3. Rozwiąż

(a) *(3p)* $x^{2(\log x)^3 - 1{,}5\cdot\log x} \geq \sqrt{10}$

(b) *(3p)* $2^{2x} = 7 \cdot 2^{x+\sqrt{x-1}} + 8 \cdot 2^{2\sqrt{x-1}}$

Zad.4. (a) *(4p)* Czy poniższy ciąg jest zbieżny ? Odpowiedź uzasadnij.

$$a_n = \frac{2}{2+1} + \frac{2}{2^2+2} + \frac{2}{2^3+3} + \cdots + \frac{2}{2^n+n}$$

(b) *(2p)* Pokaż z definicji że $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n + 2n}{2n+1} = 1$

Zad.5. (a) *(4p)* Oblicz granice ciągów i funkcji

$$A = \lim_{x\to\infty}\left[(x-1)\ln\left(\frac{2}{2x+1}\right)\right] \qquad B = \lim_{x\to-\infty}\left[\operatorname{arc\,tg}(x)\cdot(2^x+1)\right]$$

$$C = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\sin(n)}{n^2+1} \qquad D = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{4n-1}\right)^{3n}$$

(b) *(1p)* Podaj przykład ciągu, który nie jest monotoniczny i jest zbieżny do 2

Zad.6. *(4p)* Wyznacz, o ile istnieją, wartości parametrów $a, b \in R$, tak aby funkcja $f(x)$ była ciągła.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{8}{\pi} \cdot \operatorname{arc\,tg}\left(\pi - \log x^2\right) & x < 0 \\ 3^{2a} - 3^{a+1} & x = 0 \\ \dfrac{x - c}{4^{\frac{1}{x-1}} - 1} & 0 < x < 1 \\ |\sin(b)| \cdot (x^2 + 1) & x \geq 1 \end{cases}$$

(b)*(2p)* Korzystając z definicji Cauchy'ego pokaż, że $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + x - 1}{x + 1} = -3$