ZESTAW I

1. Obliczyć granice ciągów

$$A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + \sin^2 n}, \qquad B = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-5}\right)^{n-3}$$

Następnie wyznaczyć dziedzinę oraz zbiór wartości funkcji

$$f(x) = 2 \arcsin(2x + A) - \pi \ln B$$

2. Wyznaczyć dziedzinę funkcji

$$f(x) = \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x} + \log\left(\frac{2\pi}{3} - \left|x - \frac{5\pi}{3}\right|\right)$$

3. Zbadać monotoniczność i ograniczoność ciągu $a_n = n^{(-1)^n}$

4. Rozwiązać równania

(a) $\log_{\sin x}(\cos x) + \log_{\cos x}(\sin x) = 2$

(b) $1 + 2^{\sqrt{x+3}} \cdot 2^{\sqrt{x}} = 3^2$

5. Pokazać, że złożenie dwóch funkcji nieparzystych jest funkcją nieparzystą.

ZESTAW II

1. (a) Obliczyć granice ciągów

$$A = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{16n^2 + 5n + 4} - 4n\right), \qquad B = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+5}\right)^{6n+3}$$

Następnie wyznaczyć funkcję odwrotną do funkcji

$$f(x) = A \cdot \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\ln B$$

w przedziale $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(b) Korzystając z definicji granicy ciągu pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{2n-1} = \frac{3}{2}$$

2. Wyznaczyć dziedzinę funkcji

$$f(x) = \frac{\sqrt{\sin^2(2x) - \frac{1}{2}}}{3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} - 162}$$

3. Zbadać monotoniczność i ograniczoność ciągu $a_n = \frac{20^n}{n!}$

4. Rozwiązać równania

(a) $1 + \dfrac{1}{2\cos x} + \dfrac{1}{4\cos x} + \dfrac{1}{8\cos x} \cdots = \dfrac{2}{\cos x}$

(b) $4 - \log x = 3\sqrt{\log x}$

5. Pokazać, że złożenie funkcji rosnącej i malejącej jest funkcją malejącą.

ZESTAW III

1. (a) Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n}-b_n+2c_n\right)$$

gdzie

$$a_n=\sqrt[n]{7^n+2\cdot 8^n+9^n+\sin\left(e^n\right)},\quad b_n=\frac{\pi^{\sqrt{n+1}}}{\pi^{\sqrt{n}}},\quad c_n=3n(\ln\left(2n^2-3\right)-\ln\left(2n^2+1\right))$$

(b) Zbadać zbieżność ciągu $a_n=\frac{(-1)^n}{n}\frac{(2n+1)!}{(2n)!}$

2. Wyznaczyć dziedzinę funkcji

$$f(x)=\sqrt{\log\frac{1}{|\sin x|}}-\sqrt{\log_x(3-x)}$$

3. Zbadać monotoniczność i ograniczoność ciągu $a_n=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{n}$

4. Rozwiązać równania

   (a) $2^{3x}+2^{3x-1}+2^{3x-2}+\cdots=\sqrt{12\cdot 2^{3x}-8}$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n(2+\sin 2x)+4}-n\right)=1+\sqrt{12}\cos 2x$

5. Pokazać, że funkcja odwrotna do funkcji rosnącej jest rosnąca.