

ZADANIE 1. (4p) Wyznacz dziedzinę funkcji

$$f(x) = \sqrt{\arccos\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) - \frac{\pi}{3}}$$

ZADANIE 2. (5p) Rozwiąż równanie

$$\frac{3}{2\sqrt{x^2-1}-1} + \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}+1} = \frac{18}{2^{2\sqrt{x^2-1}}-1}$$

ZADANIE 3. (5p) Rozwiąż nierówność w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$

$$\sqrt{\cos x - \sin x} \geq \frac{1}{2} - \sin x$$

ZADANIE 4. (a) (4p) Zbadaj monotoniczność i ograniczoność ciągu

$$a_n = \frac{4}{7+1} + \frac{4^2}{7^2+2} + \cdots + \frac{4^n}{7^n+n}$$

(b) (2p) Zbadaj zbieżność ciągu  $a_n = \left(1 + \frac{\cos(n\pi)}{n}\right)^n$

ZADANIE 5. (4p) Oblicz granice ciągów:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \log 3^{\sqrt{n^2+4}} - \log 3^{\sqrt{n^2+n}} \right) \quad B = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{n^3 + n^2} - n \right)$$

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n+2)}{2n+4} \quad D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-4}{2n-4} \right)^{2n+1}$$

ZADANIE 6. (4p) Wyznacz, o ile istnieją, wartości parametrów  $a, b \in \mathbb{R}$ , tak aby funkcja  $f(x)$  była ciągła.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x+4}{x^2+3x+2} + 13 \cdot \sin\left(\arccos\left(\frac{a}{13}\right)\right) & x < -1 \\ 9 \cdot 3^{\frac{x+1}{x-1}} + \log_b(x+2) & -1 \leq x \leq 1 \\ \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{1-x}\right) - \frac{\pi \sin(x-1)}{2x-2} & x > 1 \end{cases}$$

(b) (2p) Korzystając z definicji Cauchy'ego pokaż, że  $\lim_{x \rightarrow 2} (4x-5) = 3$