Arkusz 1

Zad.1. *(2p)* Prawda czy Fałsz ? (podaj tylko odpowiedź, bez uzasadnienia)

(a) Jeżeli funkcja posiada granicę właściwą w punkcie, to jest w tym punkcie ciągła

(b) Dziedziną funkcji $f(x) = x^{\frac{5}{4}}$ jest $x \in \mathbb{R}$, a jej zbiór wartości to $y \geq 0$

(c) Złożenie funkcji parzystej i nieparzystej jest funkcją nieparzystą.

(d) Ciąg $\left\{3^{\log(2^n)}\right\}$ jest ciągiem geometrycznym

Zad.2. *(6p)* Wyznacz dziedziny podanych funkcji

$$f(x) = \log\left(\sqrt{3x+4} - x\right), \qquad g(x) = \arcsin\frac{2-x}{3+x}$$

Arkusz 2

Zad.3. *(11p)* Rozwiąż

(a) $-5\sin x \leq 2\cos^2 x + 1$

(b) $x^{2\log_3 4} - 7 \cdot 2^{\log_3 x^2} + 12 \leq 0$

(c) $3 + \dfrac{2^{-x+3} \cdot 5^{-x} - 8}{2^x \cdot 5^x - 10^{-x}} = 0$

Arkusz 3

Zad.4. (a) *(3p)* Oblicz granice

$$A = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-n}{2n+1}\right)^n, \quad B = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\pi}\cdot \operatorname{arc\,cot}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

$$C = \lim_{x\to-1}\frac{2x^2+2x}{\sin\left(x^2+x\right)}$$

(b) *(4p)* Zbadaj zbieżność ciągu

$$a_n = \frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)!}+\frac{2}{(2n)!}$$

Zad.5. (a) *(6p)* Znajdź wartości parametrów $a, b \in R$ (o ile istnieją), dla których funkcja $f(x)$ posiada granice w $x=0$ oraz $x=1$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,ctg}\left(\frac{1}{x}\right) & , x<0 \\ \sqrt{a+1} & , x=0 \\ \dfrac{1-3^{2x}}{3^x-1}+e^{\ln a} & , 0<x<1 \\ 2^b & , x=1 \\ \dfrac{\pi\sin(1-x)}{b(x-1)} & , x>1 \end{cases}$$

(b) *(2p)* Korzystając z definicji Cauchy'ego pokaż, że $\lim_{x\to-2}\frac{3x^2+7x+2}{x+2}=-5$