Оглавление

Введение

Ускорение сходимости последовательностей и суммируемых рядов является важной задачей в численных вычислениях. Применение специальных алгоритмов и преобразований к рядам позволяет значительно сократить количество итераций, необходимых для достижения желаемой точности, сохраняя при этом значение суммы.

Одним из таких методов является ρ-алгоритм, разработанный Питером Винном в 1956 году. Этот численный метод предназначен для ускорения сходимости последовательностей, особенно чередующихся рядов. ρ-алгоритм основан на использовании разностных схем и применяется для последовательностей, сходящихся к пределу логарифмически. Его обобщения включают модификации и расширения исходного алгоритма для улучшения эффективности и применимости в различных ситуациях.

Другим важным методом является ϑ-алгоритм, открытый Клодом Брезински в 1971 году. Данный метод также предназначен для ускорения сходимости и является обобщением ρ-алгоритма Винна. ϑ-алгоритм используется для численного вычисления пределов и сумм бесконечных рядов и основан на итерационном процессе, включающем различные шаги специальной трансформации для улучшения скорости сходимости и повышения точности расчетов.

Обобщенные версии ρ-алгоритма Винна и ϑ-алгоритма Брезински могут включать дополнительные модификации, такие как улучшенные стратегии выбора параметров, оптимизированные процедуры вычислений и другие методы, направленные на улучшение производительности и точности численных вычислений.

Основная терминология для последовательностей

Обозначения множеств:

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N} = \{1,2, 3, \dots\}$

$\mathbb{N}_0$ – множество натуральных чисел с нулем, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел

$\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел

Последовательности и порядок сходимости:

$\{S_n\}$ – последовательность частичных сумм, где S_n определяется как сумма первых n членов последовательности $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Если $n < 0$, то $S_n = 0$.

$S_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$ $(n = 0, 1, \dots)$ – частичная сумма бесконечной последовательности $\{a_n\}$

$S = \sum_{j=0}^{\infty} a_j$ $(n = 0, 1, \dots)$ – предел последовательности частичных сумм, или сумма последовательности

Скорость и порядок сходимости последовательностей определяются следующим образом: последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к S, имеет порядок сходимости $q \geq 1$ и скорость сходимости μ, если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - S|}{|x_n - S|^q} = \mu$.

Асимптотическое поведение функций:

Пусть $f(z)$ и $g(z)$ – функции, определенные в области $D \subset \mathbb{C}$ и пусть $z_0 \in D$, тогда

$$f(z) = O\big(g(z)\big), \qquad z \to z_0$$

обозначает, что существует константа $A > 0$ и окрестность $\mathrm{U}(z_0)$ точки z_0 такие, что $\forall\, z \,\varepsilon\, U(z_0) \cap D$ выполняется:

$$|f(z)| \leq A|g(z)|$$

Следствие: Если $g(z) \neq 0$ на $U \cap D$, то $\frac{f(z)}{g(z)}$ ограничена на $U \cap D$.

Пусть $f(z)$ и $g(z)$ – функции, определенные в области $D \subset \mathbb{C}$ и пусть $z_0 \in D$, тогда

$$f(z) = o\big(g(z)\big), \qquad z \to z_0$$

обозначает, что существует константа $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и окрестность $\mathrm{U}(z_0)$ точки z_0 такие, что $\forall\, z \,\varepsilon\, U(z_0) \cap D$ выполняется:

$$|f(z)| \leq \varepsilon|g(z)|$$

Следствие: Если $g(z) \neq 0$ на $U \cap D$, то $\frac{f(z)}{g(z)} \to 0$ при $z \to z_0$.

Асимптотические последовательности и разложения:

Последовательность функций $\{\Phi_n(z)\}$ $(n \,\varepsilon\, \mathbb{N}_0)$, определенная в области $D \subset \mathbb{C}$ и такая, что $\Phi_n(z) \neq 0$, кроме, возможно, точки z_0, называется асимптотической последовательностью при $z \to z_0$, если $\forall\, n \,\varepsilon\, \mathbb{N}_0$

$$\Phi_{n+1} = o\big(\Phi_n(z)\big), \qquad z \to z_0$$

Формальный ряд $f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(z)$ называется асимптотическим разложением *f(z)* относительно асимптотической последовательности $\{\Phi_n(z)\}$ $(n \,\varepsilon\, \mathbb{N}_0)$ по определению Пуанкаре, если $\forall\ m \,\varepsilon\, \mathbb{N}_0$

$$f(z) - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(z) = o\big(\Phi_m(z)\big), \qquad z \to z_0$$

Если такое разложение существует, то оно единственно, а также его коэффициенты c_m могут быть вычислены при помощи рекуррентной формулы:

$$c_m = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - \sum_{n=0}^{m-1} c_n \Phi_n(z)}{\Phi_m(z)}, \qquad m \,\varepsilon\, \mathbb{N}_0$$

Остаток последовательности и его оценка:

Пусть $\{S_n\}$ либо сходится к некоторому пределу S, либо если она расходиться – может быть просуммирована подходящим методом для получения S.

Тогда элемент последовательности S_n может $\forall\ n \in \mathbb{N}_0$ быть разбит на предел, или антипредел, S и остаток r_n в соответствие с $S_n = S + r_n$.

Так как S_n – частичные суммы ряда, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, то остатки имеют вид: $r_n = -\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

Преобразования последовательностей различаются в зависимости от предположений о поведении остатков r_n как функций от n. Эти предположения приводят к различным стратегиям частичного исключения остатков r_n.

Пусть у функции $f(z)$ есть асимптотическое разложение по асимптотической последовательности $\{\Phi_n(z)\}$ при $n \,\varepsilon\, \mathbb{N}_0$. Тогда первый член ряда $\Phi_0(z)$ называется ведущим членом и обозначается как $f(z) \sim \Phi_0(z)$, что означает:

$$\frac{f(z)}{\Phi_0(z)} \to c_0 \text{ при } z \to z_0$$

В рассматриваемых трансформациях используются ω_0:

$$\frac{r_n}{\omega_n} \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(n), n \to \infty$$

где $\{\varphi_n(z)\}$ – подходящая асимптотическая последовательность.

Сходящиеся и расходящиеся последовательности:

Если последовательность $\{S_n\}$ сходится, то число, к которому она стремится, называется пределом. В случае, когда последовательность $\{S_n\}$ расходится, число S называется антипределом, если существует метод, позволяющий суммировать $\{S_n\}$ к этому значению. Значение антипредела зависит от характера расходящейся последовательности, и поэтому точного определения для него нет.

Важные утверждения о расходящихся последовательностях:

- Расходящиеся последовательности могут быть интерпретированы таким образом, что им можно сопоставить некоторые значения, называемые антипределами.

- Для аппроксимации антипределов могут использоваться экстраполяционные методы, позволяющие оценить значения, к которым расходящиеся последовательности могли бы сходиться при определенных условиях.
- Могут быть обработаны так же, как и сходящиеся, как с вычислительной, так и с теоретической точки зрения.

Виды сходимости:

Поведение многих сходящихся последовательностей $\{S_n\}$, сходящихся к некоторому пределу S можно охарактеризовать асимптотическим условием:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_{n+1}-s}{s_n-s}=\lim_{n\to\infty}\frac{r_{n+1}}{r_n}=\rho$$

Последовательность $\{S_n\}$ сходится:

- Линейно, если $0<|\rho|<1$
- Логарифмически, если $\rho=1$
- Гиперлинейно, если $\rho=0$

При $|\rho|>1$ последовательность расходится.

Класс $F^{(m)}$:

Мы говорим, что функция $A(y)$, определённая для y∊(0,b] (b>0), где y дискретная или непрерывная переменная, принадлежит множеству $F^{(m)}$ $(m\in\mathbb{N})$, если существуют функции $\phi_k(y)$ и $\beta_k(y)$ $(k = 1,2,\dots,m)$ и константа A такие, что

$$A(y)=A+\sum_{k=1}^{m}\phi_k(y)\beta_k(y)$$

Функции $\phi_k(y)$ определены для y ∊ (0, b] и функции $\beta_k(\xi)$ (ξ - непрерывная переменная), которые непрерывны на [0, ξ_0] ($\xi_0\le b$), и имеют асимптотическое разложение:

$$\beta_k(\xi)\sim\sum_{i=0}^{\infty}\beta_{ki}\xi^{ir_k}\ \text{при}\ \xi\to 0+, k=1,\dots,m,\qquad r_k>0-\text{константы}$$

Утверждение: Пусть $A_1(y)\in F^{(m_1)}$, предел или антипредел которой равен A_1, и $A_2(y)\in F^{(m_2)}$, предел или антипредел которой равен A_2. Тогда функция $A_1(y)+A_2(y)\in F^{(m)}$ и её предел или антипредел равен A_1+A_2, причём $m\le m_1+m_2$.

Класс $A_0^{(\gamma)}$:

Функция α(x) определённая для сколь угодно больших $x>0$, принадлежит множеству $A_0^{(\gamma)}$, если у неё есть асимптотическое разложение формы:

$$\alpha(x)\sim\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i x^{\gamma-i}\ \text{при}\ x\to\infty,\qquad \gamma\in\mathbb{C}$$

Если $\alpha_0\neq 0$, то $\alpha(x)\in A_0^{(\gamma)}$ строго.

Класс $b^{(m)}$:

Последовательность $\{a_n\}$ принадлежит множеству $b^{(m)}$, если она удовлетворяет линейному однородному разностному уравнению порядка m:

$$a_n = \sum_{k=1}^{m} p_k(n)\Delta^k a_n$$

$p_k \in A_0^{(k)}$ k = 1, …, m так, что $p_k \in A_0^{(i_k)}$ строго для некоторого целого числа $i_k \le k$.

Утверждение: Если $\{a_n\} \in b^{(m)}$, тогда $\{a_n\} \in b^{(q)}$ для каждого q $>$ m.

Классы последовательностей:

1. Логарифмически сходящиеся:
   $\{S_n\} \in b^{(1)}/LOG$, если

$$S_n \sim S + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i\, n^{\gamma-i} \text{ при } n \to \infty, \gamma \neq 0,1,\dots, \alpha_0 \neq 0.$$

2. Линейно сходящиеся:
   $\{S_n\} \in b^{(1)}/LIN$, если

$$S_n \sim S + \zeta^n \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i\, n^{\gamma-i} \text{ при } n \to \infty, \zeta \neq 1, \alpha_0 \neq 0.$$

3. Факториально сходящиеся:
   $\{S_n\} \in b^{(1)}/FAC$, если

$$S_n \sim S + (n!)^{-r} \zeta^n \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i\, n^{\gamma-i} \text{ при } n \to \infty, r \neq 0,1,\dots, \alpha_0 \neq 0.$$

4. Факториально расходящиеся:
   $\{S_n\} \in b^{(1)}/FACD$, если

$$S_n \sim (n!)^{r} \zeta^n \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i\, n^{\gamma-i} \text{ при } n \to \infty, \text{целое число } r > 0$$

Преобразование последовательности:

Последовательность $\{S_n\}$, которая либо расходится, либо сходится настолько медленно, что её применение становится практически невозможным, преобразовывается с помощью функции T в новую последовательность $\{S'_n\}$, которая сходится быстрее:

T:$\{ S_n\} \to \{S'_n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$

Вычислительные алгоритмы могут выполнять только конечное число операций, поэтому будут работать лишь с конечными подмножествами последовательностей, содержащими последовательные элементы $\{S_n, S_{n+1}, \dots, S_{n+l}\}$, где l — порядок преобразования.

Преобразование T представляется как функция:

$$T: \mathbb{R}^{l+1} \to \mathbb{R}.$$

Каждое преобразование может быть записано в виде двумерной таблицы $T_k^{(n)}$, где верхний индекс n указывает строку, а нижний индекс k — столбец:

$$\begin{matrix} T_0^{(0)} & T_1^{(0)} & T_2^{(0)} & \dots & T_n^{(0)} & \dots \\ T_0^{(1)} & T_1^{(1)} & T_2^{(1)} & \dots & T_n^{(1)} & \dots \\ T_0^{(2)} & T_1^{(2)} & T_2^{(2)} & \dots & T_n^{(2)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ T_0^{(n)} & T_1^{(n)} & T_2^{(n)} & \dots & T_n^{(2)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Последовательность $P = \{(n_j, k_j)\}$ упорядоченных пар целых чисел $n_j, k_j \in \mathbb{N}_0$ называется путем, если $n_0 = k_0 = 0$ и для всех $j \in \mathbb{N}_0$ выполняется $n_{j+1} \geq n_j$ и $k_{j+1} \geq k_j$, причем хотя бы одно из отношений $n_{j+1} = n_j + 1$ и $k_{j+1} = k_j + 1$ должно быть истинным.

Преобразование T является регулярным на пути P, если для любой сходящейся последовательности $\{S_n\}$ выполняется:

$$\lim_{j\to\infty} T_{k_j}^{(n_j)} = S$$

Функция T называется ускоряющей сходимость, если:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{T_{k_j}^{(n_j)} - S}{S_{n_j} - S} = 0$$

Иначе говоря, T ускоряет сходимость последовательности $\{S_n\}$ при преобразовании в $\{S'_n\}$, если $\{S'_n\}$ сходится к S быстрее, чем $\{S_n\}$, то есть:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|S'_n - S|}{|S_n - S|} = 0$$

Символ Похгаммера:

Пусть $\Omega(\mathrm{z})$ – функция, стремящаяся к нулю при $\mathrm{z} \to \infty$. Факториальный ряд для $\Omega(\mathrm{z})$ представляет собой разложение следующего типа:

$$\Omega(\mathrm{z}) = \frac{b_0}{\mathrm{z}} + \frac{b_1 1!}{\mathrm{z}(\mathrm{z}+1)} + \frac{b_2 2!}{\mathrm{z}(\mathrm{z}+1)(z+2)} + \dots = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{b_v v!}{(z)_{v+1}}$$

Символы Похгаммера (растущие факториалы) выражаются операцией

$$(z)_{v+1} = \frac{\Gamma(\mathrm{z}+v+1)}{\Gamma(\mathrm{z})} = z(z+1)\dots(z+v)$$

В общем случае $\Omega(\mathrm{z})$ будет иметь простые полюса в точках $\mathrm{z} = -m$, где $m \in \mathbb{N}_0$

Процесс экстраполяции Ричардсона

Методы преобразования последовательностей

1. ρ – алгоритм Винна и обобщения

1.1. ρ – алгоритм Винна

Алгоритм ρ Винна предназначен для вычисления четных сходящихся интерполирующих дробей Тиле и их экстраполяции к бесконечности.

Интерполирующая дробь Тиля, или четная сходящаяся дробь, имеет вид рациональных функций:

$$\mathcal{S}_{2k}(x) = \frac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + \ a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \cdots + \ b_1 x + b_0}, \qquad k \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$

где отношение $\frac{\mathrm{a_k}}{\mathrm{b_k}}$ представляет собой приближение к пределу. Четные порядки конвергентов являются рациональными функциями, представленными в виде частного двух полиномов. Алгоритм Винна выполняет вычисление интерполирующей рациональной функции и ее экстраполяцию к бесконечности с меньшим количеством арифметических операций по сравнению с аналогичными рекурсивными алгоритмами.

Метод ρ ускоряет сходимость логарифмических последовательностей в $b^{(1)}/LOG$ и очень эффективен для последовательностей $\{S_n\}$ таких, что:

$$S_n \sim S + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \, n^{-i} \text{ при } n \to \infty$$

Поскольку $S_n = h(n) \in A_0^{(0)}$, $h(n)$ ведет себя плавно при $n \to \infty$. Следовательно, вблизи $n = \infty$ $h(n)$ можно очень эффективно аппроксимировать рациональной функцией от n, $R(n)$, со степенью числителя, равной степени знаменателя, а $\lim\limits_{n\to\infty} R(n)$ может служить как хорошее приближение для $S = \lim\limits_{n\to\infty} h(n) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. В частности, $R(n)$ можно выбрать для интерполяции $h(n)$ в $2k+1$ точках.

Как указали Смит и Форд, ρ-алгоритм Винна хорошо работает с некоторыми логарифмическими последовательностями, но не работает с другими логарифмическими последовательностями, поэтому объясним этот факт.

Процесс экстраполяции Ричардсона состоит в пропускании интерполяционного полинома степени k через $k+1$ пары (x_n, S_n), ..., (x_{n+k}, S_{n+k}) с использованием формулы Невилла-Эйткена, затем вычисляют значение этого полинома при x = 0. Алгоритм ρ состоит из передачи рациональной интерполяционной дроби, числитель и знаменатель которой представляют собой многочлены степени k, через $2k+1$ пары точек (x_n, S_n), ..., (x_{n+2k}, S_{n+2k}), используя интерполяционную формулу Тиле, а затем вычисляя значение этой рациональной дроби по x.

Поскольку ρ-алгоритм – частный случай *взаимных разностей*, начнем с их определения. Пусть $f(x)$ – функция, взаимные разности которой с аргументами $x_0, x_1, \ldots$ определяются рекурсивно:

$$\rho_0(x_0) = f(x_0), \tag{2a}$$

$$\rho_1(x_0, x_1) = \frac{x_0 - x_1}{\rho_0(x_0) - \rho_0(x_1)}, \tag{2b}$$

$$\rho_k(x_0, \dots, x_k) = \rho_{k-2}(x_1, \dots, x_{k-1}) + \frac{x_0 - x_k}{\rho_{k-2}(x_1, \dots, x_{k-1}) - \rho_k^{(n)}}, \qquad k = 2, 3, \dots \tag{2c}$$

Заменив x_0 на x в (2c) получим следующую цепную дробь:

$$f(x) = f(x_1) + \cfrac{x - x_1}{\rho_1(x_1, x_2) + \cfrac{x - x_2}{\rho_2(x_1, x_2, x_3) - \rho_0(x_1) + \cfrac{x - x_2}{\ddots}}} \tag{3a}$$

Последние две составляющие простейшие дроби в формуле (3a) цепной дроби имеют следующий вид:

$$\cfrac{x - x_{l-1}}{\rho_{l-1}(x_1, \dots, x_l) - \rho_{l-3}(x_1, \dots, x_{l-2}) + \cfrac{x - x_l}{\rho_l(x, x_1, \dots, x_l) - \rho_{l-2}(x_1, \dots, x_{l-1})}} \tag{3b}$$

Равенство (3) справедливо при $x = x_1, \dots, x_l$. Правая часть равенства (3) называется *интерполяционной формулой Тиля*.

Рассмотрим функцию $f(x_n)$, значение S_n которой известно в некотором числе точек x_n при $n \in \mathbb{N}_0$. ρ-алгоритм Винна определяется заменой S_n вместо $f(x_n)$ и $\rho_k^{(n)}$ вместо $\rho_k(x_n, \dots, x_{n+k})$ во взаимной разности:

$$\rho_0^{(n)} = S_n, \tag{4a}$$

$$\rho_1^{(n)} = \frac{x_n - x_{n+1}}{\rho_0^{(n)} - \rho_0^{(n+1)}}, \tag{4b}$$

$$\rho_2^{(n)} = \rho_0^{(n+1)} + \frac{x_n - x_{n+2}}{\rho_1^{(n)} - \rho_1^{(n+1)}}, \tag{4c}$$

$$\rho_k^{(n)} = \rho_{k-2}^{(n+1)} + \frac{x_n - x_{n+k}}{\rho_{k-1}^{(n)} - \rho_{k-1}^{(n+1)}}, \tag{4d}$$

Покажем, что рациональная дробь $R(x)$, числитель и знаменатель которой представляют собой полиномы степени k и такая, что

$$R(x_p) = S_p \; \forall \; p = n, \dots, n + 2k \tag{5}$$

находится в виде:

$$R(x) = \frac{\rho_{2k}^{(n)} x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k}{x^k + b_1 x^{k-1} + \dots + b_k} \tag{6}$$

Тогда получаем, что $\lim\limits_{n \to \infty} R(x) = \rho_{2k}^{(n)}$ и позволяет взять эту величину $\rho_{2k}^{(n)}$ как аппроксимацию предела последовательности $\{S_n\}$ при $n \to \infty$. Расчет $\rho_{2k}^{(n)}$ осуществляется с использованием расширенной формы ρ-алгоритма, который представляет собой не что иное, как расчет взаимных разностей.

Нелинейная рекурсивная стандартная схема алгоритма ρ Винна выглядит следующим образом:

$$\rho_{k+1}^{(n)} = \rho_{k-1}^{(n+1)} + \frac{x_{n+k+1} - x_n}{\rho_k^{(n+1)} - \rho_k^{(n)}}, \qquad k, n \in \mathbb{N}_0, \tag{7}$$

учитывая, что $\rho_{-1}^{(n)} = 0$ и $\rho_0^{(n)} = S_n,\ n \in \mathbb{N}_0$.

Данный метод работает с последовательностью строго возрастающих и неограниченных с ростом n интерполяционных точек $\{x_n\}$, которые должны быть положительными и различными $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$:

$$0 < x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m < x_{m+1} < \cdots, \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \tag{8}$$

Видно, что структура ρ-алгоритма идентична структуре ε-алгоритма Винна, но отличается наличием самой последовательности интерполяционных точек. Только элементы с четным порядком $\rho_{2k}^{(n)}$ в методе ρ используются для аппроксимации предела, тогда как элементы $\rho_{2k+1}^{(n)}$ нечетного порядка служат вспомогательными величинами и могут расходиться, если вся последовательность сходится, то есть величины с нечетным нижним индексом являются лишь промежуточными расчетами и не имеют никакого значения.

Несмотря на формальное сходство, алгоритмы Винна ε и ρ существенно различаются по способности ускорять сходимость. Алгоритм ρ Винна эффективен для логарифмически сходящихся последовательностей, но не подходит для линейно сходящихся или расходящихся последовательностей, в случае которых выгоднее будет применять ε алгоритм.

Поскольку дроби четного порядка $\mathcal{S}_{2k}(x)$ интерполяционной цепной дроби построены таким образом, что они удовлетворяют условиям интерполяции $2k+1$, то

$$\mathcal{S}_{2k}\big(x_{n+j}\big) = S_{n+j}, 0 \le j \le 2k \tag{9}$$

<u>Теорема</u>.

Если применить ρ-алгоритм к последовательности $\{S_n\}$:

$$S_n = \frac{Sx_n^k + a_1 x_n^{k-1} + \cdots + a_k}{x_n^k + b_1 x_n^{k-1} + \cdots + b_k}, \tag{10}$$

то преобразование $\rho_{2k}^{(n)} = S\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

<u>Доказательство</u>.

Покажем верность этого утверждения при помощи интерполирующей дроби Тиля, подразумевающей следующую непрерывную дробь:

$$S_n = S_m + \cfrac{n-m}{\rho_1^{(m)} + \cfrac{n-m-1}{\rho_2^{(m)} - \rho_0^{(m)} + \cfrac{n-m-2}{\rho_3^{(m)} - \rho_1^{(m)} + \cdots}}} \tag{11a}$$

Учитывая значение для $2k+1$ дроби в цепочке дроби Тиля

$$\cfrac{n-m-2k}{\rho_{2k+1}^{(m)} - \rho_{2k-1}^{(m)} + \cfrac{n-m-2k-1}{\ddots}}, \tag{11b}$$

получаем

$$S_n = \frac{\rho_{2k}^{(m)} n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k}{n^k + b_1 n^{k-1} + \cdots + b_k} \tag{11c}$$

Соответственно, $\rho_{2k}^{(m)} = S \ \forall\, m \in \mathbb{N}_0$. Таким образом, ρ-алгоритм представляет собой рациональную экстраполяцию, точную на последовательности, удовлетворяющей условию (11c)

Свойства ρ-алгоритма:

Некоторые свойства ρ- и ε- алгоритмов Винна схожи.

Свойство 1.

$$\rho_{2k}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & S_n & x_n & x_n S_n & \cdots & x_n^{k-1} & x_n^{k-1} S_n & x_n^k S_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & S_{n+2k} & x_{n+2k} & x_{n+2k} S_{n+2k} & \cdots & x_{n+2k}^{k-1} & x_{n+2k}^{k-1} S_{n+2k} & x_{n+2k}^k S_{n+2k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & S_n & x_n & x_n S_n & \cdots & x_n^{k-1} & x_n^{k-1} S_n & x_n^k S_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & S_{n+2k} & x_{n+2k} & x_{n+2k} S_{n+2k} & \cdots & x_{n+2k}^{k-1} & x_{n+2k}^{k-1} S_{n+2k} & x_{n+2k}^k \end{vmatrix}}$$

Свойство 2. (Алгебраические)

2.1. Если применение ρ-алгоритма на $\{S_n\}$ и $\{aS_n + b\}$ дает соответственно величины $\rho_k^{(n)}$ и $\bar{\rho}_k^{(n)}$, тогда:

$$\bar{\rho}_{2k}^{(n)} = a\rho_{2k}^{(n)} + b, \quad \bar{\rho}_{2k+1}^{(n)} = \frac{\rho_{2k}^{(n)}}{a}$$

2.2. Если применение ρ-алгоритма на $\{S_n\}$ и $\{\frac{aS_n+b}{cS_n+d}\}$ дает соответственно величины $\rho_k^{(n)}$ и $\bar{\rho}_k^{(n)}$, тогда:

$$\bar{\rho}_{2k}^{(n)} = \frac{a\rho_{2k}^{(n)} + b}{c\rho_{2k}^{(n)} + d}$$

Итак, ρ-алгоритм представляет собой рациональную экстраполяцию, точную на последовательности, имеющей асимптотическое разложение вида:

$$S_n \sim S + n^{\theta}\left(\mathrm{c}_0 + \frac{\mathrm{c}_1}{n} + \frac{\mathrm{c}_2}{n^2} + \ldots \right), \qquad n \to \infty$$

где θ — отрицательное целое число, а c_j — константы, не зависящие от n.

Теорема. (Асимптотическое поведение ρ-алгоритма)

…

Примечание:

ρ-алгоритм — алгоритм экстраполяции рациональной дроби, числитель и знаменатель которой имеют одинаковую степень. Можно рассматривать это как частный случай метода Булирша и Стоера, где степени числителя и знаменателя произвольны.

Причины применения ρ-алгоритма Винна для логарифмически сходящихся рядов:

1. Преобразование интерполяционных точек

   Алгоритм ρ Винна включает последовательность интерполяционных точек $\{x_n\}$, что позволяет более гибко подходить к обработке ряда. Логарифмически сходящиеся ряды характеризуются тем, что их члены уменьшаются медленно, и традиционные методы ускорения сходимости могут оказаться неэффективными. Интерполяционные точки дают возможность алгоритму адаптироваться к медленной сходимости, обеспечивая более точное аппроксимирование предела.

2. Адаптация к логарифмической сходимости

   ρ-алгоритм Винна строит последовательность рациональных функций, которая учитывает форму логарифмически сходящихся рядов. Он использует четные порядки элементов $\rho_{2k}^{(n)}$ для аппроксимации предела, что позволяет лучше учитывать особенности поведения логарифмически сходящихся рядов.

3. Комплементарные свойства

   Алгоритм ρ Винна дополняет ε алгоритм Винна, который эффективен для линейно сходящихся последовательностей, но не может ускорить логарифмическую сходимость. В то время как ε алгоритм эффективен для суммирования чередующихся расходящихся рядов, алгоритм ρ Винна специально разработан для работы с логарифмически сходящимися рядами, что делает его эффективным инструментом в таких случаях.

4. Устойчивость к осцилляциям и расходимости

   Логарифмически сходящиеся ряды часто не демонстрируют осцилляционного поведения, характерного для некоторых других типов рядов. ρ-алгоритм Винна, учитывая свою структуру и использование интерполяционных точек, обеспечивает устойчивость к осцилляциям и помогает избежать расходимости, эффективно аппроксимируя пределы таких рядов.

1.2. Модификации ρ – алгоритма

2. ϑ – алгоритм Брезински

$$\vartheta_{-1}^{(n)} = 0, \qquad \vartheta_0^{(n)} = S_n,$$

$$\vartheta_{2k+1}^{(n)} = \vartheta_{2k-1}^{(n+1)} + \frac{1}{\Delta\vartheta_{2k}^{(n)}},$$

$$\vartheta_{2k+2}^{(n)} = \vartheta_{2k}^{(n+1)} + \frac{[\Delta\vartheta_{2k}^{(n+1)}][\Delta\vartheta_{2k+1}^{(n+1)}]}{\Delta^2\vartheta_{2k+1}^{(n)}}, \qquad k, n = 0, 1, \dots$$

Заключение

Список литературы

1. Brezinski, C. (1977). *Acceleration de la Convergence en Analyse Numerique*. Springer-Verlag.
2. Osada, Naoki. *Acceleration Methods for Slowly Convergent Sequences and Their Applications*. January 1993.
3. Weniger, E. J. (2003). Nonlinear Sequence Transformations for the Acceleration of Convergence and the Summation of Divergent Series. *Computer Physics Repor*ts, 1(1), 1-123.
4. Brezinski, C., & Redivo Zaglia, M. (2003). *Extrapolation Methods: Theory and Practice*. Amsterdam: North-Holland.
5. Sidi, A. (2003). *Practical Extrapolation Methods: Theory and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press.
6. Van Tuyl, A. H. (1994). Acceleration of Convergence of a Family of Logarithmically Convergent Sequences. *Mathematics of Computation*, 63(207), 229-246. American Mathematical Society.
7. Weniger, E. J. (1990). On the derivation of iterated sequence transformations for the acceleration of convergence and the summation of divergent series. *Institut für Physikalische und Theoretische Chemie, Universität Regensburg*, W-8400 Regensburg, Germany.
8. Borghi, R., & Weniger, E. J. (2015). Convergence analysis of the summation of the factorially divergent Euler series by Padé approximants and the delta transformation. *Dipartimento di Ingegneria, Università "Roma Tre", I-00144 Rome, Italy and Institut für Physikalische und Theoretische Chemie, Universität Regensburg, D-93040 Regensburg, Germany.*