Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра программного обеспечения информационных технологий

Дисциплина: Методы оптимизации

ОТЧЕТ
к лабораторной работе №3

ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ТЕОРИИ ИГР

Вариант 5

Выполнил: Студент гр. 051004
Герасимович Д.Н.

Проверил: Петюкевич Н.С.

Минск 2022

ЗАДАНИЕ 1

После нескольких лет эксплуатации промышленное оборудование оказывается в одном из следующих состояний:

1) оборудование может использоваться в очередном году после профилактического ремонта;

2) для безаварийной работы оборудования в дальнейшем следует заменить отдельные его детали и узлы;

3) оборудование требует капитального ремонта или замены.

В зависимости от сложившейся ситуации руководство предприятия в состоянии принять такие решения: 1) отремонтировать оборудование силами заводских специалистов, что потребует, в зависимости от обстановки, затрат, равных a_1, a_2 или a_3 ден. ед.; 2) вызвать специальную бригаду ремонтников, расходы в этом случае составят b_1, b_2 или b_3 ден. ед.; 3) заменить оборудование новым, реализовав устаревшее оборудование по его остаточной стоимости; совокупные затраты в результате этого мероприятия будут равны соответственно c_1, c_2 или c_3 ден. ед. Указанные выше расходы предприятия включают кроме стоимости ремонта и заменяемых деталей и узлов убытки, вызванные ухудшением качества выпускаемой продукции, простоем неисправного оборудования, а также затраты на установку и отладку нового оборудования. Требуется:

1) **придать описанной ситуации игровую схему, установить характер игры и выявить ее участников, указать возможные чистые стратегии сторон;**

2) составить платежную матрицу;

3) выяснить, какое решение о работе оборудования в предстоящем году целесообразно рекомендовать руководству предприятия, чтобы минимизировать потери при следующих предположениях:

а) накопленный на предприятии опыт эксплуатации аналогичного оборудования показывает, что вероятности указанных выше состояний оборудования равны соответственно q_1, q_2, q_3;

б) имеющийся опыт свидетельствует о том, что все три возможных состояния оборудования равновероятны;

в) о вероятностях состояний оборудования ничего определенного сказать нельзя.

Указание. В п. 3 следует найти оптимальные чистые стратегии, пользуясь: в п. 3) а) — критерием Байеса, в п. 3) б) — критерием Лапласа, в п. 3) в) — критериями Вальда, Сэвиджа, Гурвица (значение параметра γ в критерии Гурвица задается).

ЗАДАНИЕ 2

Проект представлен сетевым графиком. Для каждой работы известна ее продолжительность t_{ij} и минимально возможное время выполнения d_{ij}. Пусть задан срок выполнения проекта t_0, а расчетное $t_{кр} > t_0$. Продолжительность выполнения работы (i,j) линейно зависит от суммы дополнительно вложенных средств x_{ij} и выражается соотношением: $t'_{ij} = t_{ij} - k_{ij}x_{ij}$. Технологические коэффициенты k_{ij} известны.

Требуется найти: **1) критический путь, ранние и поздние сроки начала и окончания работ, резервы времени, построить сетевой график**

2) построить линейный график (график Ганта),

3) такие $t^{н}_{ij}$, $t^{о}_{ij}$, x_{ij}, чтобы:

- срок выполнения всего комплекса работ не превышал заданной величины t_0;
- суммарное количество дополнительно вложенных средств было минимальным;
- продолжительность выполнения каждой работы t'_{ij} была не меньше заданной величины d_{ij}.

4) по найденным данным найти новый критический путь, ранние и поздние сроки начала и окончания работ, резервы времени, построить сетевой график

5) построить линейный график,

6) сделать выводы

ЗАДАНИЕ 1

Исходные числовые данные:

a1	10
a2	8
a3	13
b1	18
b2	14
b3	10
c1	25
c2	12
c3	9
q1	0,35
q2	0,45
q3	0,2
γ	0,8

	П1	П2	П3
A1	-10	-8	-13
A2	-18	-14	-10
A3	-25	-12	-9
q	0,35	0,45	0,2

А - сознательный игрок
Ai - чистые стратегии игрока А
П - игрой, действующий случайно (природа)
Пj - состояния природы
qi - вероятности, с которыми природа реализует свои состояния

Параметр Гурвица 0,8

1) Придать описанной ситуации игровую схему, установить характер игры и выявить ее участников, указать возможные чистые стратегии сторон

Часто приходится принимать решение, не имея достаточной информации. Если эта неопределенность не связана с сознательным противодействием противника, а определяется внешними условиями, которыми мы не можем управлять, но от которых зависит эффективность выбранной нами стратегии, то такие ситуации принято называть статистическими играми, или играми с природой.

А - руководство предприятия; **П** - природа.

У нас есть сознательный игрок **А** и его чистые тратегии Ai:

А1 - отремонтировать оборудование силами заводских специалистов

А2 - вызвать специальную бригаду работников

А3 - заменить оборудование новым

И второй игрок **П**(природа), действия которого случайны.

Игрок П может реализовать различные состояния Пj:

П1 - оборудование может использоваться в очередном году после профилактического ремонта

П2 - для безаварийной работы оборудования в дальнейшем следует заменить отдельные его детали и узлы

П3 - оборудование требует капитального ремонта или замены

2) Составить платежную матрицу

Природа безразлична к нашему выигрышу, следовательно, ни одно ее возможное состояние нельзя отбросить. Смешанная стратегия может иметь смысл только при многократном повторении игры. Результаты игры будем представлять платежной матрицей

	П1	П2	П3	min(aij)	max(aij)	по Гурвицу
A1	-10	-8	-13	-13	-8	-12
A2	-18	-14	-10	-18	-10	-16,4
A3	-25	-12	-9	-25	-9	-21,8
bj = max(aij)	-10	-8	-9			

bj - максимально возможное значение выигрыша игрока А

min(aij) - минимальное значение ожидаемого выигрыша

max(aij) - максимальное значение ожидаемого выигрыша

параметр Гурвица - степень оптимизма [0,1], показывает наилучшее и наихудшее поведение природы

Критерий Гурвица = $s=\max\limits_{i}\left\{\lambda \min\limits_{j} a_{ij}+(1-\lambda)\max\limits_{j} a_{ij}\right\},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$

3) Выяснить, какое решение о работе оборудования в предстоящем году целесообразно рекомендовать руководству предприятия:

а) Накопленный на предприятии опыт эксплуатации говорит о вероятности соответсвующих событий (Критерий Байеса)

Платёжная матрица

	П1	П2	П3	ai
A1	-10	-8	-13	-9,7
A2	-18	-14	-10	-14,6
A3	-25	-12	-9	-15,95
qi	0,35	0,45	0,2	

$$\overline{a_i}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$$

Матрица рисков

	П1	П2	П3	ri
A1	0	0	4	0,8
A2	8	6	1	5,7
A3	15	4	0	7,05
qi	0,35	0,45	0,2	

$$\overline{r_i}=\sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j \qquad r_{ij}=b_j-a_j$$

Максимальный средний выигрыш и минимальный средний риск обеспечивает стратегия А1, она и будет предпочтительной.

б) Имеющийся опыт говорит о том, что все события равновероятны (Критерий Лапласа)

Платёжная матрица

	П1	П2	П3	a
A1	-10	-8	-13	-10,23
A2	-18	-14	-10	-13,86
A3	-25	-12	-9	-15,18
q	0,33	0,33	0,33	

Матрица рисков

	П1	П2	П3	ri
A1	0	0	4	1,32
A2	8	6	1	4,95
A3	15	4	0	6,27
qi	0,33	0,33	0,33	

Лучшие результаты дает стратегия А1 - максимальный средний выигрыш.

в) О вероятностях ничего сказать нельзя (Критерии Вальда, Гурвица, Сэвиджа)

Максиминный критерий Вальда:

Находим максимум из минимумов и соответствующую ему стратегию. Природа рассматривается как противодействующая сторона. Это стратегия крайнего пессимизма. Для приведенной задачи нам следует выбрать А1 (при этом минимальный гарантированный выигрыш равен -13)

max(min a)	13

Критерий Сэвиджа (минимаксного риска):

Матрица рисков

	П1	П2	П3	min r	max r	по Гурвицу
A1	0	0	4	0	4	3,2
A2	8	6	1	1	8	6,6
A3	15	4	0	0	15	12

Выбирается стратегия, обеспечивающая минимум риска при самых неблагоприятных условиях (минимизируем максимальный риск).

Это также крайний пессимизм, но по отношению к величине риска. В рассматриваемой задаче это А1 (при этом максимальный возможный риск равен 4)

min(max r)	4

Критерий Гурвица (пессимизма – оптимизма):

Это промежуточный выбор между крайним пессимизмом и безудержным оптимизмом. Для данной задачи это А1

$\max_i(\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda)\max_j a_{ij})$ -12

$\min_i(\lambda \max_j r_{ij} + (1-\lambda)\min_j r_{ij})$ 3,2

Таким образом, в результате решения статистической огры по различным критериям чаще всего рекомендовалась стратегия А1.

Нижняя цена игры $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$ -13

Верхняя цена игры $\beta = \min_j \max_i a_{ij}$ -10

4) Решить в смешанных стратегиях (сведением к задаче линейного программирования)

Цена игры v < 0 прибавим ко всем элементам матрицы 25.

	П1	П2	П3
А1	15	17	12
А2	7	11	15
А3	0	13	16

Математическая модель задачи для игрока П:

15q1 + 17q2 + 12q3 <= v
7q1 + 11q2 + 15q3 <= v
13q2 + 16q3 <= v
qi >= 0, ∑qi = 1

$y_i = \frac{q_i}{v}$

Математическая модель задачи для игрока А:

15p1 + 7p2 >= 1
17p1 + 11p2 + 13p3 >= 1
12p1 + 15p2 + 16p3 >= 1
xi >= 0, ∑pi = 1

$x_i = \frac{p_i}{v}$

f(y) = y1 + y2 + y3 -> max

15y1 + 17y2 + 12y3 <= 1
7y1 + 11y2 + 15y3 <= 1
13y2 + 16y3 <= 1
yi >= 0

z(x) = x1 + x2 + x3 -> min

15x1 + 7x2 >= 1
17x1 + 11x2 + 13x3 >= 1
12x1 + 15x2 + 16x3 >= 1
xi >= 0

15	17	12
7	11	15
0	13	16

15	7	0
17	11	13
12	15	16

Решение для игрока П

1	<=	1
1	<=	1
0,907801418	<=	1

y1	y2	y3	f(y)
0,021276596	0	0,056737589	0,07801

Решение для игрока А

1	>=	1
1,19858156	>=	1
1	>=	1

x1	x2	x3	z(x)
0,056737589	0,021276596	0	0,078014

x* = (0,0567376, 0,021276596, 0)
y* = (0,021276596, 0 , 0,05673759)
z(x) = 0,07801418
f(y) = 0,07801418

цена игры v = 12,81818 - 25= -12,18181818

$v = 1/f$ $\alpha < v < \beta$ -13 < -12,181818 < -10

$q_1 = v\ y_1$

q1	q2	q3	∑
0,272727273	0	0,727272727	1

$p_1 = v\ x_1$

p1	p2	p3	∑
0,727272727	0,272727273	0	1

q* =(0,272727273, 0, 0,727272727)
p* = (0,727272727, 0, 0,272727273)

Вывод: сумму оптимальных стратегий q* и p* равна единице, а цена игры v = -12,181818 которая действительно лежит между а = -13 и б = -10.

ЗАДАНИЕ 2

Условие задачи сетевого управления										
параметры	работы									срок выполнения
	1,2	1,3	1,4	2,4	2,5	3,4	3,6	4,5	4,6	5,6	
tij	6	15	26	7	11	10	11	12	13	17	50
dij	5	13	20	5	9	7	8	9	12	15	
kij	0,07	0,2	0,3	0,1	0,05	0,1	0,04	0,05	0,15	0,5	

tij - продолжительность выполнения каждой работы
dij - минимально возможное время выполнения
kij - технологические коэффициенты

1) найти критический путь, ранние и поздние сроки начала и окончания работ, резервы времени, построить сетевой график

работы	t(i,j)
(1, 2)	6
(1, 3)	15
(1, 4)	26
(2, 4)	7
(2, 5)	11
(3, 4)	10
(3, 6)	11
(4, 5)	12
(4, 6)	13
(5, 6)	17

события	tр(i)	tп(i)	Rп(i)
1	0	0	0
2	6	19	13
3	15	16	1
4	26	26	0
5	38	38	0
6	55	55	0

tрн(i,j) = tр(i)	tро(i,j)	tпо(i,j) = tп(j)	tпн(i,j)	Rп(i,j)	Rн(i,j)	R'(i,j)	R''(i,j)
0	6	19	13	13	0	13	0
0	15	16	1	1	0	1	0
0	26	26	0	0	0	0	0
6	13	26	19	13	0	0	13
6	17	38	27	21	8	8	21
15	25	26	16	1	0	0	1
15	26	55	44	29	28	28	29
26	38	38	26	0	0	0	0
26	39	55	42	16	16	16	16
38	55	55	38	0	0	0	0

tрн(i,j) - ранний срок начала работы
tро(i,j) - ранний срок окончания работы
tпо(i,j) - поздний срок окончания работы
tпн(i,j) - поздний срок начала работы
Rп(i,j) - полный резерв времени работы
Rн(i,j) - независимый(свободный) резерв времени работы
R'(i,j) - частный резерв времени работы первого вида
R''(i,j) - частный резерв времени работы второго вида

tр(i) - ранний срок свершения события
tп(i) - поздний срок свершения события
Rп(i) - полный резерв времени

$t_р(i) = t[L_1(i)]$

$t_п(i) = t_{кр} - t[L_2(i)]$

$R_п(i, j) = t_п(j) - t_р(i) - t_{ij}$

$t_{рн}(i, j) = t_р(i)$

$t_{ро}(i, j) = t_р(i) + t_{ij}$

$t_{по}(i, j) = t_п(j)$

$t_{пн}(i, j) = t_п(j) - t_{ij}$

$R_п(i, j) = t_п(j) - t_р(i) - t_{ij}$

$R_н(i, j) = t_р(j) - t_п(i) - t_{ij}$

$R'(i, j) = t_п(j) - t_п(i) - t_{ij}$

$R''(i, j) = t_р(j) - t_р(i) - t_{ij}$

путь из 1 в 4	
1-2-4	13
1-3-4	25
1-4	26
max	26

путь из 1 в 5	
1-2-5	17
1-2-4-5	25
1-3-4-5	37
1-4-5	38
max	38

путь из 1 в 6	
1-2-4-6	26
1-2-4-5-6	42
1-2-5-6	34
1-3-6	26
1-3-4-6	38
1-3-4-5-6	54
1-4-5-6	55
1-4-6	39
max	55

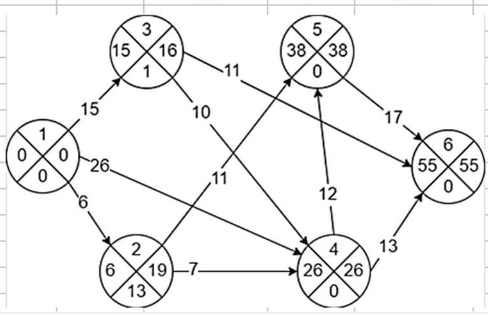
путь из 2 в 5	
2-4-5	19
2-5	11
max	19

путь из 2 в 6	
2-4-6	20
2-4-5-6	36
2-5-6	28
max	36

пусть из 3 в 6	
3-4-5-6	39
3-4-6	23
3-6	11
max	39

путь из 4 в 6	
4-5-6	29
4-6	13
max	29

tкр 55



Критический срок составляет 55, что превышает срок выполнения(50)
Критический путь: 1-4-5-6

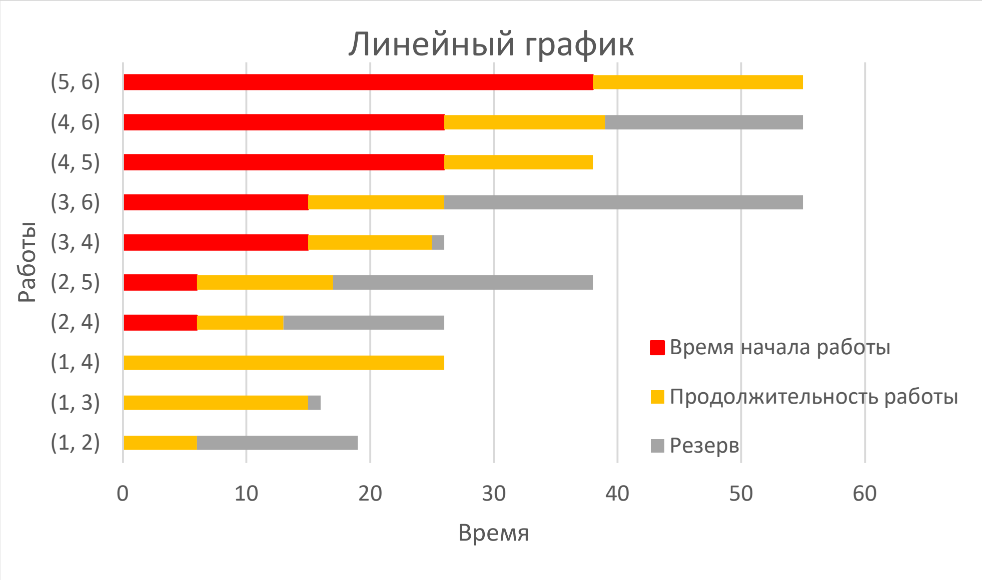
График Ганта

работы	$t_{рн}(i,j) = t_р(i)$	$t(i,j)$	$R_п(i,j)$	
(1, 2)	0	6	13	Есть резерв
(1, 3)	0	15	1	Есть резерв
(1, 4)	0	26	0	Критический путь
(2, 4)	6	7	13	Есть резерв
(2, 5)	6	11	21	Есть резерв
(3, 4)	15	10	1	Есть резерв
(3, 6)	15	11	29	Есть резерв
(4, 5)	26	12	0	Критический путь
(4, 6)	26	13	16	Есть резерв
(5, 6)	38	17	0	Критический путь

Критический путь определяется по работам на диаграмме, на которых отсутствует резерв времени.

Критический путь: (1,4), (4,5), (5,6)

Продолжительность критического пути: 55

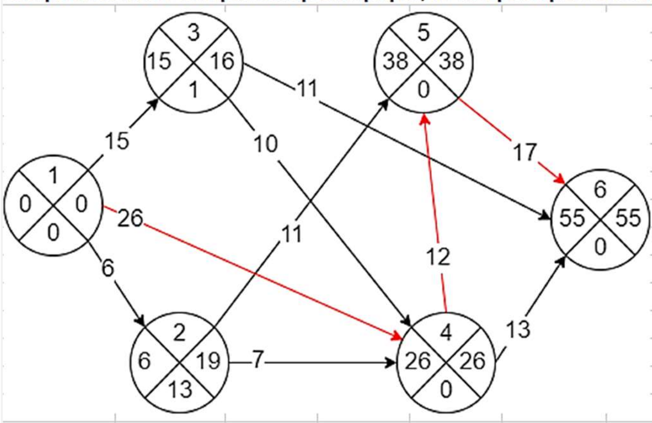


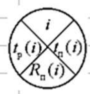
Решение при $t_{кр}$ с ограничением

Условия:

- срок выполнения всего комплекса работ не превышал заданной величины t0;
- суммарное количество дополнительно вложенных средств было
- минимальным;
- продолжительность выполнения каждой работы t'_{ij} была не меньше заданной величины d_{ij}.

Построим сетевой четырёхсекторный график, на котором критический путь выделен красным





Математическая модель данной задачи имеет слудеющий вид.

Целевая функция имеет вид:

f = x12 + x13 + x14 + x24 + x25 + x34 + x36 + x45 + x46 + x56 -> min

Срок выполнения проекта не должен превышать t0 = 50

$t_{36}^{о} \le 50, t_{46}^{о} \le 50, t_{56}^{о} \le 50$

Продолжительность выполнения каждой работы должна быть не меньше минимального времени выполнения данной работы.

$t_{12}^{о} - t_{12}^{н} \ge 6$
$t_{13}^{о} - t_{13}^{н} \ge 15$
$t_{14}^{о} - t_{14}^{н} \ge 26$
$t_{24}^{о} - t_{24}^{н} \ge 7$
$t_{25}^{о} - t_{25}^{н} \ge 11$
$t_{34}^{о} - t_{34}^{н} \ge 10$
$t_{36}^{о} - t_{36}^{н} \ge 11$
$t_{45}^{о} - t_{45}^{н} \ge 12$
$t_{46}^{о} - t_{46}^{н} \ge 13$
$t_{56}^{о} - t_{56}^{н} \ge 17$

Зависимость продолжительности работ от вложенных средств.

$t_{12}^{о} - t_{12}^{н} \le 6 - 0.07x_{12}$
$t_{13}^{о} - t_{13}^{н} \le 15 - 0.2x_{13}$
$t_{14}^{о} - t_{14}^{н} \le 26 - 0.3x_{14}$
$t_{24}^{о} - t_{24}^{н} \le 7 - 0.1x_{24}$
$t_{25}^{о} - t_{25}^{н} \le 11 - 0.05x_{25}$
$t_{34}^{о} - t_{34}^{н} \le 10 - 0.1x_{34}$
$t_{36}^{о} - t_{36}^{н} \le 11 - 0.04x_{36}$
$t_{45}^{о} - t_{45}^{н} \le 12 - 0.05x_{45}$
$t_{46}^{о} - t_{46}^{н} \le 13 - 0.15x_{46}$
$t_{56}^{о} - t_{56}^{н} \le 17 - 0.5x_{56}$

Время начала выполнения каждой работы должно быть не меньше времени окончания непосредственно предшествующей ей работы.

$t_{12}^{н} = 0; t_{13}^{н} = 0; t_{14}^{н} = 0$
$t_{24}^{н} \ge t_{12}^{о}$
$t_{25}^{н} \ge t_{12}^{о}$
$t_{34}^{н} \ge t_{13}^{о}$
$t_{36}^{н} \ge t_{13}^{о}$
$t_{45}^{н} \ge t_{14}^{о}$
$t_{45}^{н} \ge t_{34}^{о}$
$t_{46}^{н} \ge t_{14}^{о}$
$t_{46}^{н} \ge t_{34}^{о}$
$t_{56}^{н} \ge t_{45}^{о}$
$t_{56}^{н} \ge t_{25}^{о}$

Условия неотрицательности неизвестных

$t_{ij}^{н} \ge 0, \quad t_{ij}^{о} \ge 0, x_{ij} \ge 0, (i, j) \epsilon \vec{e}$

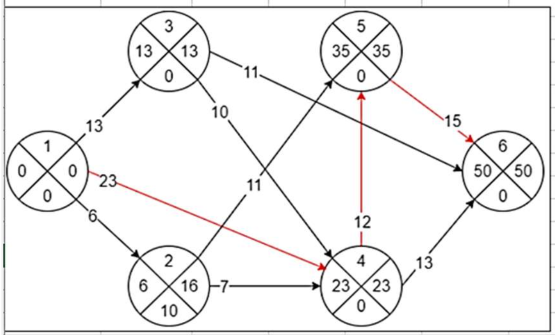
Найдём решение

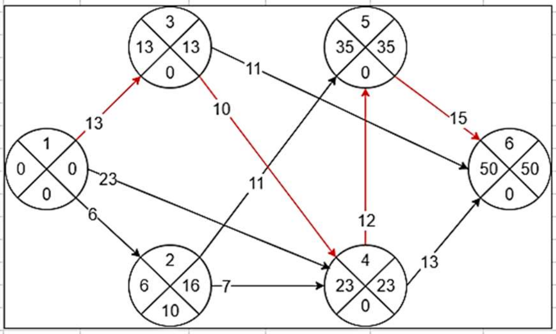
параметры	**работы**										**срок выполнения**
	1,2	1,3	1,4	2,4	2,5	3,4	3,6	4,5	4,6	5,6	
tij	6	15	26	7	11	10	11	12	13	17	50
dij	5	13	20	5	9	7	8	9	12	15	
kij	0,07	0,2	0,3	0,1	0,05	0,1	0,04	0,05	0,15	0,5	
xij	0	10	10	0	0	0	0	0	0	4	
$t_{ij}^{о}$	6	13	23	13	17	23	24	35	36	50	
$t_{ij}^{н}$	0	0	0	6	6	13	13	23	23	35	
$t_{ij}^{о}$ $t_{ij}^{н}$	6	13	23	7	11	10	11	12	13	15	
t'_{ij}	6	13	23	7	11	10	11	12	13	15	

fmin	24	$t'_{ij} = t_{ij} - k_{ij}x_{ij}$

Минимальные затраты на оптимизацию: 24

Результаты представим на сетевом графике





Вычислим новые временные параметры

работы	$t'(i,j)$
(1, 2)	6
(1, 3)	13
(1, 4)	23
(2, 4)	7
(2, 5)	11
(3, 4)	10
(3, 6)	11
(4, 5)	12
(4, 6)	13
(5, 6)	15

события	$t_{\text{р}}(i)$	$t_{\text{п}}(i)$	$R_{\text{п}}(i)$
1	0	0	0
2	6	16	10
3	13	13	0
4	23	23	0
5	35	35	0
6	50	50	0

$t_{\text{рн}}(i,j) = t_{\text{р}}(i)$	$t_{\text{ро}}(i,j)$	$t_{\text{по}}(i,j) = t_{\text{п}}(j)$	$t_{\text{пн}}(i,j)$	$R_{\text{п}}(i,j)$	$R_{\text{н}}(i,j)$	$R'(i,j)$	$R''(i,j)$
0	6	16	10	10	0	10	0
0	13	13	0	0	0	0	0
0	23	23	0	0	0	0	0
6	13	23	16	10	0	0	10
6	17	35	24	18	8	8	18
13	23	23	13	0	0	0	0
13	24	50	39	26	26	26	26
23	35	35	23	0	0	0	0
23	36	50	37	14	14	14	14
35	50	50	35	0	0	0	0

путь из 1 в 4	
1-2-4	13
1-3-4	23
1-4	23
max	23

путь из 1 в 5	
1-2-5	17
1-2-4-5	25
1-3-4-5	35
1-4-5	35
max	35

путь из 1 в 6	
1-2-4-6	26
1-2-4-5-6	40
1-2-5-6	32
1-3-6	24
1-3-4-6	36
1-3-4-5-6	50
1-4-5-6	50
1-4-6	36
max	50

путь из 2 в 5	
2-4-5	19
2-5	11
max	19

путь из 2 в 6	
2-4-6	20
2-4-5-6	34
2-5-6	26
max	34

пусть из 3 в 6	
3-4-5-6	37
3-4-6	23
3-6	11
max	37

путь из 4 в 6	
4-5-6	27
4-6	13
max	27

$t_{\text{кр}}$ 50

График Ганта

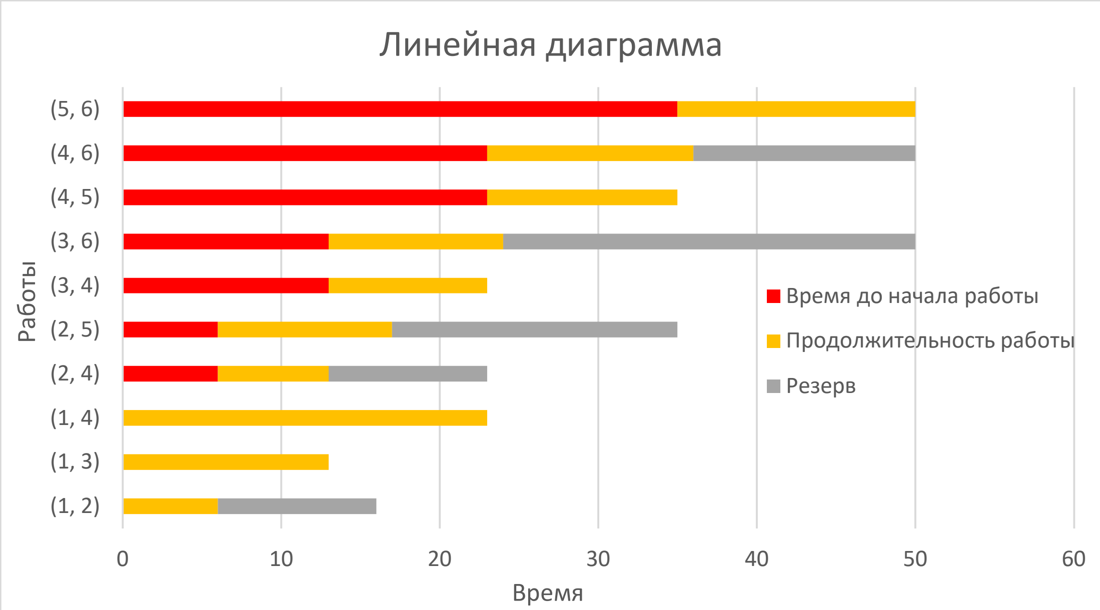
работы	$t_{\text{рн}}(i,j) = t_{\text{р}}(i)$	$t'(i,j)$	$R_{\text{п}}(i,j)$	
(1, 2)	0	6	10	Есть резерв
(1, 3)	0	13	0	Критический путь
(1, 4)	0	23	0	Критический путь
(2, 4)	6	7	10	Есть резерв
(2, 5)	6	11	18	Есть резерв
(3, 4)	13	10	0	Критический путь
(3, 6)	13	11	26	Есть резерв
(4, 5)	23	12	0	Критический путь
(4, 6)	23	13	14	Есть резерв
(5, 6)	35	15	0	Критический путь

Критический путь определяется по работам на диаграмме, на которых отсутствует резерв времени.

Критический путь 1: (1,3), (3,4), (4,5), (5,6)

Критический путь 2: (1,4), (4,5), (5,6)

Продолжительность критического пути: 50



Вывод: Чтобы выполнить работы проекта за директивное время t0 = 50, необходимо дополнительно вложить 24 ден.ед.

При этом средства будут распределяться следующим образом:

10 ден.ед. в работу (1,3)

10 ден.ед. в работу (1,4)

4 ден.ед. в работу (5,6)

Что приведет к сокращению продолжительности работы (1,3) на 2 дня, работы (1,4) на 3 дня работы (5,6) на 2 дня

Сокращение срока реализации проекта за счёт вложения дополнительных средств составит 7 ед. времени.