期末复习串

一、行列式

(1) 定义：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

19年1. 已知多项式 $p(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 & 0 \\ x^3 & x & 2 & 1 \\ -x^4 & 0 & x & 2 \\ 4 & 3 & 4 & x \end{vmatrix}$ 则 $p(x)$ 中 x^7

$\boxed{\text{的系数}}$ 为 $(-1)^{\tau(2134)}x^2\cdot x^3\cdot x\cdot x+(-1)^{\tau(2314)}x^2\cdot 2\cdot(-x^4)\cdot x$

$=-3x^7$

2、性质：① $|A|=|A^T|$ ② 交换两行 变号.（两行同 为0）

③ $kD=k$乘D中某一行（某一列） 注意与$|kA|$的区别

$|kA|=k^n|A|$ ④ 两行成比例 为0.

⑤ 某行（列）为两元素之和，分成两D.（注意与$|A+B|$

区别） ⑥ $\det(a_{ij})\xrightarrow{kr_i+r_j}\det(a_{ij})$ 不变.

3. 展开定理. M_{ij} 余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$. 代数余子式

$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$ $i=1,2\cdots n$

$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$ $j=1,2\cdots n$.

$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0$ $i\neq j$

$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0$ $i\neq j$

17年1. 已知 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=27$. D的第2行元素的代数余子式为 A_{21} A_{22} A_{23} A_{24} 则 $A_{21}+A_{22}=18$

解：所求 $=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \equiv x$.

$$D \xlongequal{-\frac{1}{2}r_4+r_2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}x = 27 \quad \therefore x=18.$$

4 行列式计算. ① 化为上、下三角行列式

② 将某行(列)化为非零元素较少时展开

讲义,书上例题.

③ 用展开定理找递推规律..

④ 升阶

该题观察其每行元素和一定，∴从 D_n 找 D_{n-1}，

范德蒙行列式

$$D_n = (D_n^T) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$$

19年2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{vmatrix} = (2-1)(3-1)(3-2)(a-1)(a-2)(a-3)$
$= 2(a-1)(a-2)(a-3)$

5. Cramer法则. $Ax=b$. 当$|A|\neq 0$. $x_i = \frac{D_i}{D}$

二 矩阵.

1. 运算. 加法. 数乘. 乘积(无交换律) 转置. $(AB)^T = B^TA^T$

α. β为列向量. $\alpha\beta^T$为矩阵. $\alpha^T\beta$为数.

若 $A = \alpha\beta^T$ 求 $A^n = \alpha(\beta^T\alpha)(\beta^T\alpha)\cdots(\alpha)\beta^T$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}(1 \quad 1 \quad 1)$ 秩为1的矩阵分解

$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $A = \lambda E + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 求A^n

2. 逆矩阵. $AB = BA = E$. $A = B^{-1}$ $B = A^{-1}$

$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ $AA^* = |A|E$

可逆. 满秩 非奇异

运算: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $|A||A^*| = |A|^n E$.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

[illegible]

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \frac{1}{\lambda_2} & \\ & & \frac{1}{\lambda_3}\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}0 & A_1\\ A_2 & 0\end{pmatrix} \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} & A_2^{-1}\\ A_1^{-1} & \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s\end{pmatrix} \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1}\end{pmatrix}$$

与A^{-1} A^*相关的求行列式

17年2. 设3阶A^* $|A|=\frac{1}{2}$ 则$|(3A)^{-1}-2A^*|=$____

$(3A)^{-1}=\frac{1}{3}A^{-1}$ $\because AA^*=|A|E$ $\therefore |A||A^*|=\frac{1}{8}$

$\therefore |A^*|=\frac{1}{4}$ $\because AA^*=\frac{1}{2}E$ $\therefore A^{-1}=2A^*$

$\therefore |(3A)^{-1}-2A^*|=|\frac{2}{3}A^*-2A^*|=|\frac{-4}{3}A^*|=-\frac{64}{27}\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$

19年5. 设3阶A 满足$A^*=A^T$ 若$a_{11}=a_{12}=a_{13}=a>0$.

则$a=$ $\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

解: $AA^*=|A|E=AA^T$ $\therefore |AA^T|=|A|^2=|A|^3$

$\therefore |A|=1$ 或 $|A|=0$ (舍) $\therefore 3a^2=1$ $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a^2 & & \\ & a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2 & \\ & & a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3a^2 & & \\ & 3a^2 & \\ & & 3a^2\end{pmatrix}$$

18年 八 已知A为n阶可逆阵 A^*为伴随

求证 $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

证明：A可逆 ∴ $|A| \neq 0$ $AA^* = |A|E$

∴ $A^* = |A| \cdot A^{-1}$ ☆

要求 $(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1}$

☆ 两边取行列式 $|A^*| = |A|^n \cdot |A^{-1}| = |A|^{n-1}$

☆ 两边取逆 $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|}A$

∴ $(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1} \cdot \frac{1}{|A|} \cdot A = |A|^{n-2}A$.

初等变换求逆.

求逆的应用. 求解矩阵方程（求解. 还没（通过乘逆等）把消放到全部左（右）. 左乘右乘保持

17年三. 18三. 20年三.

19年3 已知 $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$ 满足 $A^6=E$ 则 $A^{11}=$ ______

详：$(A^6)^2=A^{12}=A^{11}\cdot A=E^2=E$ $\therefore A^{11}=A^{-1}=$

$$=\frac{1}{\frac{1}{4}\cdot 4}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$$

会求逆 $(A\,|\,E)\xrightarrow{\text{行初等变换}}(E\,|\,A^{-1})$

~~19年4. 已知~~ 20年6. 设 A 为 n 阶方阵 且 $A^2-A-5E=0$

则 $(A+E)^{-1}=$ $\underline{\frac{1}{3}(A-2E)}$

详：$A^2-A=5E$. $(A+E)(A-2E)=A^2-A-2E=3E$

3 秩（定义）

初等变换 不改变秩
$\begin{cases}① \text{ 对换 } r_2\leftrightarrow r_3 \,/\, c_2\leftrightarrow c_3\\ ② \text{ 倍乘 } kr_2 \,/\, kc_3\\ ③ \ kr_2+r_3 \,/\, kc_2+c_3\end{cases}$

用初等变换求秩 $A\xrightarrow{\text{行初等}}$ 行阶梯形 B.

$r(A)=B$ 非零行个数.

秩决定等价标准形为何种. 左上角为 r 阶单位阵

20年10. 矩阵 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 5\\ 3 & 4 & -3 & -2\\ 4 & 3 & -1 & 3\end{pmatrix}$ 的等价标准形为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$A\xrightarrow{\text{行初等}}$ 行最简形 $\xrightarrow{\text{列初等}}$ 等价标准形

4. 初等矩阵. 定义. 初等行变换 $\Leftrightarrow$ 左乘初等矩阵

列 $\Leftrightarrow$ 右乘…

19年4. 已知A为3阶可逆阵 将A的第3列减去第2列时 所得矩阵为B. 则$B^{-1}A=$ ________

$$A\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=B=AP.\qquad B^{-1}A=(AP)^{-1}A=P^{-1}A^{-1}A=P^{-1}$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

第3列加上第2列为减去的逆.

$A\cong B \Leftrightarrow \exists$可逆$P$. Q 使 $PAQ=B$.

5. 矩阵A的秩的结论 P. Q可逆 则 $r(PA)=r(AQ)=r(A)$

$r(A)=r(A^T)$ ($\because$ A的秩$=A$的行秩$=A$的列秩)

$r(AB)\le r(A)$ $\quad r(AB)\le r(B)$

$r(A+B)\le r(A)+r(B)$ $\quad r(A^TA)=r(AA^T)=r(A)$

若A, B n阶方阵 且$AB=0$ 则$r(A)+r(B)\le n$

$$r(A^*)=\begin{cases}n \Leftrightarrow r(A)=n\\1 \Leftrightarrow r(A)=n-1\\0 \Leftrightarrow 其它\end{cases}$$

证 $\because AA^*=|A|E$

$|A||A^*|=|A|^n$

~~$\therefore |A^*|=|A|^{n-1}$~~

① 当$r(A)=n$时 $|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$ $\therefore r(A^*)=n$

② 当$r(A)=n-1$时 A有非零的$n-1$阶子式 $\therefore A^*\neq 0$ $\therefore r(A^*)$

又$AA^*=0$ $\therefore r(A)+r(A^*)\le n$ $\therefore r(A^*)=1$ 省

8

③ 当 $r(A)<n-1$ 时　A的所有 $n-1$ 阶子式全为 0

$\therefore A^*=0$.　$r(A^*)=0$

18年6. 已知 A、A^*　B 均为 n 阶非零阵 若 $AB=0$

则 $r(B)=$ ______

解: $AB=0 \Rightarrow r(A)+r(B)\le n$ 、 $\boxed{B\neq 0 \Rightarrow r(B)\ge 1}$

$\therefore r(A)\le n-1$　又 $A^*\neq 0$　$\therefore r(A)=n$ 或 $n-1$

$$r(A^*)=\begin{cases} n & r(A)=n \\ 1 & r(A)=n-1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

$\therefore r(A)=n-1$

~~$\therefore$ B的列向量均为 $Ax=0$~~

$\therefore r(B)\le 1$　$\therefore r(B)=1$

~~的解~~

20年七. $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$　α、β 3维列向量. 证明

(1) $r(A)\le 2$.　(2) 若 α. β 线性相关　则 $r(A)<2$

证: (1)　$r(A)=r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\le r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)$

$=r(\alpha)+r(\beta)$　$(r(AA^T)=r(A))$

≤ 2.

(2) 若 α. β 线性相关　不妨设 $\alpha=k\beta$. 则

$r(A)=r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)=r[(1+k^2)\beta\beta^T]=r(\beta\beta^T)=r(\beta)\le 1<2$

17年八 [illegible]　eg: n阶矩阵 A 满足 $A^2=A$ 求证

$r(A)+r(E-A)=n$

⑧

证：$\because A-A^2=A(E-A)=0$ $\therefore E-A$的列向量均为 $AX=0$ 的解向量 若 $r(A)=n$ 则 $E-A=0$

此时 $r(A)+r(E-A)=n$

若 $r(A)\overset{=r}{<}n$ 设 $\xi_1\cdots\xi_{n-r}$ 是 $AX=0$ 的基础解系

则 $E-A$ 的列向量可由 $\xi_1\cdots\xi_{n-r}$ 线性表示. 故

$r(E-A)\le n-r$ 总之. $r(A)+r(E-A)\le n$

(能否直接 $\because A(E-A)=0$ $\therefore r(A)+r(E-A)\le n$

又 $A+(E-A)=E$ $\therefore r(A+(E-A))=r(E)=n$
$\le r(A)+r(E-A)$)

$\therefore r(A)+r(E-A)=n$.

四. 向量组的线性相关性.

$\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$

有~~非零~~不全为零的 $k_1\ k_2\cdots k_n$ 则相关 只有零则无关

方程组的三种形式
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

令 $\alpha_1=(a_{11}\ a_{21}\cdots a_{m1})^T \cdots\cdots \alpha_n=(a_{1n}\ a_{2n}\cdots a_{mn})^T$

$\beta=(b_1\ b_2\cdots b_m)^T$ A为系数矩阵

$$AX=\beta \Leftrightarrow (\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$$

* β 能由 $\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ $AX=\beta$ 有解

$\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n$ 是否线性相关 $\Leftrightarrow$ $x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=0$ 可

是否有非零解.

方程组解的相关问题:

① n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解的充要条件是 $r(A)<n$

② 方程个数 = 未知数个数 (向量维数 = 向量个数) 有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0$

③ 非齐次线性方程组有解的充要条件为 $r(A)=r(A\,\vdots\,b)$

本质上是初等变换求矩阵的秩 (化为行阶梯形矩阵)

齐次的通解 $x=k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$　自由变量依次1最

n元．$r(A)=r$．　将A化为行最简形 求~~基础解~~ 解

非齐次通解 $x=$齐次通解 $+$ 非齐次特解．

将 $(A\mid b)$ 化为行最简形 求特解（自由变量取0常

eg：当λ取何值时．方程组无解？有唯一解．有无穷多解

$r(A)\neq r(A\mid b)$　$r(A)=n$　$r(A)<$

$$\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1\\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2\\ 2x_1+4x_2+(\lambda-5)x_3=\lambda+1\end{cases}$$

解：增广矩阵有参数λ 作初等变换费力．方阵 可考虑行列式

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ 2 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

当$\lambda\neq1,\lambda\neq10$时　$r(A)=r(A\mid b)=3$．　有唯一解．

当$\lambda=1$时．　$r(A)=r(A\mid b)=1$　$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&1\\2&4&-4&2\\2&4&-4&2\end{array}\right)$

有无穷多解．

当$\lambda=10$时　$(A\mid b)=\left(\begin{array}{ccc|c}-8&2&-2&1\\2&-5&-4&2\\2&4&5&11\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc}2&4&5&11\\0&1&1&1\\0&0&0&27\end{array}\right)$

$r(A)=2$．$r(A\mid b)=3$　无解．

判断$Ax=b$有解．求参数 也是对$(A\mid b)$初等变为阶梯形

$r(A)=r(A\mid b)$　18年五．

17年四 线性相关性转化为齐次方程组是否有非零解的问题 ①

19年三 也可一样判断 ∵向量个数与维数相同 也可象前面一样直接用行列式（本质同）

20年六 线性相关性转化为齐次方程组 判断是否有非零解 特殊系数矩阵方阵 可考虑行列式

回顾

线性相关性：

① $\alpha_1 \cdots \alpha_m\ (m \geq 2)$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 至少有一向量可由其余向量线性表示

② $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 线性无关 $\alpha_1 \cdots \alpha_m \beta$ 相关 则 β 可由 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 线性表示

③ 若 $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 线性无关

$(\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_n) = (\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n) A$ A为n阶矩阵

（β_i 可由 α 组线性表示）

则当 $|A|=0$ 时 $\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_n$ 线性相关

$|A| \neq 0$ 时 $\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_n$ 线性无关

④ $\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow r(A) < m$ $A=(\alpha_1 \cdots \alpha_m)$

⑤ n个n维向量 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |A|=0$

⑥ m个n维向量 $(m>n)$ 必线性相关

⑦ 若 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 线性相关 则 $\alpha_1 \cdots \alpha_r\ \alpha_{r+1} \cdots \alpha_m$ 仍相关

部分相关 则整体相关

⑧ 含零向量的向量组相关

⑨ $R: \alpha_i=(a_{1i}\ a_{2i}\cdots a_{ni})^T$　$S: \beta_i=(a_{p_1i}\ a_{p_2i}\cdots a_{p_ni})$

$p_1p_2\cdots p_n$ 为 $12\cdots n$ 的一个排列

则 R 组与 S 组有相同的相关性

⑩ "相关组"的截短组仍相关，无关组的接长组仍无关

⑪ $\alpha_1\cdots\alpha_r$ 可由 $\beta_1\cdots\beta_s$ 线性表示 即

$$(\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_r)=(\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_s)\begin{pmatrix}k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r}\\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2r}\\ \vdots & & & \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{sr}\end{pmatrix}_{s\times r}.$$

⑫ $C=AB$. 则 C 的列组可由 A 的列组线性表示. C 的行组可由 B 的行组线性表示

C 与 A 按列分块

极大无关组，秩

① 两向量组等价 $\Leftrightarrow$ 可互相线性表示

② 向量组与其极大无关组等价. 不同极大无关组也等价

③ $\alpha_1\cdots\alpha_r$ 可由 $\beta_1\cdots\beta_s$ 线性表示. $r>s$ 则 α 组相关

④ 向量组 R 与 S 的秩分别为 r、s. 若 R 可由 S 线性表示

则 $r\leq s$.

⑤ 向量组 R 的秩为 r. 则其中任意 r 个线性无关的向量.

都是 R 的一个极大无关组

求向量组的秩：将向量作为行（或列）构成矩阵 A. 求 A

求极大无关组，并线性表示 $A\xrightarrow{\text{行初等}}$ 行最简形（向量作为列

依据：$A \xrightarrow{\text{行初}} B$ 则A的列组与B的列组有相同的线性组合关系

六 特征值与特征向量

1 定义：$A\alpha=\lambda\alpha$ $(\alpha\neq 0)$

2 求法：$|\lambda E-A|=0$ 的根或 $|A-\lambda E|=0$ 的根

$(\lambda E-A)x=0$ 的非零解为A的属于λ的特征向量

3 性质：① 特征子空间 ② $trA=\sum_i\lambda_i$，$\prod_i\lambda_i=|A|$

18年七 $|A|=0\Leftrightarrow\lambda=0$ 为特征值 ③ A与A^T特征值同

④ λ为A特征值，$f(x)$为多项式，$f(\lambda)$为$f(A)$特征值。A可逆 $\frac{1}{\lambda}$是A^{-1}特征值，$f(\frac{1}{\lambda})$为$f(A^{-1})$特征值。

eg：已知3阶阵A 满足 $|A+E|=0$ $|A+2E|=0$ $|A-3E|=0$

$B=A^2+A^*$ 求$|B|$

解 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$ $\lambda_3=3$ 为A的特征值

$AA^*=|A|E=6E$ $\therefore A^*=6A^{-1}$

$B=A^2+A^*=A^2+6A^{-1}$ 的特征值为 $\mu_1=\lambda_1^2+6\frac{1}{\lambda_1}=-5$

$\mu_2=\lambda_2^2+6\frac{1}{\lambda_2}=1$

$\mu_3=\lambda_3^2+6\frac{1}{\lambda_3}=11$

$\therefore |B|=\mu_1\mu_2\mu_3=-55$

⑤ 上三角阵的对角元为特征值

4 相似 $\exists$可逆P $B=P^{-1}AP$ 则 $A\sim B$

性质：① $A \sim B$，则 AB 有相同特征值

② $A \sim B$ 则 $f(A) \sim f(B)$

③ A 可逆 且 $A \sim B$ 则 $A^{-1} \sim B^{-1}$

相似对角化 $P^{-1}AP = \Lambda \iff A$ 有 n 个线性无关的特征向量。（∵属于不同特征值特征向量线性无关 ∴若 A 有 n 个两两不同特征值 则 A 可对角化

$\iff$ 对于 A 的每个特征值 λ，$(\lambda E - A)x = 0$ 的解空间维数等于 λ 的重数　　17年六　　17年八

向量空间：加法和数乘封闭

维数：基底中向量的个数

七、二次型

1、标准正交基　内积 $(\alpha、\beta)=\alpha^T\beta$

① 求非零向量 r，使 r 与 $\alpha=(1、1、1)^T$ 及 $\beta=(1、-2、1)^T$ 正交。

转化为求 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \end{cases}$ 的非零解。

② 施密特正交化方法。

设 $\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性无关　令

$\beta_1=\alpha_1$

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1\ \beta_1)}\beta_1$

$\vdots$

$\beta_m=\alpha_m-\frac{(\alpha_m,\beta_1)}{(\beta_1\ \beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_m,\beta_2)}{(\beta_2\ \beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_m,\ \beta_{m-1})}{(\beta_{m-1}\ \beta_{m-1})}\beta_{m-1}$

则 $\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_m$ 两两正交 且与 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 等价。

正交化结束 再单位化 $\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}$。　$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha、\alpha)}$

2. 正交矩阵　$A^TA=E \Leftrightarrow A^T=A^{-1} \Leftrightarrow A^T$ 正交 $\Leftrightarrow A$ 的列向量组与行向量组都是 R^n 的标准正交基。

A 正交 则 $|A|=1$ 或 $|A|=-1$

3. 实对称矩阵　① 特征值全实　② 属于不同特征值的特征向量正交。③ 存在正交阵 Q 使 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\Lambda$

$\Lambda=diag(\lambda_1\cdots\lambda_n)$

矩阵
正交变换将实对称矩阵对角化步骤.

① 特征值 ② 特征向量 ③ 正交单位化 ④ 写出 O 与对应 Λ.

4. 二次型. $f=x^TAx$. A与f一一对应.

正交变换将二次型化为标准形过程

① 写出实对称A ② 求正交阵O 使 $O^TAO=\Lambda$

③ 令 $x=Oy$ 则 $f=\lambda_1 y_1^2+\cdots\lambda_n y_n^2$.

~~正定~~规范形. 标准形中系数化为 1. -1. 0

由秩与正惯性指数唯一确定. ~~惯性定理~~.

正定. $f=x^TAx \Leftrightarrow \forall x\neq 0\ \ x^TAx>0 \Leftrightarrow A$的

惯性定理: 实对称合同矩阵秩与正惯性指数相同

n个顺序主子式全大于零 $\Leftrightarrow$ A的n个特征值全大于零.

$\Leftrightarrow A\simeq E$.

5. 合同. 存在可逆P $B=P^TAP$ 则 $A\simeq B$.