2017-2018 线代期末

1、2. 书中有

3. 设 $A=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 10 & -1 & 0\\ 7 & 5 & 3\end{pmatrix}$ 则 $(A-2E)^{-1}(A^2-4E)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 10 & 1 & 0\\ 7 & 5 & 5\end{pmatrix}$

$(A-2E)^{-1}\cdot(A^2-4E)=(A-2E)^{-1}(A-2E)(A+2E)=A+2E$

4. 设3阶 $A=(a_{ij})$ P为初等阵 若

$PA=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ 则 $AP=\begin{pmatrix}a_{11}-a_{12} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}-a_{22} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31}-a_{32} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$

P为第2行减第1行 ∴ ~~看乘~~ P为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

∴ AP为 ____ 第1列减去第2列

5. 已知 $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 线性无关 $\alpha_4=2\alpha_2-\alpha_3$. $b=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$

$A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$ 则 $Ax=b$ 的通解为 $k(0,2,-1,-1)^T+(1,1,1,1)^T$

显然 $(1,1,1,1)^T$ 为 $Ax=b$ 的一个解.

$Ax=0$ 的通解为

∵ $r(A)=3$. ($\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 无关) $n=4$ ∴ 基础解系含一个解向量. 由 $2\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4=0$ (*) 知 ~~Ax=0的解~~

~~也为(*)的解~~.

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=0$ 的一个基础解系为

$(0,2,-1,-1)^T$

7. 已知A有特征值$\lambda=2$．$|A|=-3$　A^*为伴随．则

$A+A^*$必有特征值$\mu=$______

$\because AA^*=|A|E=-3E$　　$\therefore A^*=-3A^{-1}$

$\lambda=2$　$\therefore \mu=2-3\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$为$A+A^*$的特征值

8. 已知A3阶．α_1 α_2 α_3满足$A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=3\alpha_2$

$A\alpha_3=-2\alpha_3$　可逆$P=(\alpha_3\ \alpha_1\ \alpha_2)$　则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&3\end{pmatrix}$

A的特征值为1、3、-2．　$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&3\end{pmatrix}$

向量特征向量与特征值的列对应

9. $\alpha_1=(1\ 1\ 3\ -1)$　$\alpha_2=(1.1.\ 2\ 0)$　施密特正交化

$\beta_1=\alpha_1$　　$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1\ \beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}-\frac{8}{12}\begin{pmatrix}1\\1\\3\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}$

此处为行向量　$\therefore \beta_2=\frac{1}{3}(1.1.\ 0\ .2)$

10　已知A实对称．λ为其特征值　若$E+A$与$E-A$

均正定　则λ取值范围为$|\lambda|<1$

$\left\{\begin{array}{l}1+\lambda>0\Rightarrow\lambda>-1\\1-\lambda>0\Rightarrow\lambda<1\end{array}\right\}\Rightarrow|\lambda|<1$

18-19 代代期末

1. 已知 $x_1\ x_2\ x_3$ 是 $x^3+px+q=0$ 的3个根

则 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 3x_1x_2x_3 - x_1^3 - x_2^3 - x_3^3 =$ ______

$x^3+px+q=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$= x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3$

$\therefore \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=p \\ -x_1x_2x_3=q \end{cases}$ 又 $\because \begin{cases} x_1^3+px_1+q=0 \\ x_2^3+px_2+q=0 \\ x_3^3+px_3+q=0 \end{cases}$

$\therefore x_1^3+x_2^3+x_3^3=-p(x_1+x_2+x_3)-3q=-3q$

$\therefore$ 原行列式 $=-3q-(-3q)=0$

2. 已知 $\alpha=(1,-1,1)^T$ $A=E+\alpha\alpha^T$ 则 $A^2=$ ______

$A^2=(E+\alpha\alpha^T)(E+\alpha\alpha^T)=E+2\alpha\alpha^T+\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T$

$=E+5\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

4. 将3阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 表示为两初等阵乘积

第2行-2倍加到第1行 第3行3倍加到第1行

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可交换

5 $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 无关 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$. $\beta_2=2\alpha_2+\alpha_3-3\alpha_1$, $\beta_3=\alpha_1+6\alpha_2+a\alpha_3$ 则当 $a=$____时 $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$ 相关.

详: $(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 1 & 2 & 6\\ 2 & 1 & a\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 1 & 2 & 6\\ 2 & 1 & a\end{vmatrix}=2a+1-36-4+3a-6=0$$

$5a=45 \qquad a=9$

6. 已知 A、A^* B 为 n 阶非零阵 若 $AB=0$. 则 $r(B)=$

$AB=0 \Rightarrow r(A)+r(B)\leq n$. $\because B\neq 0 \quad \therefore r(B)\geq 1$

$\therefore r(A)\leq n-1$.

$\because A^*\neq 0 \quad \therefore r(A^*)=n$ 或 1. $\therefore r(A)=n$ 或 $n-1$

$\therefore r(A)=n-1 \qquad \therefore r(B)\leq 1 \qquad \therefore r(B)=1$

$$r(A^*)=\begin{cases} n & r(A)=n\\ 1 & r(A)=n-1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

7. 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ x & y & z\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 的3个特征值为1. 2. 3. 则 $x=$____

$\because 1+y+1=1+2+3 \quad \therefore y=4$

$1\cdot 2\cdot 3=6=y-2x=|A| \quad \therefore x=-1$

8. A 与 $\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$ 相似 则 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-5)$

相似阵有相同的特征多项式

特征值.

9. 已知4阶实对称 A 满足 $A^2+A=0$. 若 $r(A)=3$ 则 $f=x^TAx$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为

设 λ 为 A 的特征值. 则 $\lambda^2+\lambda$ 为 0 的特征值

$\lambda=0$ 或 $\lambda=-1$　　$\because r(A)=3$　　$\therefore \lambda=-1$ 为3重特征值　0 为一重.

$\therefore$ 标准形为 $f=-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

2019-2020 代数期末

1~5 串中有

7. 设 $\alpha_1=(1,-1,0)$ $\alpha_2=(4,2,a+2)$ $\alpha_3=(2,4,3)$ $\alpha_4=(1,a,1)$

若 $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ 中任两向量都与另两向量等价 则 $a=$____

$\because$ $\alpha_1\ \alpha_3$ 线性无关 $\therefore$ $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ 秩为2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & a \\ 0 & a+2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & a+1 \\ 0 & a+2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\dfrac{6}{a+2}=\dfrac{6}{3}=\dfrac{a+1}{1}$ $\therefore a=1$

8 已知n阶 $A=(a_{ij})$, $|A|=0$. $|A|$ 的元素 a_{ij} 的余子式为 M_{ij} $(i,j=1,2\cdots n)$ 若 $M_{11}\neq 0$ 则 $AX=0$ 的通解为

解: $\because M_{11}\neq 0$ $\therefore$ 有 $n-1$ 阶子式不为零 又 $|A|=0$

$\therefore r(A)<n$ 且 $r(A)\geqslant n-1$ $\therefore r(A)=n-1$

$\therefore$ 基础解系中一个解向量. 又 $(A_{11}\ A_{12}\cdots A_{1n})^T$ 为一组解. 且 $A_{11}=M_{11}(-1)^{1+1}=M_{11}\neq 0$ $\therefore$ 为非零解

$$\begin{cases} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=0=|A|. \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+\cdots+a_{2n}A_{1n}=0 \\ \cdots \\ a_{n1}A_{11}+a_{n2}A_{12}+\cdots+a_{nn}A_{1n}=0 \end{cases}$$

$\therefore$ 通解为 $X=k(M_{11},-M_{12},\cdots(-1)^{n+1}M_{1n})^T$. k 任意

9. 已知3阶实对称阵 A 与 $diag(1, -2, 5)$ 相似 x 为任意3维单位列向量 则 x^TAx 最大值为 ______

解：相似阵有相同特征值 ∴存在正交阵 Q 使

$x=Qy$ $\quad x^TAx \xlongequal{x=Qy} y_1^2-2y_2^2+5y_3^2 \leq 5(y_1^2+y_2^2+y_3^2)=5$

∵ x 单位 ∴ $\|x\|=\|Qy\|=(Qy^T)(Qy)$

$=y^TQ^TQy=y^Ty=\|y\|^2=1$ ∴ $\|y\|=1$

∴ $5(y_1^2+y_2^2+y_3^2)=5$

等号当 $y^*=(y_1\ y_2\ y_3)^T=(0, 0\ 1)^T$ 即 $x=Qy^*$ 时成立.

2020-2021 线性代数期末填空.

1. $A^n=\underbrace{(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)\cdots(\alpha^T\beta)}_{n个}=\alpha^T\underbrace{(\beta\alpha^T)(\beta\alpha^T)\cdots(\beta\alpha^T)}_{(n-1)个}\beta$

$=\alpha^T\left[(1,\frac{1}{5},\frac{1}{3})\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}\right]^{n-1}\cdot\beta=3^{n-1}\alpha^T\beta=3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{5}&\frac{1}{3}\\5&1&\frac{5}{3}\\3&\frac{3}{5}&1\end{pmatrix}$

2. $\because AA^*=|A|E=3E$ $\quad\therefore |A|\cdot|A^*|=3^3=27$

$\therefore |A^*|=9$ $\quad |B|=-|A|=-3$.

$|BA^*|=|B|\cdot|A^*|=-3\cdot 9=-27$

3. 过点 $M_0(2,3,-5)$ 方向向量 $(2,7,-2)$ 为平面法向量. $\therefore$ 方程为 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{7}=\frac{z+5}{-2}$.

4. $(A+B)=(\alpha+r,2\beta_1,2\beta_2,2\beta_3)$

$|A+B|=8|\alpha+r,\beta_1,\beta_2,\beta_3|$

$=8\left[|\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3|+|r,\beta_1,\beta_2,\beta_3|\right]=8(|A|+|B|)$

$=8(4+1)=40$

5. $n=4$. $r=2$. $\therefore$ 基础解系有2个解向量.

x_3 一个. $x_2-x_1=(1,-1,1,2)^T$ 为一个

$\therefore Ax=b$ 的通解为 $k_1(1,0,1,0)^T+k_2(1,-1,1,2)^T$
$+(1,2,0,1)^T$

6. $A^2-A-5E=0 \qquad A^2-A=5E$

$(A+E)(A-2E)=A^2-A-2E=5E-2E=3E$

$\therefore (A+E)^{-1}=\frac{1}{3}(A-2E)$

7. $\because A^2=A$ 设A的特征值为λ. A^2-A的特征值为$\lambda^2-\lambda=0$ $\therefore \lambda=0$或$\lambda=1$

$\because r(A)=r$ $\therefore$ 有r个1. $n-r$个0.

$A-3E$的特征值有r个(-2). $(n-r)$个(-3)

$\therefore |A-3E|=(-2)^r\cdot(-3)^{n-r}=(-1)^n\cdot 2^r\cdot 3^{n-r}$.

8. A正定$\Leftrightarrow$顺序主子式全正.

1阶 $2>0$ 　2阶 $\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1>0$

3阶$=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&1&-2\\0&-2&k\end{vmatrix}=2k-k-8=k-8>0 \quad \therefore k>8$

9. 相似阵特征值相同. B^{-1}特征值2、3、4、5

$B^{-1}-E$特征值为1 2 3 4. $\therefore |B^{-1}-E|=24$

10 $\begin{pmatrix}1&-1&2&5\\3&4&-3&-2\\4&3&-1&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&2&5\\0&7&-9&-17\\0&7&-9&-17\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&2&5\\0&7&-9&-17\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore$ 等价标准形为 $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$