第三章

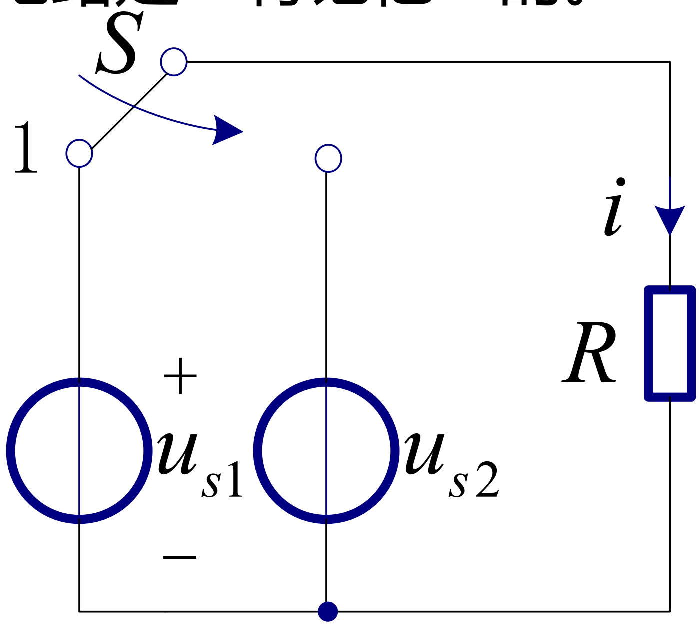
动态电路的时域分析

§3-1 引言
§3-2 动态元件的基本特性
§3-3 换路定则与初始值的确定
§3-4 一阶电路的零输入响应
§3-5 一阶电路的零状态响应
§3-6 一阶电路的全响应
§3-7 一阶电路的三要素法

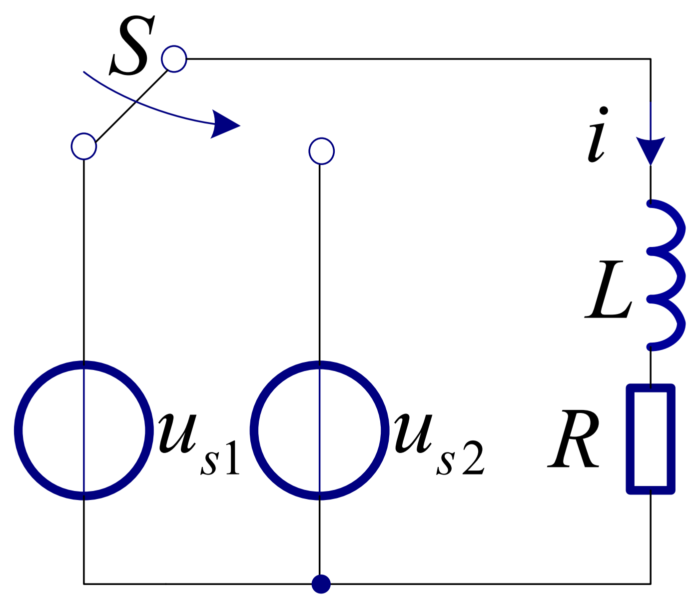
引言

动态元件：电容元件和电感元件，其电压、电流关系都涉及对电流、电压的微分或积分运算。

动态电路：含有电容和电感这样的动态元件的电路。动态电路在某时刻的响应与激励的历史状态有关，因此，动态电路是“有记忆”的。



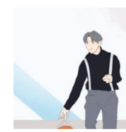
电阻电路



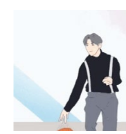
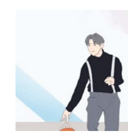
动态电路

- 动态电路的分析：一般可假设电路已经储在在稳定状态下，此时通过开关等方式改变电路的状态，分析电路进入新稳定状态的（暂态）过程
- 新问题：由于电容电感的VCR是微积分形式的，将VCR带入KCL或KVL会出现常系数微分方程（在集总参数的线性电路中），电容和电感的数量越多，情况可能就越复杂

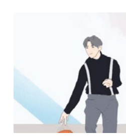
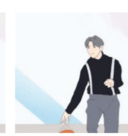
- **一阶动态电路：比如只含有一个电容或电感的电路，可以用一阶微分方程描述**

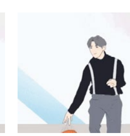


- **二阶动态电路：比如含有两个独立电容或电感的电路，可以二阶微分方程描述**

- **高阶动态电路：二阶以上的动态电路**




§3-1 电容元件

- 电容元件的基本性质和VCR
- 电容元件的串并联

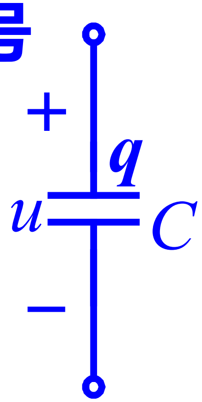
1. 电容元件的基本性质和VCR

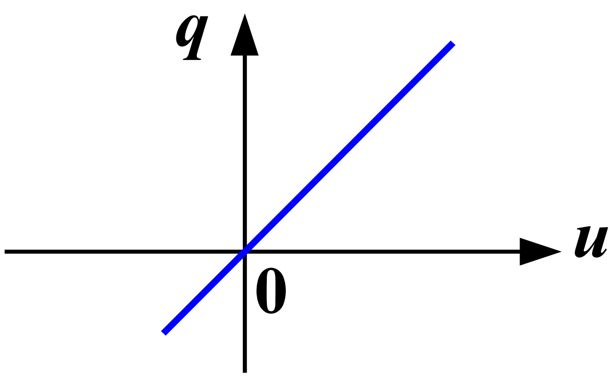
电容元件(capacitor) 是电容器的理想化模型。

电容元件是一种电荷与电压相约束的电容器的理想化模型，具有存储电荷从而在电容器中建立电场的作用。

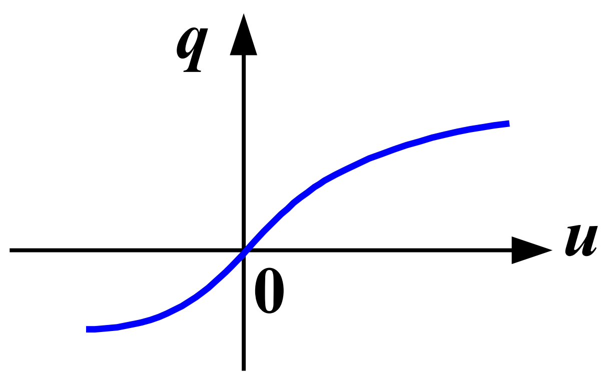
定义：如果在任一时刻t，一个二端元件的端电压$u(t)$与其存储的电荷$q(t)$之间的关系可以用u-q平面上的一条曲线确定，则称此二端元件为电容元件。

符号





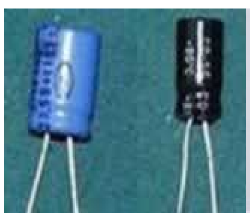
线性电容



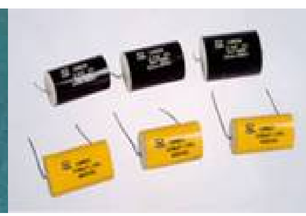
非线性电容

电容

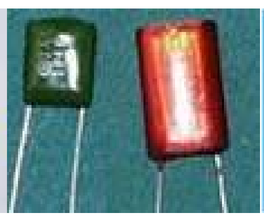
- **按容量分：固定电容器、可调电容器、半可调电容器等；**
- **按绝缘介质分：金属化纸介电容器、云母电容器、独石电容器、薄膜介质电容器、陶瓷电容器、铝电解电容器、钽电解电容器、空气和真空电容器等。**



铝电解电容



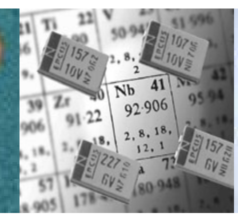
纸介电容



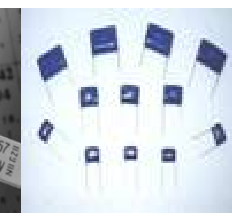
玻璃釉电容

云母电容

陶瓷电容



钽铌电解电容



薄膜电容

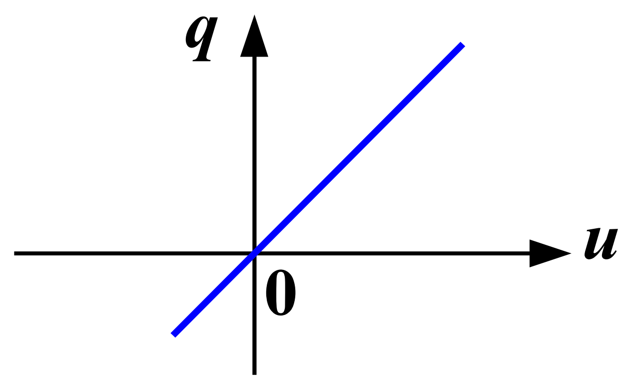
返回

1. 电容元件的基本性质和VCR

线性非时变电容元件： **电容元件的特性曲线是u-q平面上的一条过原点的直线，且不随时间而变化。**

$$\frac{q(t)}{u(t)} = C = const$$

或： $q(t) = Cu(t)$

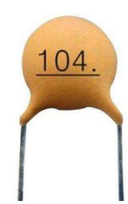


线性电容

电容（capacitance）：C

单位： **法拉**（F）←V,C

微法(μF, **皮法**(pF)

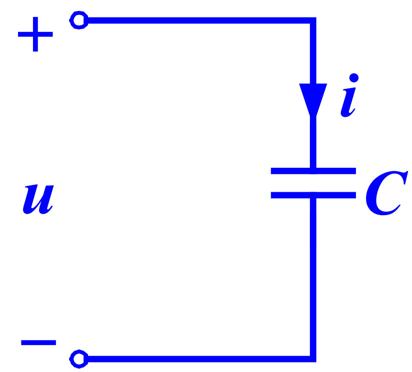


10*10^4皮法

1. 电容元件的基本性质和VCR

电容元件的VCR

在关联参考方向下：



$$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}Cu(t)}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

非关联参考方向： $i=-C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$

结论：某一时刻，电容的电流取决于该时刻电容电压的变化率。电容元件是一种动态元件。

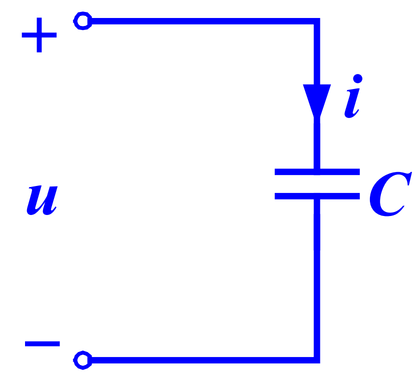
1. 电容元件的基本性质和VCR

$$|i| \propto \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \;\rightarrow\; i = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\uparrow \;\rightarrow\; |i|\uparrow \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\downarrow \;\rightarrow |i|\downarrow \end{cases}$$

电容在直流电路中相当开路——隔直作用

电容动态特性的体现

1. 电容元件的基本性质和VCR



在关联参考方向下： $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

初始电压

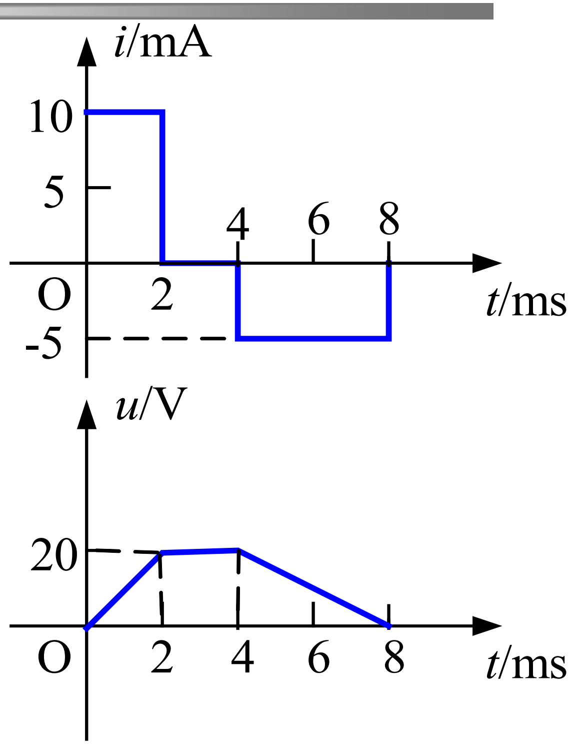
$$= u_C\left(t_0\right) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi \qquad t \geq t_0$$

结论：某一时刻的电容电压不仅与该时刻的电流有关，而且还与此时刻以前的所有电流值有关。电容电压具有“记忆”性质，电容元件是一种记忆元件。

1. 电容元件的基本性质和VCR

设 $u_C(t_0) = u_C(0) = 0$

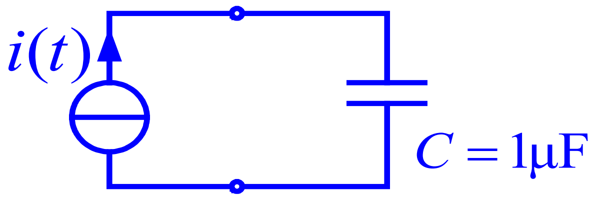
电容电流波形虽然不连续，但电容电压波形却是连续的。



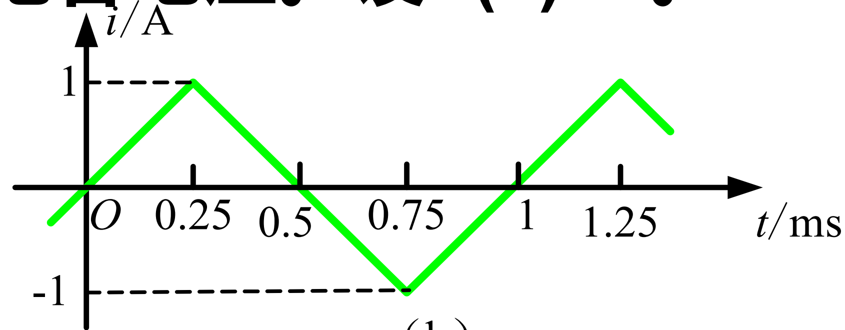
电容电压的连续性质：若电容电流$i(t)$在闭区间$[t_a, t_b]$内为有界的，则电容电压$u_c(t)$在开区间(t_a, t_b)内为连续的。特别是对任意时刻*t*，且$t_a < t < t_b$有：

$$u(t^-) = u(t^+)$$ **(电容电压不能跃变)**

例题1 如图(a)所示，电容与一电流源相接，电流源的波形如图(b)所示，试求电容电压。设$u(0)=0$。



（a）



（b）

解：(1)先写出电流的函数表达式。

$$i(t)=\frac{1}{0.25\times10^{-3}}t=4000t \qquad 0\le t\le0.25\times10^{-3}\,\mathrm{s}$$

$$i(t)=-4000(t-0.5\times10^{-3})$$

$$=-4000t+2 \qquad 0.25\times10^{-3}\,\mathrm{s}\le t\le0.75\times10^{-3}\,\mathrm{s}$$

$$i(t)=4000(t-10^{-3})$$

$$=4000t-4 \qquad 0.75\times10^{-3}\,\mathrm{s}\le t\le1.25\times10^{-3}\,\mathrm{s}$$

解（续）

(2)根据公式 $u_C(t)=u_C(t_0)+\dfrac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ 进行分段积分

$0\le t\le 0.25\times10^{-3}\,\mathrm{s}$:

$$u_C(t)=u_C(0)+\frac{1}{C}\int_0^t i(\xi)\,\mathrm{d}\xi=10^6\int_0^t 4000\xi\,\mathrm{d}\xi=2\times10^9t^2\,(\mathrm{V})$$

$0.25\times10^{-3}\,\mathrm{s}\le t\le 0.75\times10^{-3}\,\mathrm{s}$:

$$u_C(t)=u_C(0.25\times10^{-3})+\frac{1}{C}\int_{0.25\times10^{-3}}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$=125+10^6\int_{0.25\times10^{-3}}^{t}(-4000\xi+2)\,\mathrm{d}\xi$$

$$=-250+2\times10^6t-2\times10^9t^2\ (\mathrm{V})$$

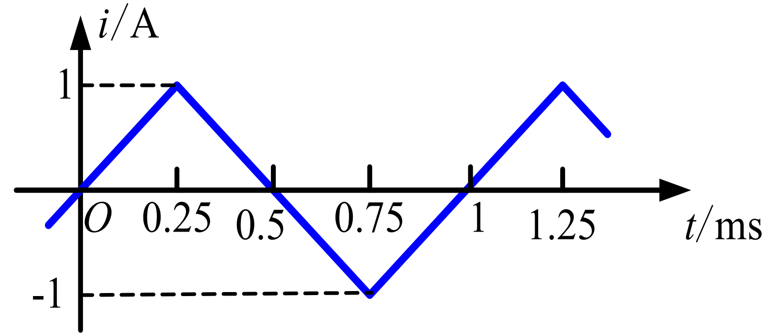
解（续）

$$0.75\times10^{-3}\,\mathrm{s}\le t\le 1.25\times10^{-3}\,\mathrm{s}:$$

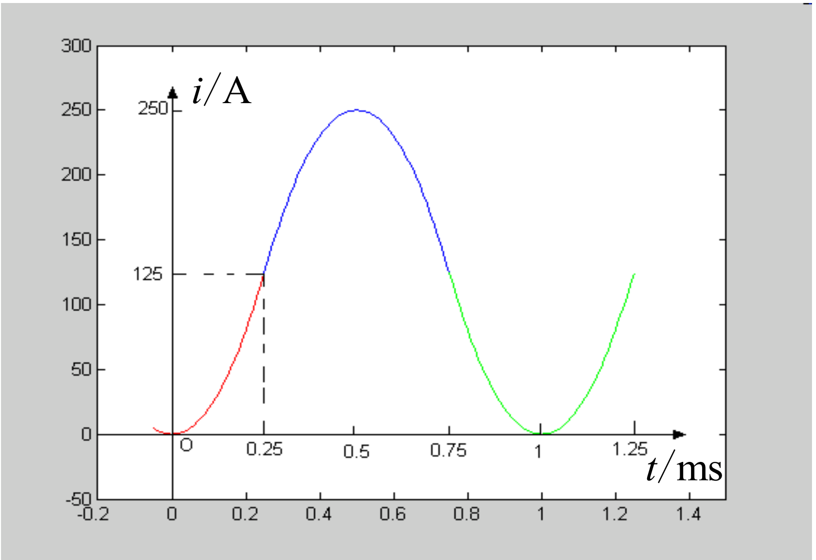
$$u_C(t)=u_C(0.75\times10^{-3})+\frac{1}{C}\int_{0.75\times10^{-3}}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$=125+10^{6}\int_{0.75\times10^{-3}}^{t}(4000\xi-4)\,\mathrm{d}\xi$$

$$=2000-4\times10^{6}t+2\times10^{9}t^{2}\ (\mathrm{V})$$



（b）



1. 电容元件的基本性质和VCR

1.6 电容元件的功率和储能

瞬时功率：每一瞬间的功率。

$$p(t)=u(t)i(t)$$

电容的瞬时功率： $p_C(t)=u_C(t)i_C(t)=u_C(t)\cdot C\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$

某一时刻电容的储能

$$w_\mathrm{C}(t)=\int_{-\infty}^{t}p_\mathrm{C}(\xi)\,\mathrm{d}\xi=C\int_{-\infty}^{t}u_\mathrm{C}\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi=C\int_{-u_\mathrm{C}(\infty)}^{u_\mathrm{C}(t)}u_\mathrm{C}\,\mathrm{d}u_\mathrm{C}$$

$$=\frac{1}{2}Cu_\mathrm{C}^2(t)$$

$t=-\infty$时无储能

结论：某时刻电容的储能只与该时刻的电压有关，电容的储能总为正。电容是无源元件。

1. 电容元件的基本性质和VCR

$$p(t)=\frac{\mathrm{d}w_C(t)}{\mathrm{d}t}\begin{cases}>0 & \text{电容不断储能}\\ <0 & \text{电容向外电路释放能量}\end{cases}$$

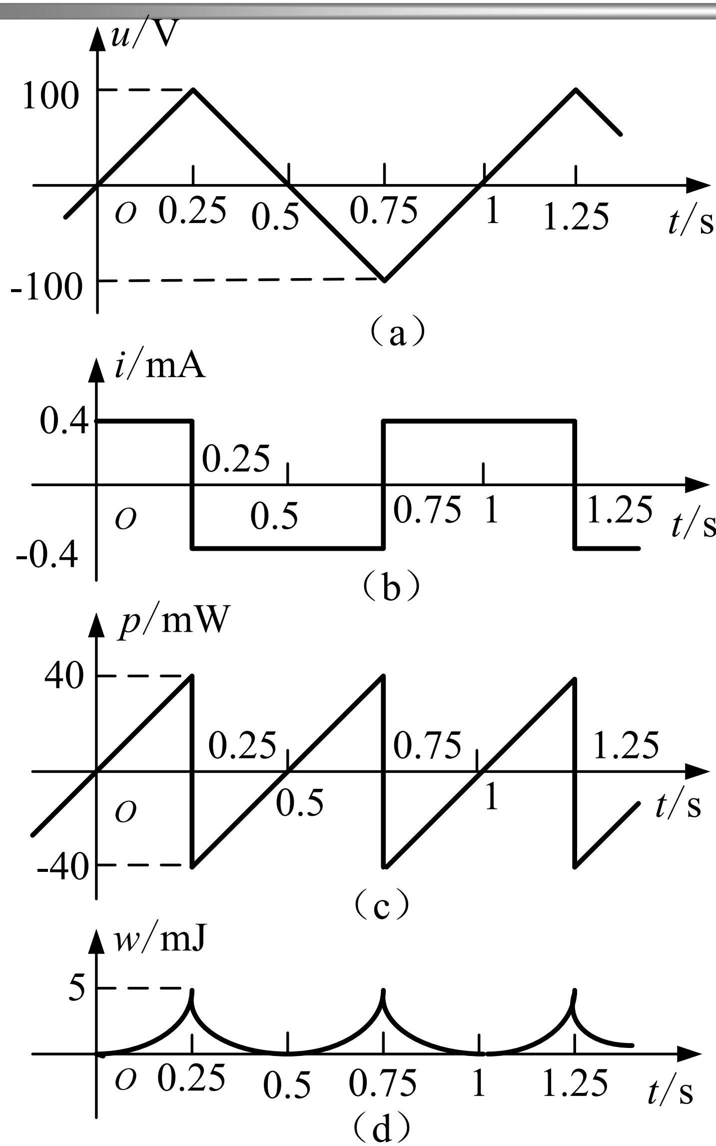
t_1~t_2期间电容储存或释放的能量：

$$W_C(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}p(\xi)\,\mathrm{d}\xi=C\int_{t_1}^{t_2}u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi=C\int_{u(t_1)}^{u(t_2)}u\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}C[u^2(t_2)-u^2(t_1)]=w_C(t_2)-w_C(t_1)$$

结论：t_1~t_2期间电容储存或释放的能量只与t_1、t_2时刻的电压值有关，而与此期间内的其他电压值无关。

1. 电容元件的基本性质和VCR

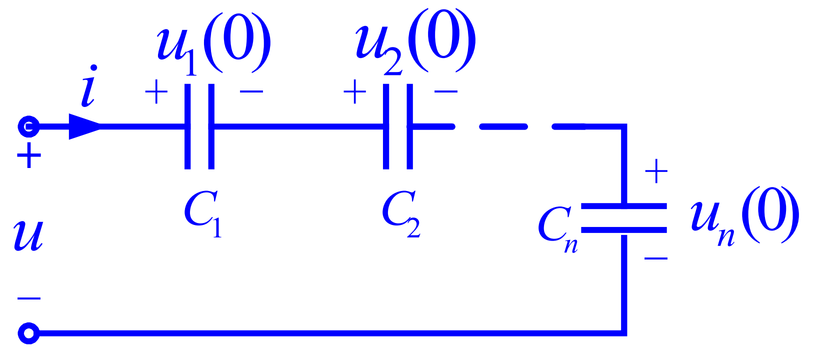


结论：电容的功率有正有负，说明电容有时吸收功率，有时放出功率。

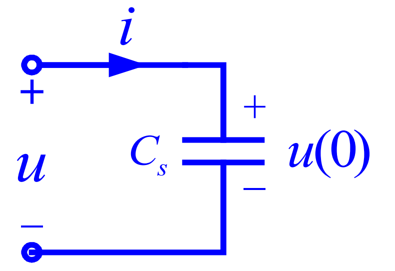
总结：电容的储能本质使电容电压具有记忆性质；在电容电流为有界条件下储能不能跃变使电容电压具有连续性质。

2. 电容元件的串并联

2.1 电容元件的串联



$\Rightarrow$



等效电路

根据KVL： $u = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$$u_1 = u_1(0) + \frac{1}{C_1}\int_0^t i\,\mathrm{d}\xi$$

$$u_2 = u_2(0) + \frac{1}{C_2}\int_0^t i\,\mathrm{d}\xi$$

……

2. 电容元件的串并联

$$u_n = u_n(0) + \frac{1}{C_n}\int_0^t i\mathrm{d}\xi$$

$$u = u_1(0) + u_2(0) + \cdots + u_n(0) + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right)\int_0^t i\mathrm{d}\xi$$

$$= u(0) + \frac{1}{C_s}\int_0^t i\mathrm{d}\xi$$

其中： $u(0) = u_1(0) + u_2(0) + \cdots + u_n(0)$

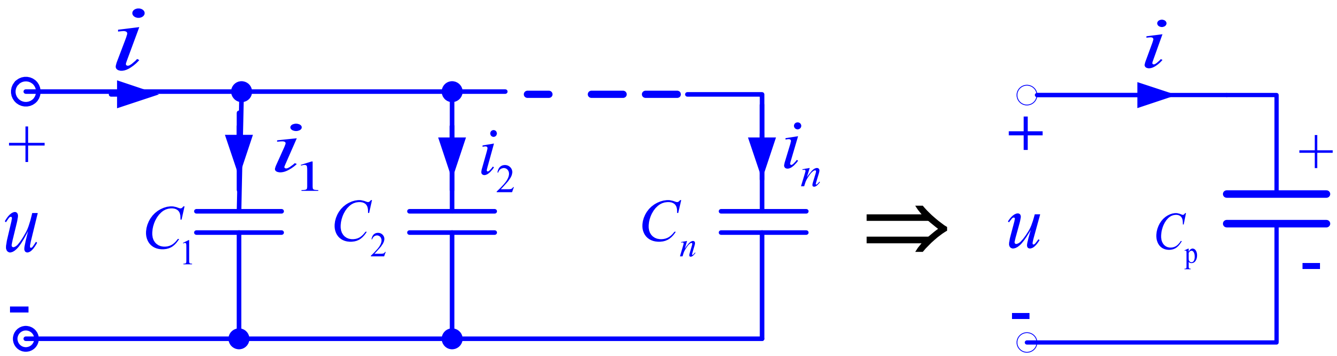
为等效电容的初始电压，是各串联电容初始电压的代数和。

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

C_s **为等效电容，其倒数为各串联电容倒数之和。**

2. 电容元件的串并联

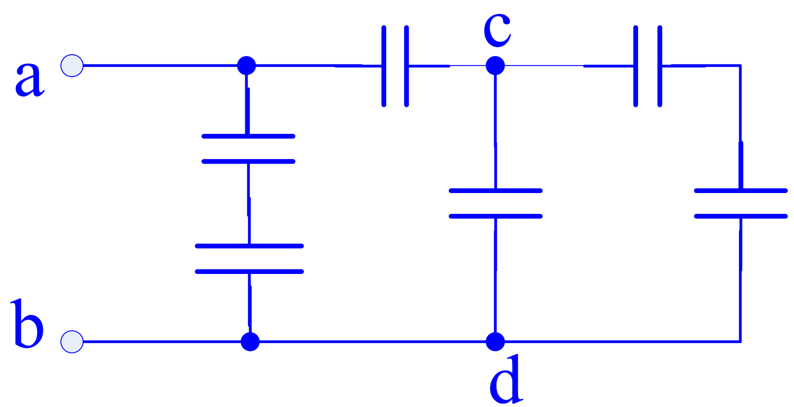
2.2 电容元件的并联 （设电容初始电压为0）



根据KCL可得等效电容:

$$C_p = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$ **为各并联电容之和。**

例题2 **如图所示电路中，各电容元件的电容值均为 1μF，试求端口ab的等效电容。**



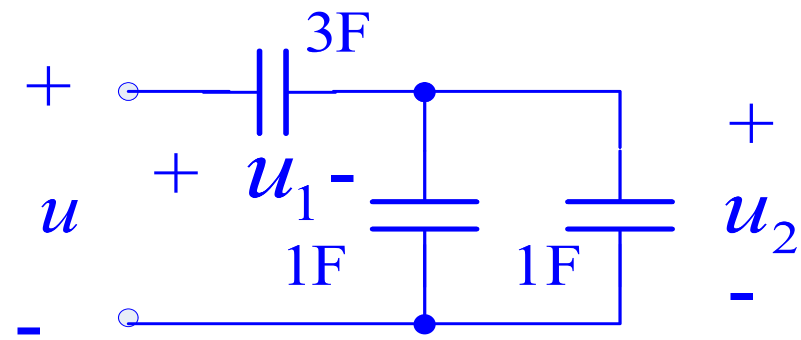
解

$$C_{cd}=1+\frac{1\times1}{1+1}=1.5\mu F$$

$$C_{ab}=\frac{1\times1}{1+1}+\frac{1\times1.5}{1+1.5}=0.5+0.6=1.1\mu F$$

例题3 求如图所示电路中各电容元件上的电压。

已知 $u = 20\text{V}$。



解 两个1F电容并联的等效电容为：$C_p = 1 + 1 = 2\text{F}$

根据电荷平衡原理，3F上的电荷应与 C_p 上的电荷相等。

$$\begin{aligned} 3u_1 &= 2u_2 \\ u &= u_1 + u_2 = 20 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} u_1 &= 8\text{V} \\ u_2 &= 12\text{V} \end{aligned}$$

§3-2 电感元件

- 电感元件的基本性质和VCR
- 电感元件的串并联

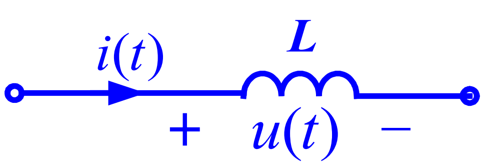
1. 电感元件的基本性质和VCR

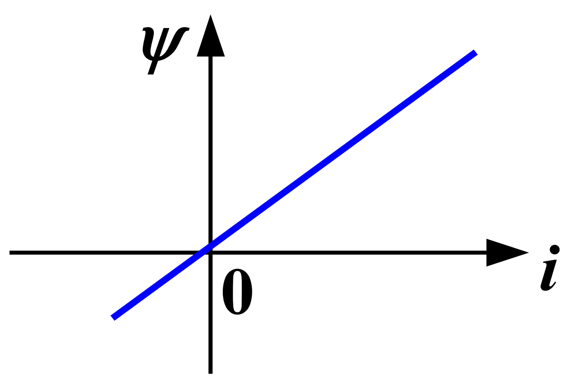
电感元件(inductor)是电感器的理想化模型。

电感元件是一种磁链与电流相约束的电感器的理想化模型，具有存储磁通从而在电感器中建立磁场的作用。

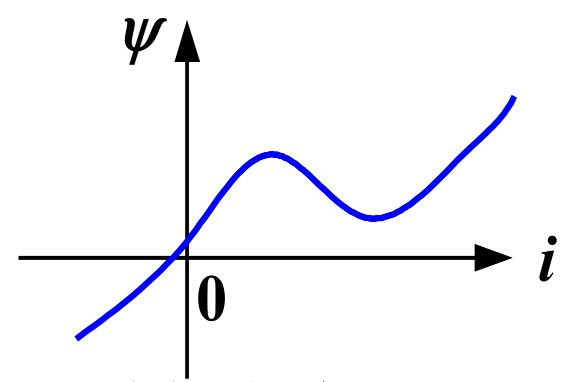
定义：如果在任一时刻t，一个二端元件的电流$i(t)$与其磁链$\Psi(t)$之间的关系可以用i-Ψ平面上的一条曲线确定，则称此二端元件为电感元件。

符号





线性电感



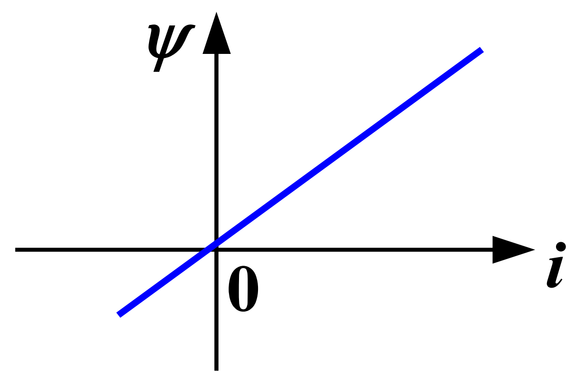
非线性电感

1. 电感元件的基本性质和VCR

线性非时变电感元件：电感元件的特性曲线是i-Ψ平面上的一条过原点的直线，且不随时间而变化。

$$\frac{\Psi(t)}{i(t)} = L = \text{const}$$

或：$\Psi(t) = Li(t)$



线性电感

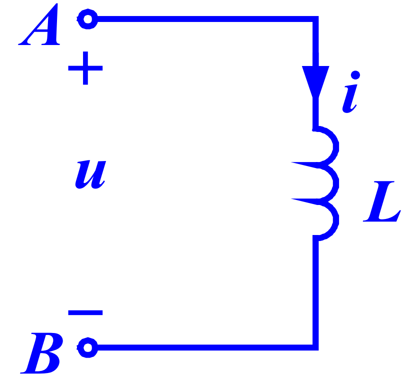
电感（inductance）: L

单位：亨利（H）←W,A

毫亨(mH)，微亨(μH)

1. 电感元件的基本性质和VCR

1.5 电感元件的VCR



关联参考方向下

$$u = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

非关联参考方向： $u = -L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

结论：某一时刻，电感的电压取决于该时刻电感电流的变化率。电感元件是一种动态元件。

1. 电感元件的基本性质和VCR

$$|u| \propto \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \rightarrow u = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \uparrow \rightarrow |u| \uparrow \\ \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \downarrow \rightarrow |u| \downarrow \end{cases}$$

电感在直流电路中相当于短路

电感动态特性的体现

1. 电感元件的基本性质和VCR

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

任选初始时刻t_0

$$=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0}u(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

初始电流

$$=i(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\xi)\,\mathrm{d}\xi \qquad t\geq t_0$$

结论：某一时刻的电感电流不仅与该时刻的电压有关，而且还与此时刻以前的所有电压值有关。电感电流具有“记忆”性质，电感元件是一种记忆元件。

1. 电感元件的基本性质和VCR

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \quad \xleftrightarrow[C \leftrightarrow L]{i \leftrightarrow u} \quad u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$q = Cu \quad \xleftrightarrow[C \leftrightarrow L]{i \leftrightarrow u,\ q \leftrightarrow \Psi} \quad \Psi = Li$$

（1）在电感电压为有界值的情况下，电感电流不能跃变——电感电流的连续性。

（2）某时刻电感的储能只与该时刻的电流有关，电感的储能总为正。电感是无源元件。

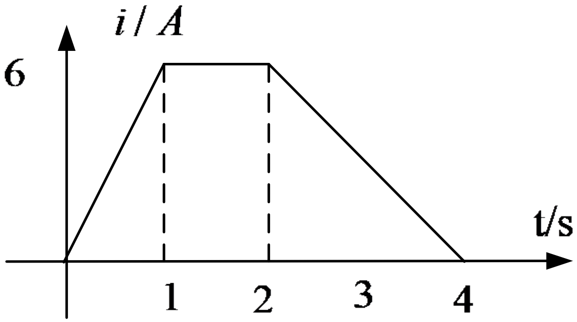
$$w_{\mathrm{L}}(t) = \frac{1}{2}L \cdot i_{\mathrm{L}}^2(t)$$

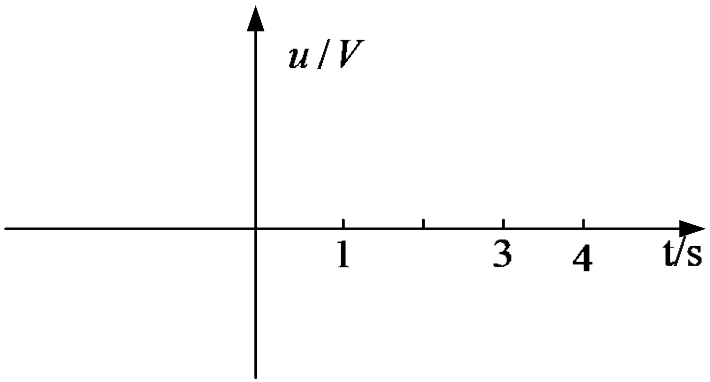
$t_1 \sim t_2$期间电感储存或释放的能量：

$$w_{\mathrm{L}}(t_2, t_1) = \frac{1}{2}L[i_{\mathrm{L}}^2(t_2) - i_{\mathrm{L}}^2(t_1)] = w_{\mathrm{L}}(t_2) - w_{\mathrm{L}}(t_1)$$

例题1

某电路中流经5H电感的电流如图（a）所示，试在图(b)中绘出该电感的电压波形图，并求当 $t=3s$ 时，电感的储能为多少？





例题2 已知流过3H电感元件的电流为 $4\mathrm{e}^{-0.2t}\cos(30t)\,\mathrm{A}$，

如果电压与电流为关联参考方向，试求电感两端的电压 $u(t)$ 及 $t=0$ 和 $t=10\mathrm{s}$ 时电感的储能。

解：$u(t)=L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=3\times[-0.2\times4\mathrm{e}^{-0.2t}\cos(30t)-30\times4\mathrm{e}^{-0.2t}\sin(30t)]$

$$=-12\mathrm{e}^{-0.2t}[0.2\cos(30t)+30\sin(30t)]\mathrm{A}$$

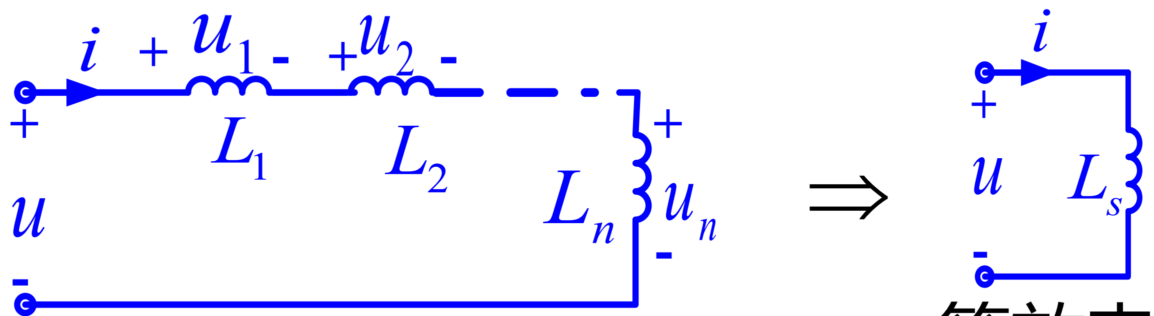
$t=0$ 时，$i(0)=4\,\mathrm{A}$ $\quad w(0)=\dfrac{1}{2}Li^2(0)=\dfrac{1}{2}\times3\times4^2=24\,\mathrm{J}$

$t=10\,\mathrm{s}$ 时，$i(10)=4\mathrm{e}^{-2}\cos(300)=-0.012\,\mathrm{A}$

$$w(10)=\frac{1}{2}Li^2(10)=\frac{1}{2}\times3\times(-0.012)^2=0.0002\,\mathrm{J}$$

2. 电感的串并联

2.1 电感的串联（设电感初始电流为0）



等效电路

根据KVL：

$$u = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = L_1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \cdots + L_n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

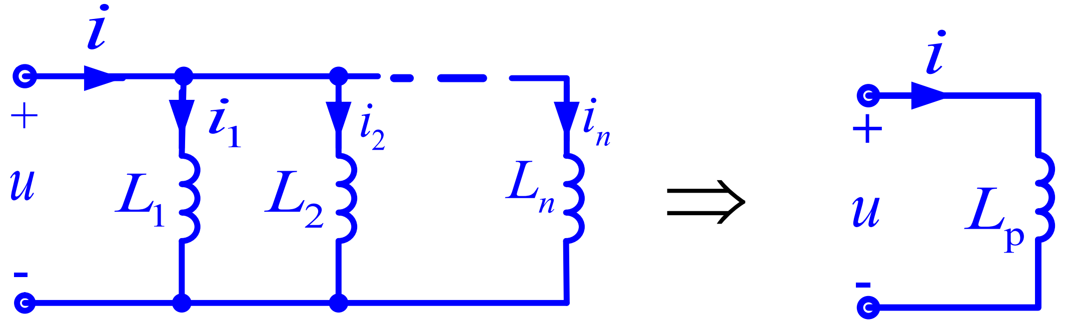
$$= (L_1 + L_2 + \cdots + L_n)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L_s\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

其中： $L_s = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$

为等效电感，是各串联电感的总和。

2. 电感的串并联

2.2 电感的并联



根据KCL：

$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_n = i_1(0) + \frac{1}{L_1}\int_0^t u\,\mathrm{d}\xi$$

$$+ i_2(0) + \frac{1}{L_2}\int_0^t u\,\mathrm{d}\xi + \cdots + i_n(0) + \frac{1}{L_n}\int_0^t u\,\mathrm{d}\xi$$

$$= i(0) + \frac{1}{L_p}\int_0^t u\,\mathrm{d}\xi$$

2. 电感的串并联

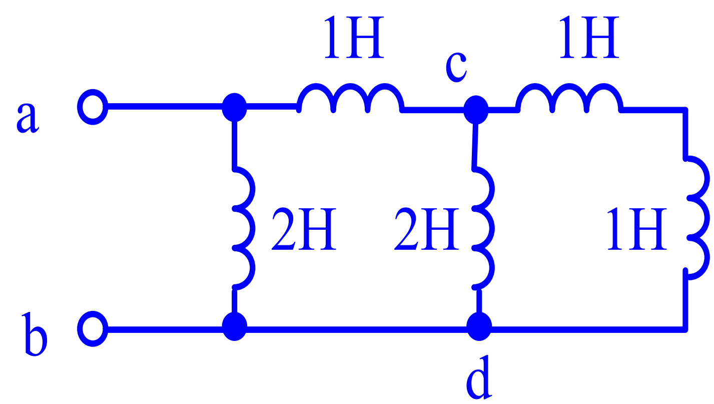
其中：$i(0) = i_1(0) + i_2(0) + \cdots + i_n(0)$

为等效电路电感的初始电流，是各并联电感初始电流的代数和。

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}$$

L_p为等效电路的等效电感，其倒数为各并联电感倒数之和。

例题2 试求如图所示电路端口ab的等效电感。



解:

$$L_{\mathrm{cd}}=\frac{2\times(1+1)}{2+1+1}=1\mathrm{H}$$

$$L_{\mathrm{ab}}=\frac{2\times(1+1)}{2+1+1}=1\mathrm{H}$$

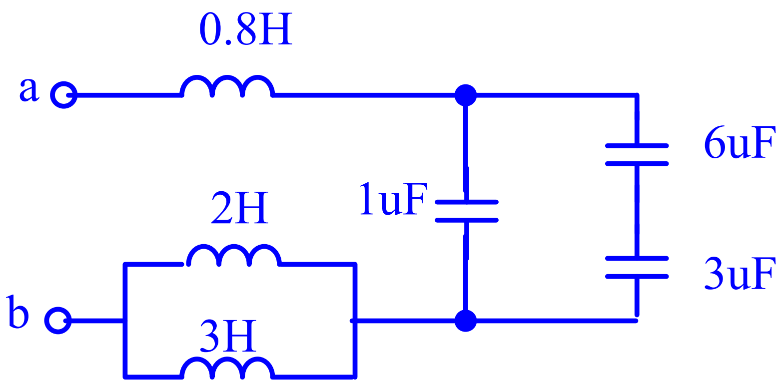
例题3 将如图所示电路化为最简形式。

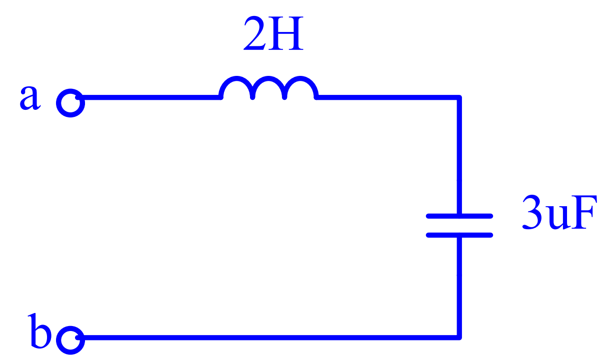
解： 等效电容：

$$C_{eq}=1+\frac{6\times 3}{6+3}=3\mu F$$

等效电感：

$$L_{eq}=0.8+\frac{2\times 3}{2+3}=2H$$

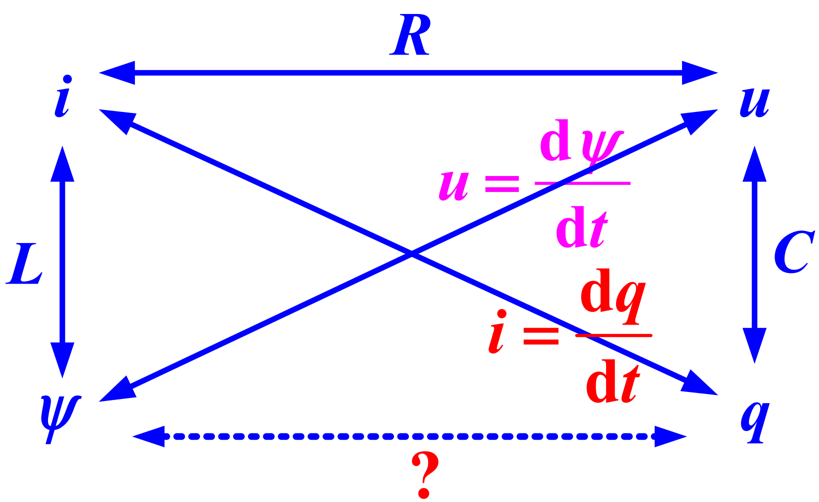


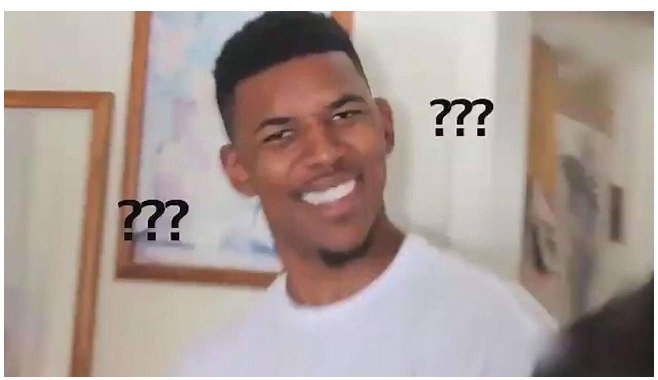


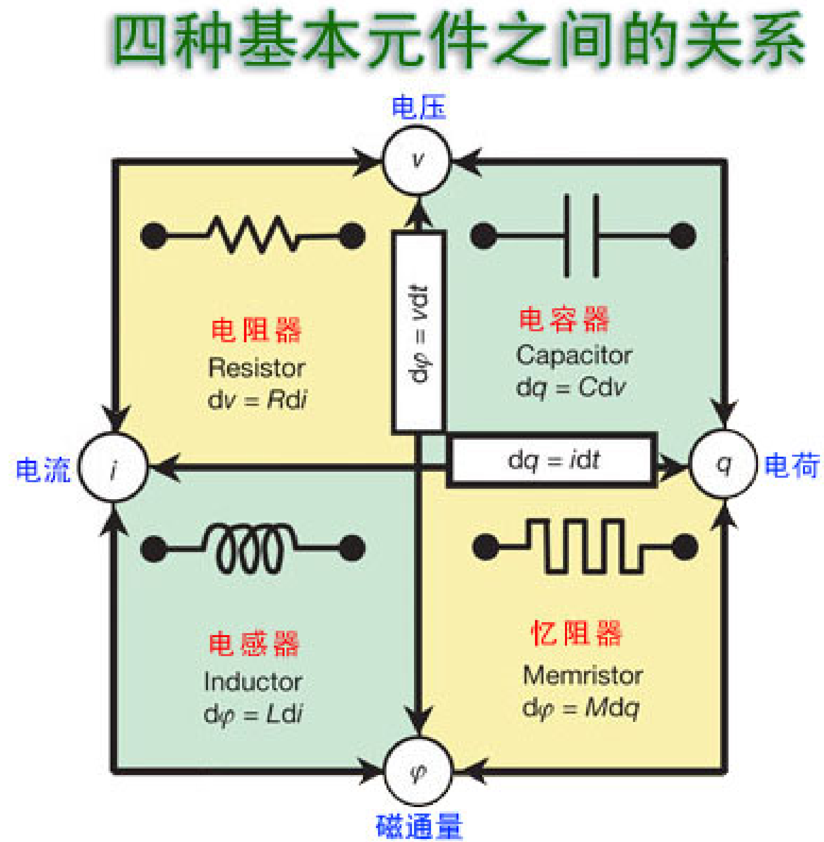
	电容元件	电感元件
共性	动态元件、记忆无源元件、储能元件 VCR中出现微积分	
直流稳态等效	断路	短路
电压-电流关系	$u_C(t)=u_C(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi$	$\boldsymbol{u=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$
电流-电压关系	$i=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$	$i_L(t_0)=i_L(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u(\xi)\,\mathrm{d}\xi$
储能原理 能量计算	电场 效应 $w_C(t)=\frac{1}{2}Cu_C^2(t)$	磁场 效应 $\boldsymbol{w_L(t)=\frac{1}{2}L\cdot i_L^2(t)}$
状态变量	电压	电流
串并联	串：倒数相加 并：直接相加	串：直接相加 并：倒数相加

	电容元件	电感元件
动态性	$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$	$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
记忆性（当前值和过去某个时刻的值有关）	$u_C(t) = u_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$	$i_L(t_0) = i_L(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u(\xi)\mathrm{d}\xi$
储能元件 无源元件（虽然功率可正可负，但储能不能小于零）	$w_C(t) = \frac{1}{2}Cu_C^2(t)$	$w_L(t) = \frac{1}{2}L\cdot i_L^2(t)$
状态变量（不能跳变的量）	电压	电流
串并联	串：倒数相加 并：直接相加	串：直接相加 并：倒数相加

忆阻元件


R
i
u
L
C
ψ
q
$u = \dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$
$i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$
?


???
???


四种基本元件之间的关系
电压
v
电流
i
电荷
q
磁通量
φ
电阻器
Resistor
dv = Rdi
电容器
Capacitor
dq = Cdv
电感器
Inductor
dφ = Ldi
忆阻器
Memristor
dφ = Mdq
dφ = vdt
dq = idt

忆阻元件

1971年加州大学伯克利分校的华裔科学家蔡少棠提出在ψ和q之间存在类似R、L、C的第四类基本电路元件——忆阻器。

2008年5月1日，来自惠普实验室的四位科学家在 Nature杂志上发表文章，宣布研制出了纳米尺度的忆阻元件。
惠普实验室发现的忆阻器可以在纳米尺度上实现开关，这将极大地缩小存储器的体积，因此，对数字计算机的发展可能具有深远意义。

完全使用忆阻器实现CNN，清华大学微电子所新研究登上Nature

机器之心Pro 2020-02-19 13:04:34

选自Nature

作者：Peng Yao等

机器之心编译

参与：魔王、张倩

> 不久之前，清华大学微电子所等机构在 Nature 上发表文章，展示了他们完全基于硬件的卷积神经网络（CNN）实现。他们构建的基于忆阻器的五层 CNN 在 MNIST 手写数字识别任务中实现了 96.19% 的准确率，为大幅提升 CNN 效率提供了可行的解决方案。

基于忆阻器的神经形态计算系统为神经网络训练提供了一种快速节能的方法。但是，最重要的图像识别模型之一——卷积神经网络还没有利用忆阻器交叉阵列的完全硬件实现。此外，由于硬件实现收益小、变化大，设备特性不完善，其结果很难媲美软件实现。

不久之前，来自清华大学和马萨诸塞大学的研究者在《自然》杂志上发表文章，**提出用高收益、高性能的均匀忆阻器交叉阵列实现 CNN，该实现共集成了 8 个包含 2048 个单元的忆阻器阵列，以提升并行计算效率。此外，研究者还提出了一种高效的混合训练方法，以适应设备缺陷，改进整个系统的性能。**研究者构建了基于忆阻器的五层 CNN 来执行 MNIST 图像识别任务，**识别准确率超过 96%。**

基于忆阻器的神经形态计算可以提供非冯诺伊曼计算范式，即存储数据，从而消除数据迁移的开销。忆阻器阵列直接使用欧姆定律进行加法运算，使用基尔霍夫定律进行乘法运算，因而能够实现并行内存内 MAC 运算，从而模拟内存内计算并实现速度和能效的大幅提升。

§3-3　换路定则及初始值的确定

动态电路中开关变化的瞬间

1.基本概念

换路(circuit changing)：由于某种原因(例如电源或某部分电路的接通或断开、电路元件参数的改变等)使电路的工作状态发生变化，使其由一种工作状态变化到另外一种工作状态，将这种工作状态的改变称为**换路**。

过渡过程(transition)：换路过程中电路的电量随时间变化的过程称为**过渡过程**或**瞬态(transient)**。

电路的瞬态分析：对电路过渡过程的分析。

初始值(initial value)：电量在换路后瞬间的值。

换路时刻：$t = 0$　换路前时刻：$t = 0^-$　$u(0^-)$　$i(0^-)$

换路后时刻：$t = 0^+$　$u(0^+)$　$i(0^+)$

2.换路定则

换路定则(circuit changing rule)：在电容电流和电感电压为有界值的情况下，电容电压不能跃变，电感电流不能跃变。以电容为例：

$$u_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi = u_C\left(t_0\right)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi \quad t\geq t_0$$

$$u_C(t_{0+})=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_{0+}} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi = u_C\left(t_{0-}\right)+\frac{1}{C}\int_{t_{0-}}^{t_{0+}} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

假设开关变化是从t0-到t0+之间瞬间完成，且电流不为无穷大，则积分结果为零

结论：$\begin{cases} u_C(0^+)=u_C(0^-) \\ i_L(0^+)=i_L(0^-) \end{cases}$

- （1）假设在0-时刻，电路已经进入稳态，所有的电流电压都是定值，根据电容电感的“动态”性质，电容电流和电感电压都是0。
  - 电容相当于开路->或者看作：利用替代定理替代为电流为0的电流源
  - 电感相当于短路->或者看作：利用替代定理替代为电压为0的电压源
  - 替代后电路变为电阻电路！利用电阻电路的分析方法可以求出所需要的变量：**Uc(0-)**和I_L**(0-)**

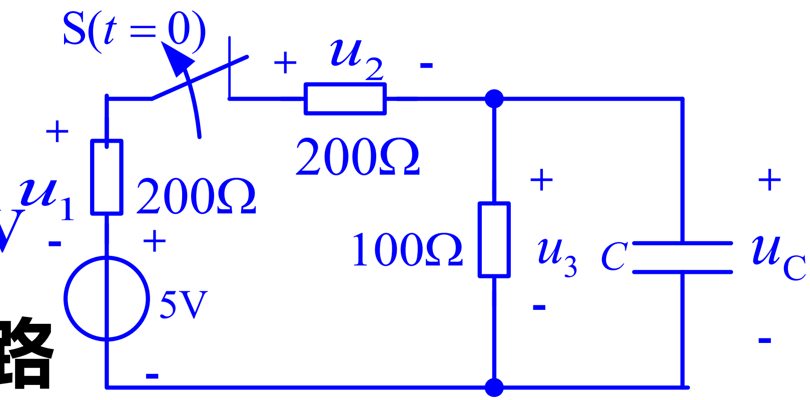
- （2）利用换路定则求出状态变量的初始值

$$\begin{cases} u_C(0^+) = u_C(0^-) \\ i_L(0^+) = i_L(0^-) \end{cases}$$

- 注意
  - 只有电容电压和电感电流具有“不跳变”的性质，其他变量都没有，包括电感电压和电容电流
  - 求其他变量的0-值是没有意义的，因为无法根据其0-值推断出其0+值

- （3）在0+时刻，由于$U_c(0+)$和$I_L(0+)$已知，根据替代定理，将二者替换为电压源和电流源
  - 电路变成电阻电路，分析可得所有变量的0+值（初始值）
- 步骤（1）和（3）电路形式的区别
  - 替代方式不同
  - 开关状态不同

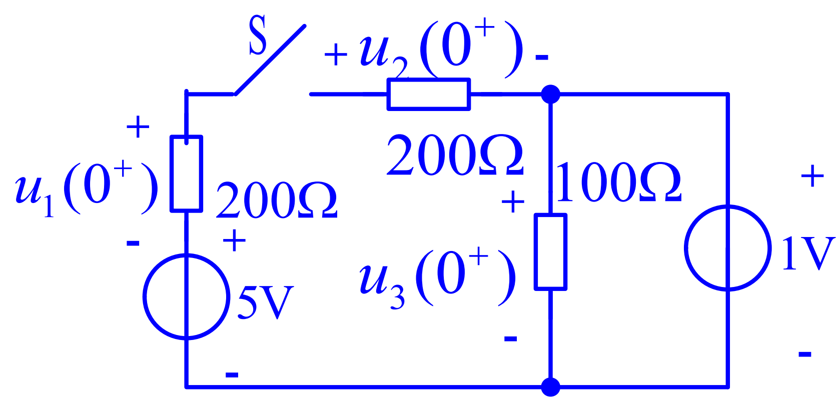
例题1 如图所示电路，开关S在 $t=0$ 时刻打开，S打开前电路已处于稳态，求开关打开后电路中各元件的初始电压值。



解： 开关打开前电容开路

$$u_C(0^-)=\frac{100}{200+200+100}\times 5\text{V}=1\text{V}$$

画出开关打开后的 0^+ 等效电路



$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=1\text{V}$$

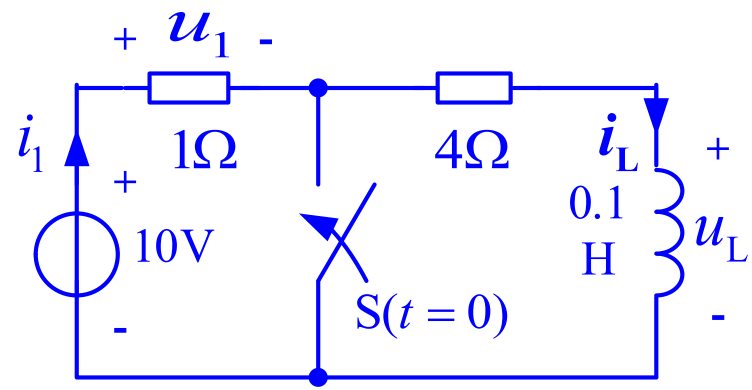
$$u_1(0^+)=u_2(0^+)=0\text{V}$$

$$u_3(0^+)=1\text{V}$$

例题2 求如图所示电路中的 $i_1(0^+)$、$u_1(0^+)$、$u_L(0^+)$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}i_L(0^+)}{\mathrm{d}t}$。

解： $t=0$时，开关闭合。

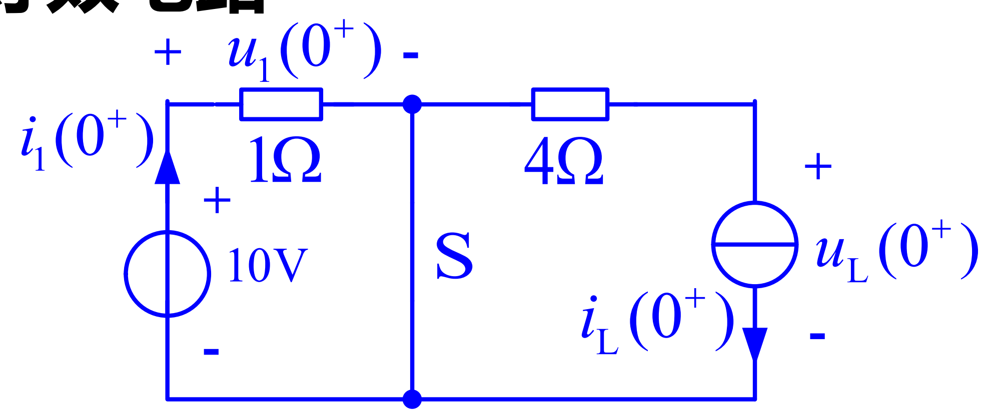
$t=0^-$时，开关未闭合，电感短路。



$$i_L(0^-)=\frac{10}{1+4}=2\mathrm{A}$$

画出开关闭合后的 0^+等效电路

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=2\mathrm{A}$$

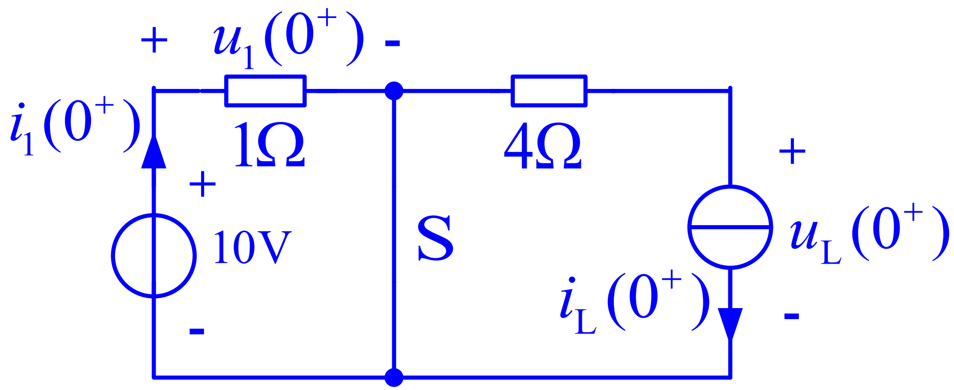


解（续）

$$i_1(0^+)=\frac{10}{1}=10\text{A}$$

$$u_1(0^+)=10\text{V}$$

$$u_L(0^+)=-4\times 2=-8\text{V}$$



因为 $u_L=L\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$

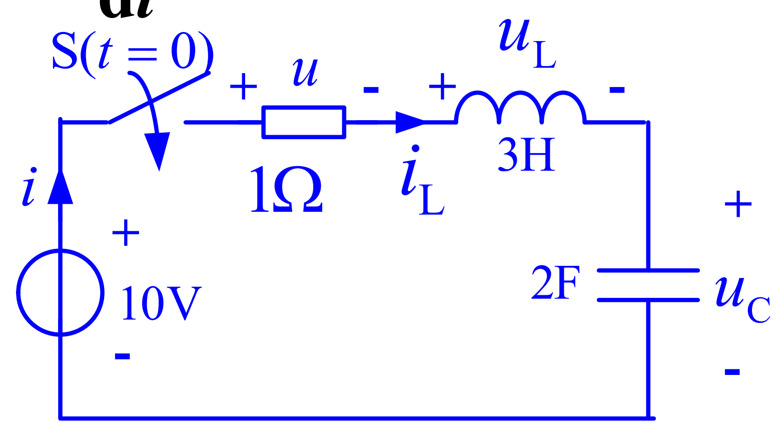
所以 $\dfrac{\mathrm{d}i_L(0^+)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{u_L(0^+)}{L}=\dfrac{-8}{0.1}=-80\text{V}/\text{H}=-80\text{A}/\text{s}$

$\dfrac{\mathrm{d}i_L(0^+)}{\mathrm{d}t}$ 的单位换算：$\dfrac{\text{V}}{\text{H}}=\dfrac{\text{V}}{\frac{\text{Wb}}{\text{A}}}=\dfrac{\text{V}\cdot\text{A}}{\text{V}\cdot\text{s}}=\dfrac{\text{A}}{\text{s}}$

例题3 **如图所示电路中，已知** $u_C(0^-)=5\text{V}$，$i_L(0^-)=0$。

求 $i(0^+)$、$u(0^+)$、$u_C(0^+)$、$\dfrac{\mathrm{d}i(0^+)}{\mathrm{d}t}$、$\dfrac{\mathrm{d}u(0^+)}{\mathrm{d}t}$。

解：画出 0^+ **等效电路**

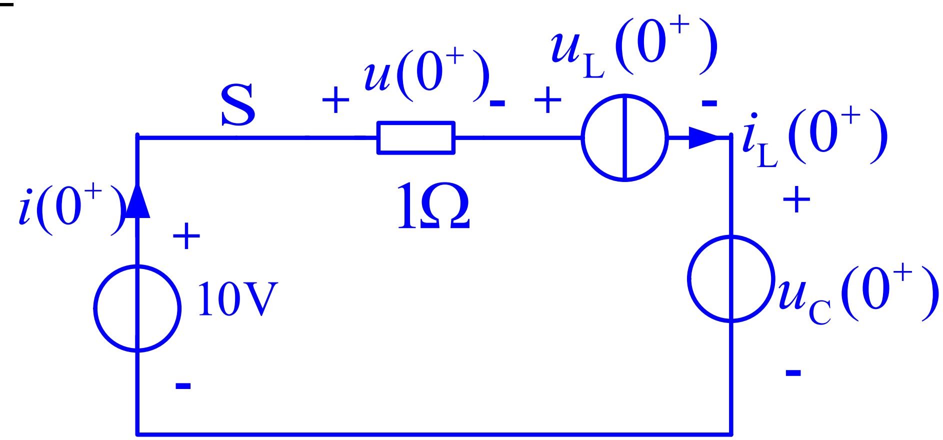


$$i(0^+)=i_L(0^+)=i_L(0^-)=0$$

$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=5\text{V}$$

$$u(0^+)=i(0^+)\cdot R=0$$

$$\frac{\mathrm{d}i(0^+)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}i_L(0^+)}{\mathrm{d}t}=\frac{u_L(0^+)}{L}$$

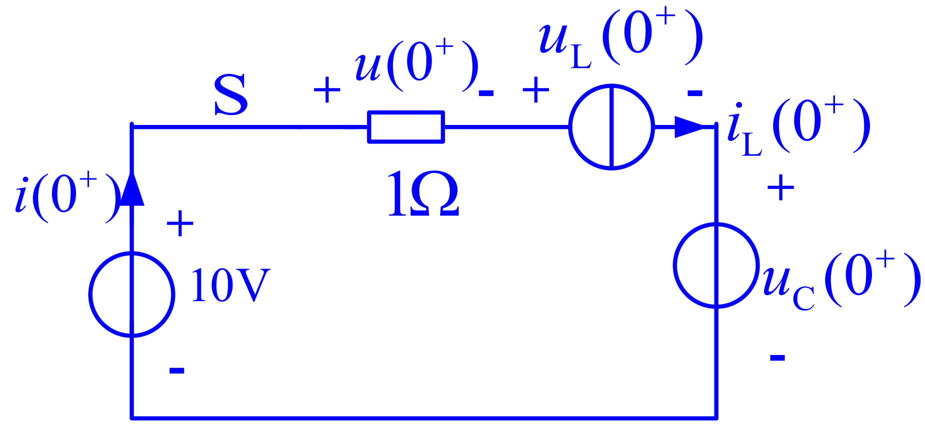


解（续）

根据KVL：

$$u_L(0^+) = 10 - u(0^+) - u_C(0^+) = 10 - 0 - 5 = 5\text{V}$$

所以，$\dfrac{\mathrm{d}i(0^+)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{5}{3}\text{A/s}$



由此可见：

$t = 0^+$ 时，虽然 $i(0^+) = 0$，但电流变化率不为零。

因为 $u(0^-) = 0$，$u(0^+) = 0$

所以，$\dfrac{\mathrm{d}u(0^+)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}Ri(0^+)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{5}{3}\text{U/s}$

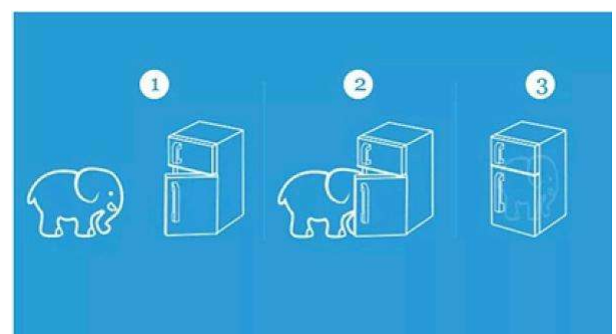
求初始值的基本步骤

1）由 $t=0^-$ 等效电路计算 $u_C(0^-)$ 和 $i_L(0^-)$。

2）根据换路定则，$u_C(0^+)=u_C(0^-)$，$i_L(0^+)=i_L(0^-)$。

3）画出0^+ 等效电路，其中，电容用电压值为$u_C(0^+)$的电压源代替，电感用电流值为$i_L(0^+)$的电流源代替。

4）用分析直流电阻电路的方法计算待求量。



换路定则以及求初始值的意义

- 求零输入响应：
  - 如果使用微分求解动态电路的瞬态响应，得到的通解中存在待定系
  - 利用换路定则可以求出待定系数
  - 对于一阶动态电路，利用换路定则和三要素法就可以确定电路的瞬态响应。

§3-4　一阶电路的零输入响应

- 基本概念
- 一阶RC电路的零输入响应
- 一阶RL电路的零输入响应
- 时间常数

1. 基本概念

动态电路(dynamic circuit): 至少含有一个动态元件的电路。

一阶动态电路(one-order circuit): 用一阶微分方程描述的动态电路。

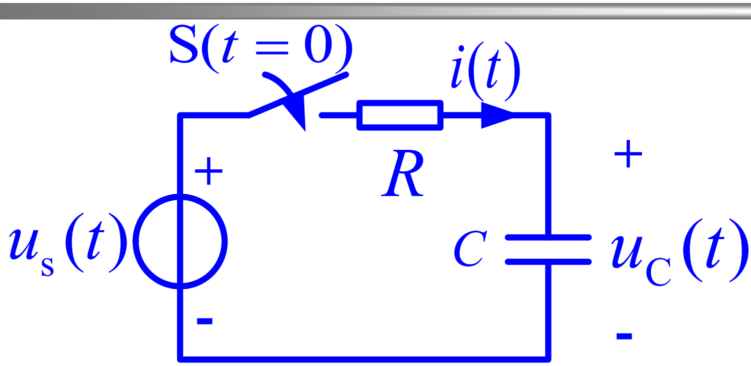
二阶动态电路(two-order circuit): 用二阶微分方程描述的动态电路。

高阶动态电路: 二阶以上的动态电路。

状态变量(state variable): 如果已知该量在初始时刻的值，则根据该时刻的输入就能确定电路中任何量在随后时刻的值，称具有这种性质的量为状态变量。

电容电压，电感电流

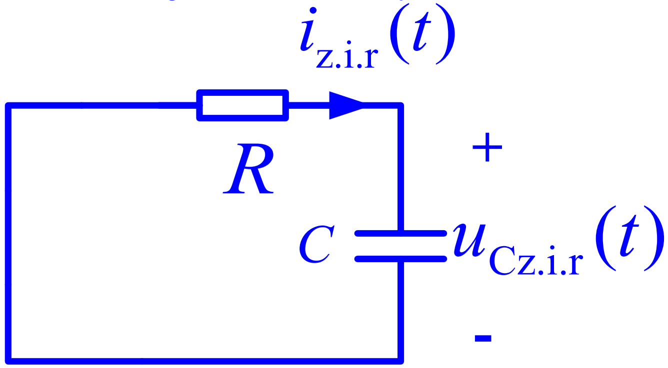
1. 基本概念



$$u_C(0^-) = U_0$$

=

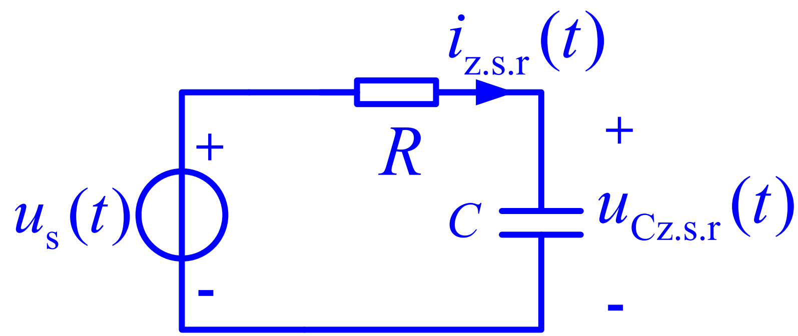
根据线性电路的叠加定理



$$u_C(0^-) = U_0, u_s(t) = 0$$

零输入响应

+



$$u_C(0^-) = 0$$

零状态响应

1. 基本概念

零输入响应(zero input response--z.i.r)：在没有外加激励作用下，仅由动态元件的初始储能产生的响应。

零状态响应 (zero state response--z.s.r)：动态元件的初始储能为零，仅由外加激励产生的响应。

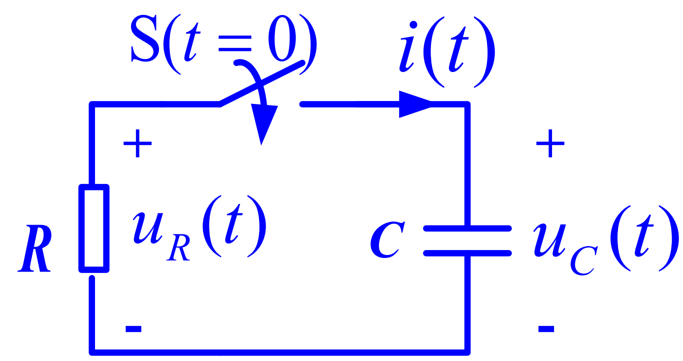
全响应 (complete response--c.r)：零输入响应与零状态响应之和。

2. 一阶RC电路的零输入响应

已知 $u_C(0^-)=U_0$，

$t=0$ 时发生换路，开关S闭合。

求 $t\geq 0^+$ 时的 $u_C(t)$、$i(t)$、$u_R(t)$。



KVL方程:

$$u_R - u_C = 0$$

$$u_R = -Ri,\quad i = C\frac{du_C}{dt}$$

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0,\quad t\geq 0^+$$

——一阶常系数线性齐次微分方程

1. 基本概念

零输入响应(zero input response--z.i.r)：在没有外加激励作用下，仅由动态元件的初始储能产生的响应。

零状态响应 (zero state response--z.s.r)：动态元件的初始储能为零，仅由外加激励产生的响应。

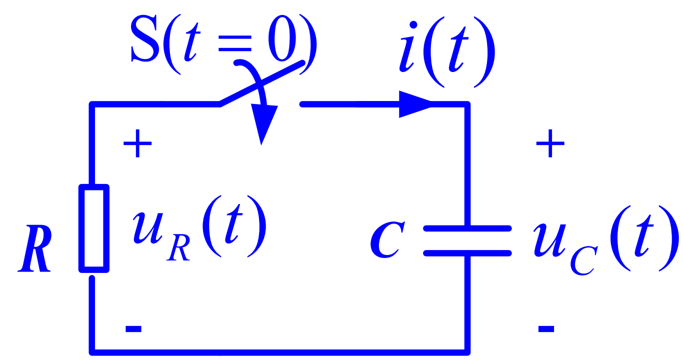
全响应 (complete response--c.r)：零输入响应与零状态响应之和。

2. 一阶RC电路的零输入响应

已知 $u_C(0^-)=U_0$，

$t=0$ 时发生换路，开关S闭合。

求 $t\geq 0^+$ 时的 $u_C(t)$、$i(t)$、$u_R(t)$。



KVL方程:

$$u_R - u_C = 0$$

$$u_R = -Ri,\quad i = C\frac{du_C}{dt}$$

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0,\quad t\geq 0^+$$

——一阶常系数线性齐次微分方程

2. 一阶RC电路的零输入响应

$$RC\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}+u_{\mathrm{C}}=0,\quad t\geq 0^{+}$$

特征方程： $RCs+1=0$

特征根： $s=-\dfrac{1}{RC}$

$$u_{\mathrm{C}}(t)=A\mathrm{e}^{st}=A\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t},\quad t\geq 0^{+}$$

根据换路定则： $u_{\mathrm{C}}(0^{+})=u_{\mathrm{C}}(0^{-})=U_{0}$

得： $A=u_{\mathrm{C}}(0^{+})=U_{0}$

$$u_{\mathrm{C}}(t)=U_{0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}=u_{\mathrm{C}}(0^{+})\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t},\quad t\geq 0^{+}$$

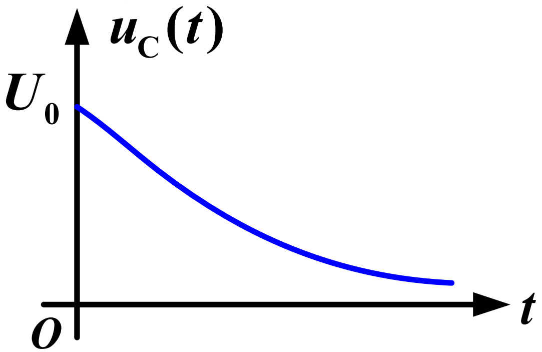
2. 一阶RC电路的零输入响应

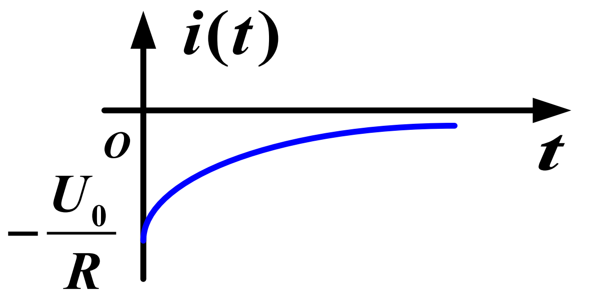
$$u_C(t)=u_C(0^+)e^{-\frac{1}{RC}t}=U_0e^{-\frac{1}{RC}t},\quad t\geq 0^+$$

$$i(t)=C\frac{du_C}{dt}=C\cdot U_0(-\frac{1}{RC})e^{-\frac{1}{RC}t}=-\frac{U_0}{R}e^{-\frac{1}{RC}t},\quad t\geq 0^+$$

$$u_R(t)=u_C(t)=U_0e^{-\frac{1}{RC}t},\quad t\geq 0^+$$

电压、电流曲线:





一阶RC电路的零输入响应是一个放电过程。

2. 一阶RC电路的零输入响应

时间常数(time constant)： $\tau = RC$

时间常数的单位：秒(s)←欧姆(Ω)·法拉(F)

$$s = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}$$ ——RC**电路的固有频率**

(natural frequency)

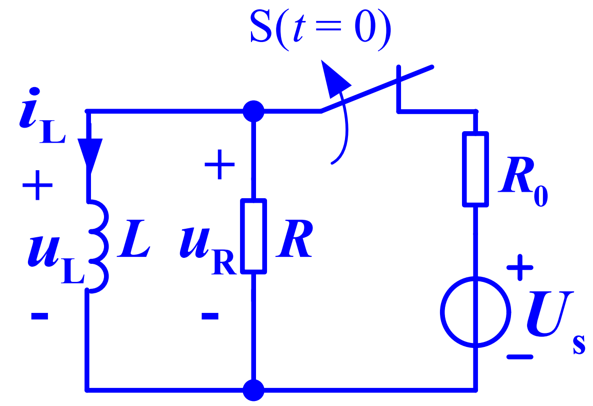
零输入响应的标准形式：

$$y(t) = y(0^+)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \ge 0^+$$

只要知道了某量的初始值和电路的时间常数，就能够得到该量在过渡过程中的变化规律。

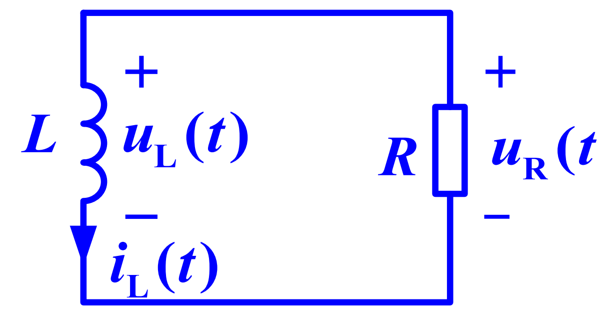
3. 一阶RL电路的零输入响应

开关S打开前电路已处于稳态，求开关打开后的$i_L(t)$、$u_L(t)$、$u_R(t)$。



$$i_L(0^-)=\frac{U_s}{R_0}=I_0$$

开关打开后的KVL方程:



$$u_R(t)-u_L(t)=0$$

$$u_R(t)=-Ri_L(t),\quad u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+Ri_L=0,\quad t\geq 0^+$$

——一阶常系数线性齐次微分方程

3. 一阶RL电路的零输入响应

$$L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t}+Ri_{\mathrm{L}}=0,\quad t\geq 0^{+}$$

特征方程： $Ls+R=0$

特征根： $s=-\dfrac{R}{L}$

$$i_{\mathrm{L}}(t)=A\mathrm{e}^{st}=A\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t},\quad t\geq 0^{+}$$

根据换路定则： $i_{\mathrm{L}}(0^{+})=i_{\mathrm{L}}(0^{-})=I_{0}$

得： $A=i_{\mathrm{L}}(0^{+})=I_{0}$

$$i_{L}(t)=i_{L}(0^{+})e^{-\frac{R}{L}t}=I_{0}e^{-\frac{R}{L}t}=\frac{U_{s}}{R_{0}}e^{-\frac{R}{L}t},\quad t\geq 0^{+}$$

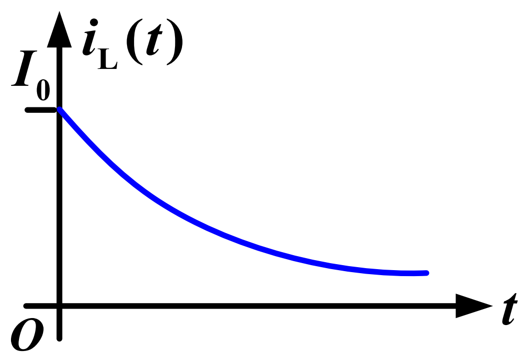
3. 一阶RL电路的零输入响应

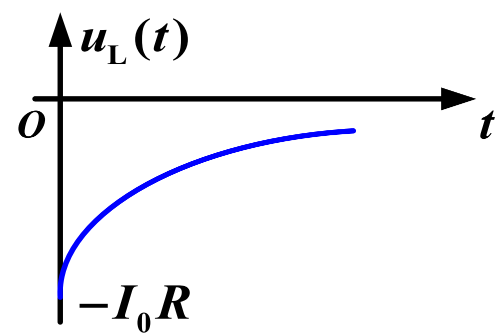
$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}, \quad t \geq 0^+$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = L \cdot I_0(-\frac{R}{L})e^{-\frac{R}{L}t} = -I_0 R e^{-\frac{R}{L}t}, \quad t \geq 0^+$$

$$u_R(t) = u_L(t) = -I_0 R e^{-\frac{R}{L}t}, \quad t \geq 0^+$$

电流、电压曲线





一阶RL电路的零输入响应是一个放电过程。

3. 一阶RL电路的零输入响应

时间常数(time constant)： $\tau = \dfrac{L}{R}$

时间常数的单位：秒(s)←亨利(H)/欧姆(Ω)

$$s = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{\tau}$$ ——RL电路的**固有频率**

电路中各量的零输入响应符合如下标准形式：

$$y(t) = y(0^+)\, e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0^+$$

线性非时变电路的零输入响应满足叠加性，即如果初始值增加*K*倍，则响应也增加*K*倍。

4. 时间常数

RC电路: $\tau = RC$ **欧姆·法拉** =

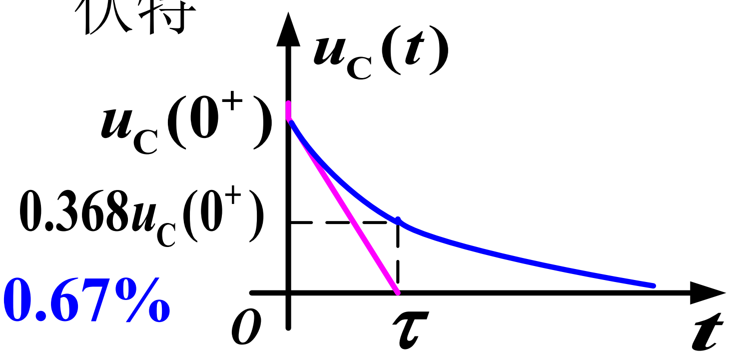
$$= \frac{伏特}{安培}\cdot\frac{库仑}{伏特} = \frac{伏特}{安培}\cdot\frac{安培\cdot秒}{伏特} = 秒$$

RL电路: $\tau = \dfrac{L}{R}$ $\quad \dfrac{亨利}{欧姆} = \dfrac{伏特\cdot秒}{安培}\cdot\dfrac{安培}{伏特} = 秒$

$$y(t) = y(0^+)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0^+$$

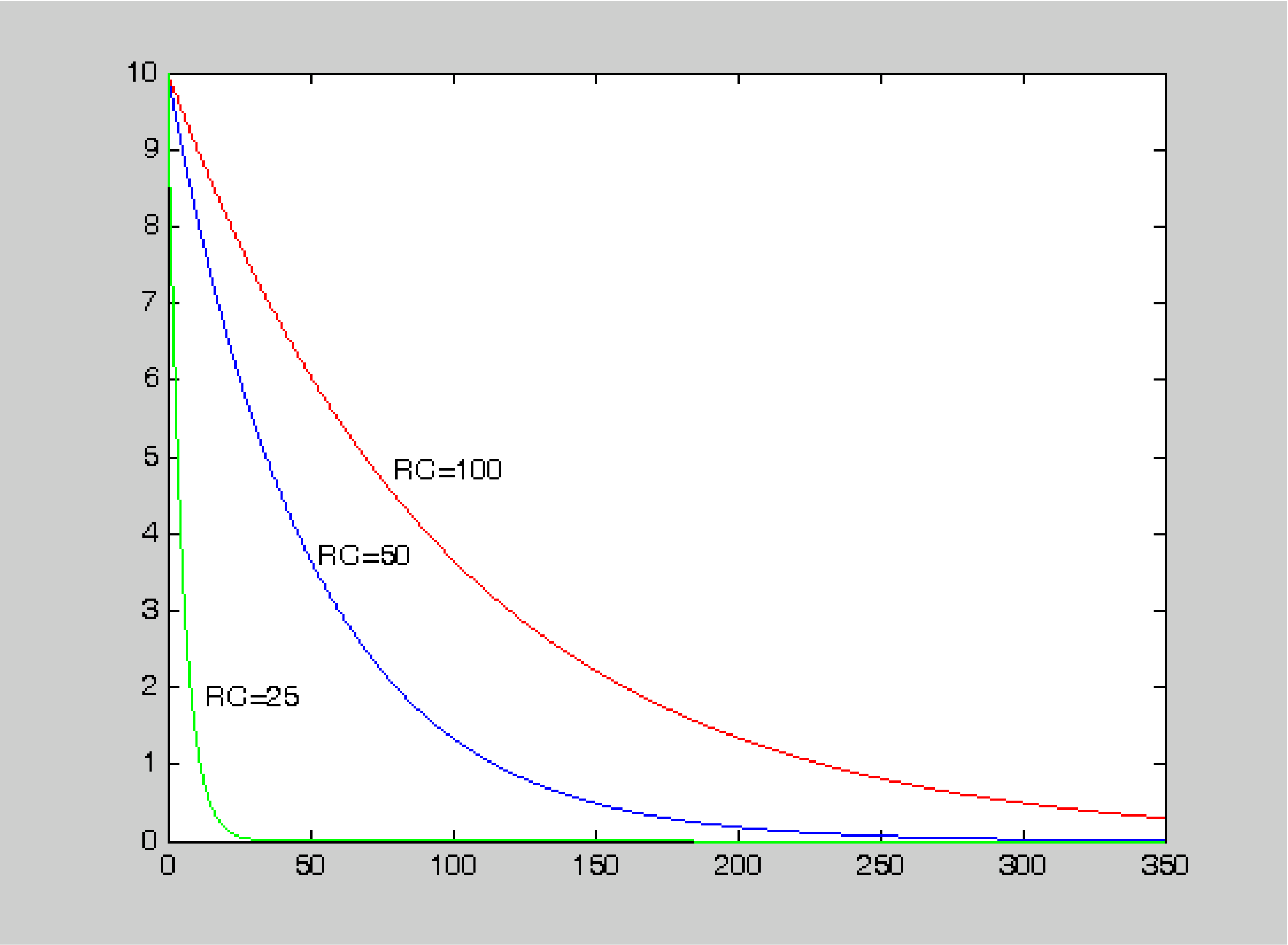
$$y(\tau) = y(0^+)\,\mathrm{e}^{-1} = y(0^+)\times 36.8\%$$

$$y(4\tau) = y(0^+)\times 1.83\% \quad y(5\tau) = y(0^+)\times 0.67\%$$



工程上常取$t = (4 \sim 5\,)\tau$作为放电完毕所需时间。

电压、电流衰减的快慢取决于时间常数的大小，τ 越大，衰减越慢，反之则越快。



一阶RC电路不同时间常数时的放电曲线

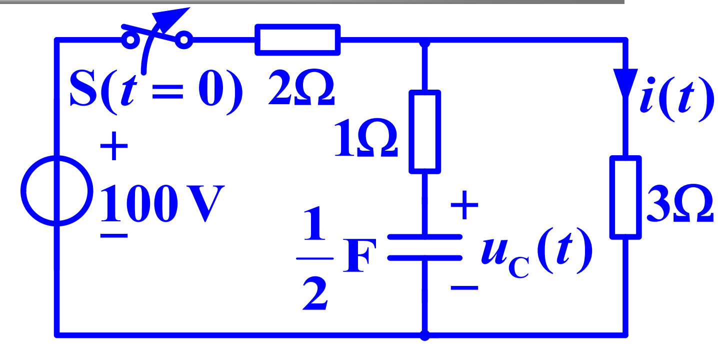
4. 时间常数

同一电路中各响应量的时间常数相同。零状态响应和全响应都具有这种特点。

求解电路中的电压、电流变量只涉及根据KCL、KVL进行的加、减运算和根据元件的VCR进行的乘、除(系数)、微分及积分运算，这些运算都不会改变指数函数的形式。

例题1 已知$t<0$时电路处于稳态， $t=0$时开关打开。

求$t\geq 0$时的 $i(t)$ 。

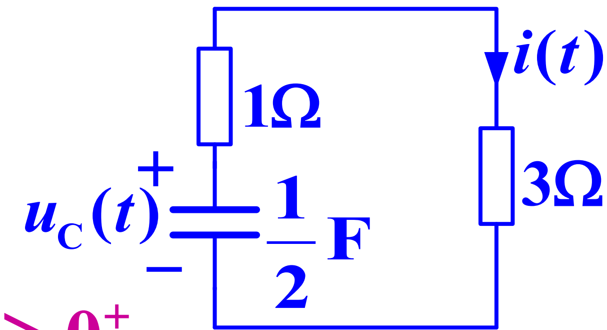


解: $t<0$:

$$u_C(0^-)=\frac{3}{2+3}\times 100=60\,\mathrm{V}$$

$t\geq 0^+$ ：根据换路定则:

$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=60\,\mathrm{V}$$



$$\tau=RC=\left(1+3\right)\times\frac{1}{2}=2s$$

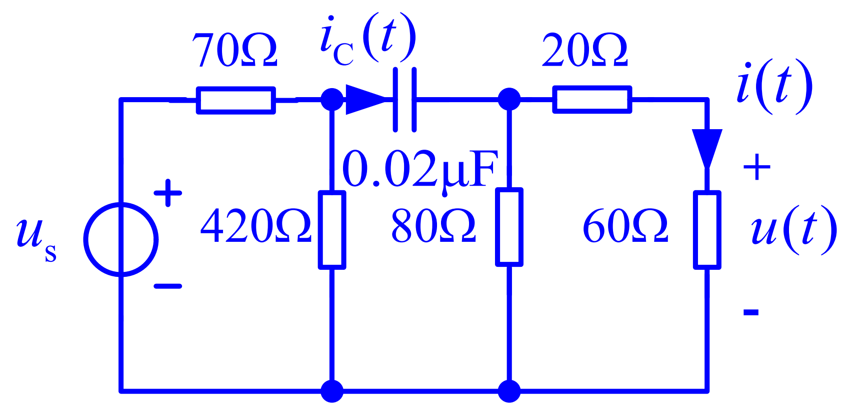
$$u_C(t)=u_C(0^+)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=60\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\ \mathrm{V},\quad t\geq 0^+$$

$$i(t)=-C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times 60\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}=15\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\ \mathrm{A},\quad t\geq 0^+$$

例题2 如图所示电路中，已知 $u_s(t)=140\text{V}, t<0$;

$u_s(t)=0, t\geq 0$ 。求 $t\geq 0$ 时的 $i_C(t)$ 和 $u(t)$。

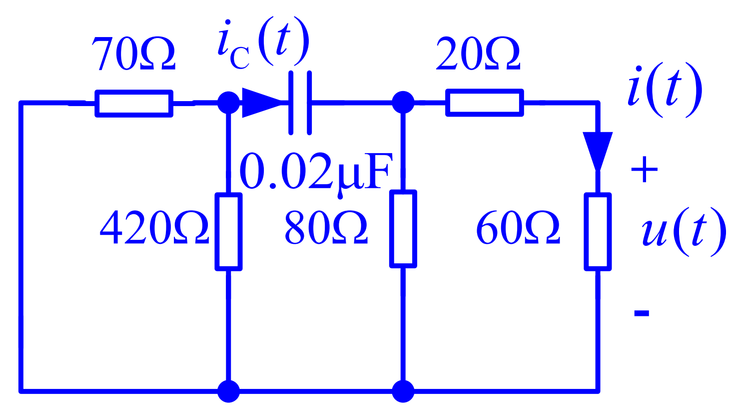
解： $t<0$ 时，电容开路



$$u_C(0^-)=\frac{u_s}{70+420}\times 420$$

$$=\frac{140\times 420}{490}=120\text{V}$$

$t\geq 0^+$ 时，根据换路定则：



$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=120\text{V}$$

与电容连接的等效电阻为：

$$R_{eq}=70//420+(20+60)//80$$

$$=\frac{70\times 420}{490}+40=60+40=100\Omega$$

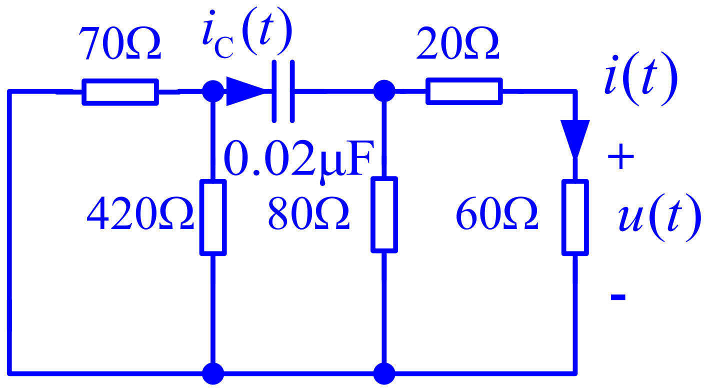
解（续）

$$\tau = R_{eq}C = 100\times 0.02\times 10^{-6} = 2\times 10^{-6}\,\mathrm{s}$$

$$u_C(t) = u_C(0^+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 120\mathrm{e}^{-5\times 10^5 t}\ \mathrm{V}$$

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = 0.2\times 10^{-6}\times 120\times(-5\times 10^5)$$

$$= -1.2\mathrm{e}^{-5\times 10^5 t}\,\mathrm{A}$$

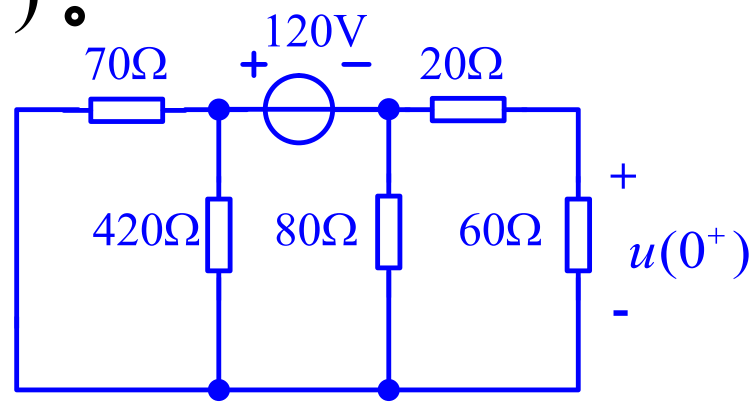


$$i(t) = \frac{1}{2}i_C(t) = -0.6\mathrm{e}^{-5\times 10^5 t}\,\mathrm{A}$$

$$u(t) = i(t)\times 60 = -36\mathrm{e}^{-5\times 10^5 t}\,\mathrm{V}$$

解（续）

根据 0^+ 时的等效电路求 $u(0^+)$。



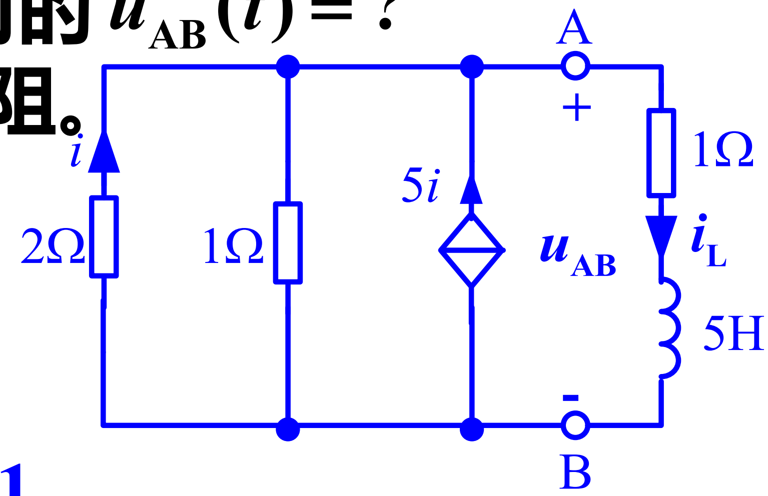
$$u(0^+) = -\frac{60}{20+60} \times \frac{(20+60)//80}{70//420+(20+60)//80} \times 120$$

$$= -\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \times 120 = -36\text{V}$$

$$u(t) = u(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}} = -36e^{-5\times10^5 t}\text{V}$$

例题3 如图所示电路中，电感元件已有初始储能，

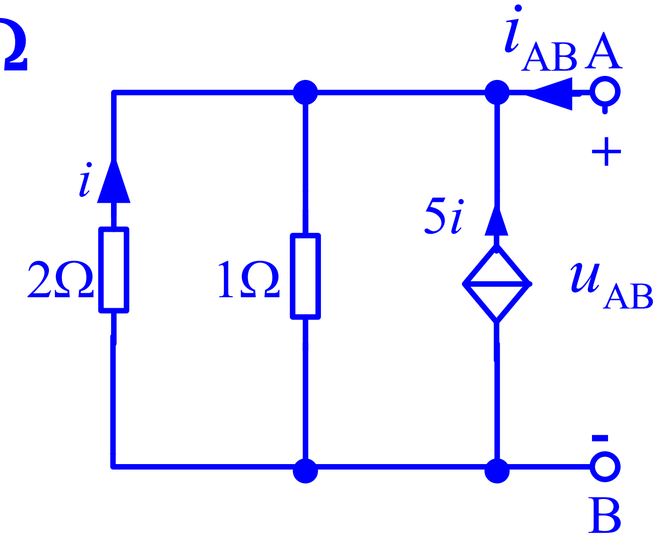
$i_L(0^-)=1.2\text{A}$。求 $t\ge 0^+$ 时的 $u_{AB}(t)=?$



解：先求AB左端网络的等效电阻。

$$\begin{cases} u_{AB}=1\times(i+5i+i_{AB}) \\ \quad\;\;=6i+i_{AB} \\ u_{AB}=-2i \end{cases}$$

$$4u_{AB}=i_{AB}\qquad R_{AB}=\frac{u_{AB}}{i_{AB}}=\frac{1}{4}\Omega$$



与电感连接的等效电阻为：

$$R_{eq}=R_{AB}+1=\frac{5}{4}\Omega$$

解（续）

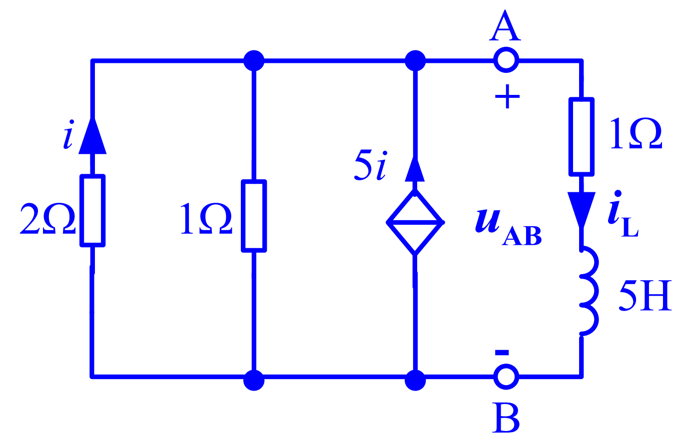
$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = 5\times\frac{4}{5} = 4\text{s}$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1.2\text{A}$$

$$i_L(t) = i_L(0^+)\text{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 1.2\text{e}^{-0.25t}\text{A}$$

$$u_{AB} = 1\times i_L(t) + L\frac{\text{d}i_L(t)}{\text{d}t}$$

$$= 1.2\text{e}^{-0.25t} + 5\times1.2\times(-0.25)\text{e}^{-0.25t} = -0.3\text{e}^{-0.25t}\text{V}$$



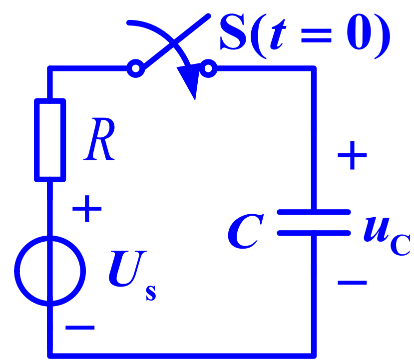
§3-5　一阶电路的零状态响应

一阶RC电路的零状态响应

一阶RL电路的零状态响应

1. 一阶RC电路的零状态响应

零状态响应(z.s.r)是在零初始状态下，仅由外加激励源产生的响应。



$t=0$ 开关闭合 $u_C(0^+)=u_C(0^-)=0$

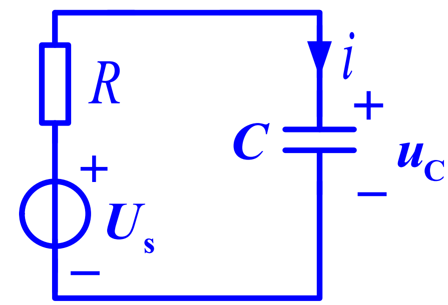
$t\geq 0^+$ KVL方程：

$$Ri+u_C=U_s$$

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_s,\quad t\geq 0^+$$

(一阶线性常系数非齐次微分方程)

$$u_C(0^+)=0$$



1. 一阶RC电路的零状态响应

解的形式为： $u_C = u_{Ch} + u_{Cp}$

u_{Ch} ——齐次方程的通解 $u_{Ch} = A\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$

u_{Cp} ——非齐次方程的特解 $u_{Cp} = B$

求解得出： $B = U_s$ （与激励形式相同）

$$u_C(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} + U_s, \quad t \geq 0^+$$

由初始值求得： $A = -U_s$

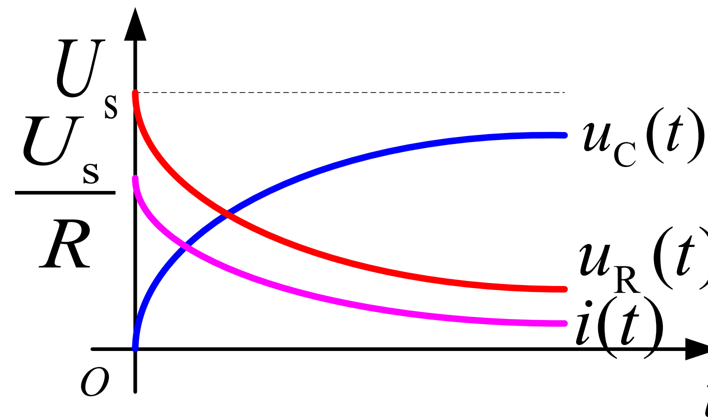
$$\therefore u_C(t) = -U_s\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} + U_s = U_s\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\right), \quad t \geq 0^+$$

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_s}{R}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{U_s}{R}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}t}, \quad t \geq 0^+$$

时间常数： $\tau = RC$ **固有频率：** $s = -\dfrac{1}{RC}$

1. 一阶RC电路的零状态响应

$$u_C(t)=U_s\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right),\quad t\geq 0^+$$



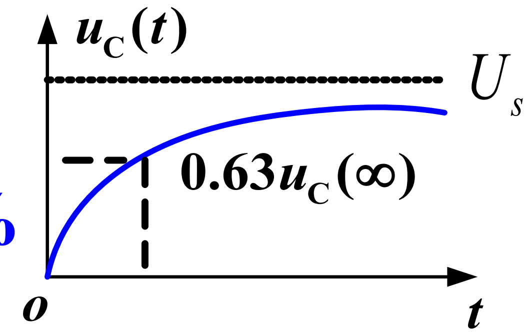
$$i(t)=\frac{U_s}{R}e^{-\frac{1}{\tau}t},\quad t\geq 0^+$$

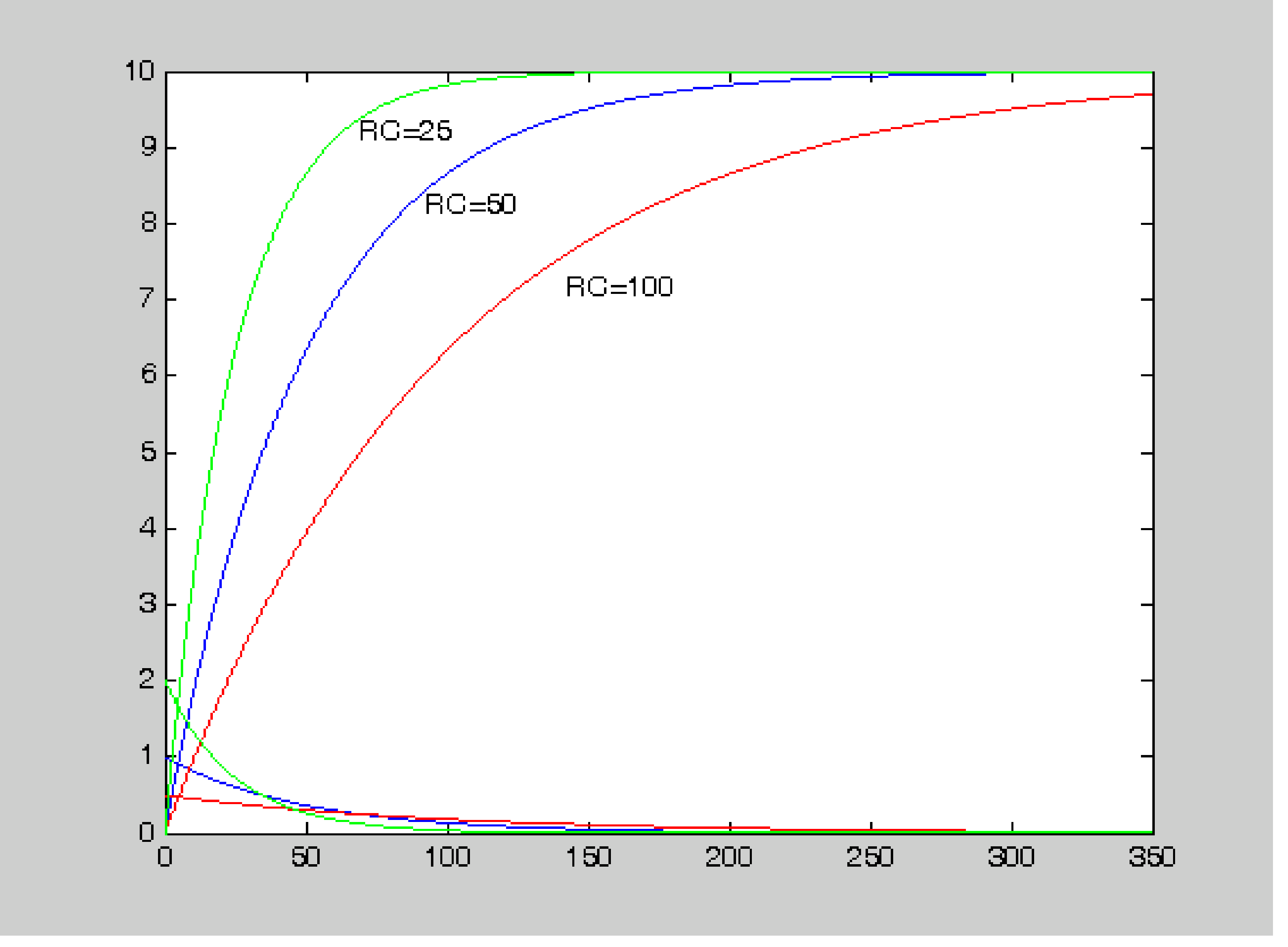
$$u_R(t)=Ri(t)=U_s e^{-\frac{1}{RC}t},\quad t\geq 0^+$$

一阶RC电路的零状态响应是储能从无到有的建立过程——充电过程。

时间常数τ愈小，增长愈快

$$u_C(\tau)=u_C(\infty)(1-e^{-1})=u_C(\infty)\times 63.2\%$$





不同时间常数时的充电曲线

1. 一阶RC电路的零状态响应

$U_s = u_C(\infty)$ **终值（稳态值）**

电容的最终储能： $w_C(\infty) = \dfrac{1}{2}Cu_C^2(\infty) = \dfrac{1}{2}CU_s^2$

电阻消耗的能量：

$$W_R = \int_0^\infty i^2(t)R\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{U_s^2}{R}\mathrm{e}^{-\frac{2}{RC}t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}CU_s^2$$

（与R的大小无关）

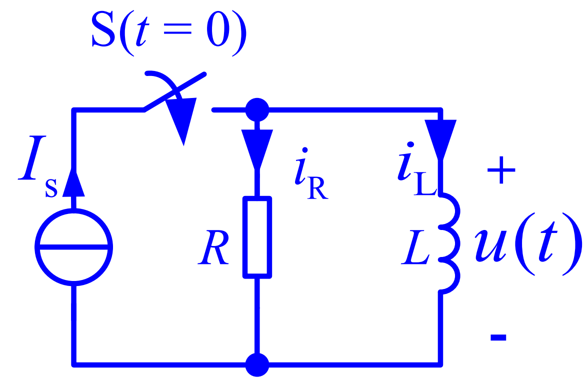
充电效率为50%。

2. 一阶RL电路的零状态响应

$t < 0, \quad i_L(0^-) = 0$

$t = 0$ 合上开关 $\quad i_L(0^+) = i_L(0^-)$

$t \geq 0^+ \quad$ **KCL方程:**



$$i_R + i_L = I_s$$

$$i_R(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$\frac{L}{R} \cdot \frac{di_L}{dt} + i_L = I_s, \quad t \geq 0^+$$

(一阶线性常系数非齐次微分方程)

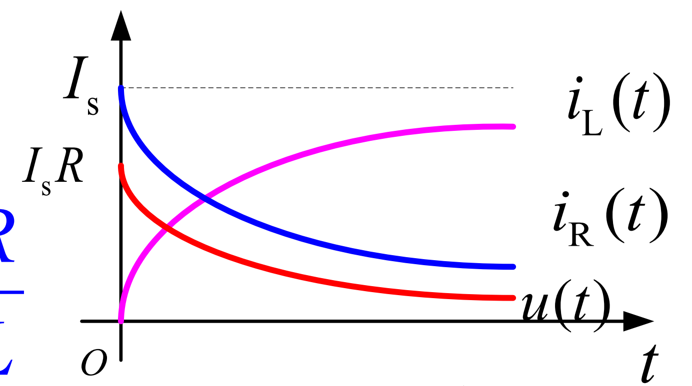
$$i_L(t) = i_{Lh}(t) + i_{Lp}(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} + I_s$$

2. 一阶RL电路的零状态响应

$$i_L(t) = I_s\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right) = I_s\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad t \geq 0^+$$

$$u(t) = L\frac{di_L}{dt} = L(-I_s)(-\frac{R}{L})e^{-\frac{R}{L}t} = I_s R e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0^+$$

$$i_R(t) = \frac{u(t)}{R} = I_s e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0^+$$



时间常数：$\tau = \dfrac{L}{R}$ **固有频率：**$s = -\dfrac{R}{L}$

一阶RL电路的零状态响应是储能从无到有的建立过程——充电过程

2. 一阶RL电路的零状态响应

$i_{\mathrm{L}}(\infty)=I_{\mathrm{s}}$ 终值（稳态值）

电感的储能：

$$w_{\mathrm{L}}(\infty)=\frac{1}{2}Li_{\mathrm{L}}^{2}(\infty)=\frac{1}{2}LI_{\mathrm{s}}^{2}$$

电阻消耗的能量：

$$W_{\mathrm{R}}=\int_{0}^{\infty}i_{R}^{2}(t)R\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}I_{\mathrm{s}}^{2}R\mathrm{e}^{-\frac{2R}{L}t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}LI_{\mathrm{s}}^{2}$$

（与R的大小无关）

充电效率为50%。

2. 一阶RL电路的零状态响应

$$y(t)=y(\infty)\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right),\quad t\geq 0^{+}\qquad \tau=RC\quad \text{or}\quad \tau=\frac{L}{R}$$

——只适用于状态变量的零状态响应的一般形式

R为与动态元件连接的戴维南等效电阻或诺顿等效电阻。

零状态响应满足叠加性：激励增长k倍，响应也增长k倍。如果有多个激励，则零状态响应是每个激励单独作用产生的零状态响应的叠加。

例题1 已知 $u_C(0^-)=0$, 求$u_C(t)$和$i(t)$, $t\geq 0^+$。

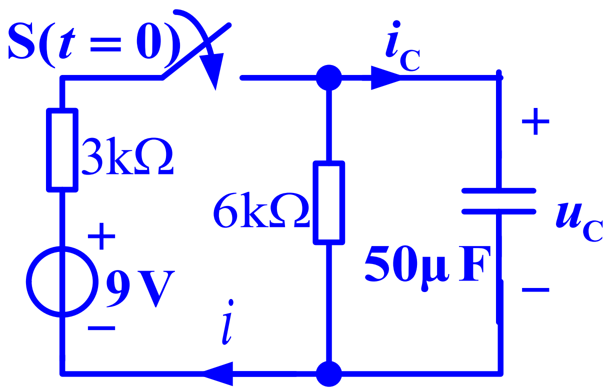
解： $t\geq 0^+$ $R=3//6=2\text{k}\Omega$

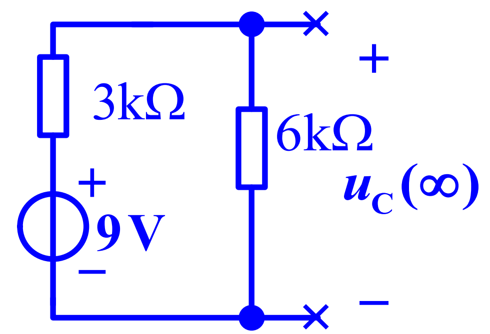
$$\therefore \tau = RC = 2\times 10^3\times 50\times 10^{-6}=0.1\text{s}$$

$t=\infty$ $u_C(\infty)=6\text{V}$

$$u_C(t)=u_C(\infty)\left(1-\text{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$=6\left(1-\text{e}^{-10t}\right)\ \text{V},\quad t\geq 0^+$$

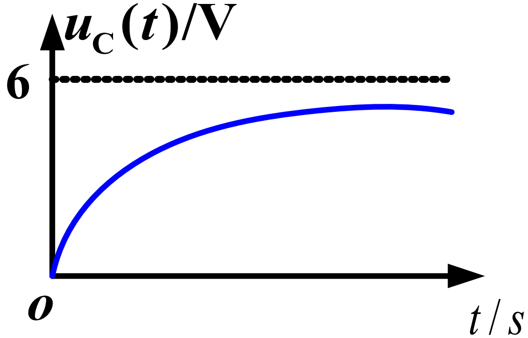


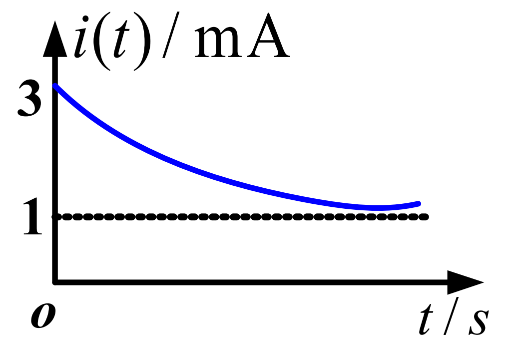


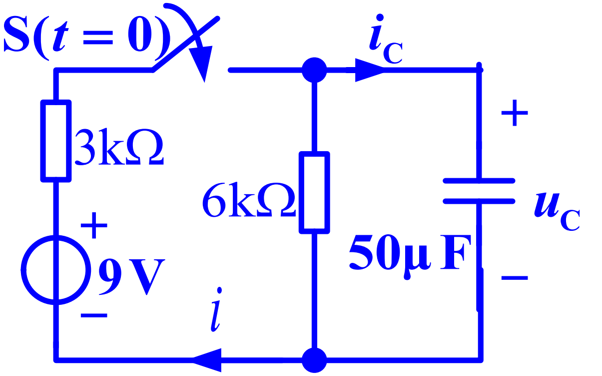
解（续）

$$u_C(t) = 6\left(1 - e^{-10t}\right)\ \text{V}, \quad t \geq 0^+$$

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{6} = 1 + 2e^{-10t}\ \text{mA}, \quad t \geq 0^+$$

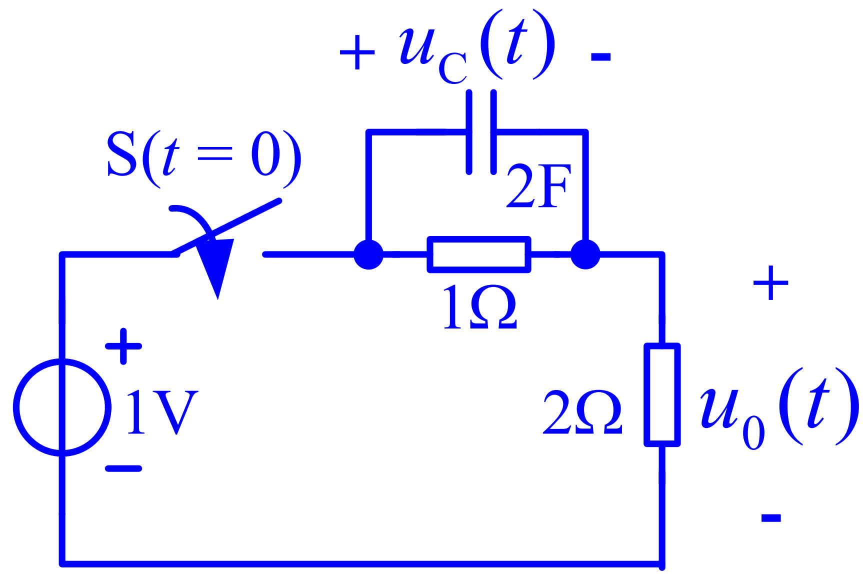






例题2 如图所示电路在 $t<0$ 时处于稳态，$u_C(0^-)=0$。

求开关S闭合后的 $u_C(t)$ 和 $u_0(t)$ 并画出他们的变化曲线。



解：电容电压的稳态值：

$$u_C(\infty)=\frac{1}{1+2}\times 1=\frac{1}{3}\text{V}$$

与电容连接的等效电阻：

$$R_{eq}=1//2=\frac{1\times 2}{1+2}=\frac{2}{3}\Omega$$

电路的时间常数：

$$\tau=R_{eq}C=\frac{2}{3}\times 2=\frac{4}{3}\text{s}$$

解（续）

电容电压：

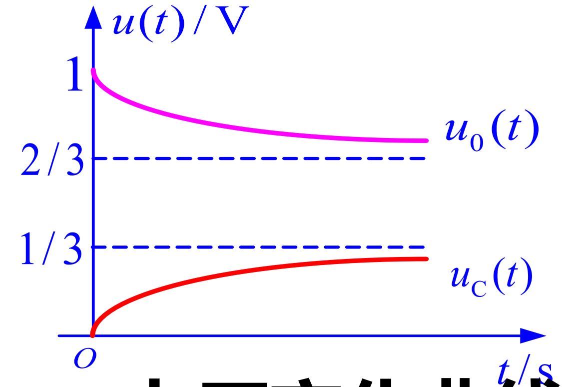
$$u_C(t)=u_C(\infty)(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$=\frac{1}{3}(1-e^{-\frac{3}{4}t})\text{V},\quad t\geq 0^+$$

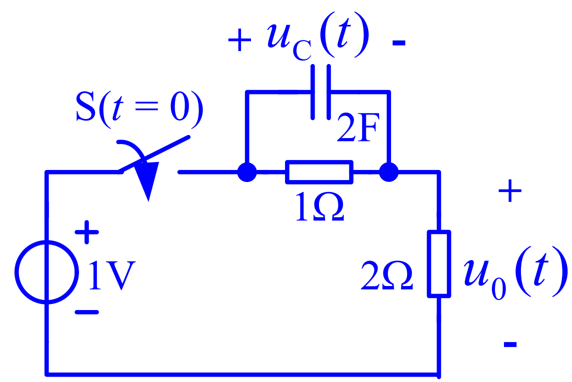
$$1=u_C(t)+u_0(t)$$

$$u_0(t)=1-u_C(t)=1-\frac{1}{3}(1-e^{-\frac{3}{4}t})$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{4}t}\text{V},\quad t\geq 0^+$$

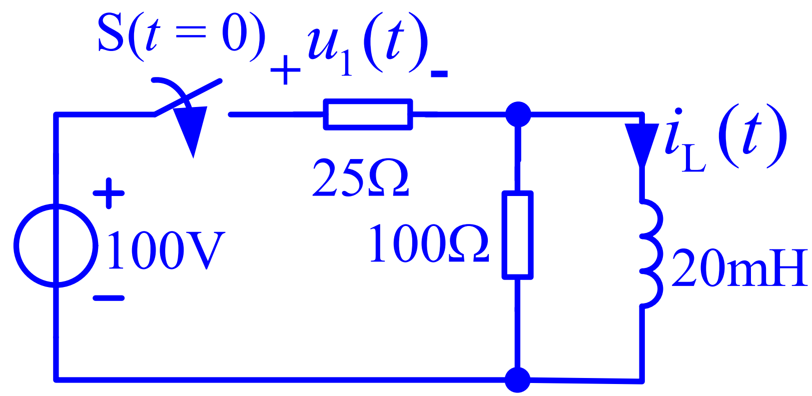


电压变化曲线



例题3 如图所示电路在 $t<0$ 时处于稳态，$i_L(0^-)=0$ 。

求开关S闭合后的 $i_L(t)$ 和 $u_1(t)$，并画出他们的变化曲线。



解: 开关S闭合后电路再达稳态时，电感短路，所以电感电流的稳态值为：

$$i_L(\infty)=\frac{100}{25}=4\text{A}$$

与电感连接的等效电阻：$R_{eq}=25//100=\dfrac{100\times 25}{100+25}=20\Omega$

电路的时间常数为：$\tau=\dfrac{L}{R_{eq}}=\dfrac{0.02}{20}=0.001\text{s}$

解（续）

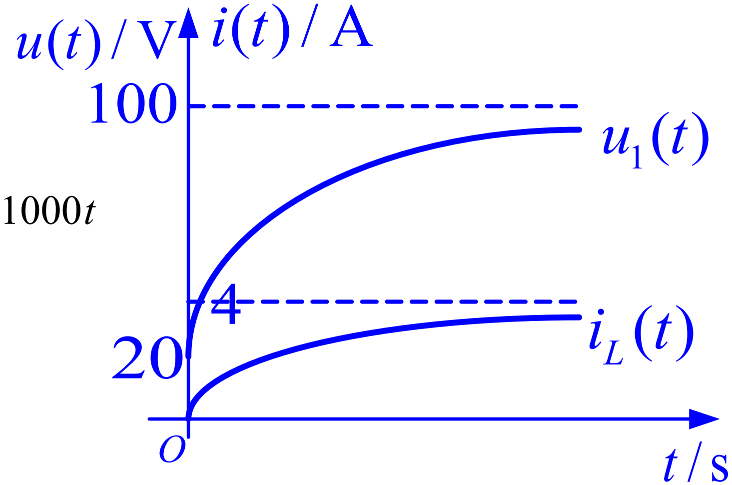
电感电流： $i_{\mathrm{L}}(t)=i_{\mathrm{L}}(\infty)(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})=4(1-\mathrm{e}^{-1000t})\mathrm{A} \quad t\geq 0^{+}$

$$100=u_1(t)+u_L(t)=u_1(t)+L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$u_1(t)=100-L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}(t)}{\mathrm{d}t}$$

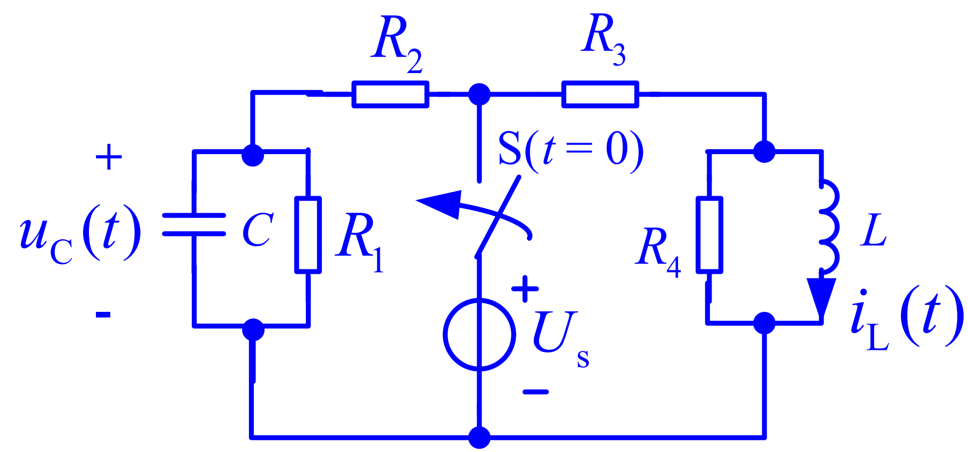
$$=100-0.02\times(-4)\times(-1000)\mathrm{e}^{-1000t}$$

$$=100-80\mathrm{e}^{-1000t}\mathrm{V} \quad t\geq 0^{+}$$



电压、电流变化曲线

例题4 如图所示电路在 $t<0$ 时处于稳态，$i_L(0^-)=0$，$u_C(0^-)=0$。求开关S闭合后的 $i_L(t)$和 $u_C(t)$。



解： 开关闭合后，左右两条支路的端电压相等。左右两部分电路是两个独立的部分，可以分别考虑。

$$i_L(\infty)=\frac{U_s}{R_3}\qquad u_C(\infty)=\frac{R_1}{R_1+R_2}U_s$$

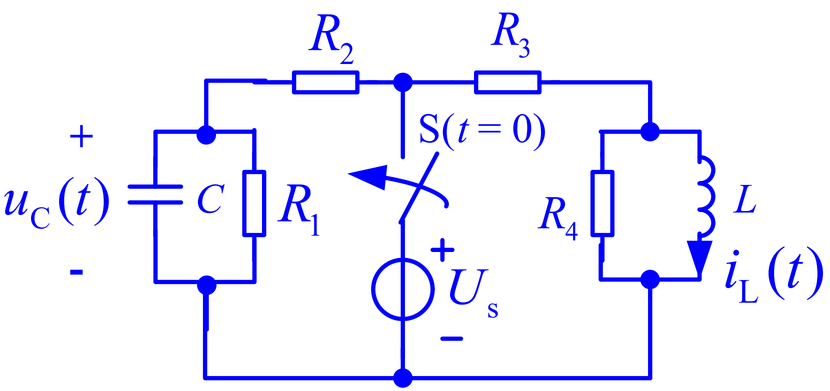
与电感连接的等效电阻：$R_{eq34}=R_3//R_4=\dfrac{R_3R_4}{R_3+R_4}$

右边电路的时间常数：$\tau_L=\dfrac{L}{R_{eq34}}=\dfrac{L(R_3+R_4)}{R_3R_4}$

解（续）

与电容连接的等效电阻：

$$R_{\text{eq12}} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



左边电路的时间常数：

$$\tau_C = R_{\text{eq12}} C = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$$

$$i_L(t) = i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}) = \frac{U_s}{R_3}(1 - e^{-\frac{R_3 R_4}{L(R_3+R_4)}t}) \quad ,t \geq 0^+$$

$$u_C(t) = u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}) = \frac{R_1 U_s}{R_1 + R_2}(1 - e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C}t}) \quad ,t \geq 0^+$$

小结：一阶电路的瞬态响应

ZIR

- 求初始值
  - 换路定则+替代定理
- 求时间常数
  - 0+电路，从动态元件看进去的输入电阻
- 写出表达式

ZIS

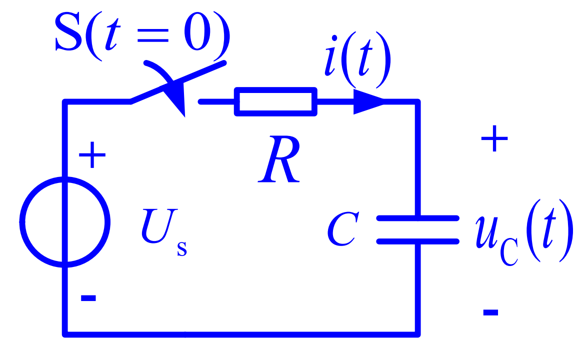
- 求状态变量的稳态值
- 求时间常数
- 0+时刻之后，除源、从动态元件看进去的输入电阻
- 写状态变量的表达式
- 利用两类约束算其他变量

全响应？

§3-6　一阶电路的全响应

一阶电路的全响应

全响应——**动态元件既有初始储能，电路又有外加激励情况下的电路响应。**



$u_C(0^-) \neq 0$

全响应 = 零输入响应 + 零状态响应

开关闭合后：

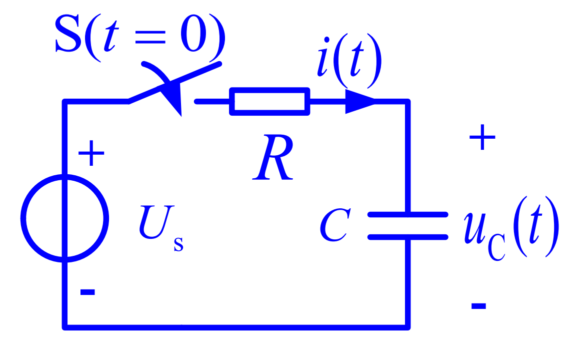
$$u_{Cz.i.s}(t) = u_C(0^+)e^{-\frac{1}{RC}t} = U_0 e^{-\frac{1}{\tau}t}, \quad t \geq 0^+$$

$$u_{Cz.s.r}(t) = u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) = U_s(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}), \quad t \geq 0^+$$

$$u_C(t) = u_{Cz.i.r}(t) + u_{Cz.s.r}(t) = U_0 e^{-\frac{1}{\tau}t} + U_s(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}), \quad t \geq 0^+$$

一阶电路的全响应

经典法



$u_C(0^-) \neq 0$

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+u_C(t)=U_s$$

$$u_{Cp}=U_s$$

$$u_{Ch}(t)=Ae^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$u_C(t)=u_{Ch}(t)+u_{Cp}(t)=U_s+Ae^{-\frac{1}{\tau}t}, \quad t\geq 0^+$$

$$A=u_C(0^+)-U_s=u_C(0^-)-U_s$$

$$u_C(t)=u_{Ch}(t)+u_{Cp}(t)=[u_C(0^+)-U_s]e^{-\frac{1}{\tau}t}+U_s, \quad t\geq 0^+$$

一阶电路的全响应

$$y(t) = y(0^+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + y(\infty)\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad t \geq 0^+$$

$$y(t) = [y(0^+) - y(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + y(\infty), \quad t \geq 0^+$$

$u_C(0^+) > u_C(\infty)$ 电容放电

$u_C(0^+) < u_C(\infty)$ 电容充电

$u_C(0^+) = u_C(0^+)$ 没有过渡过程

例题1 **如图所示电路，开关S闭合前电路已处于稳态，$t=0$时S闭合。试求$u_C(t)$，$t \geq 0^+$。**

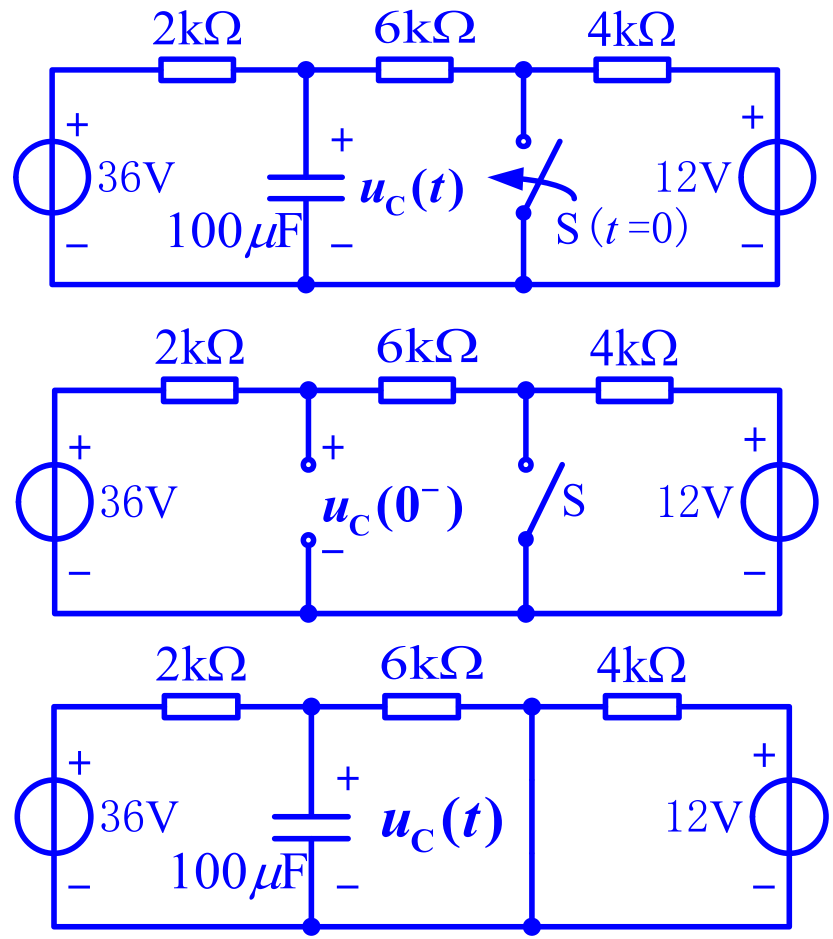
解： $t<0$时：**电路处于稳态**

$$u_C(0^-) = 36 - \frac{36-12}{2+6+4} \times 2 = 32\text{V}$$

$t \geq 0^+$：

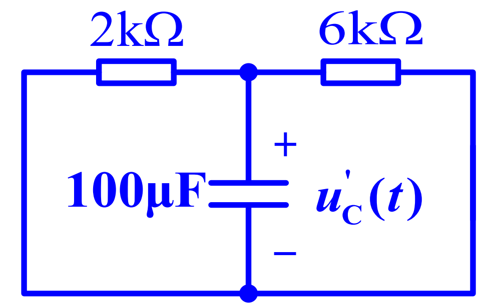
$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 32\text{V}$$

$$\tau = RC = (2\text{k}\Omega // 6\text{k}\Omega)C = 0.15\text{s}$$



解（续）

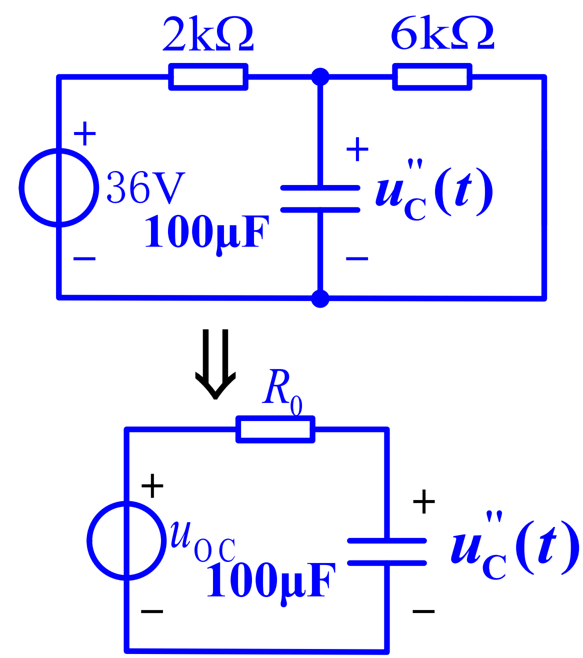
(1) 零输入响应



$$u_C'(t) = u_C(0^+)\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= 32\, e^{-\frac{20}{3}t}\ (\mathrm{V}), \quad t \geq 0^+$$

(2) 零状态响应



$$u_C(\infty) = \frac{6}{2+6} \times 36 = 27\mathrm{V}$$

$$u_C''(t) = u_C(\infty)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$= 27\left(1 - e^{-\frac{20}{3}t}\right)\mathrm{V}, \quad t \geq 0^+$$

解（续）

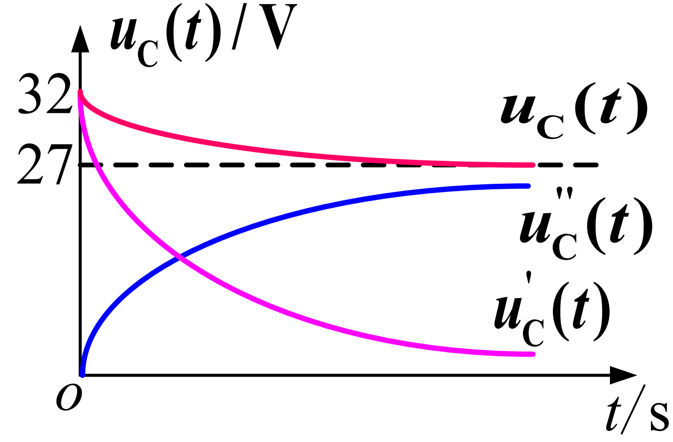
(3) 全响应

根据叠加定理

$$u_C(t) = u_C^{'}(t) + u_C^{''}(t)$$

$$= 32\,e^{-\frac{20}{3}t} + 27\left(1 - e^{-\frac{20}{3}t}\right)$$

$$= 27 + 5e^{-\frac{20}{3}t}\ \text{V},\quad t \geq 0^+$$



解（续）

(4) 12V电压源改为24V电压源

此时，只影响零输入响应，零状态响应不变。

$$u_C(0)=u_C(0^+)=u_C(0^-)=36-\frac{36-24}{2+6+4}\times 2=34\text{V}$$

$$u_C^{'}(t)=34\,\mathrm{e}^{-\frac{20}{3}t}\text{V},\quad t\geq 0^+$$

全响应为：

$$u_C(t)=34\,\mathrm{e}^{-\frac{20}{3}t}+27\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{20}{3}t}\right)$$

$$=27+7\mathrm{e}^{-\frac{20}{3}t}\text{V},\quad t\geq 0^+$$

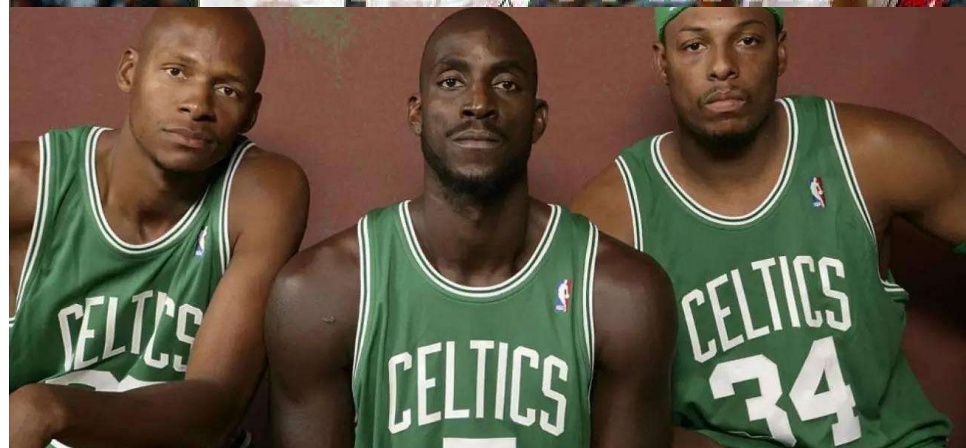
思考：如果36V电压源改为48V电压源结果如何?

§3-8 一阶电路的三要素法

三要素是指：初始值、稳态值和时间常数

三要素法可用于求解在直流激励下，一阶动态电路中任一支路（可以不是状态变量）的电压和电流。

$$y(t)=y(\infty)+[y(0^{+})-y(\infty)]\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$



1. 三要素法

零输入、零状态法： $u_C(t)=u_{Cz.i.r}(t)+u_{Cz.s.r}(t)$

$$=U_C(0^+)e^{-\frac{1}{\tau}t}+U_s(1-e^{-\frac{1}{\tau}t}),\quad t\geq 0^+$$

经典法： $u_C(t)=u_{Ch}(t)+u_{Cp}(t)=U_s+[U_C(0^+)-U_s]e^{-\frac{1}{\tau}t},\quad t\geq 0^+$

$u_{Cp}(t)=U_s=u_C(\infty)$ ——**稳态值**

$A=u_C(0^+)-U_s=u_C(0^+)-u_C(\infty)$

$$u_C(t)=u_C(\infty)+[u_C(0^+)-u_C(\infty)]\,e^{-\frac{t}{\tau}},\quad t\geq 0^+$$

——**三要素公式**

稳态值　初始值　时间常数

三要素法可用于求解在直流激励下，一阶动态电路中任一支路 （可以不是状态变量）的电压和电流。

2. 三要素法解题步骤

1. 求初值 $y(0^+)$

(1)画0等效电路，求出$u_C(0^-)$或$i_L(0^-)$。

注意：此时电容开路，电感短路。

(2)画 0等效电路，求出$y(0^+)$。

此时电容用电压值为$u_C(0^+)=u_C(0^-)$的电压源替代，电感用电流值为$i_L(0^+)=i_L(0^-)$的电流源替代。

2.求稳态值 $y(\infty)$

画 ∞ 等效电路，求出$y(\infty)$。

注意：此时电容开路，电感短路。

2. 三要素法解题步骤

3. 求时间常数τ

求$t \geq 0^+$时除去动态元件后的含源单口网络的戴维南等效电阻或诺顿等效电阻 R_{eq}。

$$\tau = R_{eq}C \quad \text{或} \quad \tau = \frac{L}{R_{eq}}$$

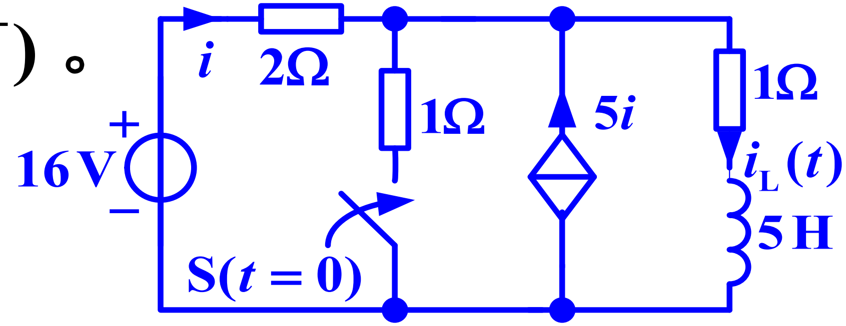
4. 写出所求变量的函数表达式

$$y(t) = y(\infty) + [y(0^+) - y(\infty)]\ e^{-\frac{t}{\tau}}$$

稳态分量　暂态分量

例题1 求$t \geq 0^+$时的$i_L(t)$和$i(t)$ 。

解: **(1)画0等效电路，** 求$i_L(0^-)$ 。

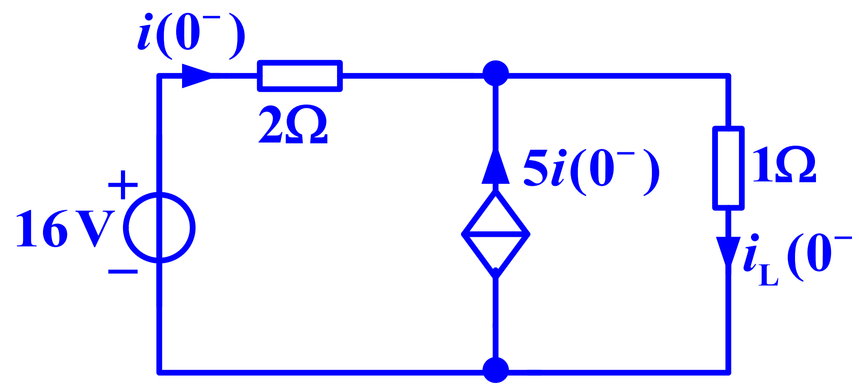


$$i_L(0^-) = i(0^-) + 5i(0^-)$$
$$= 6i(0^-)$$

$$2i(0^-) + 1 \times i_L(0^-) = 16$$

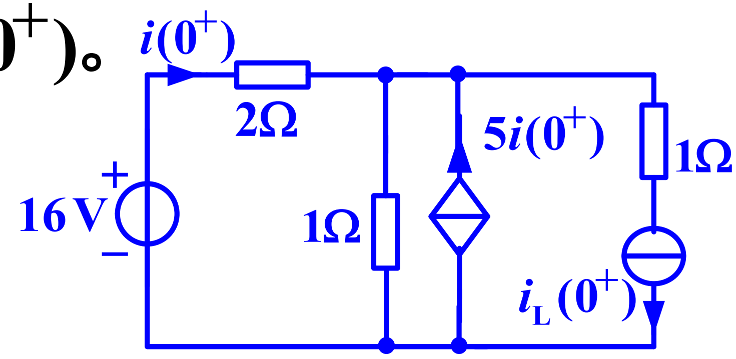
$$2 \times \frac{i_L(0^-)}{6} + i_L(0^-) = 16$$

$$i_L(0^-) = 12\ \text{A}$$



解（续）

(2)画$_0$等效电路，求$i_L(0^+)$、$i(0^+)$。



$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 12\,\text{A}$$

$$2i(0^+) + 1\times\left[i(0^+) + 5i(0^+) - i_L(0^+)\right] = 16$$

$$i(0^+) = 3.5\,\text{A}$$

解（续）

(3)画 ∞ 等效电路,求$i_L(\infty)$、$i(\infty)$。

$$i(\infty)+5i(\infty)=i_L(\infty)+i_L(\infty)$$

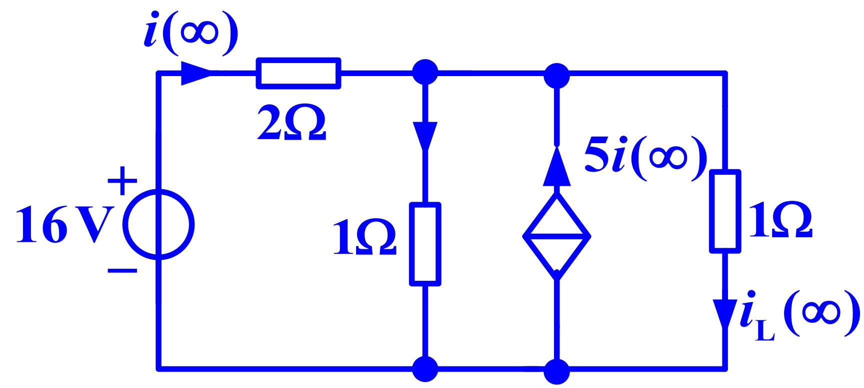
$$i_L(\infty)=3i(\infty)$$

$$2i(\infty)+1\times i_L(\infty)=16$$

$$2i(\infty)+3i(\infty)=16$$

$$i(\infty)=\frac{16}{5}=3.2\text{ A}$$

$$i_L(\infty)=3\times3.2=9.6\text{ A}$$



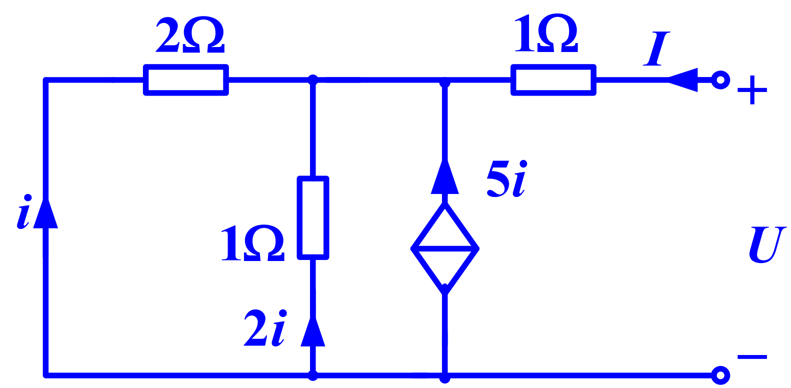
解（续）

(4) 等效电阻 R_{eq} 和时间常数 τ

$$-I = 5i + i + 2i = 8i$$

$$U = 1\times I - 2i = I - 2\left(-\frac{I}{8}\right)$$

$$U = I + \frac{I}{4} = \frac{5}{4}I$$



$$R_{eq} = \frac{U}{I} = \frac{5}{4}\Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{5}{5/4} = 4\text{s}$$

解（续）

(5) 写出 $i_L(t)$和$i(t)$ 的函数表达式

$$i_L(t)=9.6+(12-9.6)\,e^{-\frac{t}{4}}=12e^{-\frac{t}{4}}+9.6\left(1-e^{-\frac{t}{4}}\right)\text{A}$$

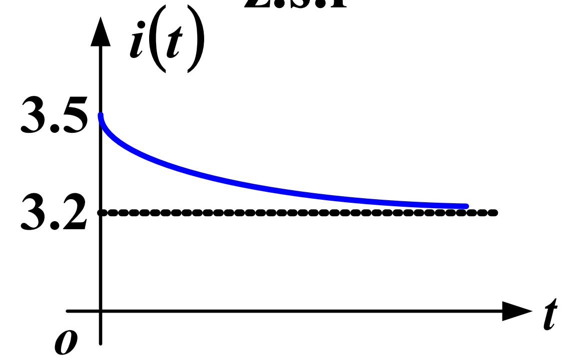
稳态　暂态　z.i.r　z.s.r

$$=2.4e^{-\frac{t}{4}}+9.6\ \text{A},\quad t\geq 0^{+}$$

$$i(t)=3.2+(3.5-3.2)e^{-\frac{t}{4}}=1.5e^{-\frac{t}{4}}+\left(3.2-1.2e^{-\frac{t}{4}}\right)\text{A}$$

稳态　暂态　z.i.r　z.s.r

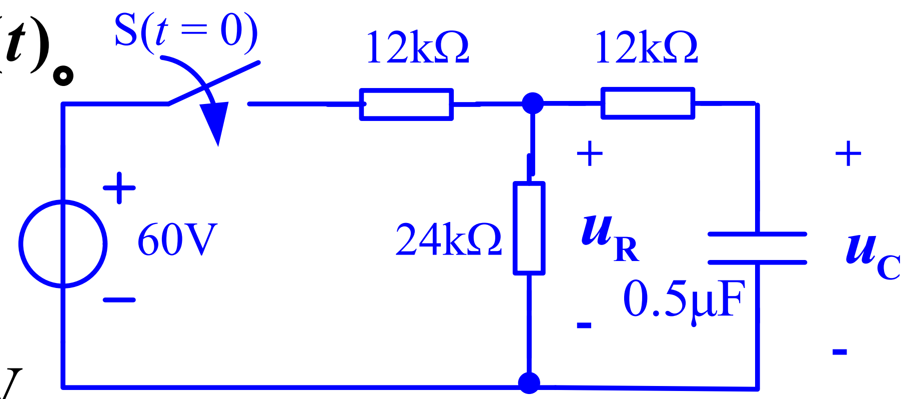
$$=0.3e^{-\frac{t}{4}}+3.2\ \text{A},\quad t\geq 0^{+}$$



例题5 已知图示电路中，$u_C(0^-)=6\text{V}$，求开关闭合后：

1）电容电压的全响应、稳态响应、暂态响应、零输入响应、零状态响应并画其波形。

2）$24\text{k}\Omega$ 电阻上的电压 $u_R(t)$。



解：

1）$u_C(0^+)=u_C(0^-)=6\text{V}$

$$u_C(\infty)=\frac{24}{12+24}\times 60=40\text{V}$$

$$R_{eq}=12+\frac{12\times 24}{12+24}=12+8=20\text{k}\Omega$$

$$\tau=R_{eq}C=20\times 10^3\times 0.5\times 10^{-6}=0.01\text{s}$$

解（续）

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0^+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

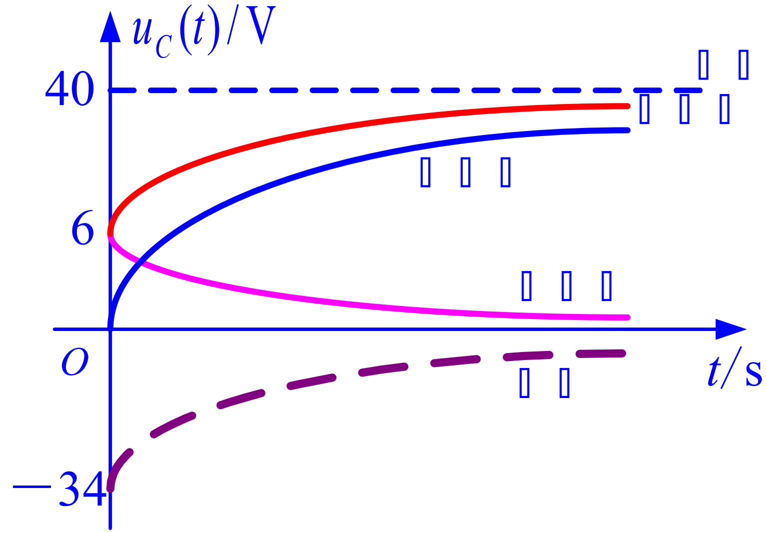
$$= 40 + (6-40)e^{-100t} = 40 - 34e^{-100t}\,\text{V}, \quad t \geq 0^+$$

稳态响应： 40V

暂态响应： $-34e^{-100t}\text{V}$

零输入响应： $6e^{-100t}\text{V}$

零状态响应： $40(1-e^{-100t})\text{V}$



解（续）

2）方法一：根据电路结构和元件的VCR

$$u_R(t)=12\times10^3\times i_C(t)+u_C(t)=12\times10^3\times C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+u_C(t)$$

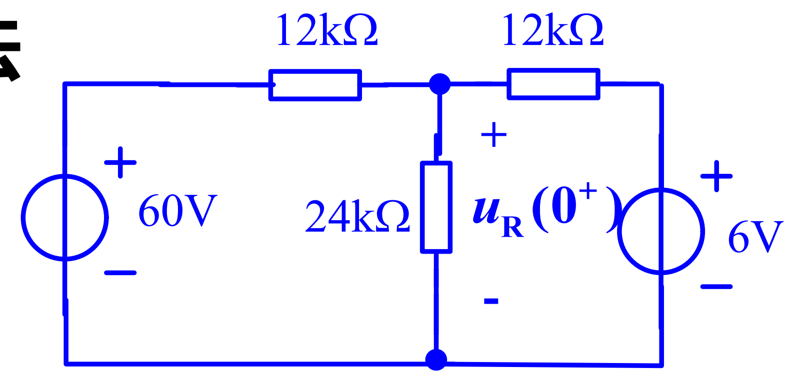
$$=12\times10^3\times0.5\times10^{-6}(-34)(-100)\mathrm{e}^{-100t}+40-34\mathrm{e}^{-100t}$$

$$=20.4\mathrm{e}^{-100t}+40-34\mathrm{e}^{-100t}=40-13.6\mathrm{e}^{-100t}\mathrm{V},\quad t\geq0^+$$

方法二：直接应用三要素法

画0^+等效电路求$u_R(0^+)$

$$u_R(0^+)=\frac{\frac{60}{12}+\frac{6}{12}}{\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{12}}=26.4\mathrm{V}$$



解（续）

稳态值： $u_R(\infty)=\dfrac{24}{12+24}\times 60=40\text{V}$

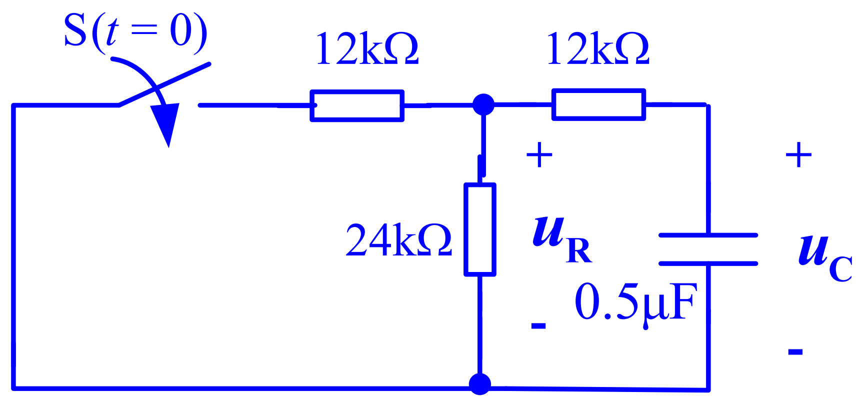
$$u_R(t)=u_R(\infty)+[u_R(0^+)-u_R(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$=40+(26.4-40)e^{-100t}=40-13.6e^{-100t}\text{V},\quad t\geq 0^+$$

思考：U_R零输入响应怎么求？

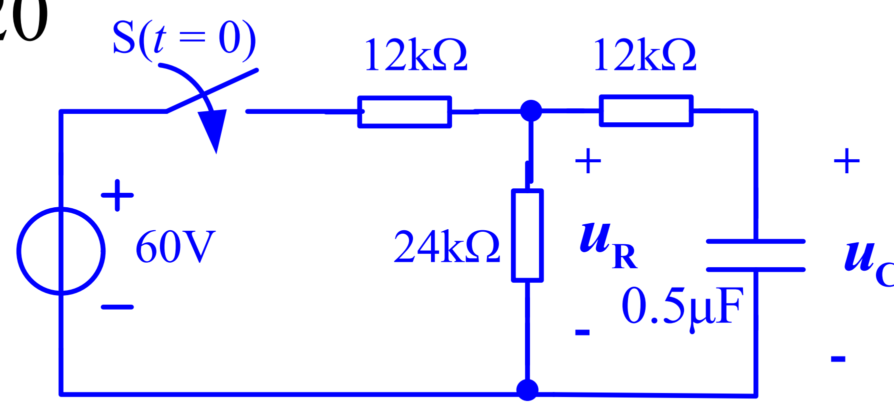
三要素法与零输入、零状态响应

$$u_C(0^-) = 6\text{V}$$



零输入时：

$$U_R(0^+) = 6 \times \frac{12//24}{12//24+12} = \frac{6\times 8}{20} = 2.4\text{V}$$



零状态时：

$$U_R(0^+) = 60 \times \frac{12//24}{12//24+12} = 24\text{V}$$

$$u_R(t) = u_R(\infty) + [u_R(0^+) - u_R(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$= 40 + (26.4 - 40)e^{-100t} = 40 - 13.6e^{-100t}\,\text{V}, \quad t \ge 0^+$$

- 此处的 $U_R(0^+)$ ， 由两部分构成，一部分是电容储能引起，一部分是**60V**激励源引起；
- 或者说 $U_R(0^+)$ 的一部分是零输入响应的成分，另一部分是零状态响应的成分；
- 也就是说，非状态变量的零状态响应，其初始值不为零！

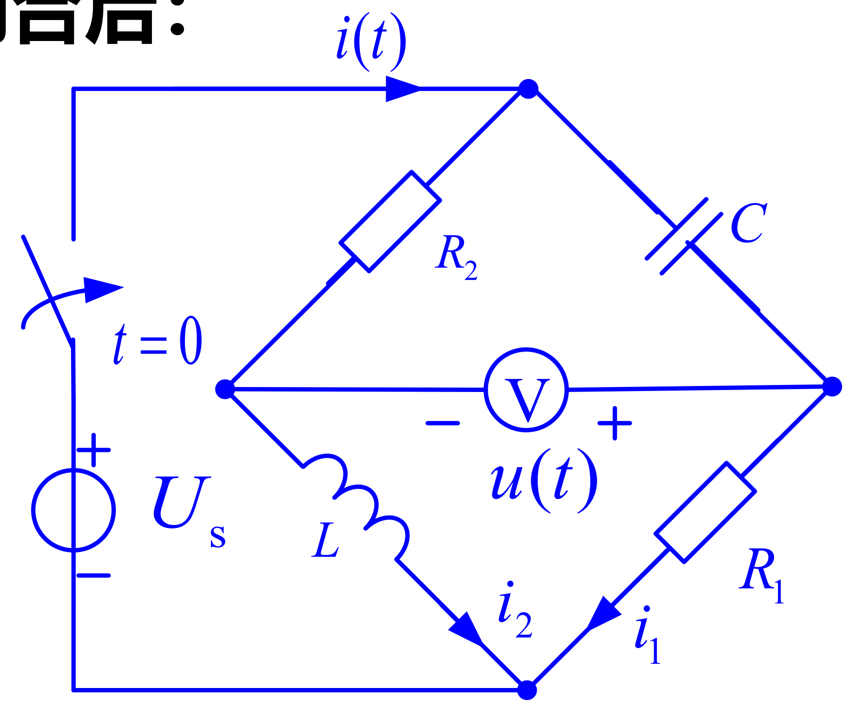
例题3 已知下图桥型电路中的电容电压和电感电流的

初始值都为零，$t=0$ 时合上开关，设 $R_1R_2=\dfrac{2L}{C}$，电压表的内阻无限大，求开关闭合后：

1）流过开关的电流 $i(t)$；

2）电压表读数达到最大值的时间；

3）电压表的最大读数。



解: 开关闭合后 R_2、L串联支路与 R_1、C串联支路具有相同的电压，他们各自与电压源构成充电回路。

1) $$i_2(\infty)=\frac{U_s}{R_2} \qquad u_C(\infty)=U_s$$

$$i_2(t)=\frac{U_s}{R_2}(1-e^{-\frac{R_2}{L}t}),\quad t\geq 0^+ \qquad u_C(t)=U_s(1-e^{-\frac{t}{R_1C}}),\quad t\geq 0^+$$

$$i_1(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}=\frac{U_s}{R_1}e^{-\frac{t}{R_1C}},\quad t\geq 0^+$$

$$i(t)=i_1(t)+i_2(t)=\frac{U_s}{R_1}e^{-\frac{t}{R_1C}}+\frac{U_s}{R_2}(1-e^{-\frac{R_2}{L}t}),\quad t\geq 0^+$$

解（续）

2）$u(t)=R_1 i_1 - L\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=U_s(\mathrm{e}^{-\frac{t}{R_1 C}}-\mathrm{e}^{-\frac{R_2}{L}t}),\quad t\geq 0^+$

当$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0$时，$u(t)$达到最大值，此时：$\dfrac{1}{R_1 C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{R_1 C}}=\dfrac{R_2}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R_2}{L}t}$

整理得：$\dfrac{L}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{R_1 C}}=R_1 R_2 \mathrm{e}^{-\frac{R_2}{L}t}$

因为$R_1 R_2=\dfrac{2L}{C}$，所以：$2\mathrm{e}^{-\frac{R_2}{L}t}=\mathrm{e}^{-\frac{t}{R_1 C}}$

上式两边取自然对数：$\ln 2+(-\dfrac{R_2}{L}t)=-\dfrac{t}{R_1 C}$

整理得：$\ln 2=\dfrac{R_1 R_2 C-L}{L R_1 C}t$

由$R_1 R_2=\dfrac{2L}{C}$可得：$R_1 R_2 C=2L$　　$\ln 2=\dfrac{1}{R_1 C}t$

解（续）

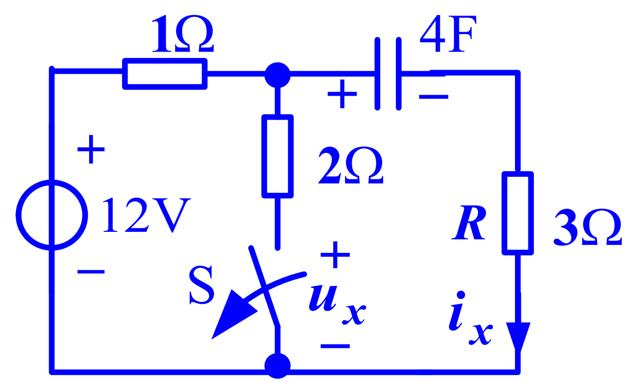
$$\ln 2 = \frac{1}{R_1 C} t$$

$t = R_1 C \cdot \ln 2$ 时电压表读数达到最大值。

3） $$u_{\max} = U_s\left(e^{-\frac{R_1 C \cdot \ln 2}{R_1 C}} - e^{-\frac{R_2}{L} R_1 C \cdot \ln 2}\right)$$

$$= U_s(e^{-\ln 2} - e^{-2\ln 2}) = U_s\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} U_s$$

例题2 电路在 $t<0$ 时已达到稳态，于 $t=0$ 时突然打开开关S，求 $u_x(t)$, $i_x(t)$, $t\geq 0^+$ 。



解:

$$u_C(0^+)=8\text{V}$$

$$u_x(0^+)=11\text{V}$$

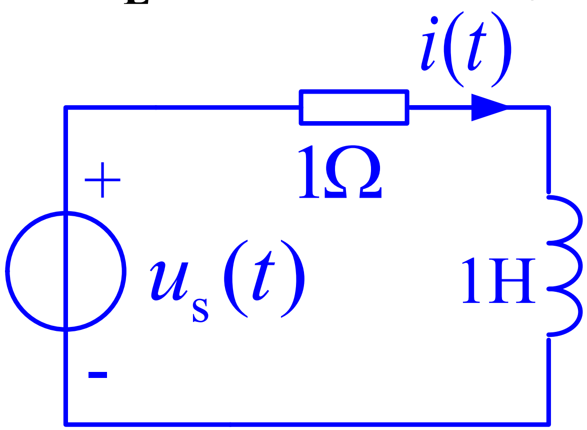
$$i_x(0^+)=1\text{A}$$

$$u_x(\infty)=12\text{V}$$

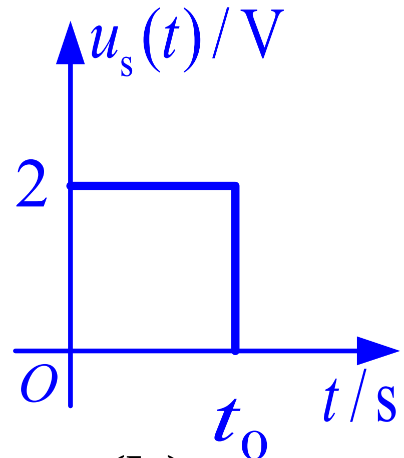
$$i_x(\infty)=0\text{A}$$

$$\tau=RC=16\text{s}$$

例题4 图(a)所示RL电路中的电压源电压如图(b)所示，且$i_L(0^-)=0$。试求$t\geq 0^+$时的$i(t)$并绘出变化曲线。



(a)



(b)

(c)

解： 由于$i_L(0^-)=0$，所以在$0\leq t\leq t_0$区间$i(t)$为零状态响应；当$t>t_0$时，因为没有了外加激励，而且由于前一段的充电，电感中已有储能，所以$i(t)$为零输入响应。

解（续）

$0 \le t \le t_0$： $i(0^+) = i_L(0^-) = 0 \quad i_L(\infty) = 2\text{A} \quad \tau = RC = 1\text{s}$

$$i(t) = i(\infty) + [i(0^+) - i(\infty)]\text{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 2(1-\text{e}^{-t})\text{A}, \quad t \ge 0^+$$

$t > t_0$： $u_s(t) = 0 \quad i_L(\infty) = 0 \quad \tau = RC = 1\text{s}$

$$i(0^+) = i(t_0^+) = 2(1-\text{e}^{-t_0})$$

$$i(t) = i(t_0^+)\text{e}^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}$$

$$= 2(1-\text{e}^{-t_0})\text{e}^{-(t-t_0)}\text{A}, \quad t \ge t_0^+$$

$i(t_0^+)$是第一段在t_0时刻的值，此即为第二段的初始值。