第二章

例 2.1-4 设随机振幅信号 $X(t)=X\cos(\omega_0 t)$，式中：ω_0 为常量，X 为标准正态随机变量。试求时刻：$t=0$、$t=\frac{\pi}{3\omega_0}$、$t=\frac{\pi}{2\omega_0}$ 时 $X(t)$ 的一维概率密度。

解：X的一维概率密度为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$$

X(t)在任一时刻 t的取值为

$$x_t=x\cos(\omega_0 t)$$

$$\therefore P(x_t,t)=p(x,t)\left|\frac{dx}{dx_t}\right|=p\left(\frac{x_t}{\cos\omega_0 t},t\right)\left|\frac{1}{\cos\omega_0 t}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,|\cos\omega_0 t|}\exp\left[-\frac{x_t^2}{2\cos^2\omega_0 t}\right]$$

$\therefore$ $t=t_1=0$ 时

$$P(x_1,t_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{x_1^2}{2}\right]$$

$t=t_2=\frac{\pi}{3\omega_0}$ 时

$$P(x_2,t_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,0.5}\exp\left[-2x_2^2\right]$$

$t=t_3=\frac{\pi}{2\omega_0}$ 时

$$P(x_3,t_3)=\lim_{t\to t_3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,|\cos\omega_0 t_3|}\exp\left[-\frac{x_3^2}{2\cos^2\omega_0 t_3}\right]=\delta(x_3)$$

思路：$X(t)=X\cos(\omega_0 t)$，X是随机变量

X(t)是随机变量的函数

由公式：$P(x_t,t)=P(x,t)\left|\frac{dx}{dx_t}\right|$

可以求出X(t)的概率密度

原理：

在 $Y=g(X)$ 中，若 X 是一个连续随机变量，则 Y 即为一个连续随机变量。对于连续随机变量函数的分布，有以下定理。

定理 设连续随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)$，函数 $y=g(x)$ 严格单调，其反函数 $g^{-1}(y)$ 有连续导数，则 $Y=g(X)$ 也是一个连续随机变量，且其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[g^{-1}(y)]\,|[g^{-1}(y)]'|, & \alpha<y<\beta\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \qquad (1.4-1)$$

其中 $\alpha=\min[g(-\infty),g(+\infty)]$，$\beta=\max[g(-\infty),g(+\infty)]$。

为什么成了冲激函数？

当正态分布的方差 σ^2 趋于0时，其极限就是冲激函数 $\delta(x)$

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]=\delta(x)$$

例 2.1-7 已知随机过程 $X(t)$ 在 t 时刻的取值服从正态分布，其一维概率密度为

$$p(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

试求这时随机过程 $X(t)$ 的特征函数，并求此时的数学期望、方差、均方值。

解：由特征函数定义：

$$\Phi_X(\lambda,t)=E\left[e^{j\lambda X(t)}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\lambda x}p(x,t)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[j\lambda x-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]dx.$$

令 $y=\frac{x-m}{\sigma}$ 得：

$$\Phi_X(\lambda,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[j\lambda(\sigma y+m)-\frac{y^2}{2}\right]\cdot\sigma dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{j\lambda m}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{y^2}{2}+j\lambda\sigma y\right]dy$$

$$=\exp\left[j\lambda m-\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\right]$$

$$\therefore E[X(t)]=j^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\Phi_X(\lambda,t)\right]_{\lambda=0}=m$$

$$E[X^2(t)]=j^{-2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\Phi_X(\lambda,t)\right]_{\lambda=0}=\sigma^2+m^2$$

$$D[X(t)]=E[X^2(t)]-E^2[X(t)]=\sigma^2$$

对于 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{y^2}{2}+j\lambda\sigma y\right]dy$

进行配方：$\exp\left[-\frac{1}{2}\left(y^2-2j\lambda\sigma y+(j\lambda\sigma)^2-(j\lambda\sigma)^2\right)\right]$

$$=\exp\left[-\frac{1}{2}(y-j\lambda\sigma)^2\right]\cdot\exp\left[-(j\lambda\sigma)^2\right]$$

$$I=\exp\left[-\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\right]\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}(y-j\lambda\sigma)^2\right]dy$$

由高斯积分公式 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(x-a)^2}dx=\sqrt{2\pi}$ $\therefore I=\exp\left[-\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\right]\cdot\sqrt{2\pi}$

知识点：

$$\Phi_X(\lambda,t)=E\left[e^{j\lambda X(t)}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\lambda x}p(x,t)dx$$

$$E[X^n(t)]=j^{-n}\left[\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\Phi_X(\lambda,t)\right]_{\lambda=0}$$

$$D[X(t)]=E[X^2(t)]-E^2[X(t)]$$

例 2.1-6 设随机振幅信号 $X(t)=X\cos(\omega_0 t)$，式中：ω_0 为常量，X 为标准正态随机变量。求随机过程 $X(t)$ 的数学期望、方差、相关函数、协方差函数。

解： $\because X$ 是标准正态随机变量.

$\therefore E[X]=0 \quad D[X]=1. \quad \therefore E[X^2]=D[X]+E^2[X]=1$

$m_X(t)=E[X(t)]=E[X\cos w_0 t]=\cos w_0 t\cdot E[X]=0$

$\sigma_X^2(t)=D[X(t)]=D[X\cos w_0 t]=\cos^2 w_0 t\cdot D[X]=\cos^2 w_0 t.$

$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=E[X^2\cos w_0 t_1\cos w_0 t_2]$

$=\cos w_0 t_1\cos w_0 t_2\cdot E[X^2]=\cos w_0 t_1\cos w_0 t_2$

$C_X(t_1,t_2)=E[\mathring{X}(t_1)\mathring{X}(t_2)]=E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][X(t_2)-m_X(t_2)]\}$

$=E[X(t_1)X(t_2)]=R_X(t_1,t_2)=\cos w_0 t_1\cos w_0 t_2.$

① $E[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x\,p(x)\,dx=m_X(t)$

② $D[X(t)]=E\{[\mathring{X}(t)]^2\}$

$=E\{[X(t)-m_X(t)]^2\}$

$=\int_{-\infty}^{\infty}[x-m_X(t)]^2 p(x,t)\,dx=\sigma_X^2(t)$

③ $R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$

$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2\,p(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1dx_2$

④ $C_X(t_1,t_2)=E[\mathring{X}(t_1)\mathring{X}(t_2)]$

$=R_X(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_X(t_2)$

类比：$\sigma_X^2(t)=E[X^2(t)]-m_X^2(t)$

例 2.2-1 设随机初相信号 $X(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$，其中 A 和 ω_0 都是常量，φ 是在 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量。试问 $X(t)$ 是否平稳过程。

解：$p(\varphi)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & 0<\varphi<2\pi \\ 0, & 其他\end{cases}$

$$m_X(t)=E[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)p(\varphi)d\varphi=\int_0^{2\pi}A\cos(\omega_0 t+\varphi)\cdot\frac{1}{2\pi}d\varphi=0 \quad ①$$

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=\int_{-\infty}^{\infty}x(t_1)x(t_2)p(\varphi)d\varphi \quad ①$$

$$=\int_0^{2\pi}A^2\cos(\omega_0 t_1+\varphi)\cos(\omega_0 t_2+\varphi)\frac{1}{2\pi}d\varphi$$

$$=\frac{A^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\{\cos[\omega_0(t_2-t_1)]+\cos[\omega_0(t_1+t_2)+2\varphi]\}d\varphi$$

$$=\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau$$

$\because m_X(t)$ 与 t 无关，$R_X(t_1,t_2)$ 仅与时间间隔 τ 有关

$\therefore X(t)$ 至少是广义平稳过程.

知识点：

① 若随机变量 Y 是随机变量 X 的函数

即 $Y=g(X)$

则 $E[Y]=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)p_X(x)dx$

② 相关函数 $R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$

③ 广义平稳：$\begin{cases}E[X(t)]=m_X \\ R_X(t_1,t_2)=R_X(\tau)\end{cases}$

④ 积化和差

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

例 2.2-2 随机电报信号 $X(t)$ 的典型样本如图 2.2-1 所示，在任一时刻 t，$X(t)$ 仅能取值为 0 或 1，其概率均为 1/2。两值之间的变换时刻是随机的，设在单位时间内变换的平均次数为 λ，在任一时间间隔 $|\tau|=|t_2-t_1|$ 内，变换 λ 次的概率服从泊松(Poisson)分布，即

$$P_k(\lambda|\tau|)=\frac{(\lambda|\tau|)^k}{k!}e^{-\lambda|\tau|}$$

式中：λ 是单位时间内变换数值的平均次数。试问 $X(t)$ 是否平稳过程。

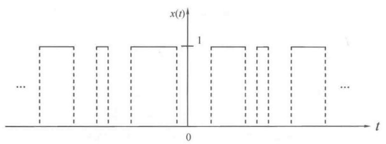

图 2.2-1 随机电报信号的典型样本

解：$m_X(t)=1\cdot P[X(t)=1]+0\cdot P[X(t)=0]=\frac{1}{2}$

若在 $|\tau|$ 内变换偶数次，则 $X(t_1)\cdot X(t_2)=1$

奇数次则 $X(t_1)\cdot X(t_2)=0$

$R_X(t_1,t_2)=1\cdot P(X(t_1), X(t_2)=1)$

由 $P(AB)=P(B|A)\cdot P(A)$ 得：$P(X(t_1)=1, X(t_2)=1)=P(X(t_2)=1|X(t_1)=1)\cdot P(X(t_1)=1)$

$P(X(t_1)=1)=\frac{1}{2}$ $\quad P(X(t_2)=1|X(t_1)=1)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(\lambda|\tau|)$.

$$R_X(t_1,t_2)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}P_k(\lambda|\tau|)=\frac{1}{2}e^{-\lambda|\tau|}\left[1+\frac{(\lambda|\tau|)^2}{2!}+\frac{(\lambda|\tau|)^4}{4!}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{4}e^{-\lambda|\tau|}[e^{\lambda|\tau|}+e^{-\lambda|\tau|}]=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-2\lambda|\tau|}$$

$\therefore$ 这里的计算相当于 $e^{\lambda}+e^{-\lambda}$.

知识点

① $R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$

② 泊松分布 $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

e^x 的泰勒展开：

$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

$\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1$

例 2.2-3 设 $x_i(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi_i)$ 是例 2.2-1 所示随机初相信号 $X(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$ 中的任一样本，试求 $x_i(t)$ 的时间均值和时间自相关函数，并与例 2.2-1 所得结果作比较。

解: $\langle x_i(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A\cos(\omega_0 t+\varphi_i)dt$

$= 0$

$\langle x_i(t)x_i(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A^2\cos(\omega_0 t+\varphi_i)\cos[\omega_0(t+\tau)+\varphi_i]dt$

$\approx \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{4T}\int_{-T}^{T}\cos\omega_0\tau\, dt = \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau$

$E[X(t)] = \langle x_i(t)\rangle$

$E[X(t)X(t+\tau)] = \langle x_i(t)x_i(t+\tau)\rangle$

① 时间均值

$\langle x_i(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_i(t)dt$

时间自相关

$\langle x_i(t)x_i(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_i(t)x_i(t+\tau)dt$

② 积化和差

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

例 2.2-4 已知平稳正态噪声 $X(t)$ 的均值为零，相关函数为 $R_X(\tau)=\sigma^2 e^{-\tau^2}\cos\omega_0\tau$，其中 σ 和 ω_0 为常量，试判断 $X(t)$ 是否遍历过程。

解、∵ $X(t)$ 是零均值的平稳正态噪声

∴ $C_X(\tau) = R_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\tau^2}\cos\omega_0\tau$

∵ $\lim_{|\tau|\to\infty} C_X(\tau) = 0$

∴ $X(t)$ 是遍历过程.

① $C_X(t_1,t_2) = E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][X(t_2)-m_X(t_2)]\}$

$= R_X(t_1,t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$

② 对于零均值平稳正态随机过程 $X(t)$，过程遍历的充要条件为

$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |C_X(\alpha)|^2 d\alpha = 0$

例 2.2-5 假设几种平稳随机过程的相关函数分别如图 2.2-6 所示。试判断它们能否成立，并说明这些过程各有何特点（有无直流分量，有无周期性，波形起伏是快是慢）。

解 图(a)违反性质(3)，故不能成立；

图(b)能成立，有直流分量，无周期性，过程的波形起伏较慢；

图(c)能成立，无直流分量，有周期性，过程的波形起伏极快（是宽度极窄的 δ 函数）。

图(d)能成立，无直流分量和周期性，过程的波形起伏较快（指其载波波形，而包络波形的起伏较慢），且正负交替变化。

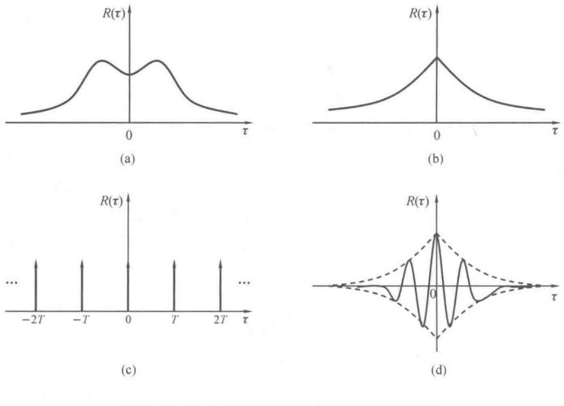

图 2.2-6 几种平稳过程的相关函数假设图形

R_X 的性质

① $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$

② $R_X(0) = \sigma_X^2 + m_X^2 \geq 0$

③ $R_X(0) \geq |R_X(\tau)|$

④ 若平稳随机过程中不含周期分量，

则 $R_X(\infty) = \lim_{|\tau|\to\infty} R_X(\tau) = m_X^2$

$\begin{cases} m_X = \pm\sqrt{R_X(\infty)} \\ \sigma_X^2 = C_X(0) = R_X(0) - R_X(\infty) \end{cases}$

⑤ 对于周期性随机过程

$R_X(\tau) = R_X(\tau+T)$

例 2.2－6　工程应用中某一平稳信号 $X(t)$ 的自相关函数为

$$R_X(\tau)=100e^{-10|\tau|}+100\cos 10\tau+100$$

试估计其均值、均方值和方差。

解：将 $X(t)$ 视为两个信号 $U(t)$ 与 $V(t)$ 的和，

$$R_U(\tau)=100e^{-10|\tau|}+100 \quad . R_V(\tau)=100\cos 10\tau$$

$U(t)$ 是 $X(t)$ 的非周期分量，

$$m_U=\pm\sqrt{R_U(\infty)}=\pm\sqrt{10}$$

$V(t)$ 是 $X(t)$ 的周期分量

$$m_V=0$$

$$m_X=m_U+m_V=\pm 10$$

$$E[X^2(t)]=R_X(0)=300$$

$$\sigma_X^2=R_X(0)-m_X^2=200$$

① 除周期分量则 $\begin{cases} m_X=\pm\sqrt{R_X(\infty)} \\ \sigma_X^2=C_X(0)=R_X(0)-R_X(\infty) \end{cases}$

② $R_X(0)=\sigma_X^2+m_X^2$

例 2.2－7　已知随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的协方差函数分别为 $C_X(\tau)=\frac{1}{4}e^{-2\lambda|\tau|}$ 和 $C_Y(\tau)=\frac{\sin\lambda\tau}{\lambda\tau}$，其中 $\lambda>0$。

（1）比较两个过程的起伏速度；

（2）比较当 $\tau=\pi/\lambda$ 时两个过程的相关程度；

（3）比较过程 $Y(t)$ 在 $\tau=0$ 和 $\tau=\pi/\lambda$ 时的相关程度。

解：(1)

$$\sigma_X^2=C_X(0)=\frac{1}{4}$$

$$r_X(\tau)=\frac{C_X(\tau)}{\sigma_X^2}=e^{-2\lambda|\tau|}$$

$$\tau_{0X}=\int_0^\infty r_X(\tau)d\tau=\int_0^\infty e^{-2\lambda\tau}d\tau=\frac{1}{2\lambda}$$

$$\sigma_Y^2=C_Y(0)=1$$

$$r_Y(\tau)=\frac{C_Y(\tau)}{\sigma_Y^2}=\frac{\sin\lambda\tau}{\lambda\tau}$$

$$\tau_{0Y}=\int_0^\infty\frac{\sin\lambda\tau}{\lambda\tau}d\tau=\frac{\pi}{2\lambda}$$

由于 $\tau_{0X}<\tau_{0Y}$　∴ $X(t)$ 比 $Y(t)$ 的起伏速度快

(2) 由 $\tau=\frac{\pi}{\lambda}$ 时，

$$r_X\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)=e^{-2\lambda\left|\frac{\pi}{\lambda}\right|}=e^{-2\pi}$$

$$r_Y\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)=\frac{\sin\pi}{\pi}=0$$

这时 $X(t)$ 是相关的，而 $Y(t)$ 是不相关的。

(3) $\tau=0$，有 $r_Y(0)=1$，这时 $Y(t)$ 是完全相关的，

而 $\tau=\frac{\pi}{\lambda}$ 时却不相关

① 相关系数

$$r_X(\tau)=\frac{C_X(\tau)}{C_X(0)}=\frac{C_X(\tau)}{\sigma_X^2}$$

用于表示关联程度大小。

$r_X(\tau)=1$ ：完全相关

$r_X(\tau)=0$ ：不相关。

② 相关时间

$$\tau_0=\int_0^\infty r_X(\tau)d\tau$$

相关时间 τ_0 小，表示过程平均起伏速度快；

τ_0 大，表明平均起伏速度慢。

例 2.3－1 随机过程 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 统计独立，求它们的互相关函数和互协方差函数。

解：$p_2(x_1, y_2; t_1, t_2) = p(x_1, t_1)\, p(y_2, t_2)$

$$R_{XY}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2\, p(x_1, y_2; t_1, t_2)\, dx_1 dy_2$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 p(x_1, t_1)\, dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} y_2 p(y_2, t_2)\, dy_2$$
$$= m_X(t_1)\, m_Y(t_2)$$

$$C_{XY}(t_1,t_2) = E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][Y(t_2) - m_Y(t_2)]\}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_X(t_1)][y_2 - m_Y(t_2)]\, p_2(x_1, y_2; t_1, t_2)\, dx_1 dy_2$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_X(t_1)]\, p(x_1, t_1)\, dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} [y_2 - m_Y(t_2)]\, p(y_2, t_2)\, dy_2$$
$$= [m_X(t_1) - m_X(t_1)][m_Y(t_2) - m_Y(t_2)]$$
$$= 0$$

① 若 $X(t)$, $Y(t)$ 统计独立.

则 $P(x_1, y_2; t_1, t_2) = P(x_1, t_1)\, P(y_2, t_2)$

$R_{XY}(t_1,t_2) = m_X(t_1)\, m_Y(t_2)$

$C_{XY}(t_1,t_2) = 0.$

例 2.3－2 设有两个平稳过程

$$X(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad Y(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

式中：ω_0 为常量，φ 是在 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量。问这两过程是否联合平稳，它们是否相关、正交、统计独立。

解：互相关函数：$R_{XY}(t, t+\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)]$

$$= E\{\cos(\omega_0 t + \varphi)\sin[\omega_0(t+\tau) + \varphi]\}$$
$$= \frac{1}{2} E\{\sin[\omega_0(2t+\tau) + 2\varphi] + \sin\omega_0\tau\}$$
$$= \frac{1}{2}\sin\omega_0\tau$$

∵ $X(t)$, $Y(t)$ 各自平稳，且 $R_{XY}(t, t+\tau)$ 为 τ 的单值函数.

∴ $X(t)$ 与 $Y(t)$ 联合平稳.

∵ $m_X(t) = E[X(t)] = 0$

$m_Y(t+\tau) = E[Y(t+\tau)] = 0$

∴ $C_{XY}(t, t+\tau) = R_X(\tau) = \frac{1}{2}\sin\omega_0\tau$

∴ 仅对于局部值 τ，才有 $C_{XY}(\tau) = 0$，不能使任意 τ 值都满足

∴ $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是相关的且不正交.

① 联合平稳：

$\begin{cases} X(t) \text{和} Y(t) \text{各自是广义平稳过程} \\ R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(\tau) \end{cases}$

② 互相关函数：

$$R_{XY}(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, p_2(x, y; t_1, t_2)\, dx\, dy$$

③ 互协方差函数

$$C_{XY}(t_1,t_2) = E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][Y(t_2) - m_Y(t_2)]\}$$

④ 若 $X(t)$, $Y(t)$ 联合平稳 则互相关系数

$$r_{XY}(\tau) = \frac{C_{XY}(\tau)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

⑤ 若任意 τ，有 $r_{XY}(\tau) = 0$ 或 $C_{XY}(\tau) = 0$

则 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 不相关.

上式等价于：

$R_{XY}(\tau) = m_X(t)\, m_Y(t+\tau)$

⑥ 若任意 τ，有 $E[X(t)Y(t+\tau)] = 0$

则 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 正交.

例 2.3-3 设 $X(t)$ 为雷达发射信号，遇到目标后返回接收机的微弱信号为 $\alpha X(t-\tau_0)$，其中 α 为常数且 $\alpha \ll 1$，常数 τ_0 为时延。接收到的信号伴有噪声 $N(t)$，故接收到的信号为 $Y(t)=\alpha X(t-\tau_0)+N(t)$。若 $X(t)$ 与 $N(t)$ 都是零均值广义平稳随机信号，且相互独立，其自相关函数分别为 $R_X(\tau)$ 和 $R_N(\tau)$。

解：由 $X(t)$ 与 $N(t)$ 都是零均值广义平稳随机信号，且相互独立。

$\therefore$ $E[X(t-\tau_0)]=E[X(t)]=0$

$E[N(t)]=0$

$R_{XN}(t,t+\tau)=E[X(t)N(t+\tau)]=E[X(t)]E[N(t+\tau)]=0$

$\therefore$ $X(t)$ 和 $N(t)$ 联合平稳。

$E[Y(t)]=E[\alpha X(t-\tau_0)+N(t)]=\alpha E[X(t-\tau_0)]+E[N(t)]=0$

$R_Y(t,t+\tau)=E[Y(t)Y(t+\tau)]$

$=E[(\alpha X(t-\tau_0)+N(t))(\alpha X(t+\tau-\tau_0)+N(t+\tau))]$

$=\alpha^2 E[X(t-\tau_0)X(t+\tau-\tau_0)]+\alpha E[X(t-\tau_0)N(t+\tau)]+\alpha E[N(t)X(t+\tau-\tau_0)]+E[N(t)N(t+\tau)]$

$=\alpha^2 R_X(\tau)+R_N(\tau)$

$=R_Y(\tau)$

$E[Y(t)]=0$, $R_Y(t,t+\tau)=R_Y(\tau)$，$\therefore$ $Y(t)$ 广义平稳。

(2) $R_{XY}(t,t+\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$

$=E[X(t)(\alpha X(t+\tau-\tau_0)+N(t+\tau))]$

$=\alpha E[X(t)X(t+\tau_0-\tau)]+E[X(t)N(t+\tau)]$

$=\alpha R_X(\tau-\tau_0)$

相关函数只与 τ 有关，且 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 各自广义平稳。

$\therefore$ $X(t)$ 与 $Y(t)$ 联合平稳。

① 广义平稳的条件

$\begin{cases} E[X(t)]=m_X \\ R_X(t_1,t_2)=R_X(\tau) \end{cases}$

② 联合平稳的条件

$\begin{cases} X(t),\ Y(t) \text{ 各自广义平稳} \\ R_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(\tau) \end{cases}$

③ 互相关函数性质

1. $R_{XY}(\tau)=R_{YX}(-\tau)$
2. $|R_{XY}(\tau)|^2 \leq R_X(0)R_Y(0)$
3. $|C_{XY}(\tau)|^2 \leq C_X(0)C_Y(0)$

例 2.4-2 我们研究一个以掷硬币为例的贝努利(Bernoulli)型随机过程 $X(n)$，$n=1, 2, \cdots$。设每隔单位时间投掷一次硬币，观察它出现的结果。在时刻 n 投掷一枚硬币，若出现正面，记其结果 $X(n)=+1$；若出现反面，记其结果 $X(n)=-1$。将硬币一直投掷下去，便可得到一个无穷序列：$X(1)$，$X(2)$，$X(3)$，$\cdots$。因为每次投掷结果 $X(n)$ 都是一个随机变量(其取值为 +1 或 −1)，所以无数次投掷的结果是一个随机变量的无穷序列，根据定义，称之为离散随机序列。每次投掷的结果与前后各次投掷的结果是相互独立的，并且 $X(n)$ 出现 +1 或 −1 的概率与投掷时刻 n 无关。设第 n 次投掷出现正面的概率为

$$P\{X(n)=+1\}=p$$

第 n 次投掷出现反面的概率为

$$P\{X(n)=-1\}=1-p$$

其中 $P\{X(n)=+1\}=p$ 与 n 无关，且 $X(i)$ 与 $X(j)(i\neq j)$ 是相互独立的随机变量。上述的贝努利过程是平稳随机过程。求过程的均值、均方值、方差和自相关函数。

解: $E[X(n)] = 1\cdot P\{X(n)=+1\} + (-1) P\{X(n)=-1\}$
$= 2P-1$

$E[X^2(n)] = 1^2 P\{X(n)=+1\} + (-1)^2 P\{X(n)=-1\}$
$=1$

$\therefore D[X(n)] = E[X^2(n)] - E^2[X(n)] = 1-(2P-1)^2 = 4P(1-P)$

$\because X(i)$ 与 $X(j)$ 相互独立

$$\therefore R_X(m) = E[X(n)X(n+m)] = \begin{cases} E[X^2(n)]=1, & m=0 \\ E[X(n)]E[X(n+m)] = m_X^2 = (2P-1)^2, & m\neq 0 \end{cases}$$

① $m_X(n) = E[X(n)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x,n)dx$

$E\{g[X(n)]\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x,n)dx$

$E[X(n)+Y(n)] = E[X(n)] + E[Y(n)]$

$E[aX(n)] = aE[X(n)]$

② $\psi_X^2(n) = E[X^2(n)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x,n)dx$

$\sigma_X^2(n) = D[X(n)] = E\{[X(n)-m_X(n)]^2\}$

$\sigma_X^2(n) = \psi_X^2(n) - m_X^2(n)$

③ $R_X(n_1,n_2) = E[X(n_1)X(n_2)]$

$C_X(n_1,n_2) = E[(X(n_1)-m_X(n_1))(X(n_2)-m_X(n_2))]$
$= R_X(n_1,n_2) - m_X(n_1)m_X(n_2)$

例 2.4-3 已知随机相位序列 $X(n)=6\cos(\omega_0 n+\phi)$，其中随机变量 ϕ 在 $[0, 2\pi]$ 上均匀分布，求其数学期望和协方差，并判断 $X(n)$ 是否为平稳序列。

解: $E[X(n)] = \int_0^{2\pi} 6\cos(\omega_0 n+\phi)\frac{1}{2\pi}d\phi = m_X = 0$

$R_X(n,n+m) = E[X(n)X(n+m)]$
$= E\{6\cos(\omega_0 n+\phi)\cdot 6\cos[\omega_0(n+m)+\phi]\}$
$= \frac{36}{2} E[\cos[2\omega_0 n+\omega_0 m+2\phi] + \cos(\omega_0 m)]$

$= 18\cos(\omega_0 m) = R_X(m)$

m_X 与 n 无关，$R_X(n,n+m)$ 与 n 无关，只与 m 有关。
$\therefore X(n)$ 为平稳序列。

$\therefore C_X(n,n+m) = C_X(m) = R_X(m) = 18\cos(\omega_0 m)$

例 2.6-1 求例 2.2-1 所示随机初相信号 $X(t)$ 的功率谱密度 $G_X(\omega)$、$F_X(\omega)$。

解: 已求得 $R_X(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau$

$$G_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{\pi A^2}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$F_X(\omega)=2G_X(\omega)\big|_{\omega>0}=\pi A^2\delta(\omega-\omega_0)$$

① 维纳-辛钦定理

平稳过程的功率谱密度

$$G_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G_X(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

② $R(\tau)=\cos\omega_0\tau \longleftrightarrow G(\omega)=\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$

③ 单边功率谱密度

$$F_X(\omega)=2G_X(\omega),\ \omega>0$$

例 2.6-2 求例 2.2-2 所示随机电报信号 $X(t)$ 的功率谱密度 $G_X(\omega)$。

解: $R_X(\tau)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-2\lambda|\tau|}$

$$G_X(\omega)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\cos\omega\tau d\tau+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-2\lambda\tau}\cos\omega\tau\, d\tau$$

$$=\frac{\pi}{2}\delta(\omega)+\frac{\lambda}{4\lambda^2+\omega^2}$$

维纳辛钦定理第二种形式

$$\begin{cases}G_X(\omega)=2\int_0^{\infty}R_X(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau\\ R_X(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}G_X(\omega)\cos\omega\tau\, d\tau\end{cases}$$

② $R(\tau)=1 \longleftrightarrow G(\omega)=2\pi\delta(\omega)$

$R(\tau)=e^{-\alpha|\tau|} \longleftrightarrow G(\omega)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$

例 2.6-3 已知平稳随机过程的功率谱密度为

$$G_X(\omega)=\frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}$$

求自相关函数。

解: $G_X(\omega)=\frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}$

$$=\frac{\omega^2+4}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)}$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{3}{\omega^2+1}+\frac{5}{\omega^2+9}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2\cdot 1}{\omega^2+1^2}+\frac{5}{6}\cdot\frac{2\cdot 3}{\omega^2+3^2}\right)$$

$e^{-\alpha|\tau|} \longleftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$

由 $e^{-\alpha|\tau|} \longleftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$

得: $R_X(\tau)=\frac{1}{48}(9e^{-|\tau|}+5e^{-3|\tau|})$

例 2.6-4 已知实随机过程 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 联合平稳且正交，试求过程 $Z(t)=X(t)+Y(t)$ 的自相关函数和自谱密度表达式。

解：$R_Z(t,t+\tau)=E[Z(t)Z(t+\tau)]$

$=E\{[X(t)+Y(t)][X(t+\tau)+Y(t+\tau)]\}$

$=R_X(t,t+\tau)+R_Y(t,t+\tau)+R_{XY}(t,t+\tau)+R_{YX}(t,t+\tau)$

$\because X(t)$ 与 $Y(t)$ 联合平稳

$\therefore R_Z(t,t+\tau)=R_X(\tau)+R_Y(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{YX}(\tau)=R_Z(\tau)$

$\because X(t)$ 与 $Y(t)$ 正交 $\therefore R_{XY}(\tau)=R_{YX}(\tau)=0$

$\therefore R_Z(\tau)=R_X(\tau)+R_Y(\tau)$

$\therefore G_Z(w)=G_X(w)+G_Y(w)$

① $X(t)$, $Y(t)$ 正交

则 $R_{XY}(\tau)=R_{YX}(\tau)=0$

$G_{XY}(w)=G_{YX}(w)=0$

② $\begin{cases} G_{XY}(w)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{XY}(\tau)e^{-jw\tau}d\tau \\ G_{YX}(w)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{YX}(\tau)e^{-jw\tau}d\tau \end{cases}$

第三章

例 3.1-1 求如图 3.1-4 所示 RC 积分电路的传递函数和冲激响应。

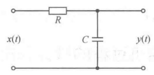

图 3.1-4 RC 积分电路

解 由图可知，输出电压 $y(t)$ 与输入电压 $x(t)$ 的关系式为

$$RC\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+y(t)=x(t) \tag{3.1-25}$$

令 $a=1/(RC)$，并对上式两边作拉普拉斯变换，得

$$(s+a)Y(s)=aX(s) \tag{3.1-26}$$

故得传递函数为

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{a}{s+a} \tag{3.1-27}$$

对上式作拉普拉斯反变换，即得冲激响应为

$$h(t)=\begin{cases} a\mathrm{e}^{-at}, & t\geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \tag{3.1-28}$$

当然也可以利用傅里叶变换法，其传输函数可以直接利用分压原理获得，即

$$H(\omega)=\frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC} \tag{3.1-29}$$

① 微分方程的拉普拉斯变换.

$$RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

令 $a=\frac{1}{RC}$

则 $\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=ax(t)$

$\downarrow$ 拉普拉斯

$$sY(s)+aY(s)=aX(s)$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{a}{s+a}$$

② RC电路的传输函数

$$H(w)=\frac{1}{1+jwRC}$$

例 3.2-1 已知随机过程 $X(t)$ 的相关函数 $R_X(\tau)=\mathrm{e}^{-a\tau^2}$，问过程 $X(t)$ 是否均方连续、均方可微。

解: $R_X(\tau)=e^{-a\tau^2}$是初等函数,当$\tau=0$时相关函数$R_X(\tau)$是连续的

$\therefore X(t)$在任意时刻t是均方连续的.

$$R_X'(\tau)=\frac{dR_X(\tau)}{d\tau}=-2a\tau e^{-a\tau^2}$$

$$R_X''(\tau)=\frac{d^2R_X(\tau)}{d\tau^2}\Big|_{\tau=0}=-2a$$

$\because R_X''(0)$存在 $\therefore X(t)$是均方可微的.

① 均方连续:

只要$R_X(\tau)$在$\tau=0$处连续

则平稳过程$X(t)$在任意时刻t都是均方连续

② 均方可微:

$\tau=0$时. $R_X(\tau)$的二阶导数$R_X''(0)$存在

例 3.2-2 已知随机过程 $X(t)$ 的相关函数 $R_X(\tau)=\sigma^2\mathrm{e}^{-a|\tau|}$，判断其连续性和可微性。

解: $$R_X(\tau)=\sigma^2e^{-a|\tau|}=\begin{cases}\sigma^2e^{-a\tau}, & \tau\geq 0\\ \sigma^2e^{a\tau}, & \tau<0\end{cases}$$

$\tau=0$时 $R_X(\tau)$是连续的.

$\therefore X(t)$是均方连续的.

$$R_X'(\tau)=\begin{cases}-a\sigma^2e^{-a\tau}, & \tau\geq 0\\ a\sigma^2e^{a\tau}, & \tau<0\end{cases}$$

在$\tau=0$时, $R_X'(\tau)$不连续 $\therefore R_X''(0)$不存在.

例 3.2-3 已知平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)=e^{-a\tau^2}$，求相关系数 $r_X(\tau)$、$r_{\dot{X}X}(\tau)$、$r_{\dot{X}}(\tau)$，并画出其图形。

解：均值 $m_X=\pm\sqrt{R_X(\infty)}=0$

$\therefore C_X(\tau)=R_X(\tau)=e^{-a\tau^2}$

$C_{\dot{X}X}(\tau)=-\dfrac{dC_X(\tau)}{d\tau}=2a\tau e^{-a\tau^2}$

$C_{\dot{X}}(\tau)=-\dfrac{d^2C_X(\tau)}{d\tau^2}=2a(1-2a\tau^2)e^{-a\tau^2}$

$\sigma_X^2=C_X(0)=1,\ \sigma_{\dot{X}}^2=C_{\dot{X}}(0)=2a$

$\therefore r_X(\tau)=\dfrac{C_X(\tau)}{\sigma_X^2}=e^{-a\tau^2}$

$r_{\dot{X}X}(\tau)=\dfrac{C_{\dot{X}X}(\tau)}{\sigma_{\dot{X}}\sigma_X}=\sqrt{2a}\,\tau e^{-a\tau^2}$

$r_{\dot{X}}(\tau)=\dfrac{C_{\dot{X}}(\tau)}{\sigma_{\dot{X}}^2}=(1-2a\tau^2)e^{-a\tau^2}$

① $\dot{X}(t)=\dfrac{dX(t)}{dt}$

② 若平稳随机过程含周期分量

则 $\begin{cases} m_X=\pm\sqrt{R(\infty)} \\ \sigma_X^2=C_X(0)=R_X(0)-R_X(\infty) \end{cases}$

③ 若 $X(t)$ 为平稳过程，且 $\tau=t_2-t_1$

则 $R_{\dot{X}X}(\tau)=-\dfrac{dR_X(\tau)}{d\tau}$ $\quad R_{\dot{X}}(t_1,t_2)=E[\dot{X}(t_1)\dot{X}(t_2)]$

$R_{X\dot{X}}(\tau)=\dfrac{dR_X(\tau)}{d\tau}$ $\quad R_{\dot{X}}(\tau)=-\dfrac{d^2}{d\tau^2}R_X(\tau)$

当 $t=t_1=t_2$ 时

$R_{X\dot{X}}(\tau)\big|_{\tau=0}=-R_{\dot{X}X}(\tau)\big|_{\tau=0}=0$

结论：平稳正态过程，对于任意时刻 t_1 取值 $X(t_1)$ 与该点斜率 $\dot{X}(t_1)$ 都统计独立。

例 3.2-4 随机初相信号 $X(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$，式中 A 和 ω_0 均为常量。已知 $m_X(t)=0$，$R_X(\tau)=(A^2/2)\cos\omega_0\tau$，$\tau=t_2-t_1$。信号 $X(t)$ 在时间 T 内的积分值为

$$Y(T)=\int_0^T X(t)\,dt$$

试求 $Y(T)$ 的均值和方差。

解：$m_Y(T)=\int_0^T m_X(t)\,dt=0$

相关函数 $R_Y(T,T+\tau)=\int_0^T\int_0^{T+\tau}R_X(t_1,t_2)\,dt_1dt_2$

$=\int_0^T\int_0^{T+\tau}\dfrac{A^2}{2}\cos\omega_0(t_2-t_1)\,dt_1dt_2$

$=\dfrac{A^2}{2\omega_0^2}[\cos\omega_0\tau-\cos\omega_0(T+\tau)-\cos\omega_0 T+1]$

$\sigma_Y^2(T)=C_Y(T,T)=R_Y(T,T)=\dfrac{A^2}{\omega_0^2}(1-\cos\omega_0 T)$

① $E\left[\int_0^t X(a)\,da\right]=\int_0^t E[X(a)]\,da$

② $Y(t)=\int_0^t X(a)\,da$

则 $R_Y(t_1,t_2)=E\left[\int_0^{t_1}X(a_1)da_1\cdot\int_0^{t_2}X(a_2)da_2\right]$

$=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}E[X(a_1)X(a_2)]\,da_1da_2$

$=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}R_X(a_1,a_2)\,da_1da_2$

$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]=E\left[X(t_1)\cdot\int_0^{t_2}X(a_2)da_2\right]$

$=\int_0^{t_2}R_X(t_1,a_2)\,da_2$

$R_{YX}(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}R_X(a_1,t_2)\,da_1$

例 3.3－1　已知输入平稳过程 $X(t)$ 的相关函数 $R_X(\tau)=\sigma_X^2 e^{-\beta|\tau|}$，其中 $\tau=t_2-t_1$。求通过 RC 积分电路后，输出随机过程 $Y(t)$ 在稳态时的相关函数。

解法一：冲激响应法

RC电路的系统冲激响应为 $h(t)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha t}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$　$\alpha=\frac{1}{RC}$

由 $R_Y(\tau)=\int_0^\infty\int_0^\infty \sigma_X^2 e^{-\beta|\tau+u-v|}\alpha e^{-\alpha u}\alpha e^{-\alpha v}dudv$

$=\alpha^2\sigma_X^2\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\alpha(u+v)}e^{-\beta|\tau+u-v|}dudv$

省略超级复杂的积分运算

$R_Y(\tau)=\frac{-\alpha\sigma_X^2}{\beta^2-\alpha^2}[\alpha e^{-\beta\tau}-\beta e^{-\alpha\tau}]$

由于 $Y(t)$ 为平稳过程，自相关函数为偶函数

$\therefore R_Y(\tau)=\frac{-\alpha\sigma_X^2}{\beta^2-\alpha^2}[\alpha e^{-\beta|\tau|}-\beta e^{-\alpha|\tau|}]$

解法二：频谱法

$G_X(w)=2\int_0^\infty R_X(\tau)\cos w\tau d\tau=2\sigma_X^2\frac{\beta}{\beta^2+w^2}$

RC电路的 $H(w)=\frac{1}{1+jwRC}$

$\therefore |H(w)|^2=\frac{1}{1+(wRC)^2}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+w^2}$，$\alpha=\frac{1}{RC}$

$\therefore R_Y(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty G_X(w)|H(w)|^2\cos w\tau dw$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty 2\sigma_X^2\frac{\beta}{\beta^2+w^2}\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha^2+w^2}\cos w\tau d\tau$

$=\frac{\alpha\sigma_X^2}{\alpha^2-\beta^2}[\alpha e^{-\beta\tau}-\beta e^{-\alpha\tau}]$

由于 $Y(t)$ 为平稳过程，自相关函数为偶函数。

$R_Y(\tau)=\frac{\alpha\sigma_X^2}{\alpha^2-\beta^2}[\alpha e^{-\beta|\tau|}-\beta e^{-\alpha|\tau|}]$

① 冲激响应法公式

$R_Y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}R_X(\tau+u-v)h(u)h(v)dudv$

② 频谱法

$S_Y(w)=S_X(w)\cdot|H(w)|^2$

输出谱＝输入谱 X 系统模平方

RC 电路传递函数

$H(w)=\frac{1}{1+jwRC}=\frac{\alpha}{\alpha+jw}$，$\alpha=\frac{1}{RC}$

频谱法的三步

① 求输入的频域形式 $G_X(w)$

② 求传递函数 $H(w)$

③ 变回时域

$e^{-\alpha|\tau|}\longleftrightarrow\frac{2\alpha}{\alpha^2+w^2}$

$S_Y(w)=S_X(w)\cdot|H(w)|^2$

$=\sigma_X^2\frac{2\beta}{\beta^2+w^2}\cdot\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2+w^2}\right)$

$=2\beta\sigma_X^2\alpha^2\cdot\frac{1}{(\beta^2+w^2)(\alpha^2+w^2)}$

$=\frac{2\beta\sigma_X^2\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}\left[\frac{1}{w^2+\beta^2}-\frac{1}{w^2+\alpha^2}\right]$

$R_Y(\tau)=\frac{2\beta\sigma_X^2\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}\left[\frac{1}{2\beta}e^{-\beta|\tau|}-\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|\tau|}\right]$

例 3.3-2 线性系统的电路如图 3.3-1(a)所示，已知输入平稳过程 $X(t)$ 的功率谱密度为 $G_X(\omega)=\frac{4\lambda}{4\lambda^2+\omega^2}$，试求两个电阻上的随机电压 $Z(t)$ 和 $Y(t)$ 的功率谱密度 $G_Z(\omega)$、$G_Y(\omega)$、$G_{ZY}(\omega)$。

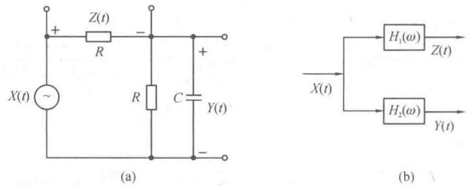

图 3.3-1 多端线性系统

解: 电阻的阻抗是 R

电容的阻抗是 $\frac{1}{j\omega C}$

电感的阻抗是 $j\omega L$

$$Z_{RC}=\frac{R\cdot\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{R}{1+j\omega RC}=\frac{\alpha R}{\alpha+j\omega} \qquad \alpha=\frac{1}{RC}$$

$$H_2(\omega)=\frac{\frac{R}{1+j\omega RC}}{R+\frac{R}{1+j\omega RC}}=\frac{\alpha}{2\alpha+j\omega}$$

$$H_1(\omega)=1-H_2(\omega)=\frac{\alpha+j\omega}{2\alpha+j\omega}$$

3.5.3 白噪声通过 RC 积分电路

由前面的分析可知，RC 积分电路的传输函数为

$$H(\omega)=\frac{a}{a+\mathrm{j}\omega} \tag{3.5-14}$$

式中 $a=\frac{1}{RC}$，故有

$$|H(\omega)|^2=\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{a}\right)^2} \tag{3.5-15}$$

今已知输入白噪声的功率谱密度为 $N_0/2$，由式(3.5-2)得输出过程 $Y(t)$ 的功率谱密度为

$$G_Y(\omega)=\frac{\frac{N_0}{2}}{1+\left(\frac{\omega}{a}\right)^2} \tag{3.5-16}$$

再由式(3.5-3)得相关函数为

$$R_Y(\tau)=\frac{N_0}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega\tau}{1+\left(\frac{\omega}{a}\right)^2}\mathrm{d}\omega=\frac{N_0 a}{4}\mathrm{e}^{-a|\tau|} \tag{3.5-17}$$

因为

$$R_Y(\infty)=0 \tag{3.5-18}$$

$$\sigma_Y^2=C_Y(0)=R_Y(0)-R_Y(\infty)=\frac{N_0 a}{4} \tag{3.5-19}$$

所以相关系数为

$$r_Y(\tau)=\frac{C_Y(\tau)}{\sigma_Y^2}=\mathrm{e}^{-a|\tau|} \tag{3.5-20}$$

过程 $Y(t)$ 的相关时间为

$$\tau_0=\int_0^\infty r_Y(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-a\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{a} \tag{3.5-21}$$

由传输函数的表达式可知，当 $\omega=0$ 时有最大传输函数 $H(\omega_0)=1$，故由式(3.5-13)可得噪声通频带为

$$\Delta f_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty |H(\omega)|^2\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{a}\right)^2}\mathrm{d}\omega=\frac{a}{4} \tag{3.5-22}$$

由上面两式可以求得下面的关系式：

$$\tau_0=\frac{1}{4\Delta f_n} \tag{3.5-23}$$

上述分析结果表明，由于积分电路的 RC 值很大，即 a 很小，所以噪声通频带 Δf_n 很小(为低通)，相关时间 τ_0 很大，只有低频分量才能通过电路，因而输出噪声的起伏很慢。换言之，起伏变化极快的白噪声通过积分电路后，由于积分电路的平滑作用，输出的相关性变强了。

① 平稳白噪声的功率谱密度

$$G_N(w)=\frac{N_0}{2}$$

② 噪声等效通频带

$$\Delta f_n=\frac{\int_0^\infty |H(w)|^2 df}{|H(w_0)|^2}$$

频谱法

$$G_Y(w)=G_X(w)|H(w)|^2=\frac{N_0}{2}|H(w)|^2$$

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty G_X(w)|H(w)|^2\cos w\tau\, dw=\frac{N_0}{2\pi}\int_0^\infty |H(w)|^2\cos w\tau\, dw$$

$$\sigma_Y^2=C_Y(0)=R_Y(0)=\frac{N_0}{2\pi}\int_0^\infty |H(w)|^2 dw$$

例 3.6-1 设有级联的两个线性网络如图 3.6-2 所示。已知输入 $X(t)$ 是平稳正态白噪声，功率谱密度为 $G(\omega)=N_0/2$，网络 I 的冲激响应为

$$h(t)=\begin{cases} a\mathrm{e}^{-at}, & t\geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \tag{3.6-21}$$

试求级联网络输出过程 $Z(t)$ 的概率密度 $p_z(z)$。

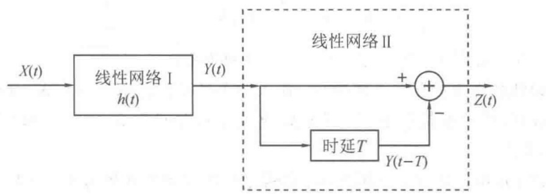

图 3.6-2 两个线性网络的级联

①

两个线性网络级联仍为线性网络，故当输入为生态过程时，输出仍为生态过程。

② $G_Y(w)=G_X(w)|H(w)|^2$

③ $e^{-a|\tau|} \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2+w^2}$

解：两个线性系统网络级联仍为线性系统，故当输入为正态过程时，输出仍为正态过程。

∴ 求 $Z(t)$ 的均值和方差后，即可写出 $p_z(z)$.

$$m_Y(t)=E\left[\int_{-\infty}^{\infty}X(\tau)h(t-\tau)d\tau\right]=\int_{-\infty}^{\infty}E[X(\tau)]h(t-\tau)d\tau=0$$

同理 $m_Y(t-T)=0$

$$Z(t)=Y(t)-Y(t-T)$$

$$m_Z=m_Y(t)-m_Y(t-T)=0$$

$$H_1(w)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-jw\tau}d\tau=\int_0^\infty a e^{-(a+jw)\tau}d\tau=\frac{a}{a+jw}$$

$$G_Y(w)=G_X(w)|H_1(w)|^2=\frac{N_0}{2}\left|\frac{a}{a+jw}\right|^2=\frac{N_0/2}{1+(w/a)^2}$$

$$G_Y(\tau)=R_Y(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty G_Y(w)\cos w\tau\, dw=\frac{N_0}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\cos w\tau}{1+(w/a)^2}dw=\frac{N_0 a}{4}e^{-a|\tau|}$$

$$\sigma_Z^2=E\{[Z(t)]^2\}=E\{Y^2(t)+Y^2(t-T)-2Y(t)Y(t-T)\}=2R_Y(0)-2R_Y(T)=\frac{N_0 a}{2}(1-e^{-a|T|})$$

$$p_Z=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z}\exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma_Z^2}\right]$$