DTFT

$X(e^{jw})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jwn}$，条件：$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|<\infty$

$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{jw})e^{jwn}dw$

基本序列的 DTFT

$\delta(n)$	1
$a^n u(n)$，$\lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{1-ae^{-jw}}$

性质

线性	$ax(n)+by(n)$	$aX(e^{jw})+bY(e^{jw})$
位移	$x(n-n_0)$	$e^{-jwn_0}X(e^{jw})$
频移	$e^{jw_0n}x(n)$	$X(e^{j(w-w_0)})$
翻转	$x(-n)$	$X(e^{-jw})$
共轭	$x^*(n)$	$X^*(e^{-jw})$
卷积	$x(n)*y(n)$	$X(e^{jw})Y(e^{jw})$
	$x(n)y(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\theta})Y(e^{j(w-\theta)})d\theta$
乘n.	$nx(n)$	$j[dX(e^{jw})/dw]$
实部	$Re[x(n)]$	$X_e(e^{jw})$
虚部	$jIm[x(n)]$	$X_o(e^{jw})$
共轭对称	$x_e(n)$	$Re[X(e^{jw})]$
反对称	$x_o(n)$	$jIm[X(e^{jw})]$

注：

$X_e(e^{jw})=\frac{1}{2}[X(e^{jw})+X^*(e^{-jw})]$

$X_o(e^{jw})=\frac{1}{2}[X(e^{jw})-X^*(e^{-jw})]$

$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)]$

$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)]$

帕塞瓦尔 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{jw})|^2dw$

Z变换

$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$，条件：$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)z^{-n}|<\infty$

序列特性与收敛域的关系

① 有限长序列

$x(n)=\begin{cases}x(n), & n_1\le n\le n_2\\ 0, & 其他\end{cases}$ $\quad X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2}x(n)z^{-n}$

$n_1<0, n_2\le 0$ 时，$0\le|z|<\infty$

$n_1<0, n_2>0$ 时，$0<|z|<\infty$

$n_1\ge 0, n_2>0$ 时，$0<|z|\le\infty$

② 右边序列

$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty}x(n)z^{-1}$

$|z|>R_{x-}$

③ 左边序列

$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2}x(n)z^{-n}$

$n_2<0$ 时 $0\le|z|<R_{x+}$

$n_2\ge 0$ 时 $0<|z|<R_{x+}$

关键是0和∞点在不在收敛域

本质是看 $\sum_{n=n_1}^{n_2}x(n)z^{-n}$ 会不会变成∞

即满不满足z变换的条件 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)z^{-n}|<\infty$

常见序列的z变换

$\delta(n)$	1	$\lvert z\rvert\ge 0$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert>1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$
$nu(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert>1$

z变换与DTFT的关系

$X(z)|_{z=e^{jw}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jwn}$

"$z=e^{jw}$"

z变换的主要性质

位移	$x(n-n_0)$	$z^{-n_0}X(z)$
乘以a^n	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$
乘以n	$nx(n)$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$
翻转	$x(-n)$	$X(\frac{1}{z})$
初值	$x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$	
终值	$x(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$	

LTI系统的z变换

例：$y(n)+\frac{5}{6}y(n-1)+\frac{1}{6}y(n-2)=\frac{1}{2}x(n)+\frac{2}{3}x(n-1)$

$Y(z)+\frac{5}{6}z^{-1}Y(z)+\frac{1}{6}z^{-2}Y(z)=\frac{1}{2}X(z)+\frac{2}{3}z^{-1}X(z)$

逆Z变换

① 用留数进行部分分式展开

例 $X(z)=\dfrac{z^{-1}}{1-5z^{-1}+6z^{-2}}=\dfrac{z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1-3z^{-1})}=\dfrac{A}{1-2z^{-1}}+\dfrac{B}{1-3z^{-1}}$

$A=(1-2z^{-1})\cdot X(z)\big|_{z^{-1}=0.5}=\dfrac{0.5}{-0.5}=-1$

$B=(1-3z^{-1})\cdot X(z)\big|_{z^{-1}=\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}=1$

$\therefore X(z)=\dfrac{1}{1-2z^{-1}}+\dfrac{1}{1-3z^{-1}}$

② 用留数法进行逆变换

例. $X(z)=\dfrac{1-a^2}{1+a^2-az^{-1}-az}$, $|a|<1$

$x(n)=\dfrac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz=\dfrac{1}{2\pi j}\oint_C\dfrac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}z^{n-1}dz$

$=\dfrac{1}{2\pi j}\oint_C\dfrac{1-a^2}{-a(z-a^{-1})(z-a)}z^n dz$

被积函数 $F(z)=\dfrac{1-a^2}{-a(z-a^{-1})(z-a)}z^n$

i. 当收敛域为 $|z|>|a^{-1}|$ 时, $x(n)$ 是右边序列, 且因果序列

$\therefore x(n)=0$, $n<0$

当 $n\geq 0$ 时, 围线C内有两个极点: $P_1=a$ 和 $P_2=a^{-1}$.

$\therefore x(n)=Res[F(z),P_1]+Res[F(z),P_2]$

$=\dfrac{(1-a^2)z^n}{-a(z-a)(z-a^{-1})}(z-a)\Big|_{z=a}+\dfrac{(1-a^2)z^n}{-a(z-a)(z-a^{-1})}(z-a^{-1})\Big|_{z=a^{-1}}$

$=a^n-a^{-n}$, $n\geq 0$

即 $x(n)=(a^n-a^{-n})u(n)$

ii. 当收敛域为 $|z|<|a|$ 时, $x(n)$ 是左边序列. 当 $n\geq 0$ 时, 围线C内无极点.

$\therefore x(n)=0$, $n\geq 0$

当 $n<0$ 时, 围线C内有 $P_1=0$ 的 n 阶极点, C外有两个极点 $P_1=a$ 和 $P_2=a^{-1}$

$\therefore x(n)=-Res[F(z),a]-Res[F(z),a^{-1}]$

$=a^{-n}-a^n$ $(n<0)$

即 $x(n)=(a^{-n}-a^n)u(-n-1)$

iii. 当收敛域为 $|a|<|z|<|a^{-1}|$ 时. $x(n)$ 为双边序列。

当 $n\geq 0$ 时, 围线C内有一个极点 $P_1=a$

$\therefore x(n)=Res[F(z),a]=a^n$, $n\geq 0$

当 $n<0$ 时, 围线C内有一个极点 $P_1=a$ 和 n 阶极点 $P_2=0$. 围线C外有一个极点 $P_3=a^{-1}$

$\therefore x(n)=-Res[F(z),a^{-1}]$

$=a^{-n}$

$\therefore x(z)=\begin{cases}a^n, & n\geq 0\\ a^{-n}, & n<0\end{cases}$

$x(n)=a^{|n|}$

系统函数的极点分布与系统因果性和稳定性关系

因果系统： $h(n)=0 \ , \ n<0$

因果系统 H(z) 的极点分布在某个圆内，收敛域是这个圆的外部.

稳定系统： $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$

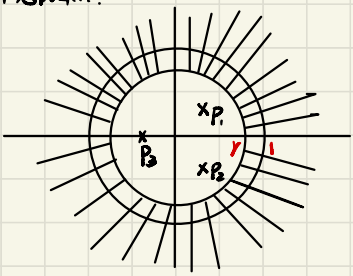
稳定系统的 H(z) 的收敛域包含单位圆，且收敛域中无极点..

因果稳定系统：

收敛域 $r<|z|\leq\infty \ , \ 0<r<1$

因果稳定的 H(z) 的所有极点一定在单位圆内.

因果稳定系统是物理可实现的系统.



因果稳定的 H(z).

DFT

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},\ 0\le k\le N-1$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn},\ 0\le k\le N-1$$

$$W_N=e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)}$$

DFT与z变换和DTFT之间的关系

$$X(k)=X(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$X(k)=X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}$$

$X(k)$ 是在 $X(z)$ 的单位圆上的 N点等间隔采样.
是 $X(e^{j\omega})$ 在 $[0,2\pi)$ 上的 N点等间隔采样.

DFT的性质

循环移位定理	$x((n+n_0))_N R_N(n)$	$W_N^{-kn_0}X(k)$
	$W_N^{ln}x(n)$	$X((k+l))_N R_N(k)$
循环卷积	$x(n)\circledast y(n)$	$X(k)Y(k)$
	$x(n)y(n)$	$\frac{1}{N}X(k)\circledast Y(k)$
复共轭	$x^*(n)$	$X^*(N-k)$
	$x^*(N-n)$	$X^*(k)$
共轭对称	$Re[x(n)]$	$X_{ep}(k)=\frac{1}{2}[X(k)+X^*(N-k)]$
	$jIm[x(n)]$	$X_{op}(k)=\frac{1}{2}[X(k)-X^*(N-k)]$
	$x_{op}=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(N-n)]$	$Re[X(k)]$
	$x_{ep}=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(N-n)]$	$jIm[X(k)]$
实序列对称性	$x(n)$	$X(k)=X^*(N-k)$
选频性	$x(n)=e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)mn}$	$X(k)=\begin{cases}N, & m=k\\ 0, & 其他\end{cases}$

利用DFT计算线性卷积

当循环卷积长度 $L\ge N+M-1$ 时 循环卷积等于线性卷积.

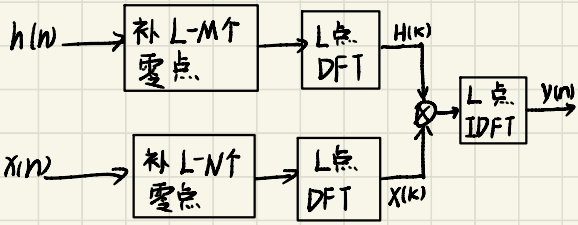
$h(n)=\{\underline{1},1,1,1\}$ $N=4$, $x(n)=\{\underline{1},1,1,1,1\}$ $M=5$

$h(n)*x(n)=$

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
\times & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1
\end{array}
=\{\underline{1},2,3,4,4,3,2,1\}\ N+M-1=8$$

$h'(n)=\{\underline{1},1,1,1,0,0,0,0\}$ $x'(n)=\{\underline{1},1,1,1,1,0,0,0\}$

$$h'(n)\circledast x'(n)=\begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&1&1&1\\
1&1&0&0&0&0&1&1\\
1&1&1&0&0&0&0&1\\
0&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&1&1&1&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\{1,2,3,4,4,3,2,1\}$$



用DFT进行频谱分析

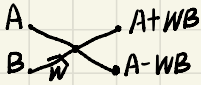
采样率: f_s 频率分辨率: $\Delta f=\frac{f_s}{N}$

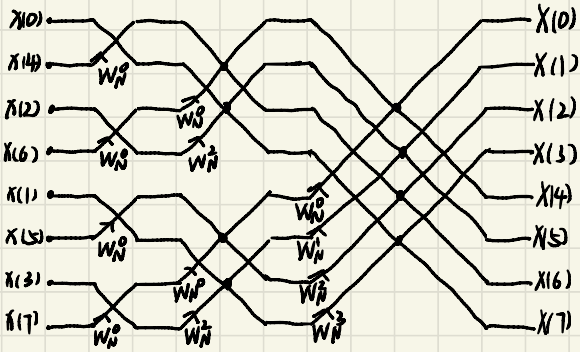
信号持续时间: $T_p=\frac{N}{f_s}=\frac{1}{\Delta f}$

频谱泄漏: 当无限长序列加矩形窗截断后, 在矩形窗谱函数的作用下, 使得序列的频谱出显较大的频谱扩展和向两边的波动, 称之为频谱泄漏, 会给频率分析带来误差, 使频率分辨率降低。当一个大信号和小信号频率相近时, 会淹没小信号。
频谱泄漏不会消失, 能通过提高采样频率或增加序列的截取长度N来改善。

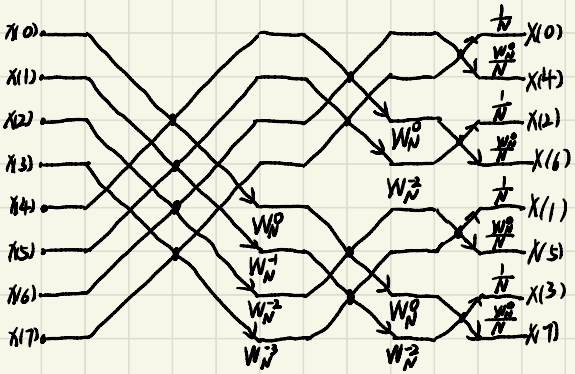
栅栏效应: DFT是对DTFT进行等间隔采样, 频谱的一些极值点可能采集不到, 就像被"栅栏"遮挡。
减小栅栏效应的方法是在序列末端补零。

FFT





时域抽取基2FFT.

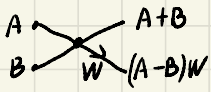


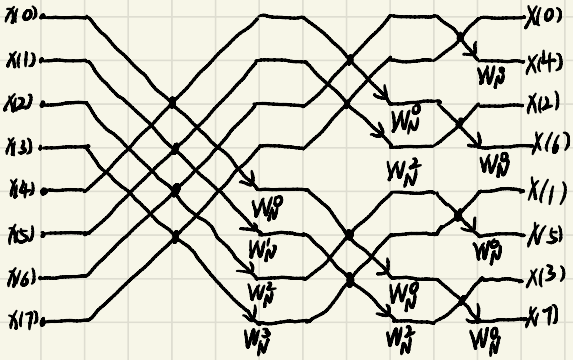
IFFT

对于任何$N=2^M$点的DFT，都可以通过$M-1$次分解构成从$x(n)$到$X(k)$的M级运算过程，每一级有$\frac{N}{2}$个蝶形运算.

复数乘法次数：$C_M = M\frac{N}{2} = \frac{N}{2}\log_2 N$

复数加法次数：$C_A = M\cdot\frac{N}{2}\times 2 = N\log_2 N$.





频域抽取基2FFT

IIR

巴特沃思模拟低通滤波器

N阶巴特沃思模拟低通滤波器的幅频响应平方函数：

$$|H_a(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

巴特沃思模拟低通设计步骤：

① 由 α_p, Ω_p, α_s, Ω_s, 和 $N=\frac{\lg[(10^{0.1\alpha_p}-1)/(10^{0.1\alpha_s}-1)]}{2\lg(\Omega_p/\Omega_s)}$

确定阶数N.

② 由 $\Omega_{cp}=\frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{10^{0.1\alpha_p}-1}}$ 或 $\Omega_{cs}=\frac{\Omega_s}{\sqrt[2N]{10^{0.1\alpha_s}-1}}$ 求截止频率 Ω_c

③ 由 $P_k=\Omega_c e^{j\pi\left(\frac{2k+N-1}{2N}\right)}$, $k=1,2,\cdots,N$ 求极点.

将 P_k 代入 $H_a(s)=\frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=1}^{N}(s-P_k)}$ 得系统函数.

脉冲响应不变法

例. $H_a(s)=\frac{s+1}{s^2+5s+6}$，采样间隔 $T=0.1s$

$$H_a(s)=\frac{2}{s+3}-\frac{1}{s+2}$$

极点 $P_1=-3$, $P_2=-2$

由 $H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{TA_k}{1-e^{P_kT}z^{-1}}$

得

$$H(z)=\frac{2T}{1-e^{-3T}z^{-1}}-\frac{T}{1-e^{-2T}z^{-1}}$$

$$=\frac{0.1-0.08966z^{-1}}{1-1.5596z^{-1}+0.6065z^{-1}}$$

双线性变换法

例. $H_a(s)=\frac{s+1}{s^2+5s+6}$，$T=1$.

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}},T=1}=\frac{2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+1}{\left(2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2+5\left(2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+6}$$

$$=\frac{3+2z^{-1}-z^{-2}}{20+4z^{-1}}$$

脉冲响应不变法优缺点

从以上讨论看出，脉冲响应不变法使得数字滤波器的单位脉冲响应完全模仿模拟滤波器的单位脉冲响应，它的时域逼近性能良好，而且模拟频率 Ω 与数字频率 $\omega=\Omega T$ 之间呈线性关系，因而一个线性相位的模拟滤波器可以变换成一个线性相位的数字滤波器。但是在实际应用中，模拟滤波器一般都不是带限的，所以在用脉冲不变法将模拟滤波器变换为数字滤波器时，由(6.5.14)式知，数字滤波器的频率响应都存在一定程度的频谱混叠。对模拟低通和带通滤波器，可通过减小采样间隔 T 或增大滤波器在阻带的衰减，使混叠引起的误差在允许的范围内。对模拟高通和带阻滤波器，由于在 $\omega=\pi$ 附近存在严重的频谱混叠，所以不能用脉冲响应不变法将其变换为数字滤波器。

双线性变换法优缺点

波器设计方法。双线性变换法把整个 s 平面映射到整个 z 平面上，而且也将 s 平面的左半平面映射到 z 平面的单位圆内。这样就使 s 平面与 z 平面是一一对应的关系，它克服了多值映射的缺点，从而也就消除了频谱混叠现象。同时也满足了因果稳定的模拟滤波器能够变换成因果稳定的数字滤波器的要求。

(1) 如果模拟滤波器是一个线性相位的滤波器，经过双线性变换后得到的是一个非线性相位的数字滤波器，不再保持原有的线性相位了。

FIR

求 $h(n)$；判断是否具有线性相位特性；

求幅度特性函数和相位特性函数.

7.1 设 FIR 数字滤波器的系统函数为

$$H(z)=(1+0.9z^{-1}+2.2z^{-2}+0.9z^{-3}+z^{-4})/6$$

求其单位脉冲响应 $h(n)$；判断该数字滤波器是否具有线性相位特性；求其幅度特性函数和相位特性函数。

① 由 $H(z)=\frac{1}{6}+\frac{0.9}{6}z^{-1}+\frac{2.2}{6}z^{-2}+\frac{0.9}{6}z^{-3}+\frac{1}{6}z^{-4}$

及定义：$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$

得：$h(n)=\{\frac{1}{6},\frac{3}{20},\frac{11}{30},\frac{3}{20},\frac{1}{6}\}$

② 由于 $h(n)$ 关于 $n=2$ 偶对称，所以具有线性相位特性

结论：1. 若 $h(n)$ 关于 $n=\frac{N-1}{2}$ 点偶对称，即 $h(n)=h(N-1-n)$

则 FIR 数字滤波器有严格线性相位特性。

2. 若 $h(n)$ 关于 $n=\frac{N-1}{2}$ 点奇对称，即 $h(n)=-h(N-1-n)$

则 FIR 数字滤波器有广义线性相位特性。

③ $H(e^{jw})=\frac{1}{6}[1+0.9e^{-jw}+2.2e^{-j2w}+0.9e^{-j3w}+e^{-j4w}]$

提取中心取 e^{-j2w}（对应 $n=2$）

$$H(e^{jw})=e^{-j2w}\cdot\frac{1}{6}[e^{j2w}+0.9e^{jw}+2.2+0.9e^{-jw}+e^{-j2w}]$$

$$=\frac{1}{6}[2.2+1.8\cos w+2\cos(2w)]\cdot e^{-j2w}$$

$H(e^{jw})$ 的形式为 $H(e^{jw})=H(w)e^{j\theta(w)}$

$$\therefore H(w)=\frac{1}{6}[2.2+1.8\cos w+2\cos(2w)]$$

$$\theta(w)=-2w$$

求零点和 $H(z)$

也是 $H(z)$ 的零点。根据实系数多项式的性质，$H(z)$ 的零点是以复共轭成对出现的，所以如果 z_i 是复数零点，它的共轭 z_i^* 也是复数零点，其倒数 $1/z_i^*$ 也是复数零点。所以 $H(z)$ 的复数零点是按上述关系四个（z_i，$1/z_i$，z_i^*，$1/z_i^*$）一组出现的；如果是实数零点，那么只有 z_i 和它的倒数 $1/z_i$ 两个零点成对出现。特殊情况例外，例如，单位圆上的实数零点单独出现。线性相位 FIR 数字滤波器的零点分布（以

7.2 已知 8 阶Ⅰ型线性相位 FIR 数字滤波器的部分零点为：$z_1=2$，$z_2=j0.5$，$z_3=j$。

(1) 试确定该滤波器的其他零点。

(2) 设 $h(0)=1$，求出该滤波器的系统函数 $H(z)$。

(1) $z_1=2$ $\frac{1}{z_1}=0.5$.

$z_2=j0.5$ $\frac{1}{z_2}=-j2$ $z_2^*=-j0.5$ $\frac{1}{z_2^*}=j2$

$z_3=j$ 在单位圆上 $z_3^*=-j$

∴ 8阶滤波器共8个零点：

$2, 0.5, j0.5, -j0.5, j2, -j2, j, -j$.

(2) 由 $H(z)=h(0)\prod_{k=1}^{8}(1-z_k z^{-1})$

7.3 已知 9 阶Ⅱ型线性相位 FIR 数字滤波器的部分零点为：$z_1=2$，$z_2=j0.5$，$z_3=-j$。

(1) 试确定该滤波器的其他零点。

(2) 设 $h(0)=1$，求出该滤波器的系统函数 $H(z)$。

II型 固有零点：$z=-1$

7.4 已知 8 阶Ⅲ型线性相位 FIR 数字滤波器的部分零点为：$z_1=-0.2$，$z_2=j0.8$。

(1) 试确定该滤波器的其他零点。

(2) 设 $h(0)=1$，求出该滤波器的系统函数 $H(z)$。

7.5 已知 9 阶Ⅳ型线性相位 FIR 数字滤波器的部分零点为：$z_1=-1$，$z_2=0.8$，$z_3=j0.5$。

(1) 试确定该滤波器的其他零点。

(2) 设 $h(0)=1$，求出该滤波器的系统函数 $H(z)$。

7.4 III型 固有零点：$z=1$ 和 $z=-1$

7.5. IV型 固有零点：$z=1$.

滤波器类型	对称性	长度 N	固有零点	物理限制（不能做什么）
I 型	偶对称	奇数	无	万能（最常用）
II 型	偶对称	偶数	$z=-1$	不能做高通、带阻（高频被切）
III 型	奇对称	奇数	$z=1,-1$	只能做带通（两头都被切）
IV 型	奇对称	偶数	$z=1$	不能做低通（低频被切）

频率采样法

用频率采样法设计严格线性相位FIR $\begin{cases}\text{低通}\\ \text{高通}\end{cases}$ 滤波器，要求 $w_p=\frac{\pi}{3}$ rad，点数取 $N=15$，求出 $h(n)$

① 采样间隔 $\Delta w=\frac{2\pi}{N}=\frac{2\pi}{15}$

② 确定幅度 H_k.

对于低通：$w_k=k\cdot\frac{2\pi}{15}\le w_p=\frac{\pi}{3}$

即 $k\le 2.5$ 时是通带

$\therefore$ $k=0,1,2$ 时，H_k 为 1

$k=3,4,5,6,7$ 时，H_k 为 0.

对于高通：

$k=0,1,2$ 时 H_k 为 0

$k=3,4,5,6,7$ 时，H_k 为 1

只看 $0\sim\frac{N-1}{2}$ 即可，因为另一半是关于 $\frac{N-1}{2}$ 对称的

③ 确定相位 θ_k.

$$\theta_k=-\frac{N-1}{2}\cdot\frac{2\pi k}{N}=-\frac{N-1}{N}\pi k$$

④ 得到 $H(k)$.

低通：$H(k)=H_k e^{j\theta_k}=\begin{cases}e^{-j\frac{14\pi k}{15}}, & k=0,1,2,13,14\\ 0, & k=3,4,\cdots,12\end{cases}$

高通：$H(k)=H_k e^{j\theta_k}=\begin{cases}0, & k=0,1,2,13,14\\ e^{-j\frac{14\pi k}{15}}, & k=3,4,\cdots,12\end{cases}$

⑤ IDFT 得 $h(n)$

$$h(n)=IDFT[H(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)W_N^{-kn}$$

窗函数.

表 7.3.2 六种窗函数的主要参数

窗函数类型	主瓣宽度/rad	旁瓣电平/dB	过渡带宽度/rad	阻带最小衰减/dB
矩形窗	$4\pi/N$	-13	$1.8\pi/N$	21
三角窗	$8\pi/N$	-25	$6.1\pi/N$	25
汉宁窗	$8\pi/N$	-31	$6.2\pi/N$	44
汉明窗	$8\pi/N$	-41	$6.6\pi/N$	53
布莱克曼窗	$12\pi/N$	-57	$11\pi/N$	74
凯塞窗 $\beta=7.865$		-57	$10\pi/N$	80

信号流图

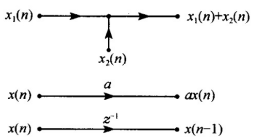


图 8.2.1 三种基本运算的信号流图表示

IIR数字滤波器直接型结构.

$$H(z)=H_2(z)H_1(z)=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{N}a_kz^{-k}}\sum_{i=0}^{M}b_iz^{-i}$$

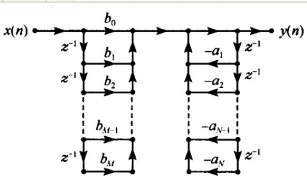


图 8.3.1 IIR 数字滤波器的直接Ⅰ型结构

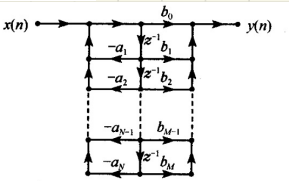
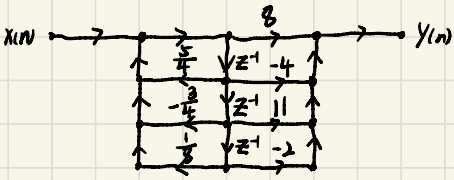


图 8.3.3 IIR 数字滤波器的直接Ⅱ型结构

例：$H(z)=\dfrac{8-4z^{-1}+11z^{-2}-2z^{-3}}{1-\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{3}{4}z^{-2}-\frac{1}{8}z^{-3}}$

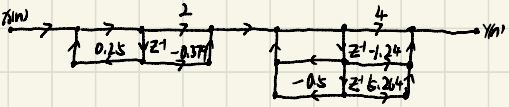


IIR数字滤波器级联型结构.

例：

$$H(z)=\frac{8-4z^{-1}+11z^{-2}-2z^{-3}}{1-\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{3}{4}z^{-2}-\frac{1}{8}z^{-3}}$$

$$=\frac{(2-0.379z^{-1})}{(1-0.25z^{-1})}\frac{(4-1.24z^{-1}+5.264z^{-2})}{(1-z^{-1}+0.5z^{-2})}$$



IIR数字滤波器并联型结构.

例 8.3.3 设 IIR 数字滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{8-4z^{-1}+11z^{-2}-2z^{-3}}{1-\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{3}{4}z^{-2}-\frac{1}{8}z^{-3}}$$

试画出该滤波器的并联型结构。

解 将系统函数 $H(z)$ 进行部分分式展开，得到

$$H(z)=\frac{8-4z^{-1}+11z^{-2}-2z^{-3}}{(1-0.25z^{-1})(1-z^{-1}+0.5z^{-2})}$$

$$=16+\frac{8}{1-0.25z^{-1}}+\frac{-16+20z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

将上式中的每一个子系统画成直接Ⅱ型结构，再进行并联，最后得到滤波器的并联型结构如图 8.3.8 所示。

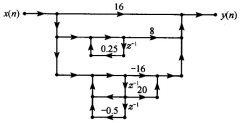


图 8.3.8 例 8.3.3 的并联型结构

FIR数字滤波器直接型、级联型结构.

例 8.4.1 设 FIR 数字滤波器的系统函数为

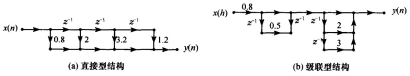
$$H(z)=0.8+2z^{-1}+3.2z^{-2}+1.2z^{-3}$$

试画出该滤波器的直接型结构和级联型结构。

解 该滤波器的直接型结构按照系统函数 $H(z)$ 直接画出如图 8.4.3(a)所示。将系统函数 $H(z)$ 进行因式分解，得到

$$H(z)=0.8+2z^{-1}+3.2z^{-2}+1.2z^{-3}$$
$$=0.8(1+2.5z^{-1}+4z^{-2}+1.5z^{-3})$$
$$=0.8(1+0.5z^{-1})(1+2z^{-1}+3z^{-2})$$

于是该滤波器的级联型结构如图 8.4.3(b)所示。



(a) 直接型结构 (b) 级联型结构

图 8.4.3 例 8.4.1 的滤波器结构

FIR数字滤波器线性相位结构.

8.4.3 线性相位结构

如果 FIR 数字滤波器具有线性相位特性，它的单位脉冲响应满足下式：

$$h(n)=\pm h(N-n-1) \tag{8.4.6}$$

式中，"+"对应严格线性相位滤波器，"−"对应广义线性相位滤波器。利用线性相位滤波器单位脉冲响应 $h(n)$ 的这种对称特性，可以推导出滤波器的系统函数 $H(z)$ 当 N 为偶数和奇数时分别为：

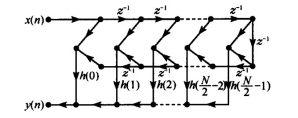
当 N 为偶数时

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N/2-1}h(n)[z^{-n}\pm z^{-(N-n-1)}] \tag{8.4.7}$$

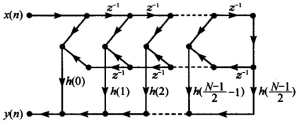
当 N 为奇数时

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{(N-1)/2-1}h(n)[z^{-n}\pm z^{-(N-n-1)}]+h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}} \tag{8.4.8}$$

FIR 线性相位数字滤波器的系统函数(8.4.7)式和(8.4.8)式的推导，留作习题请读者自己导出。按照系统函数表示式，严格线性相位滤波器的结构如图 8.4.4(a)、(b)所示。广义线性相位滤波器的结构如图 8.4.5(a)、(b)所示。与直接型结构比较，如果 N 为偶数，直接型结构需要 N 个乘法器，而线性相位结构只需要 $N/2$ 个乘法器，节省了一半；如果 N 为奇数，则乘法器的个数减少到 $(N+1)/2$ 个，也节省了近一半的乘法器。

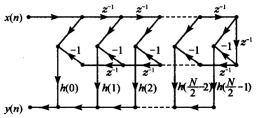


(a) N为偶数

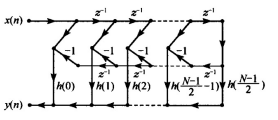


(b) N为奇数

图 8.4.4 严格线性相位 FIR 数字滤波器的结构



(a) N为偶数



(b) N为奇数

图 8.4.5 广义线性相位 FIR 数字滤波器的结构