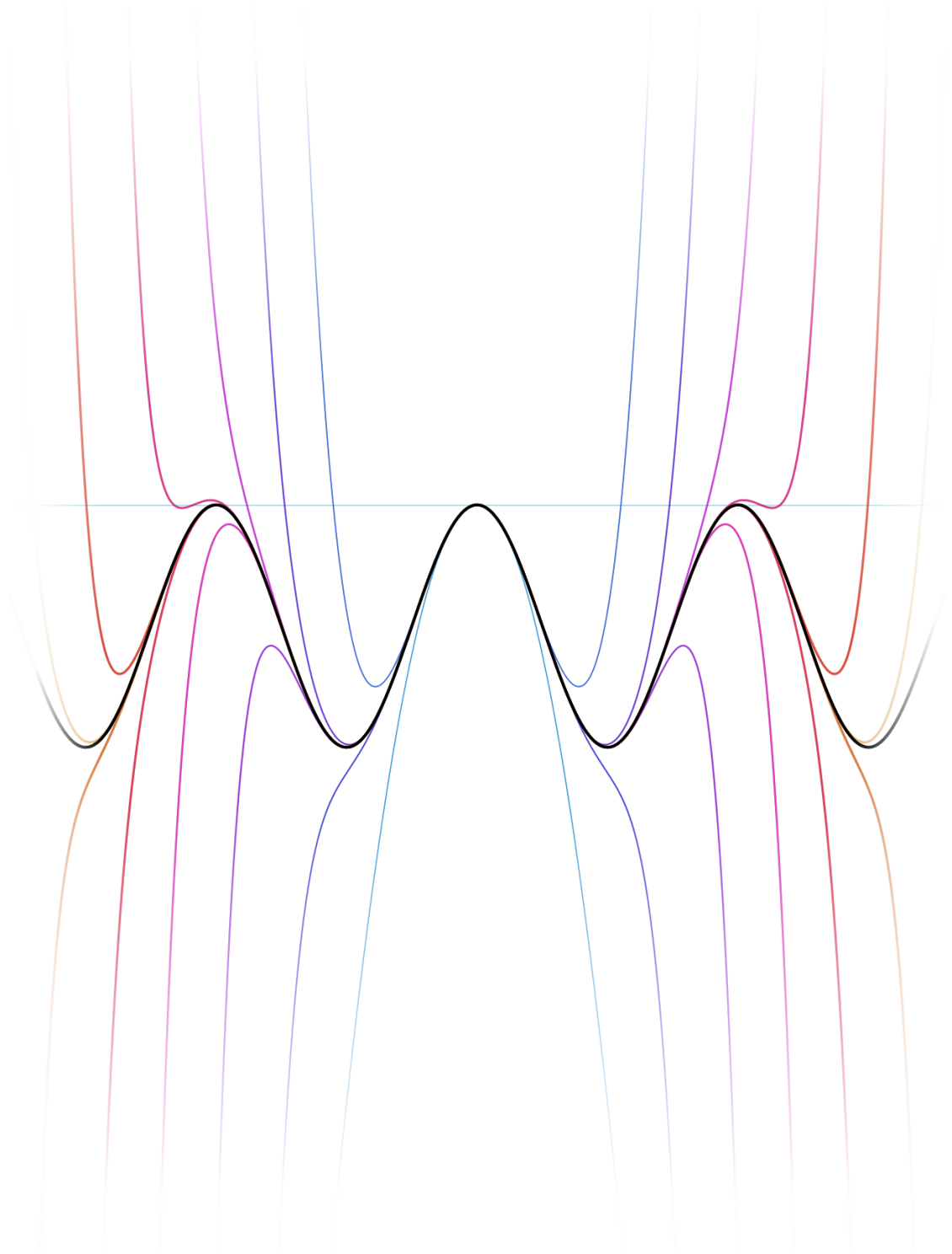


Taylorpolynomier

SSO - Matematik A

Jákup Lützen - Februar 2022



Resumé

Opgaven undersøger Taylorpolynomier og deres historie, med særlig fokus på samtidens matematikere. Den kommer også ind på Taylorformlens restled, dens størrelse, samt Taylorpolynomiers praktiske anvendelser.

Opgaven beviser formelen for Taylorrækken, og undersøger Taylorpolynomiers Lagrange restled, hvilket også bevises.

Ved en analyse af Taylorpolynomierepresentationen for $\cos(\theta)$ undersøges fejlen ved at se bort fra restleddet, hvordan det påvirkes af Taylorpolynomiets grad, og hvordan det kan udregnes.

I diskussionen perspektiveres Taylorpolynomier ved, at overveje deres praktiske anvendelser. Opgaven peger på, at Taylorpolynomier stadig er relevante i dag. Den viser også hvordan man finder frem til dem, og argumenterer at Taylorpolynomier er opkaldt på passende vis, set i et historisk lys.

Indhold

1	Indledning	2
2	Taylorpolynomiets historie	2
2.1	Newton, Gregory og Bernoulli	3
3	Analyse	4
3.1	De første led af Taylorpolynomier	4
3.2	Bevis for Taylorpolynomiet	6
3.3	Taylorpolynomiers restled	8
3.4	Bevis for Taylors formel	8
3.5	Konkret eksempel på fejl	10
4	Praktiske anvendelser af Taylorpolynomier	13
4.1	I computervidenskab	13
4.2	I økonomi	14
4.3	I fysik	14
5	Konklusion	15
6	Litteraturliste	15
6.1	Referenceliste	15
6.2	Litteraturliste	16

1 Indledning

Matematik kan til tider synes firkantet og rigidt, hvor abstrakte forhold opskrives i eksakte formler, og hvor der ikke er plads til kreativitet. Dykker man dybere ind i faget vil man dog opdage, at dette ikke er tilfældet, og at der er mange situationer, hvor man gør kreativt brug af relativt ueksakte værktøjer. Et af disse er såkaldte Taylorpolynomier.

I matematikkens verden findes der alverdens slags funktioner, hvor nogle er mere medgørlige end andre. Nutidens computerteknik kræver desuden hurtig og praktisk behandling af alle disse formler, og i den forbindelse indtræder Taylorpolynomier ofte.

Taylorpolynomier er ingen ny opfindelse. De dukkede for første gang op i 17-18. århundrede, men hvordan blev de opdaget? Der er ingen tvivl om at de har haft stor indflydelse på måden som matematik bliver behandlet i dag, men hvordan ved man om de er korrekte, i hvilken grad ved man det, og hvorfor er det i det hele taget relevant i dag?

Denne opgave vil beskrive den historiske baggrund for Taylorrækken, bevise formelen for Taylorrækken, undersøge dens restled, samt undersøge hvilke praktiske anvendelser Taylorpolynomier har i dag.

2 Taylorpolynomiets historie

Matematikeren Brook Taylor (1685 - 1731) er navnefader til hvad vi i dag kalder Taylorpolynomier, efter at han i 1715 offentliggjorde en generel formel, der for samtidens matematikere var kendt som Proposition 7, Corollary 2 fra hans *Methodus*. Taylorpolynomier ser således ud i sin moderne form:^{1,2}

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Dette kan naturligvis også skrives som:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

¹Roy 2021, s. 247.

²Feigenbaum 1985, s. 72.

Men Taylor var dog ikke den første der tænkte disse tanker. Man ved i dag, at der var mindst fem andre forløbere: James Gregory, Newton, Leibniz, Johann I. Bernoulli, og Abraham De Moivre.

Selvom Taylor nok ikke kom først, giver det stadig mening at tilskrive metoden til ham, da han var den første der udgav den, samt den første der forstod dens signifikans.³ Historien om hvordan Taylorpolynomier blev opdaget, er ifølge Feigenbaum et „*oplysende eksempel af simultan opdagelse i matematik*“⁴, der belyser en periode med stor udvikling af matematiske metoder, hvilket dannede grobund for helt nye områder indenfor matematik.

2.1 Newton, Gregory og Bernoulli

Taylorpolynomier bygger på en indseelse, at der er en forbindelse mellem en funktions koefficienter og dens afledte. Denne indseelse viste Isaac Newton (1643 - 1727) for første gang i hans *Principia* (1687), og få år senere gav han et egentligt eksempel af Taylors formel i sin *De Quadratura Curvarum* (1691 - 92), som han aldrig færdiggjorde. Dele af denne tekst blev udgivet med titlen *Tractatus de Quadratura Curvarum*, men Taylors formel blev desværre undladt.⁵ Newton havde altså opdaget disse samme principper femogtyve år tidligere end Taylor, uden at de blev udgivet.

Newton havde i det hele taget svært ved at udgive sine fund, før han blev kendt i videre kredse, hvilket til tider voldte ham problemer i at blive anerkendt for sine opdagelser.⁶

En af konsekvenserne af dette var den kendte uoverensstemmelse mellem Newton og Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), da de ifølge Mejlbo: „*blev indviklede i en ulykkelig strid om ophavsretten til differential- og integralregningen. Den gik værst ud over Leibniz. Royal Society dømte ham - ganske uberettiget - for plagiat*“.⁷

En af Leibnitz' største fortalere i denne prioritetsstrid var Johann Bernoulli (1667 - 1748), som i slutningen af 1690'erne også havde udgivet en formel der lignede Taylors formel. Mejlbo skriver om Bernoulli at: „*... han havde et voldsomt temperament, så han overfusede Taylor med beskyldninger for plagiat*“.⁸

Den tidligste opdager af Taylors formel var dog nok den Skotske matematiker James Gregory (1638 - 1675). Man ved nu, at han i 1671 havde brugt Taylorpolynomier

³Feigenbaum 1981, s. 196.

⁴Ibid., s. 112.

⁵Roy 2021, s. 248.

⁶Mejlbo 1983, s. 116.

⁷Ibid., s. 103.

⁸Ibid., s. 111.

omkring nul, for kendte funktioner. Dette var over 40 år før Taylor udgav sin *Methodus*. Dette vides kun, fordi Gregory havde sendt polynomier der repræsenterede trigonometriske funktioner til en kollega, uden at han havde forklaret sin metode. Der var dog en mindre fejl i en af resultaterne, hvilket man senere kunne spore tilbage til Gregorys uudgivne papirer, hvor de fulde Taylorpolynomier viser sig.⁹

Denne tid var præget af hurtig udvikling, og i et sådant miljø kan man forvente, at opdagelser sker uafhængigt af hinanden. Dette var delvis tilfældet med Taylorpolynomiets oprindelse, men det kan dog være svært at sortere grundigt nok igennem relevante kilder, for at bestemme præcis hvordan oprindelsen fandt sted. Til dette skriver Feigenbaum at:

*det generelt accepterede synspunkt af Taylors resultater (...) er langt mere komplekst end tidligere troet. Efter at have undersøgt Taylors opfattelse af hans eget arbejde, konkluderer jeg, at Taylors opnåede resultater er svarende til den anerkendelse, som han får i dag*¹⁰

Selvom datidens matematikere ofte lod sig inspirere, lære, og til tider plagiere, så kan der argumenteres for, at Taylorpolynomier er opkaldt efter den rette person.

3 Analyse

3.1 De første led af Taylorpolynomier

Man kan opnå en simpel intuitiv forståelse for Taylorpolynomier med følgende fremgangsmåde:

Man ønsker at tilnærme en given funktion $f(x)$ fra x -værdien x_0 . I dette eksempel bruges funktionen $f(x) = e^x$, og $x_0 = 1$.

Den simpleste approksimation kunne være en konstant funktion, som deler værdi med $f(x)$ på x_0 (*Figur 1, grøn*).

$$f(1) = e.$$

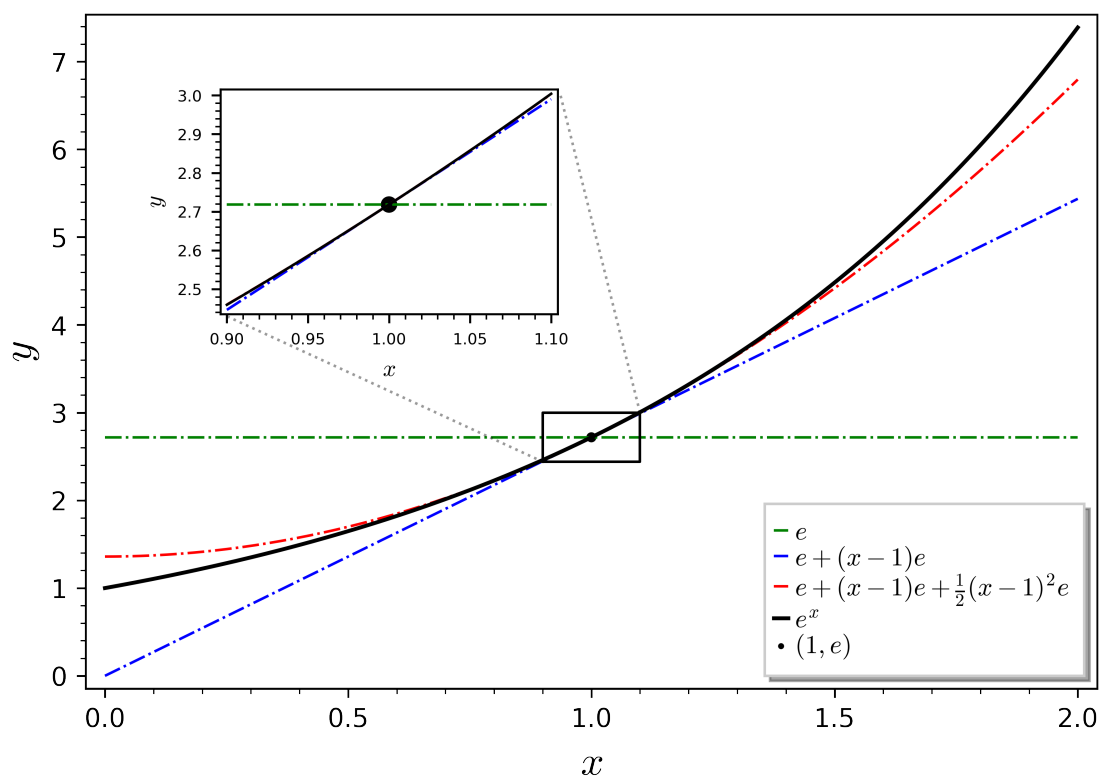
Dette er funktionens nultegrads Taylorpolynomium, som er en meget grov approksimation, da den er konstant. Den kan dog forbedres ved at tilføje den korrekte hældning på punktet. Dette genkendes som ligningen for tangenten til grafen for f i $P(x_0, f(x_0))$.¹¹

$$\begin{aligned} y &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \\ \Downarrow &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \end{aligned}$$

⁹Feigenbaum 1981, s. 113-118.

¹⁰Feigenbaum 1985, s. 96.

¹¹Schomacker m.fl. 2018, s. 24, frml. 130.



Figur 1: Nulte- første- og andengrads Taylorpolynomium for e^x

Den gældende funktion indsættes, og hermed findes funktionens førstegrads Taylorpolynomium (*Figur 1, blå*).

$$y = e + e \cdot (x - 1) \quad .$$

Nu er værdien samt hældningen på x_0 korrekt. Dette er ikke en dårlig approksimation for værdier tæt på x_0 (se *Figur 1*). Vi har i denne proces været nødt til at finde den afledte af $f(x)$, det ville derfor kun være muligt med funktioner der er kontinuerte og differentiable omkring x_0 .

For at forbedre approksimationen yderligere, kan man tilføje den korrekte krumning. Dette gøres ved at finde et andengradspolynomium, hvor den anden afledte stemmer overens med den oprindelige funktions anden afledte. Her dukker Taylorpolynomiers egentlige mekanik op, hvilket forstås nemmest vha. næste sektion:

3.2 Bevis for Taylorpolynomiet

Bevis. Vi har indtil videre set, hvordan en konstant og en tangent blev brugt som en approksimation for en funktion $f(x)$. Vi kan udvide og generalisere denne approksimationsmetode tæt på $x = x_0$ med et n -tegrads polynomium.

$$P_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$$

således at polynomiets værdi på x_0 stemmer overens med $f(x_0)$. Det samme skal gælde for alle afledte, op til n gange afledte funktioner, dvs:

$$\begin{aligned} P_n(x_0) &= f(x_0), \\ P'_n(x_0) &= f'(x_0), \\ P''_n(x_0) &= f''(x_0), \\ &\vdots \\ P_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0). \end{aligned} \tag{1}$$

Deraf følger, at dette kun gælder for funktioner der er kontinuerte og n gange differentiable på $x = x_0$.

Eftersom det er x_0 vi har interesse i, giver det mening at udtrykke P_n på formen:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_n(x - x_0)^n \tag{2}$$

For at finde konstanterne $c_0, c_1 \cdots c_n$ på punktet x_0 , kan vi ganske enkelt indsætte $x = x_0$ i $P_n(x), P'_n(x) \cdots P_n^{(n)}(x)$. Vi bruger desuden ligning (1) at forbinde konstanterne med $f(x_0)$

Den første konstant er åbenlys, når vi indsætter $x = x_0$ i ligning (2)

$$c_0 = P_n(x_0) = f(x_0)$$

Derefter observerer vi den afledte funktion:

$$P'_n(x) = c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + \cdots + nc_n(x - x_0)^{n-1} \tag{3}$$

Vi kan nu på samme måde indsætte $x = x_0$ i ligning (3), og igen jævnføre med ligning (1), for at konkludere at:

$$c_1 = P'_n(x_0) = f'(x_0)$$

Vi fortsætter samme fremgangsmåde, og observerer nu $P_n''(x)$.

$$P_n''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)c_n(x - x_0)^{n-2} \quad (4)$$

Når vi indsætter $x = x_0$ i ligning (4) ser vi at $2c_2 = P_n''(x_0) = f''(x_0)$, hvilket betyder at:

$$c_2 = \frac{1}{2}f''(x_0).$$

Nu begynder et mønster at vise sig. Eftersom de næste konstanter findes med gentagen differentiering af voksende potenser, vil konstanterne følge mønstret:

$$\begin{array}{ccc} 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_3 = f'''(x_0), & 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_4 = f^{(4)}(x_0), & 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_5 = f^{(5)}(x_0) \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, & c_4 = \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}, & c_5 = \frac{f^{(5)}(x_0)}{5!}. \end{array}$$

Generelt, når vi indsætter $x = x_0$ i $P_n^{(k)}(x)$ ser vi at:

$$k!c_k = P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

og derfor:

$$\boxed{c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}} \quad (5)$$

for $k = 1, 2, 3, \dots, n$. når vi husker at $0! = 1$, og at den nulte afledte $g^{(0)}$ af en funktion g blot er selve funktionen g , indser vi at ligning (5) også gælder for $k = 0$. Dette giver os følgende sætning:

Antag at $f(x)$ er n gange differentiabel på $x = x_0$. Lad $P_n(x)$ være n -tegrads polynomiet

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned} \quad (6)$$

Så vil værdierne af $P_n(x)$ og dets første n afledte funktioner stemme overens med $f(x)$ og dets første n afledte funktioner på punktet $x = x_0$.^{12,13}



¹²Edwards og Penney 1998, s. 647-648.

¹³Alsholm 2008, s.1-2.

3.3 Taylorpolynomiers restled

Når man approksimerer en funktion med dens Taylorpolynomium, vil der som regel opstå en fejl (udenfor udviklingspunktet x_0)¹⁴. Til dette har man Taylors formel.

Taylors formel giver os muligheden for at approksimere fejlen, og derved vurdere hvilken grad Taylorpolynomiet skal føres til, for at fejlen holder sig indenfor en vis margin. Den giver os også mulighed for at endelig sætte lighedstegn funktionen og Taylors formel, dog med en ekstra ubekendt (ξ).

Tætheden som polynomiet $P_n(x)$ approksimerer funktionen $f(x)$ med, måles med differencen:¹⁵

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f(x) - P_n(x), \\ \Leftrightarrow f(x) &= P_n(x) + R_n(x). \end{aligned} \tag{7}$$

3.4 Bevis for Taylors formel

Bevis. Der findes mange beviser for Taylors formel, men ingen af dem er helt ligefrem. De benytter altid et trick for at begynde beviset¹⁶. Her gennemgås udtrykket for $R_n(x)$, der kaldes *Lagrange formen* for restleddet, da den blev opdaget af Joseph Louis Lagrange (1736-1813). I dette bevis begynder man med at introducere en hjælpefunktion $F(x)$ således at:

$$\begin{aligned} F(x) &= f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 \\ &\quad - \dots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n - K(b-x)^{n-1}. \end{aligned} \tag{8}$$

Konstanten K vælges således at $f(a) = 0$. Dette kan gøres eksplicit, ved at indsætte $x = a$ på højre side, og $F(x) = F(a) = 0$ på venstre side af ligning (8), siden løse for K , men dette er ikke nødvendigt. Når man indsætter $x = b$ i ligning (8), er det tydeligt at $F(b) = 0$.

Dette betyder at *Rolles sætning* gælder, således at:

$$F'(\xi) = 0, \tag{9}$$

Rolles sætning:¹⁷

Antag at f er kontinuert og differentiabel i $[a, b]$. Hvis $f(a) = 0 = f(b)$, så findes der et tal c i $]a, b[$ således at $f'(c) = 0$.

¹⁴Alsholm 2006, s. 4.

¹⁵Edwards og Penney 1998, s. 650.

¹⁶Ibid., A-44.

¹⁷Ibid., s. 210.

for en værdi af ξ hvor ($a < \xi < b$).

Hvis man nu differentierer ligning (8), får man:

$$\begin{aligned} F'(x) &= (0) - f'(x) + f'(x) - f''(x)(b-x) \\ &\quad + f''(x)(b-x) - \frac{1}{2!}f^{(3)}(x)(b-x)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2!}f^{(3)}(x)(b-x)^2 - \frac{1}{3!}f^{(4)}(x)(b-x)^3 \\ &\quad + \dots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1} - \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x)(b-x)^n \\ &\quad + (n+1)K(b-x)^n \end{aligned}$$

Ved tæt inspektion kan man se, at alle led, pånær de sidste to, går ud med hinanden. Dette kollapse altså til:

$$F'(x) = (n+1)K(b-x)^n - \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n. \quad (10)$$

Derfor følger, at når man indsætter ligning (9) i ligning (10), får man:

$$\begin{aligned} 0 &= (n+1)K(b-\xi)^n - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n \\ \Leftrightarrow 0 &= (n+1)K - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \\ \Leftrightarrow K &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \end{aligned} \quad (11)$$

Vi kan nu vende tilbage til ligning (8), hvor vi indsætter $x = a$, $f(x) = 0$ samt værdien for K som vi lige har fundet i ligning (11). Dette giver:

$$\begin{aligned} 0 &= f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 \\ &\quad - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n - \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \end{aligned}$$

Som endelig kan manipuleres til at give ligning (12) følgende Teorem:

Taylor's formel: Lad f være $(n+1)$ gange differentiable i et interval der indeholder punkterne a og b . Så er $f(b)$:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(b-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{(n+1)} \quad (12)$$

for et tal ξ mellem a og b

■

Det er muligt at generalisere ligning (12) ved at indsætte $b = x$, og således får vi det **ntegrads Taylorformel med restled på $x = a$:**

Vi genkender alle de første n led på højre side af denne ligning som Taylorpolynomiet $P_n(x)$, sammenligner med ligning (7), og får derfor endelig formelen for restleddet:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$$

3.5 Konkret eksempel på fejl

Overvej for eksempel en beregning hvor en cosinusfunktion indgår. $f(x) = \cos(x)$ Vi kan analysere størrelsen af den fejl der opstår ved at approksimere den med Taylorpolynomier af n 'te grad med udviklingspunkt $x_0 = 0$.

Først undersøger vi et simpelt andengradstaylorpolynomium uden restled med hjælp af ligning (6):

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ &= \cos(0) - \sin(0)(x-0) - \frac{\cos(0)}{2!}(x-0)^2 \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

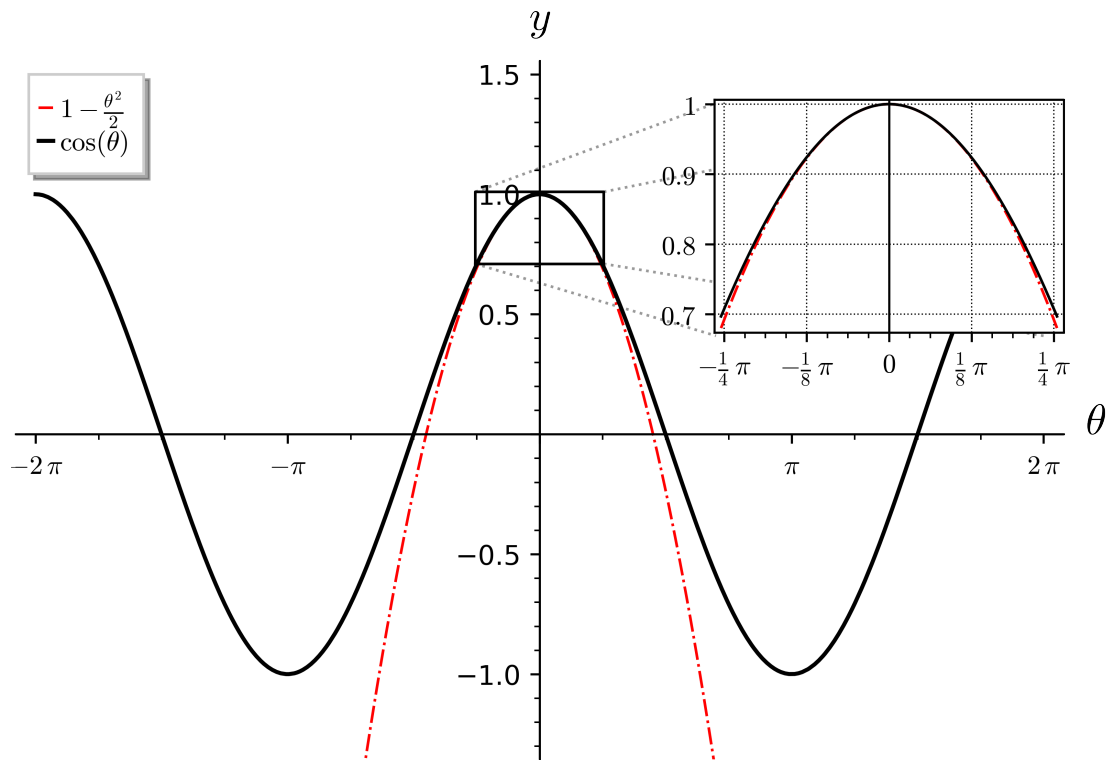
Det kan synes utroligt at man kan approksimere en cosinusfunktion med:

$$\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2},$$

og hvis man ikke kendte til Taylorpolynomier, ville det nok virke en smule vilkårligt¹⁸, men hvor nøjagtigt er det?

Vi kan begynde med at tegne approksimationen på en graf:

¹⁸3Blue1Brown 2017.



Figur 2: Andengradstaylorpolynomium for $\cos(\theta)$

Det er tydeligt på Figur 2. at denne approksimation er god for små værdier af θ . Lad os undersøge hvor korrekt den er på $\theta = \frac{1}{8}\pi$

$$P_2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0,9228937$$

Vi kan benytte os af Taylors formel med restled, hvor $n = 2$, fordi det er et andengradstaylorpolynomium. $a = 0$, fordi vores udviklingspunkt er 0, $x = \frac{\pi}{8}$, fordi det er punktet som vi approksimerer, og ifølge Lagrangeformen for restled skal ξ ligge i intervallet $]a; x[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^3 \\ f\left(\frac{\pi}{8}\right) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-0)^3 \\ f\left(\frac{\pi}{8}\right) &= f(0) + f'(0)\left(\frac{\pi}{8}\right) + \frac{f''(0)}{2!}\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}\left(\frac{\pi}{8}\right)^3 \\ f\left(\frac{\pi}{8}\right) &= 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 + \frac{\sin(\xi)}{3!}\left(\frac{\pi}{8}\right)^3 \\ f\left(\frac{\pi}{8}\right) &= 1 - \frac{\pi^2}{128} + \frac{\sin(\xi)\pi^3}{3072} \end{aligned}$$

Vi har nu forsimplet denne ligning, og vi kan bruge dette til at finde den maksimale fejl af approksimationen.

Dette finder vi ved at undersøge hvornår $R_2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sin(\xi)\pi^3}{3072}$ indtager den største værdi. Det er nemt at se, fordi $\sin(\xi)$ ligger i tælleren, og vi ved at $(0 < \xi < \frac{\pi}{8})$.

Restleddet kan derfor ikke være større end når $\xi = \frac{\pi}{8}$. Dette indsætter vi i restleddet.

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\pi^3}{3072} \approx 0,00386$$

Vi ved altså med sikkerhed at vores approksimation er rigtig med 2 decimaler.

For at finde den nøjagtige fejl finder vi blot differencen mellem $P_2(x)$ og $f(x)$:

$$\left|P_2\left(\frac{\pi}{8}\right) - f\left(\frac{\pi}{8}\right)\right| = \left|1 - \frac{\pi^2}{128} - \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right| \approx 0,00098582 \quad (13)$$

Vi kan se, at vores maksimale fejl er større end den faktiske fejl, hvilket er som forventet.

Hvis man skulle bruge denne approksimation til astronomiske parallakse målinger eller lignende, kan man forestille sig, at det ikke ville være nok med 2 decimalers garanteret nøjagtighed indenfor en vinkel på $\pi/8$. I så fald får vi brug for et større n . Lad os derfor undersøge og sammenligne den maksimale fejl ved det tilsvarende tredjegradstaylorpolynomium, dog uden alle mellemregningerne, der foregår ligesom første eksempel.

$$P_3\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{\pi^2}{128}, \quad R_3\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\cos(\xi)\pi^4}{98304}$$

Her observerer vi et spøjst fænomen. Hvert led i Taylorpolynomiet indeholder en afledt funktion af stigende grad. I dette tilfælde betyder det at hvert led skifter imellem at indeholde en sinusfunktion og en cosinusfunktion. Eftersom vi har valgt udviklingspunkt $a = 0$, indeholder hvert andet led $\sin(0) = 0$, og forsvinder derfor. Dette betyder at $1 - \frac{\theta^2}{2}$ er ikke kun det bedste andengradstaylorpolynomium for $\cos(\theta)$, men tilmed det bedste tredjegradstaylorpolynomium for funktionen.¹⁹

Restleddet indeholder imidlertid ikke udviklingspunktet, men en variabel ξ , og kan derfor aldrig ignoreres.

I dette tilfælde betyder det, at selvom vores approksimation er uændret, kan vi udregne en ny maksimumfejl. Vi skal også være opmærksomme på, at den nye trigonometriske funktion i restleddet nødvendiggør et nyt ξ , og da $\cos(\xi)$, hvor $(0 \leq$

¹⁹3Blue1Brown 2017.

$\xi \leq 8/\pi$) har maksimum når $\xi = 0$, er dette vores nye værdi for ξ :

$$\max_{\xi} R_3(0) = \frac{\cos(0)\pi^4}{98304} \approx 0,0009908965$$

Og vi har herved lært, at vores udtryk for $P_3(3)$ er garanteret nøjagtigt til 3 decimaler i intervallet $[0; \pi/8]$, (og som udvidelse til $-\pi/8$ pga. funktionens symmetri omkring 0). Dette er også meget tæt på den faktiske fejl som vi oplevede i ligning (13), hvilket giver mening, eftersom vores x -værdi havde den størst mulige afstand fra Taylorpolynomiets udviklingspunkt, indenfor vores valgte interval.

Hvis man er tilfreds med denne fejl, kan man altså trygt se bort fra restleddet.

4 Praktiske anvendelser af Taylorpolynomier

I den digitale tidsalders barndom troede man i en periode, at Taylorpolynomier hovedsageligt ville have historisk interesse, men det har vist sig, at kendskab til disse metoder stadig i dag er relevant. Når man sender robotter til Mars, eller undersøger fysiske fænomener på nano-niveau, kræver det kompliceret og præcis matematik, hvor Taylorpolynomier ofte finder sin plads.²⁰

Det er dog ikke kun studiet af fjerne planeter og små atomer der drager udbytte af denne regnemetode. Taylorpolynomier er også en del af den teori, der danner grund for mange af de elektroniske apparater, som vi bruger hver dag.

4.1 I computervidenskab

Taylorpolynomier kan have meget fundamentale anvendelser. Man kan forestille sig en computer der kun kan addere (+), subtrahere (−) og multiplicere (×), men ikke dividere (÷). Ville sådan en computer kunne udregne en brøk?

I dette scenario kunne man bruge et enkelt Taylorpolynomium. Nemlig Taylorpolynomiet for en geometrisk serie:

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n, \quad |x| < 1$$

²⁰Grøn, Bruun og Lyndrup 2021, s. 11.

Vi kan fx. approksimere $329/73$ med denne metode, helt uden at dividere:²¹

$$\begin{aligned}\frac{329}{73} &= \frac{3,29}{0,73} = 3,29 \cdot \frac{1}{1 - 0,27} \\ &\approx 3,29 \cdot (1 + 0,27 + 0,27^2 + \dots + 0,27^{10}) \\ &\approx 3,29 \cdot 1,36986 \\ \frac{329}{73} &\approx 4,5068\end{aligned}$$

I virkeligheden bruger computere dog ikke denne metode. De bruger hurtigere algoritmer så som Goldschmidts eller Newton-Raphsons algoritmer.²², men der er andre problemer der konkret løses med viden, som den der findes i Taylorpolynomier, eksempelvis integralet af *transcendente* funktioner så som $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x og $\ln(x)$. Computere drager især ofte nytte af Taylorpolynomier når de for eksempel i videospil skal udregne trigonometriske funktioner hurtigt og effektivt.²³

4.2 I økonomi

Matematikken i økonomi kan også blive svær at have med at gøre, og også her finder Taylorpolynomier anvendelse. Et eksempel på dette er *Black-Scholes* formelen, der kan bruges til at udregne prisen for en option på en aktie, hvor Taylorpolynomier tit bruges i formelns implementering, men her er det vigtigt at have indgående kendskab til Taylorpolynomier, for ikke at bruge dem forkert.²⁴

4.3 I fysik

Differentialligninger kan være meget svære at have med at gøre, men Taylorpolynomier gør dem nemme. Dette er nyttigt i mange områder af fysik, det kan være når man studerer elektriske felter, når man optimerer fysiske systemer for at studere et ækvilibrium i en klump atomer, studiet af porøse stenarters elasticitet eller når man modellerer havbølgers færd over ujævnt terræn²⁵

Taylorpolynomier er altså et fundamentalt matematisk værktøj, og deres anvendelser kan brede sig ud over stort set alle fag, hvor matematik er involveret. Desuden danner de basis for mange af de digitale resurser, som vi tager for givet i vores daglige brug af elektroniske værktøjer.

²¹Edwards og Penney 1998, s. 646.

²²Soderquist og Leiser 1997.

²³Grøn, Bruun og Lyndrup 2021, s. 11.

²⁴Estrella 1995.

²⁵Fosso-Tande 2008.

5 Konklusion

Slutningen af 1600- til begyndelsen af 1700-tallet var for matematikken en udviklingsrig periode, hvor Taylorpolynomier opstod for første gang. Der var en del rivalisering blandt datidens matematikere, og æren af opdagelsen af Taylorpolynomier gik ikke til Brook Taylor uden tilhørende intriger, men vi ved nu, at den ære er ham berettiget.

Jeg har bevist formelen for Taylorrækken, samt undersøgt Taylorpolynomiers restled, med tilhørende bevis til Taylors formel.

Jeg har så taget eksemplet $f(x) = \cos(\theta)$ og analyseret størrelsen af den fejl vi begår ved at se bort fra restleddet.

Til sidst kunne jeg konkludere, at Taylorpolynomier er essentielle for et utal af forskellige emner, og at de i høj grad er relevante i den moderne tidsalder.

6 Litteraturliste

6.1 Referenceliste

- 3Blue1Brown (2017). *Taylor series / Chapter 11, Essence of calculus*. eng. URL: <https://youtu.be/3d6DsjiBzJ4> (bes. 16.02.2022).
- Alsholm, Preben (2006). *Approximation ved Taylorpolynomier*. dan. URL: <https://alsholm.dk/people/P.K.Alsholm/01905/Noter/taylor.pdf> (bes. 16.02.2022).
- (2008). *Taylorpolynomier og Taylors sætning*. dan. URL: <https://alsholm.dk/people/P.K.Alsholm/01906/Beamer/Artikel/uge10article.pdf> (bes. 16.02.2022).
- Edwards, C. Henry og David E Penney (1998). *Calculus with analytic geometry*. eng. 5. ed. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall. ISBN: 0137363311.
- Estrella, Arturo (mar. 1995). „Black and Scholes: Series approximations and risk management pitfalls“. eng. I: URL: https://www.newyorkfed.org/medialibrary/media/research/staff_reports/research_papers/9501.pdf (bes. 16.02.2022).
- Feigenbaum, Leonore (1985). „Brook Taylor and the Method of Increments“. eng. I: *Archive for history of exact sciences* 34.1/2, s. 1–140. ISSN: 0003-9519.
- (1981). *Brook Taylor's Methodus incrementorum : a translation with mathematical and historical commentary*. eng. Ann Arbor, Mich: University Microfilms International. ISBN: 0930972007.

- Fosso-Tande, Jacob (okt. 2008). *Applications of Taylor Series*. eng. URL: https://www.researchgate.net/publication/255769563_Applications_of_Taylor_series (bes. 16.02.2022).
- Grøn, Bjørn, Bodil Bruun og Olav Lyndrup (2021). *Hvad er matematik? 3, Projekt 2.9*. dan. URL: https://lru.praxis.dk/Lru/microsites/hvadermatematik/hem3download/kap2_Projekt_2_9_Taylorpolynomier_og_Taylorraekker.pdf (bes. 16.02.2022).
- Mejlbo, Lars C (1983). *Uendelige rækker : en historisk fremstilling*. dan. Elementærafdelingen ; 19. Århus Universitet. Matematisk institut. ISBN: 3527271244.
- Roy, Ranjan (2021). *Series and Products in the Development of Mathematics*. eng. 2. udg. Bd. 1. Cambridge University Press, s. 247–272. ISBN: 9781108709453.
- Schomacker, Gert m.fl. (2018). *Matematisk formelsamling, stx, A-niveau*. dan. 2. udg. Undervisningsministeriet. ISBN: 978-87-603-3166-4.
- Soderquist, Peter og Miriam Leeser (jan. 1997). *Floating-Point Division and Square Root: Choosing the Right Implementation*. eng. URL: https://www.researchgate.net/publication/2511700_Floating-Point_Division_and_Square_Root_Choosing_the_Right_Implementation (bes. 16.02.2022).

6.2 Litteraturliste

- 3Blue1Brown (2017). *Taylor series / Chapter 11, Essence of calculus*. eng. URL: <https://youtu.be/3d6DsJIBzJ4> (bes. 16.02.2022).
- Alsholm, Preben (2006). *Approximation ved Taylorpolynomier*. dan. URL: <https://alsholm.dk/people/P.K.Alsholm/01905/Noter/taylor.pdf> (bes. 16.02.2022).
- (2008). *Taylorpolynomier og Taylors sætning*. dan. URL: <https://alsholm.dk/people/P.K.Alsholm/01906/Beamer/Artikel/uge10article.pdf> (bes. 16.02.2022).
- Edwards, C. Henry og David E Penney (1998). *Calculus with analytic geometry*. eng. 5. ed. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall. ISBN: 0137363311.
- Estrella, Arturo (mar. 1995). „Black and Scholes: Series approximations and risk management pitfalls“. eng. I: URL: https://www.newyorkfed.org/medialibrary/media/research/staff_reports/research_papers/9501.pdf (bes. 16.02.2022).
- Feigenbaum, Leonore (1985). „Brook Taylor and the Method of Increments“. eng. I: *Archive for history of exact sciences* 34.1/2, s. 1–140. ISSN: 0003-9519.
- (1981). *Brook Taylor's Methodus incrementorum : a translation with mathematical and historical commentary*. eng. Ann Arbor, Mich: University Microfilms International. ISBN: 0930972007.

- Fosso-Tande, Jacob (okt. 2008). *Applications of Taylor Series*. eng. URL: https://www.researchgate.net/publication/255769563_Applications_of_Taylor_series (bes. 16.02.2022).
- Grøn, Bjørn, Bodil Bruun og Olav Lyndrup (2021). *Hvad er matematik? 3, Projekt 2.9*. dan. URL: https://lru.praxis.dk/Lru/microsites/hvadermatematik/hem3download/kap2_Projekt_2_9_Taylorpolynomier_og_Taylorraekker.pdf (bes. 16.02.2022).
- Kalkulus* (2006 - 2008). nor. 3. udgave. 2. oplag. Oslo: Universitetsforlaget. ISBN: 9788215009773.
- Madsen, Tage Gutmann (1991). *Noter til Matematik 11, MATEMATISK ANALYSE*. dan. (Aarhus Universitet, Matematisk Institut).
- Mejlbo, Lars C (1983). *Uendelige rækker : en historisk fremstilling*. dan. Elementærafdelingen ; 19. Århus Universitet. Matematisk institut. ISBN: 3527271244.
- Roy, Ranjan (2021). *Series and Products in the Development of Mathematics*. eng. 2. udg. Bd. 1. Cambridge University Press, s. 247–272. ISBN: 9781108709453.
- Schomacker, Gert m.fl. (2018). *Matematisk formelsamling, stx, A-niveau*. dan. 2. udg. Undervisningsministeriet. ISBN: 978-87-603-3166-4.
- Soderquist, Peter og Miriam Leeser (jan. 1997). *Floating-Point Division and Square Root: Choosing the Right Implementation*. eng. URL: https://www.researchgate.net/publication/2511700_Floating-Point_Division_and_Square_Root_Choosing_the_Right_Implementation (bes. 16.02.2022).
- Star, Zack (2020). *Dear Calculus 2 Students, This is why you're learning Taylor Series*. eng. URL: <https://youtu.be/eX1hvWxmJVE> (bes. 16.02.2022).
- Undervisningsministeriet (2015). *Forberedelsesmateriale til stx-A-net MATEMATIK "Følger og rækker"*. dan.

Forsidebillede samt alle figurer er skabt af undertegnede.