Freitag, 7. Januar 2022

Algebra

— Blatt 10 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Welche Hilfsmittel stehen uns zur Verfügung, um den Grad $[L : K]$ einer Körpererweiterung zu bestimmen?

(b) Gibt es einen $\mathbb{Q}$-Homomorphismus $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\phi(\sqrt{2}) = \sqrt{3}$? (Falls nein, warum nicht?)

(c) Sei ϕ ein $\mathbb{Q}$-Homomorphismus $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\phi(\sqrt[4]{2}) = i\sqrt[4]{2}$. Berechnen Sie $\phi(\frac{5+4\sqrt[4]{2}}{3-\sqrt{2}})$.

(d) Sei $L|K$ eine algebraische Erweiterung, $\alpha \in L$ ein algebraisches Element über K und $\tilde{L}$ ebenfalls ein Erweiterungskörper von K. Wie bestimmt man die Anzahl der K-Homomorphismen $K(\alpha) \to \tilde{L}$?

(e) Wie sehen diese K-Homomorphismen konkret aus, d.h. wie berechnet man das Bild eines Elements $\beta \in K(\alpha)$ unter so einem Homomorphismus?

Aufgabe 1

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$ algebraisch über K. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind.

(i) $[K(\alpha) : K] = |\mathrm{Hom}_K(K(\alpha), L)|$

(ii) Das Element α ist Nullstelle eines Polynoms $f \in K[x]$, dass über L in lauter verschiedene Linearfaktoren zerfällt, also insbesondere in L nur einfache Nullstellen besitzt.

Aufgabe 2

(a) Begründen Sie, dass es keinen $\mathbb{Q}$-Homomorphismus $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i) \to \mathbb{R}$ gibt.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der $\mathbb{Q}$-Homomorphismen $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i) \to \mathbb{C}$.

(c) Sei $\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i) \to \mathbb{C}$ ein $\mathbb{Q}$-Homomorphismus mit $\sigma(\sqrt[4]{2}) = i\sqrt[4]{2}$ und $\sigma(i) = -i$. Bestimmen Sie $\sigma(2 + 7\sqrt{-2})$.

Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass das Polynom $x^4 - 2$ in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 3

Im Folgenden darf ohne Beweis verwendet werden, dass $f = x^4 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist.

(a) Bestimmen Sie die Menge $N \subseteq \mathbb{C}$ aller komplexen Nullstellen von f (mit Nachweis).

(b) Bestimmen Sie den Erweiterungsgrad $[L : \mathbb{Q}]$ des Körpers $L = \mathbb{Q}(N)$ (mit Nachweis).

(c) Sei $\alpha = i + \sqrt[4]{3}$. Beweisen Sie die Gleichung $\mathbb{Q}(\alpha) = L$.
Anleitung: Lösen Sie zunächst die Gleichung $(\alpha - i)^4 = 3$ nach i auf.

Aufgabe 4 *(Zahlentheorie)*

(a) Geben Sie die Menge aller maximalen Ideale und die Menge aller Primideale im Polynomring $\mathbb{C}[x]$ über den komplexen Zahlen an.

(b) Zeigen Sie, dass das Ideal $I = (3)$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ nicht maximal ist, indem Sie ein Element α mit Norm $N(\alpha) = 9$ bestimmen und $I \subsetneq (3, \alpha) \subsetneq (1)$ nachweisen.

(c) Weisen Sie nach, dass 3 in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ irreduzibel, aber kein Primelement ist.

Dieses Blatt wird vom 10. bis zum 13. Januar im Tutorium bearbeitet.

Algebra

— **Blatt 10** —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 *(4+3+3 Punkte)*

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}, i) \subseteq \mathbb{C}$ und $\zeta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass $\sqrt{2}$ irrational und $x^3 - 2$ in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist.

(a) Zeigen Sie, dass $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) : \mathbb{Q}] = 4$ und $[K : \mathbb{Q}] = 12$ gilt.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der $\mathbb{Q}$-Homomorphismen $\sigma : K \to \mathbb{C}$ mit $\sigma(\sqrt[3]{2}) = \zeta\sqrt[3]{2}$ und $\sigma(i) = -i$.

(c) Begründen Sie, dass es keinen $\mathbb{Q}$-Homomorphismus $\tau : K \to \mathbb{C}$ mit $\tau(\sqrt[3]{2}) = 1 + i$ gibt.

Aufgabe 2 *(10 Punkte)*

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$ und $m = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.
Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen.

(i) Es gilt $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

(ii) Es gibt genau m verschiedene $\mathbb{Q}$-Homomorphismen $\mathbb{Q}(\alpha, \beta) \to \mathbb{C}$.

Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $f \in \mathbb{Q}[x]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad n, dann besitzt f in $\mathbb{C}$ jeweils n *verschiedene* Nullstellen.

Aufgabe 3 *(4+2+4 Punkte)*

Sei $f = x^6 + 4x^4 + 4x^2 + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ und $\zeta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

(a) Überprüfen Sie, dass $\zeta, \zeta^2, \zeta^4, \zeta^5$ Nullstellen von $x^4 + x^2 + 1$ sind.

(b) Folgern Sie daraus, dass diese Elemente auch Nullstellen von f sind.

(c) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper $L \subseteq \mathbb{C}$ von f über $\mathbb{Q}$, und geben Sie $[L : \mathbb{Q}]$ an.

Aufgabe 4 *(Zahlentheorie)* *(4+6 Punkte)*

(a) Zeigen Sie durch Anwendung des Homomorphiesatzes für Ringe, dass x im Polynomring $\mathbb{Z}[x]$ ein Primelement und dass $(2, x)$ in $\mathbb{Z}[x]$ ein maximales Ideal ist.

(b) Sei R ein Integritätsbereich, seien $p_1, p_2 \in R$ Primelemente, und seien $q_1, q_2 \in R$ irreduzibel. Zeigen Sie: Gilt $p_1p_2 = q_1q_2$, dann sind auch q_1, q_2 Primelemente in R.

Abgabe: Dienstag, 18. Januar 2021, 12:15 Uhr
Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.