Algebra

— Blatt 2 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Sei G eine Gruppe. Was sind die Elemente von $\mathrm{Aut}(G)$, und wie ist die Verknüpfung auf $\mathrm{Aut}(G)$ definiert? Geben Sie das Neutralelement der Gruppe und für jedes $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$ das Inverse an.

(b) Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit eine Teilmenge $U \subseteq G$ eine Untergruppe ist?

(c) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass eine Untergruppe U von G selbst wieder eine Gruppe ist. Was ist die Verknüpfung von U?

(d) Wie ist der Kern eines Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to H$ definiert? Wie sieht der Kern aus, wenn ϕ injektiv ist?

(e) Durch welche beiden Eigenschaften ist die von einer Teilmenge $S \subseteq G$ erzeugte Untergruppe $\langle S \rangle$ charakterisiert?

(f) Was ist eine zyklische Gruppe?

Aufgabe 1

Es sei G eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine Teilmenge. Zeigen Sie: Genau dann ist U eine Untergruppe von G, wenn $U \neq \varnothing$ und $ab^{-1} \in U$ für alle $a, b \in U$ gilt.

Aufgabe 2

Sei G eine Gruppe. Dann wird $Z(G) = \{g \in G \mid gh = hg \text{ für alle } h \in G\}$ das *Zentrum* von G genannt.

(a) Für jedes $g \in G$ definieren wir jeweils die Abbildung $\tau_g : G \to G$, $h \mapsto ghg^{-1}$. Zeigen Sie, dass die Menge $U = \{\tau_g \mid g \in G\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(G)$ ist.

(b) Weisen Sie nach, dass $\phi : G \to \mathrm{Aut}(G)$, $g \mapsto \tau_g$ ein Gruppenhomomorphismus ist, und dass $\ker(\phi) = Z(G)$ gilt.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass in der Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ die Gleichung $\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \rangle = \langle \frac{1}{6} \rangle$ gilt.

(b) Bestimmen Sie (mit Nachweis) ein $r \in \mathbb{Q}$, so dass $\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5} \rangle = \langle r \rangle$ erfüllt ist.

(c) Zeigen Sie, dass $U = \{\frac{a}{2^k} \mid a \in \mathbb{Z}\ ,\ k \in \mathbb{N}_0\}$ keine zyklische Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist.

Aufgabe 4 *(Zahlentheorie)*

Seien R und S Ringe. In Analogie zu den Gruppen bezeichnen wir R und S als *isomorph* und schreiben $R \cong S$, wenn ein Isomorphismus $\phi : R \to S$ von Ringen (also ein bijektiver Ringhomomorphismus) existiert.

(a) Zeigen Sie: Gilt $R \cong S$ und ist R ein Integritätsbereich (bzw. ein Körper), dann ist auch S ein Integritätsbereich (bzw. ein Körper).

(b) Sei K ein Körper mit vier Elementen. Zeigen Sie, dass die Menge $M = \{m \cdot 1_K \mid m \in \mathbb{Z}\}$ mit $\{0_K, 1_K\}$ übereinstimmt, und dass es sich bei M um ein zweielementigen Teilkörper von K handelt.

Dieses Blatt wird vom 2. bis zum 4. November im Tutorium bearbeitet.

Lineare Algebra

— Blatt 2 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 *(bereits mehrmals im Staatsexamen vorgekommen)* (5+5 Punkte)

(a) Es seien G eine Gruppe und U_1, U_2, V Untergruppen von G mit $V \subseteq U_1 \cup U_2$.
Zeigen Sie, dass $V \subseteq U_1$ oder $V \subseteq U_2$ gilt.

(b) Sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe von G mit der Eigenschaft, dass die Mengendifferenz $G \setminus U = \{g \in G \mid g \notin U\}$ endlich ist. Zeigen Sie, dass dann G endlich ist oder $U = G$ gilt.

Hinweis zu (b) Zeigen Sie zunächst, dass für jedes $g \in G \setminus U$ durch die Zuordnung $u \mapsto gu$ jeweils eine injektive Abbildung $U \to G \setminus U$ definiert ist.

Aufgabe 2 (2+2+3+3 Punkte)

Sei S_3 die symmetrische Gruppe in drei Elementen. Bekanntlich sind die Elemente von S_3 gegeben durch $S_3 = \{\mathrm{id}\ ,\ (1\ 2)\ ,\ (1\ 3)\ ,\ (2\ 3)\ ,\ (1\ 2\ 3)\ ,\ (1\ 3\ 2)\}$.

(a) Bestimmen Sie für jedes $\sigma \in S_3$ die Elemente der erzeugten Untergruppe $\langle \sigma \rangle$.

(b) Zeigen Sie, dass jede Untergruppe U von S_3 mit S_3 übereinstimmt, sobald sie mindestens einen 2- und einen 3-Zykel enthält.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 2 vom Tutoriumsblatt und Satz (2.13) aus der Vorlesung, dass $\mathrm{Aut}(S_3)$ isomorph zu S_3 ist.

(d) Beweisen Sie, oder widerlegen Sie durch ein konkretes Gegenbeispiel: Ist G eine abelsche Gruppe, dann ist auch $\mathrm{Aut}(G)$ abelsch. (Betrachten Sie die Gruppe $G = (\mathbb{F}_2^2, +)$ und stellen Sie einen Zusammenhang zwischen $\mathrm{Aut}(G)$ und $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ her.)

Aufgabe 3 (3+3+4 Punkte)

Wir betrachten die Gruppe $G = (\mathbb{Z}^2, +)$, wobei $+$ wie üblich die komponentenweise Addition bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass $S = \{(3,1), (5,2)\}$ ein Erzeugendensystem von G ist.

(b) Weisen Sie nach, dass $U = \langle (2,4), (-3,-6) \rangle$ eine zyklische Untergruppe von G ist.

(c) Zeigen Sie, dass G selbst nicht zyklisch ist

Aufgabe 4 *(Zahlentheorie)* (2+2+3+3 Punkte)

In der Vorlesung wurde das direkte Produkt $R \times S$ zweier Ringe eingeführt.

(a) Zeigen Sie, dass die Einheitengruppe von $R \times S$ durch $R^\times \times S^\times$ gegeben ist.

(b) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit $(r,s) \in R \times S$ ein Nullteiler ist? (Bitte begründen Sie, dass die angegebene Bedingung ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für Nullteiler ist.)

(c) Beweisen Sie, dass $R \times S$ dann und nur dann ein Integritätsbereich ist, wenn einer der beiden Ringe R, S ein Nullring und der andere ein Integritätsbereich ist.

(d) Setzen wir nun voraus, dass R ein Ring der Charakteristik 2 und S ein Ring der Charaketeristik 3 ist. Zeigen Sie, dass $\mathrm{char}(R \times S) = 6$ gilt.

Abgabe: Dienstag, 9. November 2021, 12:15 Uhr

Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.