Freitag, 22. Oktober 2021

Algebra

— Blatt 1 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Geben Sie je zwei Beispiele an für (i) Halbgruppen, die keine Monoide sind (ii) Monoide, die keine Gruppen sind (iii) abelsche Gruppen.

(b) Welche Bedingungen muss ein Halbgruppen-, ein Monoid-, ein Gruppenhomomorphismus jeweils erfüllen?

(c) Übertragen Sie den Ausdruck $(gh)^5h^{-1}g^{-1}$ in additive Schreibweise.

(d) Was sind die invertierbaren Elemente der Monoide $(\mathbb{N}, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}, \cdot)$?

(e) Gibt es Monoide ohne invertierbare Elemente? Ist es sinnvoll, auch in einer Halbgruppe, die kein Monoid ist, von invertierbaren Elementen zu sprechen?

Aufgabe 1

Entscheiden Sie, ob es sich bei den folgenden Paaren bestehend aus einer Menge X und einer Verknüpfung auf X um Halbgruppen, Monoide oder Gruppen handelt.

(a) $(\mathbb{Z}, -)$ (b) $(\mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}, \ \cdot\ )$ (c) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, *)$ mit $(a, b) * (c, d) = (ac + 2bd, bc + ad)$

Die Verknüpfung in Teil (a) ist also die Subtraktion auf den ganzen Zahlen, und in Teil (b) bezeichnet $\mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}$ die Menge der reellen 2×2-Matrizen.

Aufgabe 2

Sei G eine Gruppe, und seien $g, h \in G$ mit $gh = hg$. Beweisen Sie für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ die folgenden Gleichungen.

(a) $g^{m+n} = g^m \cdot g^n$ (b) $(g^m)^n = g^{mn}$ (c) $(gh)^m = g^m h^m$.

Anleitung: Zeigen Sie die Gleichungen zunächst für $m, n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion. Führen Sie anschließend die restlichen Fälle auf diesen Fall zurück. Denken Sie daran, dass $g^0 = e$ und die negativen Potenzen durch $g^{-m} = (g^m)^{-1}$ für $g \in G$ und $m \in \mathbb{N}$ definiert wurden.

Aufgabe 3 *(Staatsexamen Frühjahr 1995)*

Sei X eine Menge mit einer Verknüpfung $\circ$. Wie bei den Halbgruppen bezeichnen wir ein Element $e \in X$ als *Neutralelement* bezüglich $\circ$, wenn für jedes $x \in X$ jeweils $x \circ e = e \circ x = x$ gilt. Ist e das einzige Neutralelement, und sind $x, y \in X$, so bezeichnen wir x als *Linksinverses* von y und y als *Rechtsinverses* von x, wenn $x \circ y = e$ gilt. Wir betrachten nun auf $X = \mathbb{R}$ die Verknüpfung $\circ$ gegeben durch

$$x \circ y \quad = \quad x + y + x^2 y.$$

– bitte wenden –

(a) Weisen Sie nach, dass $\circ$ weder kommutativ noch assoziativ ist.

(b) Zeigen Sie, dass es in $\mathbb{R}$ genau ein Neutralelement bezüglich $\circ$ gibt.

(c) Zeigen Sie, dass es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ genau ein Rechtsinverses gibt.

(d) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein Linksinverses?

Dieses Blatt wird vom 25. bis zum 29. Oktober im Tutorium bearbeitet.

Lineare Algebra

— Blatt 1 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (2+1+4+3 Punkte)

Auf dem Tutoriumsblatt haben wir gesehen, dass die Menge $\mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}$ der 2×2-Matrizen mit der Multiplikation von Matrizen als Verknüpfung ein Monoid ist.

(a) Ein Element g in einem Monoid $(G, \cdot)$ wird *idempotent* genannt, wenn $g \cdot g = g$ gilt. Zeigen Sie: Ist $(G, \cdot)$ sogar eine Gruppe, dann gibt es in $(G, \cdot)$ genau ein idempotentes Element.

(b) Zeigen Sie, dass in $(\mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}, \cdot)$ die folgenden Elemente idempotent sind.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Zeigen Sie, dass das Monoid $(\mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}, \cdot)$ unendlich viele idempotente Elemente besitzt.

(d) Welche idempotenten Elemente gibt es im Monoid $(\mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}, +)$?

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei G eine Menge und $\cdot$ eine Verknüpfung auf G. Wir setzen voraus, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Die Verknüpfung $\cdot$ auf G ist assoziativ.
(ii) Es gibt ein Element $e \in G$ mit $e \cdot a = a$ für alle $a \in G$.
(iii) Für jedes $a \in G$ gibt es ein $b \in G$ mit $b \cdot a = e$.

Ein Element e mit der Eigenschaft (ii) wird als *linksneutral* bezeichnet, und ein Element b mit der Eigenschaft (iii) ist ein zu a *linksinverses* Element. Beweisen Sie, dass G eine Gruppe ist.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass für vorgegebenes $a \in G$ jedes $b \in G$ mit $ba = e$ auch $ab = e$ erfüllt. Beachten Sie dabei, dass auch b ein Linksinverses besitzt.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 *(Staatsexamen Herbst 1992)* (3+3+4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe, $|G| = n$, und sei $P \subseteq G$ die Menge aller Produkte, die man erhält, indem man die Elemente von G in beliebiger Reihenfolge multipliziert, also die Menge aller Produkte $g_1 \cdot ... \cdot g_n$, für die das Tupel $(g_1, ..., g_n)$ die Bedingung $G = \{g_1, ..., g_n\}$ erfüllt.

(a) Zeigen Sie, dass P eine Vereinigung von Konjugationsklassen von G ist. Dabei ist die *Konjugationsklasse* eines Elements $x \in G$ einer Gruppe G definiert durch $[x] = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$.
Hinweis: Es gilt $g(xy)g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1})$ für alle $x, y \in G$.

(b) Zeigen Sie: Ist G eine abelsche Gruppe und $n = |G|$ ungerade, so gilt $P = \{e\}$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass G außer e kein Element g mit $g^2 = e$ enthält, weil ansonsten eine Zerlegung von G in lauter zweielementige Mengen existieren würde.

(c) Bestimmen Sie die Konjugationsklassen von S_3. Zeigen Sie dann: Ist $G = S_3$, so ist die zugehörige Menge P die Menge der Transpositionen.

Aufgabe 4 *(Zahlentheorie) (Staatsexamen Herbst 2020)* (10 Punkte)

Ein *nichtkommutativer Ring mit Eins* ist ein Tripel $(R, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge R und zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf R, wobei $(R, +)$ eine abelsche Gruppe und $(R, \cdot)$ ein Monoid ist und das Distributivgesetz gilt. Gegenüber der Ringdefinition aus der Vorlesung wird also lediglich die Kommutativität von $(R, \cdot)$ fallengelassen. Desweiteren bezeichnen wir ein Element $r \in R$ wie oben als *idempotent*, wenn $r^2 = r$ gilt, und als *nilpotent*, wenn $r^n = 0_R$ für ein $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.
Wir setzen nun voraus, dass in einem solchen nichtkommutativen Ring mit Eins zwei Elemente $a, b \in R$ mit $ab = 1_R$ und $ba \neq 1_R$ existieren. Zeigen Sie:

(a) Das Element $1_R - ba$ ist idempotent.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $b^n(1_R - ba)$ nilpotent.

(c) Es gibt unendlich viele nilpotente Elemente in R.

Abgabe: Dienstag, 2. November 2021, 12:15 Uhr
Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.