Freitag, 4. Februar 2022

Algebra

— Blatt 14 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Sei $L|K$ eine Galois-Erweiterung bestehend aus endlichen Körpern K und L. Was ist laut Vorlesung über die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L|K)$ bekannt?

(b) Sei $\zeta_{12} \in \mathbb{C}^\times$ eine primitive 12-te Einheitswurzel. Geben Sie sämtliche Bilder von ζ_{12} unter beliebigen Elementen der Galois-Gruppe an.

(c) Ist die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{12})|\mathbb{Q}))$ zyklisch?

(d) Wieviele der Zwischenkörper von $\mathbb{Q}(\zeta_{12})|\mathbb{Q}$ sind selbst Kreisteilungskörper?

Aufgabe 1

Sei $\mathbb{F}_2^{\mathrm{alg}}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{F}_2$ und $\alpha \in \mathbb{F}_2^{\mathrm{alg}}$ eine Nullstelle von $f = x^6 + x + \bar{1}$. Ohne Beweis darf verwendet werden, dass f in $\mathbb{F}_2[x]$ irreduzibel ist.

(a) Bestimmen Sie die Ordnung des Elements α in der multiplikativen Gruppe von $\mathbb{F}_2^{\mathrm{alg}}$.

(b) Sei β ein Element in $\langle\alpha\rangle$. Beweisen Sie die Äquivalenzen $\beta^3 = \bar{1} \Leftrightarrow [\mathbb{F}_2(\beta) : \mathbb{F}_2] \in \{1,2\}$ und $\beta^7 = \bar{1} \Leftrightarrow [\mathbb{F}_2(\beta) : \mathbb{F}_2] \in \{1,3\}$.

(c) Bestimmen Sie für jeden Zwischenkörper von $\mathbb{F}_2(\alpha)|\mathbb{F}_2$ ein erzeugendes Element.

Aufgabe 2

Sei $\zeta_5 \in \mathbb{C}^\times$ eine primitive 5-te Einheitswurzel und $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_5)|\mathbb{Q})$.

(a) Bestimmen Sie die Bahn von ζ_5 unter der Operation von G auf $\mathbb{Q}(\zeta_5)$.

(b) Begründen Sie, dass die Erweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_5)|\mathbb{Q}$ genau einen echten Zwischenkörper besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ dieser Zwischenkörper ist. Betrachten Sie dazu die Bahn von ζ_5 unter der Operation von $\langle\sigma^2\rangle$, wobei σ ein erzeugendes Element von $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_5)|\mathbb{Q})$ bezeichnet.

Aufgabe 3

Sei $\zeta_{15} \in \mathbb{C}^\times$ eine primitive 15-te Einheitswurzel.

(a) Geben Sie zyklische Gruppen an, so dass $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{15})|\mathbb{Q})$ isomorph zum äußeren direkten Produkt dieser Gruppen ist (mit Nachweis).

(b) Begründen Sie mit Hilfe von Aufgabe 2 des aktuellen Blatts und mit dem Ergebnis der Aufgabe 2 vom Tutoriumsblatt 13, dass die Zwischenkörper K von $\mathbb{Q}(\zeta_{15})|\mathbb{Q}$ mit $[K : \mathbb{Q}] = 2$ durch $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$ gegeben sind.

Aufgabe 4 *(Zahlentheorie)*

Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 5$ und $f = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in K[x]$.

(a) Zeigen Sie, dass f genau dann über K in Linearfaktoren zerfällt, wenn die multiplikative Gruppe $K^\times$ ein Element der Ordnung 5 enthält.

(b) Sei nun $K = \mathbb{F}_p$ für eine Primzahl p. Beweisen Sie die folgenden Äquivalenzen:

(i) $p \equiv 0$ oder $1 \bmod 5 \Leftrightarrow f$ zerfällt über K in Linearfaktoren

(ii) $p \equiv 4 \bmod 5 \Leftrightarrow f$ ist in $K[x]$ Produkt zweier irreduzibler Faktoren vom Grad 2

(iii) $p \equiv 2$ oder $3 \bmod 5 \Leftrightarrow f$ ist in $K[x]$ irreduzibel

Hinweis: Betrachten Sie die Ordnungen der multiplikativen Gruppen $\mathbb{F}_p^\times$ und $\mathbb{F}_{p^2}^\times$.

Dieses Blatt wird vom 7. bis zum 10. Februar im Tutorium bearbeitet.