LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Ralf Gerkmann

Wintersemester 2020/21
26.02.2021

Zahlentheorie (LA Gym)

(Lehramt Gymnasium)

Online-Klausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ____

Studiengang:
- ❏ Lehramt Gymnasium
- ❏ Master Wirtschaftspädagogik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Diese Daten erhalten Sie per Email.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hiermit erkläre ich, die Klausur eigenständig bearbeitet und während der Bearbeitungszeit keinen Kontakt zu anderen Personen aufgenommen habe.

____

(Unterschrift)

Hinweise:

(a) Die Klausur besteht wie immer aus 8 Aufgaben. Eine der Aufgaben ist eine Multiple-Choice-Aufgabe. Sie besteht aus fünf Teilen; die 2 Punkte für einen Teil werden vergeben, wenn genau die richtige Kombination angekreuzt wird, jede falsche Kombination ergibt 0 Punkte. Negative Punkte werden nicht vergeben.

(c) Das Deckblatt und die Multiple-Choice-Aufgabe sollten nach Möglichkeit ausgedruckt und anschließend ausgefüllt werden. Falls Sie keinen Drucker zur Verfügung haben, können Sie aber auch die auszufüllenden Teile (einschließlich der ausgefüllten Multiple-Choice-Kästchen) in derselben Anordnung auf einem leeren Blatt Papier unterbringen. Wie bei den Präsenzklausuren achten Sie bitte auch hier darauf, auf jedem Blatt **immer nur eine Aufgabe** zu bearbeiten.

(d) Als Hilfsmittel zugelassen, aber bei guter Vorbereitung nicht notwendig, sind das Skript, Lösungen von Übungsaufgaben, Lehrbücher und beliebige andere Materialien. Nicht zulässig ist die Kontaktaufnahme zu anderen Personen während der Bearbeitungszeit. Bitte denken Sie auch daran, die obige Eigenständigkeitserklärung zu unterschreiben.

(e) Nach der regulären Bearbeitungszeit von 120 Minuten stehen weitere 45 Minuten zum Einscannen (oder notfalls Fotografieren) der Klausurblätter und zum Verschicken (an die Email-Adresse `gerkmann@math.lmu.de`) zur Verfügung. Akzeptiert wird nur ein einziges, zusammenhängendes PDF-Dokument bestehend aus DIN A4-Seiten.

(f) Füllen Sie das Deckblatt bitte in Blockschrift aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(g) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(h) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Bearbeitungszeit: 120+45 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ______________________________

Aufgabe 1. (2+2+2+2+2 Punkte)

(a) Wieviele Einheiten gibt es im Ring $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?

☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 4	☐ 24

(b) In welchen Ringen stimmt die Teilmenge der irreduziblen Elemente immer mit der Teilmenge der Primelemente überein?

☐ faktorielle Ringe	☐ Hauptidealringe	☐ Integritätsbereiche
☐ Körper	☐ euklidische Ringe	

(c) Welche der folgenden Ringe sind isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?

☐ $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$	☐ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$	☐ $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
☐ $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$	☐ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	

(d) Wieviele Elemente enthält der Faktorring $\mathbb{F}_5[x]/(x^3 + \bar{2}x + \bar{1})$?

☐ 5	☐ 10	☐ 25	☐ 125	☐ unendlich viele

(e) Welche der folgenden Ringe sind Integritätsbereiche?

☐ $\mathbb{Z}$	☐ $\mathbb{Q}$	☐ $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$	☐ $\mathbb{F}_2[x]/(x^2 + \bar{1})$	☐ $\mathbb{F}_2[x]/(x^2 + x + \bar{1})$

(In Teil (a) und Teil (d) ist jeweils die genaue Anzahl gemeint.)

Name: ____________________

Aufgabe 2. (5+5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $R = \{\frac{a}{3^n} \mid a \in \mathbb{Z}\ ,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ ein Teilring von $\mathbb{R}$ ist.

(b) Beweisen Sie die Gleichung $\mathbb{Z}[\frac{2}{3}] = R$.

Name: ____________________

Aufgabe 3. (4+6 Punkte)

Sei R derselbe Ring wie in Aufgabe 2, also $R = \{\frac{a}{3^n} \mid a \in \mathbb{Z}\ ,\ n \in \mathbb{N}_0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass in R die Hauptideale (3) und (1) übereinstimmen.

(b) Weisen Sie nach, dass das Hauptideal (5) ein maximales Ideal in R ist.

Name: ____________________

Aufgabe 4. (4+4+2 Punkte)

(a) Berechnen Sie das Inverse von $\overline{45}$ in $(\mathbb{Z}/239\mathbb{Z})^\times$.

(b) Bestimmen Sie ein $r \in \mathbb{N}$ und zyklische Gruppen $C_1, ..., C_r$, so dass ein Isomorphismus $(\mathbb{Z}/48\mathbb{Z})^\times \cong C_1 \times ... \times C_r$ von Gruppen existiert. Begründen Sie das Ergebnis mit Hilfe von Sätzen aus der Vorlesung.

(c) Ist $(\mathbb{Z}/48\mathbb{Z})^\times$ selbst eine zyklische Gruppe? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

Name: ____

Aufgabe 5. (4+4+3 Punkte)

Sei $R = \mathbb{Q}[x]/(f)$ mit $f = x^3 + 2$, und sei $\alpha = x + (f) \in R$.

(a) Zeigen Sie, dass $\alpha^6 = 4 \cdot 1_R$ gilt.

(b) Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{Q}$ mit $\alpha^4 + \alpha^2 = a + bx + cx^2 + (f)$.

(c) Ist R ein Körper? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

Name: ____________________

Aufgabe 6. (10 Punkte)

Bestimmen Sie zwei verschiedene Lösungen des Kongruenzsystems

$$x \equiv 21 \bmod 37 \quad , \quad x \equiv 23 \bmod 41.$$

(Bitte geben Sie einen ausführlichen nachvollziehbaren Rechenweg an. Ein bloßes „Erraten“ und anschließendes Überprüfen von Lösungen wird nicht akzeptiert, und mit null Punkten bewertet.)

Name: ____________________

Aufgabe 7. (6+4 Punkte)

(a) Begründen Sie, dass $4+i$ und 7 im Ring $\mathbb{Z}[i]$ der Gauß'schen Zahlen Primelemente, das Element 13 in $\mathbb{Z}[i]$ aber kein Primelement ist.

(b) Geben Sie zwei Darstellungen der Zahl 70 als Produkt von Primelementen des Rings $\mathbb{Z}[i]$ an, die sich nicht nur durch die Reihenfolge der Faktoren unterscheiden. (Dies bedeutet, dass die zweite Darstellung mindestens einen Primfaktor enthalten soll, der in der ersten Darstellung nicht vorkommt.) Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.

Name: ______________________________

Aufgabe 8. (4+6 Punkte)

(a) Geben Sie alle Primideale und alle maximalen Ideale des Polynomrings $\mathbb{C}[x]$ an, und begründen Sie, dass die von Ihnen angegebenen Ideale tatsächlich Primideale bzw. maximale Ideale sind. (Dass es keine weiteren Primideale bzw. maximalen Ideale in $\mathbb{C}[x]$ gibt, braucht dagegen nicht gezeigt werden.)

(b) Sei R ein Integritätsbereich, sei $p \in R$ ein Primelement, und seien $q_1, q_2 \in R$ irreduzible Elemente mit $p^2 = q_1 q_2$. Beweisen Sie, dass q_1 und q_2 zueinander assoziiert sind.