Freitag, 21. Januar 2022

Algebra

— Blatt 12 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Welche besondere Eigenschaft haben die Elemente eines Körper K mit p^n Elementen (wobei $n \in \mathbb{N}$ ist und p eine Primzahl bezeichnet)?

(b) Sei $L|K$ eine Körpererweiterung, $\alpha \in L$ ein über K algebraisches Element, und $f \in K[x]$ ein Polynom mit $f(\alpha) = 0$. In welcher Beziehung steht f zum Minimalpolynom von α über K?

(c) Wie sind normale Körpererweiterungen definiert? Welche Kriterien für eine normale Erweiterung sind Ihnen aus der Vorlesung bekannt?

(d) Sei K ein Körper der Charakteristik p, und nehmen wir an, dass $f = x^p - 2_K$ ein irreduzibles Polynom über K ist, mit $2_K = 1_K + 1_K$. Ist das Polynom separabel?

Aufgabe 1

Sei p eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}$, $q = p^n$ und $f = x^q - x \in \mathbb{F}_p[x]$. Zeigen Sie:

(a) Ist $g \in \mathbb{F}_p[x]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad d, so ist g genau dann ein Teiler von f, wenn d ein Teiler von n ist.

(b) Das Polynom f ist genau das Produkt aller irreduziblen, normierten Polynome in $\mathbb{F}_p[x]$, deren Grade n teilen.

(c) Zerlegen Sie das Polynom $x^9 - x$ in $\mathbb{F}_3[x]$ in irreduzible Faktoren.

(d) Weisen Sie nach, dass das Polynom $g = x^2 + \bar{2}x + \bar{2}$ genau dann irreduzibel über $\mathbb{F}_{p^3}$ ist, wenn $p \equiv 3 \mod 4$ gilt.

Aufgabe 2

Entscheiden Sie, ob die folgenden Erweiterungen normal sind (mit Begründung).

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})|\mathbb{Q}$ (b) $\mathbb{Q}(\sqrt{1+\sqrt{2}})|\mathbb{Q}$ (c) $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ (d) $\mathbb{F}_8|\mathbb{F}_2$ (e) $\mathbb{F}_2^{\text{alg}}|\mathbb{F}_2$

In Teil (b) darf ohne Beweis verwendet werden, dass die angegebene Körpererweiterung vom Grad 4 ist.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper und $f \in K[x]$ ein irreduzibles Polynom. Zeigen Sie:

(a) Genau dann ist f separabel, wenn die formale Ableitung f' nicht das Nullpolynom ist.

(b) Im Fall $\text{char}(K) = p > 0$ ist f genau dann nicht separabel, wenn ein Polynom $g \in K[x]$ mit $f = g(x^p)$ existiert.

Aufgabe 4 *(Zahlentheorie)*

Sei R ein faktorieller Ring, K sein Quotientenkörper, und seien $a, b, c \in R \setminus \{0_R\}$. Sei außerdem $d \in R$ ein größter gemeinsamer Teiler von a und b. Zeigen Sie, dass dann cd ein größter gemeinsamer Teiler von ac und bc ist.

Dieses Blatt wird vom 24. bis zum 27. Januar im Tutorium bearbeitet.

Algebra

— Blatt 12 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 *(2+2+3+3 Punkte)*

Sei $K = \mathbb{F}_{125}$. Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$

(a) die Anzahl der Elemente der Ordnung n in $K^\times$,

(b) die Anzahl der Elemente in $\{\alpha^n \mid \alpha \in K^\times\}$,

(c) die Anzahl der Elemente $\alpha \in K$ mit $[\mathbb{F}_5(\alpha) : \mathbb{F}_5] = n$,

(d) die Anzahl der normierten, irreduziblen Faktoren von $x^{125} - x$ in $\mathbb{F}_5[x]$ vom Grad n.

Aufgabe 2 *(4+3+3 Punkte)*

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für jede Nullstelle $\alpha \in \mathbb{C}$ des Polynoms $f = x^4 - x^2 - 1$ ist die Erweiterung $\mathbb{Q}(\alpha) \mid \mathbb{Q}$ normal.

(b) Die Erweiterung $\mathbb{Q}(\alpha, i)|\mathbb{Q}(i)$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ aus Teil (a) ist normal.

(c) Jede endliche Erweiterung $L|K$ ist Teilerweiterung einer endlichen, normalen Erweiterung $L'|K$.

Ohne Beweis darf verwendet werden, dass $f = x^4 - x^2 - 1$ über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist.

Aufgabe 3 *(10 Punkte)*

Sei p eine Primzahl und K ein Körper der Primzahlcharakteristik p. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind.

(i) Jede algebraische Erweiterung von K ist separabel.

(ii) Der Frobenius-Endomorphismus $\varphi : K \to K$, $a \mapsto a^p$ ist surjektiv.

Einen Körper K mit der in Aussage (i) genannten Eigenschaft heißt *vollkommen*. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass alle endlichen Körper und alle Körper der Charakteristik 0 vollkommen sind.

Aufgabe 4 *(Zahlentheorie)*

(a) Bestimmen Sie eine Zerlegung des Polynoms $f = 2x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2x$ in (i) $\mathbb{Q}[x]$ (ii) $\mathbb{Z}[x]$.

(b) Sei $a \in \mathbb{Z}$ und $f = x^3 + ax^2 - (3 + a)x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$. Zeigen Sie, dass f in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist.

Abgabe: Dienstag, 1. Februar 2021, 12:15 Uhr
Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.