基于四种全排列生成算法的实现与优化

刘宁[*]、李秀星[†]、钟华松[‡]
清华大学计算机科学与技术系软件所[§]

摘要

全排列生成问题指的是，对 n 个不同的数 $p_1 \sim p_n$，如何无重复无遗漏地生成这 n 个数的所有全排列。全排列的应用很广泛，然而复杂度往往过高，限制了其应用的范围。本文在对字典序法，递增进位制法，递减进位制法和邻位对换法这四种全排列经典算法的研究基础上，优化了邻位对换法和递减进位制数法，提高了两种算法的运行效率，同时通过实验对四种经典算法和优化后的算法进行了综合比较。对相关算法的进一步改进和新算法的提出起到了参考的作用。

1 前言

组合数学是一门研究离散对象的科学，是计算机科学的基础。所以，随着计算机的应用越来越普遍，组合数学的研究将更加深入。其研究重点之一在于计数。学习组合数学的基础就是排列组合。排列是指从多个不同元素中取出几个元素按照一定顺序排成一列的过程，排列的种类数称为排列数，用 P_n^m 表示。组合是指从多个不同元素中取素组成一个集合的过程，组合的种类数称为组合数，用 C_n^m 表示。

全排列生成是指无重复无遗漏的列举出 1 到 n 的所有排列。对于全排列生成的研究有很长的一段历史，1956 年，C. Tompkins 写了一篇论文介绍了一些用全排列生成算法解决问题的领域 [2]。由于其算法的复杂性和多样性已经成为组合数学和计算机领域研究的重点课题之一 [5]。在很多问题的求解中都会用到全排列，比如 n 皇后问题，克莱姆法则 [4]，求出栈顺序等。全排列生成问题经常被用作计算机课程的课程实例讲授（例如 [3, 1]）。针对全排列的生成，前人已经提出了各种各样的算法，典型的有字典序法，递增进位制法，递减进位制法，邻位对换法，循环左移法，循环右移法等等。

本文针对上述提到的前四种算法进行改进和实现。本文的工作如下：

- 介绍了四个全排列生成算法的基本原理;
- 优化改进了邻位对换法和递减进位制法，优化后的算法平均比原算法的效率提高了接近 50% ;
- 实现并对比四种基本全排列生成算法和改进后的算法。

[*]刘宁 2016310624 liu-n16@mails.tsinghua.edu.cn
[†]李秀星 2016210987 lixx16@mails.tsinghua.edu.cn
[‡]钟华松 2016210988 zhonghs16@mails.tsinghua.edu.cn
[§]地址：北京市海淀区清华大学东主楼

2 相关工作

2.1 字典序法

字典序法就是按照字典序依次求出下一个排列的算法。这要求相邻的两个字典有尽可能长的共同前缀，将变化限制在尽可能短的后缀上。具体方法如下:

设 P 是 $1 \sim n$ 的一个全排列:

$$p = p_1 p_2 \cdots p_n$$

1. 从排列的右端开始，找出第一个比右边数字小的数字的位置 j
2. 找出在 p_j 右边的数字中，比 p_j 大的数中最小的数字 p_k
3. 交换 p_j 和 p_k
4. 将序列 $p_{k+1} \sim p_n$ 倒转即可以得到下一个序列

除此之外，字典序法也可以通过中介数进行计算。中介数是计算排列的中介环节，它的每一位由原排列每个数字右侧比其小的数字个数构成。其运算过程为: 原排列 $\rightarrow$ 中介数 $\rightarrow$ 新中介数 $\rightarrow$ 新排列。具体的计算过程如下:

设得到的新中介数位 $a = a_1 \cdots a_{n-1}$，要求的排列为 $p = p_1 \cdots p_n$。则 $p_1 = a_1 + 1$。设 $x = \{p_j \mid p_j \leq y\}, 0 < j < i, 1 < i \leq n, y = a_i + 1$。若 $x \neq 0$，得到新的 x，反复进行上述操作，直到 $x = 0$，则有 $p_i = b$，由此可以得到心排列。

2.2 递增进位制数法

人们通常所用的进制大多是固定进位制，如 2 进制，10 进制等。m 位 n 进制可以表示的数字个数为 m^n 个。而递增/递减进位制数，顾名思义，是指数字的进制随着数字位置的不同递增/递减的进制。m 位递增/递减进位制数可以表示 $m!$ 数字。例如递增进位制 4121，它的进制从右向左依次为 2、3、4、5，换算成十进制相当于数字 107。

利用递增进位制数法生成下一个全排列时，需要将原排列与下一个排列中间相隔排列的个数转换为递增进位制数进行加减运算。

以 839647521 的下 100 个排列举例，具体步骤如下:

1. 将原排列映射为中介数: 按照从 9 到 2 的顺序，依次求出在原排列中每个数字右侧比它小的数字个数，放在中介数的相应位置。得递增进位制中介数为 67342221;
2. 由原中介数计计算出新中介数: 由中介数加上 100 的递增进位制数 4020 得新中介数为 67351311;
3. 由新中介数还原成新排列: 设新中介数的位置号从左到右依次为 9 8 $\cdots$ 2 1。对于每一个在位置 i 的中介数 x，将其放在从右到左数第 $y+1$，个未被占用的位置，在余下的最后一个空格上填入 1，产生新排列 869427351。

2.3 递减进位制数法

可以看到，递增进位制方法由于要频繁地进位，所以算法效率受到了一定的限制。因此想到利用递减进位制数生成全排列。其方法与递增进位制类似，生成的中介数为递减进制中介数，恰好为递增进位制数法得到的中介数的镜像，在此不再赘述。

2.4 邻位对换法

由递减进位制数法可以得到启发，通过交换相邻两位来得到下一个排列，由此便产生了邻位对换法。递减进位制数字的换位是单向的，从右向左，逐个换位，直到最左端。邻位对换法的换位是双向的，通过保存数字的“方向性”来快速得到下一个排列，得到的中介数是递减进位制数。具体步骤如下：

1. 初始化：初始序列为从 1 到 n 的升序序列，每个元素的方向向左；
2. 查找当前序列的最大可移动数 p_i ：可移动数该数沿着箭头方向的一侧有比其小的数；
3. 按照箭头方向，将该可移动数 p_i 和其相邻的数交换；
4. 翻转所有大于 p_i 数的箭头方向，即可得到下一个排列；

邻位对换法也可以通过中介数来生成序列的全排列。。设当前序列的中介数为 $a = a_1 \cdots c_{n-1}$，下一个排列为 $p = p_1 \cdots p_n$，则从排列的右端到左端，依次判断 p_i 的奇偶性。若 p_i 为奇数，其方向性由 a_{i-1} 决定，奇向右、偶向左；若 p_i 为偶数，其方向性决定于 $a_{i-1} + a_{i-2}$ 的奇偶性，同样是奇向右、偶向左。当得到方向性后，a_i 的值就是背向 p_i 的方向直到排列边界这个区间里比 p_i 小的数字的个数。如此就能得到邻位对换法的中介数，同理，可以通过中介数推断当前序列的方向，从而得出该排列。

3 基于中介数的求后续排列优化

在很多应用场景下，我们需要求出某个排列后面的第 m 个排列。比如...? 设原排列为 P，目标排列即原排列的后续第 m 个排列为 $\bar{P}$。在字典序法，递增进位制法，递减进位制法和邻位对换法中求 $\bar{P}$ 的方法一般为首先找到原排列的中介数 A，然后将中介数加 m 得到新的中介数 $\bar{A}$，依据新的中介数找到目标排列。本节基于动态规划的思想，提出了一种优化求解中介数的算法，该算法在一般情况下可以优化一般算法 3 – 3.5 倍时间。

3.1 求后续排列的一般算法

以字典序算法为例，算法 1 给出了求目标排列的基本流程。首先通过 GET_AGENCY 函数获取原排列 P 的中介数 A，将 m 按照中介数进制（从左到右每位的进制依次是 $n, n-1, ..., 2$）表示，得到 A_m（第 3-6 行）。然后将 A 和 A_m 相加，得到 $\bar{A}$（第 7-17 行）。最后根据新的中介数 $\bar{A}$ 求出目标排列 $\bar{P}$。

3.2 求中介数的一般算法

在字典序算法中，中介数 $A[i]$ 表示 $P[i]$ 右边比 $P[i]$ 小的数字的个数。算法 2 给出了求解中介数的一般算法。该算法包括两层循环，外层循环遍历排列中的每一个数，内层循环找出这个数对应的中介数，即找出该数右侧比它小的数字个数。因此算法 2 的时间复杂度为 $O(n^2)$。当 $n = 100000$ 时，仅求解中介数就需要大约 $24s$，这是十分耗费时间的。因此改进中介数的求解算法是十分必要的。

Algorithm 1 NEXT_PERMUTATION (P,m,n)

A = GET_AGENCY(P, n)
$A_m, \bar{A}, \bar{P} \leftarrow [0]$
for $i \leftarrow n-1$ to 1 **do**
  $A_m[i] \leftarrow m\%(n+1-i)$
  $m \leftarrow m/(n+1-i)$
end for
$flag, tmp \leftarrow 0$
for $i \leftarrow n-1$ to 1 **do**
  $tmp \leftarrow A[i] + A_m[i] + flag$
  if $tmp \geq n+1-i$ **then**
    $\bar{A}[i] \leftarrow tmp - (n+i-i)$
    $flag \leftarrow 1$
  else
    $\bar{A}[i] \leftarrow tmp$
    $flag \leftarrow 0$
  end if
end for
calculate $\bar{P}$ from $\bar{A}$
return $\bar{P}$

Algorithm 2 GET_AGENCY (P,n)

$A \leftarrow [0]$
for $i \leftarrow 1$ to $n-1$ **do**
  for $j \leftarrow i+1$ to n **do**
    if $P[j] < P[i]$ **then**
      $A[i] \leftarrow A[i] + 1$
    end if
  end for
end for
return A

3.3 求中介数的优化算法

通过观察中介数的求解过程，我们得到了两个重要的结论：

1. 当求解排列中某个数 i 的中介数时，设 i 左右两侧排列分别为 $P1$，$P2$，若 i 左侧数字个数小于右侧数字个数，即 $|P1| < |P2|$，那么扫描 $P1$ 中比 i 小的数字个数可以更快的得到 i 的中介数；

2. 设 i 与 $i+1$ 之间的排列为 $P3$，若已知 $i+1$ 的中介数，且 i 与 $i+1$ 在排列 P 中距离很小，即 $|P3| < min(|P1|, |P2|)$，那么可以通过 $i+1$ 的中介数快速求解出 i 的中介数；

设 $P = P[1], P[2], ..., P[n]$，数组 I 存储排列中每个数的下标，即 $I[P[i]] = i$。综合以上观察，在求解排列中数 i 的中介数时，由于 i 在 P 中的位置为 $I[i]$，故 $P1 = P[1 : I[i]]$，$P2 = P[I[i]+1 : n]$，$P3 = P[I[i] : I[i+1]]$，令 $P_{min} = min(P1, P2, P3)$，即 $P1$，$P2$，$P3$ 中最短的一段，通过扫描 P_{min} 中比 i 小的数字个数（设为 t）来计算 i 的中介数，即 $A[I[i]]$，可以有效缩短计算中介数的时间。当 $P1$ 最短时，t 为 i 左侧比 i 小的数字个数，而比 i 小的数字个数共有 $i-1$ 个，故 $A[I[i]] = i-1-t$；当 $P2$ 最短时，$A[I[i]] = t$；当 $P3$ 最短时，若 i 位于 $i+1$ 左侧，即 $P = ..., i, ..., i+1, ...$，由于比 $i+1$ 小的数都会比 i 小，故而 i 的中介数等于 t 加上 $i+1$ 的中介数，若 i 位于 $i+1$ 的右侧，即 $P = ..., i+1, ..., i, ...$，则 i 的中介数等于 $i+1$ 的中介数减去 $1+t$。算法 3 展示了这一过程。

3.4 优化算法性能分析

优化算法每次扫描的排列序列为 $P1$，$P2$，$P3$ 中最短的一段，因此从理论上来说优化算法

Algorithm 3 GET_AGENCY_OPTIMIZATION (P,n)

```
calculate I from P
calculate A[I[n]]
for i ← n − 1 to 1 do
    P1 ← P[1 : I[i]]
    P2 ← P[I[i] + 1 : n]
    P3 ← P[I[i] : I[i + 1]]
    P_min ← min(P1, P2, P3)
    t ← the number of numbers in P_min smaller than i
    if P1 = P_min then
        A[I[i]] ← i − 1 − t
    else if P2 = P_min then
        A[I[i]] ← t
    else
        if I[i] < I[i + 1] then
            A[I[i]] ← A[I[i + 1]] + t
        else
            A[I[i]] ← A[I[i + 1]] − t − 1
        end if
    end if
end for
return A
```

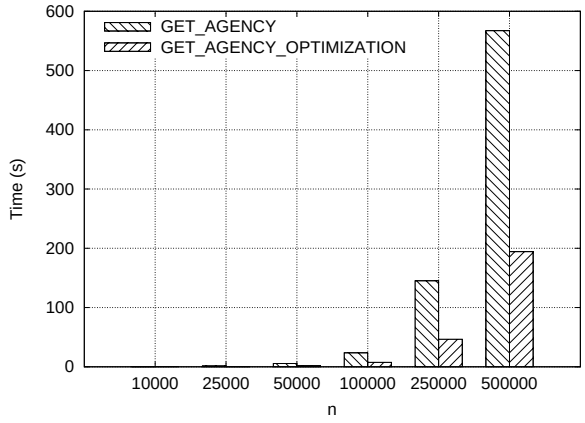
可以有效减少求中介数的时间。而且当排列较为均匀，即 $\sum_{i=1}^{n-1}|I[i]-I[i+1]|$ 较小时（比如 $P=1,2,3,...,n$），由于 $P3$ 很小，优化算法可以在接近 $O(n)$ 的时间内求出排列的中介数。为了对优化算法进行性能分析，我们设计了一系列实验来进行测试。图 1(a) 给出了求中介数一般算法和优化算法对随机生成排列的实验结果。由图可知，当 $n<1000$ 时，GET_AGENCY 和 GET_AGENCY_OPTIMIZATION 的性能所差无几，而当 $n>1000$ 后，优化算法大致可以加速一般算法 $3-3.5$ 倍。图 1(b) 给出了算法关于均匀数据的实验结果。由图可看出，优化算法对于均匀数据可以加速较多，当 $n<500000$ 时，优化算法的运行时间小于 $5ms$。

4 基于递减进位制的一种改进

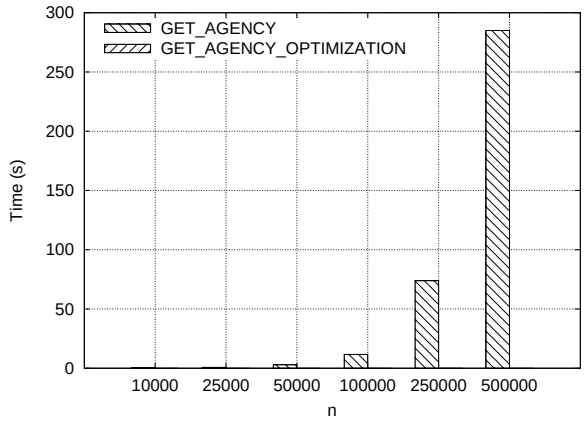
4.1 中介数进位规律

根据 2.3 节的描述，递减进位制数法不会经常产生连续进位，因而依次生成全排列时，中介数的计算有时是不必要的。而邻位对换算法通过交换相邻两位来得到下一个排列，简单直接。综合两个算法的优劣，发现当排列对应的递减进位制中介数不产生连续进位时，可以直接交换排列的相邻两位。而当递减进位制中介数连续进位时，中介数右端数字都变成了 0，因而排列之间也有规律可循。所以，本文对递减进位制数法提出一种不用计算出中介数的改进方法：

假设 P 是 $1\sim n$ 的一个全排列，$p=p_1\cdots p_n$，对应的中介数为 $a=a_1\cdots a_{n-1}$，若从 $p=1,2\cdot n$ 开始生成全排列，则初始时中介数 $=0$，由于 a_{n-1} 对应的是数字 n 右侧比 n 小的数字的个数，所以 a_{n-1} 连续加 1 不会立刻产生进位。因此，p 中只



(a) 随机数据



(b) 均匀数据

图 1: 中介数优化算法性能分析

Algorithm 4 DECREASE_IMPROVEMENT (p,n)

1: **print** p
2: **for** $i \leftarrow 1$ to n **do**
3: find the first i where $p[i] \neq n+1-i$
4: **if** $i > n$ **then**
5: **return** permutation generation end
6: **end if**
7: **for** $j \leftarrow i+1$ to n **do**
8: find first j where $p[j] = n+1-i$
9: **end for**
10: **swap** $p[j]$,$p[j-1]$
11: **for** $k \leftarrow i$ to n **do**
12: $p[k-i+1] \leftarrow p[k]$
13: **end for**
14: **for** $r \leftarrow n-i+2$ to n **do**
15: $p[r] \leftarrow r$
16: **end for**
17: **end for**

有 n 对应的中介数相应的位数加 1，也就是排列 p 中位于 n 右边的比 n 小的数的个数加 1。这时，其他数的相对位置不变，所以只需将 n 连续地与其左边的数交换位置，直到 $p_1 = n$。

当 $p_1 = n$ 时，排列数对应的中介数加 1 会产生进位。假设此时的中介数为 $a = a_1 \cdots a_{n-1}$，连续进位位数为 2 ，即 $a_{n-1} = n-1, a_{n-2} = n-2, a_{n-3} < n-3$，所以 $a'_{n-3} = a_{n-3}+1$，，也就是 $n-2$ 右侧多了一个比它小的数，对应到排列中，就是 $n-2$ 和它左边的数交换了位置。所以，需要在排列 p 中找到连续下降序列最后一位的数字 x，假设其在位置 j，然后找到比它小 1 的数 y，与其左边数交换，再把连续下降序列翻转放在排列末尾即可。

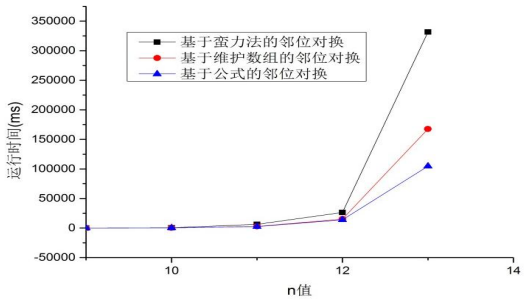
由原排列求出相邻的下一个排列的算法伪代码 (DECREASE_IMPROVEMENT (p, n))。

以 1,2,3,4 的全排列举例，其全排列生成过程如下：1234→1243→1423→4123→1324→1423→...→4321。其中，生成 1234→1243→1423→4123 的过程中，中介数不进位，4 依次与前面的数交换位置，而 4123→1324 的生成过程中，3 与 2 交换位置，4 插入排列尾部。之后的生成一直重复这一过程。

4.2 优化算法复杂度分析

由上述的分析可知，当 $p+1 \neq n$ 的时候，要进行置换得到新的排列，复杂度为 $O(n)$，而已知全排列个数为 $n!$，所以外层循环的复杂度为 $O(n!)$，进而可得算法复杂度为 $O(n * n!)$，相比递减进位制 $O(n^2 * n!)$ 的复杂度提高了一个数量级。

图 2: 邻位对换法算法比较图



5 实验

本文在 4G 内存，Intel(R) Core(TM) i5-4200M 处理器，2.50GHZ 主频，64 位操作系统的笔记本电脑上进行实验。

5.1 基于邻位对换法的对比

本节主要对比以下三种算法：

基于蛮力法的邻位对换：该方法采用邻位对换法的基本思想，在查询最大可移动数时，从大到小遍历当前排列中的元素，直到找见某个元素，该元素满足沿着该元素的箭头方向有小于该元素的数。

基于维护数组的邻位对换：该方法在蛮力法的基础上，增加一个长度为 n 的数组 leftlittle 来有元素的左边比其小的元素个数。则比元素 i 小并位于其右侧的元素个数为 $i - 1 - leftlittle[i]$。该数组需要在交换排列中元素的时候分情况修改。

基于公式的邻位对换：该方法使用公式 (1) 求解最大可移动数。

通过图 1 可知，在 n 值一定的情况下，基于蛮力法的邻位对换算法运行最慢，其次是基于维护数组的邻位对换，效果最好的是基于公式的邻位对换算法。基于公式的邻位对换算法在 n 值越大的情况下效果越明显。相比于原算法，优化后的算法

图 3: 递减进位制算法比较

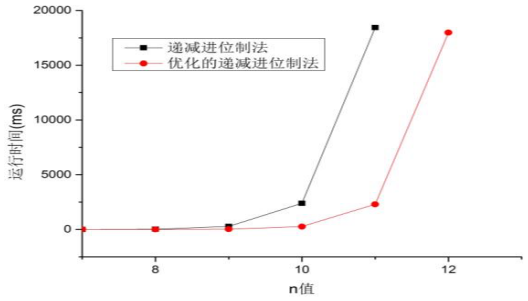
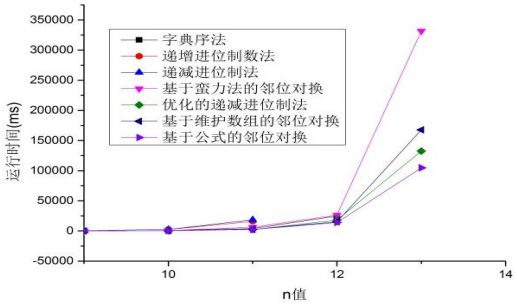


图 4: 四种基本全排列算法及两种优化算法的比较



运行时间降低了将近一半，运行效率提高了 50%。

5.2 基于递减进位制法的对比

本节主要对比一下两种算法：

递减进位制数法：该方法采用递减进位制中介数，先计算当前排列的递减进位制中介数，再计算出新的中介数，进而推断出新排列。

优化的递减进位制法：该方法利用了递减进制中介数的进位规律，通过交换原排列中相应元素的位置，在不计算中介数的前提下，推出下一个排列。由图 2 可见，当 n 值较小时，两种方法的运行时间差别不明显。而当 n 值大于等于 10 时，优化的递减进位制法的运行时间明显小于原算法。这是因为改进算法只需对排列元素进行一遍操作，便能找出下一个排列，所以相较于原算法，运行时间降低了一个数量级。

5.3 四种基本全排列算法及两种优化算法的对比

我们将上文提到的两种改进算法和第一部分提到的四种基本算法进行对比，分析比较得出各种算法的优缺点，并给出下一步优化方案。

如图 3 所示，本文提到的七种算法效果最好的是基于公式的邻位对换法，其次是优化的递减进位制法。其中在 n=12 时，递减进位制法和递增进位制法已不能在规定时间内运行完毕，而字典序法的瓶颈在 n = 13。可见在求全排列的过程中递减进位制法和递增进位制法效率较低，主要原因是上述两种算法通过中介数列举全排列，导致转化过程较为复杂。

6 总结与展望

本文深入研究了全排列的四种经典算法，字典序法，递增进位制数法，递减进位制法和邻位对换法，并对比了其算法效率。根据邻位对换法最大可移动数的规律，在查找最大可移动数的算法上进行了优化，以提高查找最大可移动数的效率。将原 $O(n^2 * n!)$ 的复杂度降为 $O(n * n!)$，在 n 值固定的情况下，运行时间降低了 50%。同时，通过观察递减进位制数法排列和中介数的规律，对其进行改进，使其时间复杂度由 $O(n^2 * n!)$ 优化到了 $O(n * n!)$。当 n 相对较小时，算法有着明显的时间效率优势。

综上所述，本文实现并比较了四种全排列生成算法，并对邻位对换法和递减进位制法进行了初步的优化。然而，本文所实现的优化算法还不够完

美，例如递减进位制改进算法，当 n 相对较小时，算法优化程度明显提高，但随着 n 的增大，算法的时间优势不再明显。如何从本质上进一步提高全排列生成算法的效率，是下一步需要考虑的问题。

References

[1] Edsger Wybe Dijkstra. “discipline of programming”. In: (1979).

[2] C Tompkins. “Machine attacks on problems whose variables are permutations”. In: *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, vol. VI, Numerical Analysis, McGraw-Hill* (1956), pp. 195–211.

[3] 吴素萍. “全排列递归算法在算法教学中的重要性”. In: 现代计算机*:* 专业版 12 (2008), pp. 119–120.

[4] 李模刚. “全排列生成算法在克莱姆法则中的应用”. In: 现代计算机*:* 专业版 9 (2010), pp. 13–15.

[5] 鲍苏苏 陈卫东. “排序算法与全排列生成算法研究”. In: 现代计算机*:* 专业版 8 (2007), pp. 4–7.