电容系数面面观

宋冰睿

少年班学院，严济慈物理科技英才班

2022 年 5 月 22 日

1 引言

电容系数矩阵和电势系数矩阵无疑是线性代数在电磁学中运用的典范，然而它们其实并不特别直观——尤其是电容系数矩阵$\{c_{ij}\}$中的矩阵元并非导体i和导体j之间的电容这一事实，有时会让人感到迷惑. 在此，我们将系统性地介绍电容系数矩阵及与之有关的其他概念，以便获得对导体系统的电容更加深入的理解.

注：在下面的讨论中我们约定，所考虑的系统包括N个导体，其上电势和电量分别为$\varphi = \{\varphi_i\}, Q = \{Q_i\}, i = 1, \cdots, N$；两导体$i$和$j$间的电容记为$C^{ij}$.

2 Maxwell电容系数

我们一般考虑的电容系数矩阵，全称Maxwell电容系数矩阵，以$C = \{c_{ij}\}$表示. 矩阵元c_{ij}的物理意义是，当$\varphi_j = 1\text{V}$且$\varphi_k = 0\text{V}, k \neq j$时，导体$k$（在国际单位制下）所带电量的数值$Q_i = c_{ij}$.根据唯一性定理和叠加原理，可知当$\{\varphi_i\}$取任意值时，

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\varphi_j \tag{2.1}$$

故而也可以表示为矩阵形式

$$Q = C\varphi \tag{2.2}$$

也即

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

式2.2可作一改写：

$$\varphi = C^{-1}Q \triangleq PQ \tag{2.4}$$

其中$P = C^{-1} \triangleq \{p_{ij}\}$即为我们熟知的电势系数矩阵.

3 互电容系数

3.1 互电容系数的概念与性质

互电容系数矩阵以$C_m = \{c_{m,ij}\}$表示，其矩阵元$c_{m,ij}, i \neq j$代表导体i和导体j间的互电容，$c_{m,ii}$则代表导体i与

地之间的互电容. 所谓互电容，是在两导体间产生的寄生电容或杂散电容；但注意，它并非就是两导体间的电容，因为我们还需**考虑地的影响**. 图1形象地说明了互电容系数的物理含义.

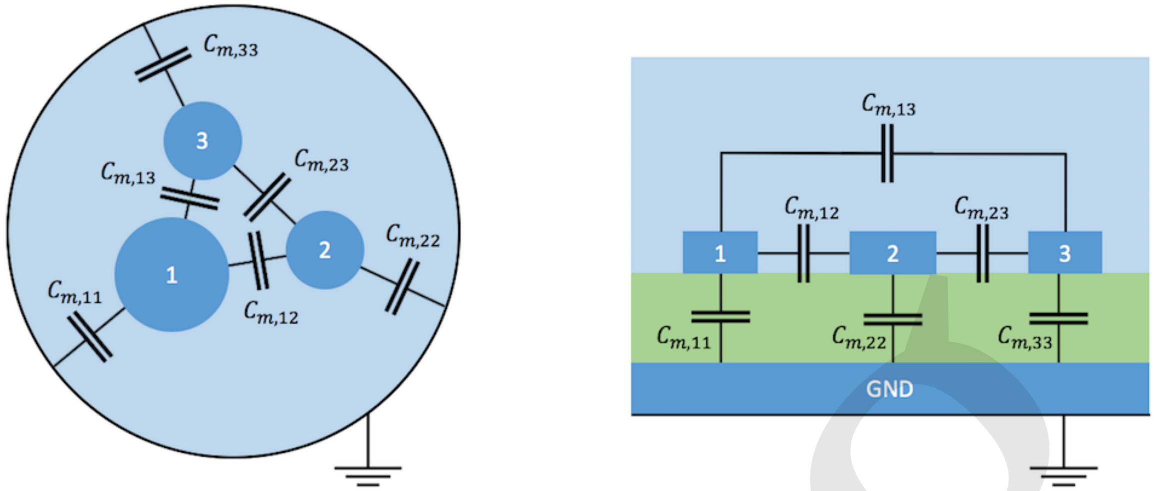

图 1: 图解互电容系数——三导体情况

根据导体间存在耦合与否，可知互电容系数具有以下性质：

非负性

$$c_{m,ij}\begin{cases}\geq 0 & ,i \neq j \\ > 0 & ,i = j\end{cases} \tag{3.1}$$

对称性

$$c_{m,ij} = c_{m,ji} \tag{3.2}$$

3.2 互电容系数与Maxwell电容系数的关系

作为对一个导体系统电容的两种不同而各自全面的描述，互电容系数与Maxwell电容系数间显然存在某种换算关系——这一关系可以通过分析它们对系统的表征情况来获取. 首先考虑互电容系数的表征.根据其物理意义，可写出第k个导体上的电量

$$\begin{aligned} Q_k &= c_{m,k1}(\varphi_k - \varphi_1) + c_{m,k2}(\varphi_k - \varphi_2) + \cdots + c_{m,kk}\varphi_k + \cdots + c_{m,kN}(\varphi_k - \varphi_N) \\ &= -c_{m,k1}\varphi_1 - c_{m,k2}\varphi_2 - \cdots + \left(\sum_{i=1}^{N} c_{m,ki}\right)\varphi_k - \cdots - c_{m,kN}\varphi_N \end{aligned} \tag{3.3}$$

另一方面，Maxwell电容系数的表征见于式2.1，将其展开

$$Q_k = c_{k1}\varphi_1 + c_{k2}\varphi_2 + \cdots + c_{kk}\varphi_k + \cdots + c_{kN}\varphi_N \tag{3.4}$$

对比两式，得到互电容系数和Maxwell电容系数之间的关系

$$c_{ij} = \begin{cases} -c_{m,ij} & ,i \neq j \\ \sum_{k=1}^{N} c_{m,ik} & ,i = j \end{cases} \tag{3.5}$$

因此Maxwell电容系数矩阵也可以表示为

$$C=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{N}c_{m,1j} & -c_{m,12} & \cdots & -c_{m,1N}\\ -c_{m,21} & \sum_{j=1}^{N}c_{m,2j} & \cdots & -c_{m,2N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -c_{m,N1} & -c_{m,N2} & \cdots & \sum_{j=1}^{N}c_{m,Nj}\end{pmatrix} \tag{3.6}$$

3.3 Maxwell电容系数的性质

上节的讨论提供了通过互电容系数的性质研究Maxwell电容系数的可能性. 后者的部分性质及简易证明列于下方：

对称性

$$c_{ij}=-c_{m,ij}=-c_{m,ji}=c_{ji}, i\neq j \tag{3.7}$$

符号

$$c_{ij}=\begin{cases}-c_{m,ij}\leq 0 & ,i\neq j\\ \sum_{k=1}^{N}c_{m,ik}=\sum_{k\neq i}c_{m,ik}+c_{m,ii}\geq c_{m,ii}>0 & ,i=j\end{cases} \tag{3.8}$$

行和与列和

$$\sum_{j=1}^{N}c_{ij}=c_{m,ii}=\sum_{i=1}^{N}c_{ij}\geq 0 \tag{3.9}$$

又由于$P=C^{-1}$，因此利用线性代数的知识可以轻易推得电势系数满足的相关性质，此处就不再赘述.