2022 秋易为老师量子力学 B
习题五参考解答

刘丰铨　　宋冰睿

2022 年 10 月 18 日

1　第 1 题

请证明：

(a)

$$e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\hat{a}e^{-\alpha\hat{a}^\dagger} = \hat{a} - \alpha\hat{I}$$

(b)

$$\left[\hat{a}, e^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}\right] = \alpha e^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}$$

(c)

$$e^{\lambda\hat{a}}|0\rangle = |0\rangle$$

(d)

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle$$

其中 $\hat{a}^\dagger$ 和 $\hat{a}$ 分别为一维谐振子问题中的升降算符，$|0\rangle$ 为一维谐振子基态，$|\alpha\rangle$ 为相干态（即算符 $\hat{a}$ 的属于本征值 α 的本征态），两态均已归一化.

说明：本题和下题的求解过程中将常常利用对易关系

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1$$

考虑到大家对此已经相当熟悉，我们在应用时将不再加以强调.

1.1　1a

解：我们注意到，倘若能够将欲证等式左端的 $\hat{a}$ 和 $e^{-\alpha\hat{a}^\dagger}$ 交换位置，问题将变得十分易于处理. 为此，我们考虑利用对易子，得到：

$$e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\hat{a}e^{-\alpha\hat{a}^\dagger} = e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\left[\hat{a}, e^{-\alpha\hat{a}^\dagger}\right] + e^{\alpha\hat{a}^\dagger}e^{-\alpha\hat{a}^\dagger}\hat{a} = e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\left[\hat{a}, e^{-\alpha\hat{a}^\dagger}\right] + \hat{a} \tag{1.1}$$

根据第三次作业 4b 题的结论（注意该结论的应用条件为 $\hat{a}$ 和 $\hat{a}^\dagger$ 都同 $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right]$ 对易，这里显然满足），我们有：

$$\left[\hat{a}, e^{-\alpha\hat{a}^\dagger}\right] = -\alpha\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right]e^{-\alpha\hat{a}^\dagger} = -\alpha e^{-\alpha\hat{a}^\dagger} \tag{1.2}$$

将上式代入前一式，有：

$$
\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\hat{a}\mathrm{e}^{-\alpha\hat{a}^\dagger} = -\alpha\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{-\alpha\hat{a}^\dagger} + \hat{a} = \hat{a} - \alpha\hat{I} \tag{1.3}
$$

即为欲证等式.

1.2 1b

解：我们发现对易子中第二项不易处理，于是尝试利用第三次作业 4c 题所证明的 Glauber 公式对其进行展开（取 $\lambda = 1$），得到：

$$
\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}} = \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left[\alpha\hat{a}^\dagger,-\alpha^*\hat{a}\right]} = \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \tag{1.4}
$$

因此，有：

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{a}, \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}\right] &= \left[\hat{a}, \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\right] \\
&= \left[\hat{a}, \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\right]\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \\
&= \alpha\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} = \alpha\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

其中在第 3 个等号处已利用1.2的结果；是为欲证等式.

1.3 1c

解：我们已经知道，$|0\rangle$ 是算符 $\hat{a}$ 的属于本征值 0 的本征态. 根据算符函数的定义，我们有：

$$
\mathrm{e}^{\lambda\hat{a}}|0\rangle = \left(\hat{I} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\hat{a}^n\right)|0\rangle = |0\rangle \tag{1.6}
$$

即为欲证等式.

注：请同学们注意，第四次作业 3c 题的结论不能在本题使用，这是因为 $\hat{a}$ 的本征态并不满足一般的完备性条件，而后者是我们推导得到该结论的前提. 另外，我们可以对本题结论做一般性推广：对于任意算符 $\hat{A}$（我们对其 Hermite 性质没有要求）和它属于本征值 a_i 的本征态 $|a_i\rangle$，有：

$$
f\left(\hat{A}\right)|a_i\rangle = f(a_i)|a_i\rangle \tag{1.7}
$$

其中算符函数 $f\left(\hat{A}\right)$ 只与 $\hat{A}$ 或者同 $\hat{A}$ 对易的算符有关. 一般而言，该结论可以直接使用. 作为练习，同学们不妨自行证明.

1.4 1d

解：为了使问题变得更易于处理，首先将 $|\alpha\rangle$ 在 Fock 态所组成的完备正交基下展开，得：

$$
\begin{aligned}
|\alpha\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|\alpha\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\left\langle 0\left|\frac{\hat{a}^n}{\sqrt{n!}}\right|\alpha\right\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|\alpha\rangle|n\rangle
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

根据 $|\alpha\rangle$ 归一化的条件，有：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(|\alpha|^2\right)^n}{n!}|\langle 0|\alpha\rangle|^2=\mathrm{e}^{|\alpha|^2}|\langle 0|\alpha\rangle|^2=1 \tag{1.9}$$

不妨令：

$$\langle 0|\alpha\rangle=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \tag{1.10}$$

则代入1.8，有：

$$\begin{aligned}|\alpha\rangle&=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle\\&=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n|0\rangle\\&=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle\end{aligned} \tag{1.11}$$

而利用 Glauber 公式，我们可以将欲证等式等号右端表达式写作：

$$\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle=\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}|0\rangle=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle \tag{1.12}$$

将上式同1.11比较，立即有：

$$|\alpha\rangle=\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle \tag{1.13}$$

即为欲证结论.

注：也可循以下方法.

首先，我们希望证明 $\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle$ 是 $\hat{a}$ 属于本征值 α 的本征态. 为此, 以 $\hat{a}$ 左乘等号右端表达式，得到

$$\hat{a}\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle$$

我们自然地希望能够交换 $\hat{a}$ 和 $\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}$. 因此，利用 1b 的结论，有：

$$\begin{aligned}\hat{a}\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle&=\left[\hat{a},\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}\right]|0\rangle+\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}\hat{a}|0\rangle\\&=\alpha\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle\end{aligned} \tag{1.14}$$

由此，我们只能证明 $\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle$ 是 $\hat{a}$ 属于本征值 α 的本征态，而不能证明它已是归一化的. 为了证明归一化的性质，仍要应用 Glauber 公式，得到：

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle\right)^\dagger\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle&=\mathrm{e}^{-|\alpha|^2}\left\langle 0\left|\mathrm{e}^{-\alpha\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{\alpha^*\hat{a}}\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}}\right|0\right\rangle\\&=\mathrm{e}^{-|\alpha|^2}\left\langle 0\left|\mathrm{e}^{\alpha^*\hat{a}}\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\right|0\right\rangle\\&=\mathrm{e}^{-|\alpha|^2}\sum_{m,n\geq 0}\left\langle m\left|\frac{1}{\sqrt{m!}}(\alpha^*)^m\frac{1}{\sqrt{n!}}\alpha^n\right|n\right\rangle\\&=\mathrm{e}^{-|\alpha|^2}\sum_{m,n\geq 0}\delta_{mn}\frac{1}{\sqrt{m!n!}}(\alpha^*)^m\alpha^n\\&=\mathrm{e}^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(|\alpha|^2\right)^n\\&=\mathrm{e}^{-|\alpha|^2}\mathrm{e}^{|\alpha|^2}=1\end{aligned} \tag{1.15}$$

由此方才证得 $\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}\left|0\right\rangle$ 模为 1，从而

$$\left|\alpha\right\rangle = \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}\left|0\right\rangle \tag{1.16}$$

即为欲证结论.

2 第 2 题

已知某体系 Hamiltonian 算符为

$$\hat{H} = \frac{5}{3}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{2}{3}\left[\hat{a}^2 + \left(\hat{a}^\dagger\right)^2\right]$$

其中 $\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right] = 1$. 在此基础上，可通过变换（其中 u 和 v 皆为实数）：

$$\begin{cases}\hat{b} = u\hat{a} + v\hat{a}^\dagger \\ \hat{b}^\dagger = u\hat{a}^\dagger + v\hat{a}\end{cases}$$

使 Hamiltonian 算符化为谐振子形式：

$$\hat{H} = \lambda\hat{b}^\dagger\hat{b} + E_0\hat{I}$$

并要求 $\left[\hat{b},\hat{b}^\dagger\right] = 1$. 请给出系数 λ、E_0 以及体系能谱.

解：首先，根据要求 $\left[\hat{b},\hat{b}^\dagger\right] = 1$，有：

$$\left[\hat{b},\hat{b}^\dagger\right] = \left[u\hat{a} + v\hat{a}^\dagger, u\hat{a}^\dagger + v\hat{a}\right] = u^2 - v^2 = 1 \tag{2.1}$$

其次，我们可以用 $\hat{b}$ 和 $\hat{b}^\dagger$ 表达 $\hat{a}$ 和 $\hat{a}^\dagger$，即

$$\begin{cases}\hat{a} = u\hat{b} - v\hat{b}^\dagger \\ \hat{a}^\dagger = u\hat{b}^\dagger - v\hat{b}\end{cases} \tag{2.2}$$

其中已利用2.1. 将上两式代入 Hamiltonian 算符的表达式，得到：

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{5}{3}\left(u\hat{b}^\dagger - v\hat{b}\right)\left(u\hat{b} - v\hat{b}^\dagger\right) + \frac{2}{3}\left[\left(u\hat{b} - v\hat{b}^\dagger\right)^2 + \left(u\hat{b}^\dagger - v\hat{b}\right)^2\right] \\ &= \frac{5}{3}\left[u^2\hat{b}^\dagger\hat{b} - uv\hat{b}^2 - uv\left(\hat{b}^\dagger\right)^2 + v^2\hat{b}\hat{b}^\dagger\right] + \frac{2}{3}\left[\left(u^2+v^2\right)\hat{b}^2 + \left(u^2+v^2\right)\left(\hat{b}^\dagger\right)^2 - 2uv\hat{b}\hat{b}^\dagger - 2uv\hat{b}^\dagger\hat{b}\right] \\ &= \left[\frac{2}{3}\left(u^2+v^2\right) - \frac{5}{3}uv\right]\left[\hat{b}^2 + \left(\hat{b}^\dagger\right)^2\right] + \left[\frac{5}{3}\left(u^2+v^2\right) - \frac{8}{3}uv\right]\hat{b}^\dagger\hat{b} + \left(\frac{5}{3}v^2 - \frac{4}{3}uv\right)\hat{I}\end{aligned} \tag{2.3}$$

将上式与题给目标表达式做比较，结合2.1，我们可以给出 u 和 v 的两个约束条件：

$$\begin{cases}u^2 - v^2 = 1 \Rightarrow (u-v)(u+v) = 1 \\ \dfrac{2}{3}\left(u^2+v^2\right) - \dfrac{5}{3}uv = 0 \Rightarrow (u-2v)(2u-v) = 0\end{cases} \tag{2.4}$$

根据以上第二式，有以下两种情形：

1. 倘若 $u = 2v$，代入以上第一式解得：$u = \dfrac{2}{\sqrt{3}}, v = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
2. 倘若 $v = 2u$，代入以上第一式有：$-3u^2 = 1$，无实数解.

因此，只能取第一种情况的解. 将其代入2.3，得：

$$\hat{H}=\left(\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}-\frac{8}{3}\times\frac{2}{3}\right)\hat{b}^{\dagger}\hat{b}+\left(\frac{5}{3}\times\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\right)\hat{I}=\hat{b}^{\dagger}\hat{b}-\frac{1}{3}\hat{I} \tag{2.5}$$

于是 $\lambda=1$，同时 $E_0=-\dfrac{1}{3}$，能谱为：

$$E_n=n-\frac{1}{3},\quad n\in\mathbb{N} \tag{2.6}$$

注：我们这里直接使用了谐振子理论的结果. 事实上，我们在考察谐振子问题时，出发点恰恰是 $\left[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}\right]=1$，本质上所有结论都是由此推导得到的. 因此，对于 Hamiltonian 算符由2.5表达的系统，只要 $\left[\hat{b},\hat{b}^{\dagger}\right]=1$，我们就可以把谐振子问题中粒子数算符的定义以及一系列派生结果应用到本系统上.

3 第 3 题

假设 $\{|1\rangle,|2\rangle\}$ 构成系统的一组完备正交基，同时系统的 Hamiltonian 算符可以写作：

$$\hat{H}=E\left(|1\rangle\langle1|-|2\rangle\langle2|+|1\rangle\langle2|+|2\rangle\langle1|\right)$$

试求体系本征能量和对应的本征态.

解：依题意，$\hat{H}$ 在题给基下有如下矩阵表示：

$$H=E\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \tag{3.1}$$

如我们曾在习题课上讨论过的，问题即转化为求该矩阵的特征值及特征向量. 解对应的久期方程：

$$\det(\lambda I-H)=(\lambda-E)(\lambda+E)-E^2=\left(\lambda-\sqrt{2}E\right)\left(\lambda+\sqrt{2}E\right)=0 \tag{3.2}$$

得 $\lambda=\pm\sqrt{2}E$，因此体系的本征能量为 $\pm\sqrt{2}E$. 进一步地，可解得相应的本征矢量：

$$\left|\sqrt{2}E\right\rangle=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}|1\rangle+\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}|2\rangle=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}|1\rangle+\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}|2\rangle \tag{3.3}$$

$$\left|-\sqrt{2}E\right\rangle=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}|1\rangle+\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}|2\rangle=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}|1\rangle+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}|2\rangle \tag{3.4}$$

注：亦可参照如下思路求解，但稍显繁复：我们不妨设体系的能量本征态为

$$|\psi_E\rangle=c_1|1\rangle+c_2|2\rangle \tag{3.5}$$

而根据 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 的正交归一性，不难得到：

$$\hat{H}|1\rangle=E\left(|1\rangle+|2\rangle\right) \tag{3.6}$$

$$\hat{H}|2\rangle=E\left(|1\rangle-|2\rangle\right) \tag{3.7}$$

将上两式代入3.5，有：

$$\hat{H}\left(c_1\left|1\right\rangle + c_2\left|2\right\rangle\right) = E\left(c_1 + c_2\right)\left|1\right\rangle + E\left(c_1 - c_2\right)\left|2\right\rangle \tag{3.8}$$

由此得到相应的比例关系，即可求解.

4 第 4 题

倘若 $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = 0$ 且 $\left[\hat{A}, \hat{C}\right] = 0$，而 $\left[\hat{B}, \hat{C}\right] \neq 0$，请证明算符 $\hat{A}$ 的本征态中存在简并.

解：我们采用反证法. 假设 $\hat{A}$ 的所有本征态皆不简并，并记：

$$\hat{A}\left|a_i\right\rangle = a_i\left|a_i\right\rangle \tag{4.1}$$

不妨认为所有 $\left|a_i\right\rangle$ 均已归一化. 由于 $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = 0$，必有：

$$\hat{A}\hat{B}\left|a_i\right\rangle = \hat{B}\hat{A}\left|a_i\right\rangle = a_i\hat{B}\left|a_i\right\rangle \tag{4.2}$$

即 $\hat{B}\left|a_i\right\rangle$ 也是 $\hat{A}$ 属于本征值 a_i 的本征向量，又由于 $\hat{A}$ 的各本征子空间维数均为 1，不妨记：

$$\hat{B}\left|a_i\right\rangle = b_i\left|a_i\right\rangle \tag{4.3}$$

同理，对于算符 $\hat{C}$，也可记：

$$\hat{C}\left|a_i\right\rangle = c_i\left|a_i\right\rangle \tag{4.4}$$

上两式说明：

$$\begin{aligned}\hat{B}\hat{C}\left|a_i\right\rangle &= c_i\hat{B}\left|a_i\right\rangle = c_i b_i\left|a_i\right\rangle \\ &= b_i c_i\left|a_i\right\rangle = b_i\hat{C}\left|a_i\right\rangle = \hat{C}\hat{B}\left|a_i\right\rangle\end{aligned} \tag{4.5}$$

对任意 $\left|a_i\right\rangle$ 均成立. 于是，$\forall i, j$，有：

$$\left\langle a_j\middle|\left[\hat{B}, \hat{C}\right]\middle|a_i\right\rangle = \left\langle a_j\middle|\left(\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B}\right)\middle|a_i\right\rangle = 0 \tag{4.6}$$

亦即 $\left[\hat{B}, \hat{C}\right] = 0$，与题给条件矛盾. 因此，我们的假设不正确，$\hat{A}$ 必然存在简并的本征态.