

2022秋易为老师量子力学B

习题二参考解答

宋冰睿 刘丰铨

2022 年 9 月 21 日

1 第一题

假设某粒子的坐标空间波函数是Gaussian，即（只考虑一维情况）

$$\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha x^2\right)$$

(a) 请写出粒子在动量空间的波函数；

(b) 利用坐标空间波函数计算

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi^*(x) \psi(x) x$$
$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi^*(x) \psi(x) x^2$$

(c) 利用动量空间波函数计算

$$\bar{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \psi^*(p) \psi(p) p$$
$$\overline{p^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \psi^*(p) \psi(p) p^2$$

(d) 利用坐标空间波函数计算

$$\bar{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi^*(x) \hat{p} \psi(x)$$
$$\overline{p^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi^*(x) \hat{p}^2 \psi(x)$$
$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

(e) 由上述结果，试验证波函数满足不确定性关系. 其中涨落定义为

$$\Delta p \equiv \sqrt{(p - \bar{p})^2}$$
$$\Delta x \equiv \sqrt{(x - \bar{x})^2}$$

1.1 1a

动量空间波函数可由坐标空间波函数经Fourier变换得到:

$$\begin{aligned}
 \varphi(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot \psi(x) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha x^2 - \frac{ipx}{\hbar}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot \exp\left[-\frac{\alpha}{2}\left(x - i\frac{p}{\alpha\hbar}\right)^2 - \frac{p^2}{2\alpha\hbar^2}\right] \\
 &= \left(\frac{\alpha}{4\pi^3\hbar^2}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{p^2}{2\alpha\hbar^2}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{\alpha\pi\hbar^2}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{p^2}{2\alpha\hbar^2}\right)
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

同样为Gaussian.

1.2 1b

由于Gaussian是偶函数, 故

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp(-\alpha x^2) x = 0 \tag{1.2}$$

另外,

$$\begin{aligned}
 \overline{x^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp(-\alpha x^2) x^2 \\
 &= 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_0^{+\infty} dx \cdot x^2 \exp(-\alpha x^2) \\
 &= 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}} dt \cdot \frac{t}{\alpha} e^{-t} \\
 &= \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2\alpha}
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

其中已令 $t = \alpha x^2$, 即 $x = \sqrt{\frac{t}{\alpha}}$.

1.3 1c

类似于1b, 有

$$\bar{p} = 0 \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \overline{p^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dp \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha\pi\hbar^2}} \exp\left(-\frac{p^2}{\alpha\hbar^2}\right) p^2 \\ &= 2\sqrt{\frac{1}{\alpha\pi\hbar^2}} \int_0^{+\infty} dp \cdot p^2 \exp\left(-\frac{p^2}{\alpha\hbar^2}\right) \\ &= 2\sqrt{\frac{1}{\alpha\pi\hbar^2}} \int_0^{+\infty} \hbar\sqrt{\frac{\alpha}{4t}} dt \cdot \alpha\hbar^2 te^{-t} \\ &= \alpha\hbar^2 \sqrt{\frac{1}{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\alpha\hbar^2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

其中已令 $t = \frac{p^2}{\alpha\hbar^2}$, 即 $p = \hbar\sqrt{\alpha t}$.

1.4 1d

一维情况下 $\frac{\partial}{\partial x}$ 化为 $\frac{d}{dx}$, 可直接计算:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha x^2\right) \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha x^2\right) \\ &= -i\hbar \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot \exp(-\alpha x^2) (-\alpha x) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \overline{p^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha x^2\right) \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right)^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha x^2\right) \\ &= -\hbar^2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha x^2\right) \frac{d}{dx} \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha x^2\right) (-\alpha x) \right] \\ &= \alpha\hbar^2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot \exp(-\alpha x^2) [x(-\alpha x) + 1] \end{aligned} \quad (1.7)$$

借助公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot \exp(-\alpha x^2) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (1.8)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot \exp(-\alpha x^2) x^2 = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (1.9)$$

式1.7化简为

$$\overline{p^2} = \alpha\hbar^2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \left[\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} - \alpha \cdot \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right] = \frac{1}{2}\alpha\hbar^2 \quad (1.10)$$

1.5 1e

借助上几小问的结果，有

$$\Delta p = \sqrt{p^2 - \bar{p}^2} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \hbar \quad (1.11)$$

$$\Delta x = \sqrt{x^2 - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{1}{2\alpha}} \quad (1.12)$$

因此

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.13)$$

满足不确定性关系.

2 第二题

下列一维波函数能否归一化？如果可以，请写出归一化后的波函数.

(a)

$$\psi(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{a} & , 0 \leq x \leq a \\ 0 & , \text{其它} \end{cases}$$

(b) 平面波

$$\psi(x) = \exp(ikx)$$

(c) Dirac函数

$$\psi(x) = \delta(x)$$

(d) Gaussian

$$\psi(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2\right)$$

2.1 2a

能. 设归一化系数为 C ，则

$$\begin{aligned} \frac{1}{|C|^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi(x)|^2 \\ &= \int_0^a dx \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{a} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a dx \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \\ &= \frac{a}{2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

不失一般性，取复数 C 的辐角为0，则

$$C = \sqrt{\frac{2}{a}} \quad (2.2)$$

因此归一化后的波函数

$$\psi_{\text{normalized}}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} & , 0 \leq x \leq a \\ 0 & , \text{其它} \end{cases} \quad (2.3)$$

2.2 2b

否. 因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\exp(ikx)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \quad (2.4)$$

发散.

2.3 2c

否. 因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^2(x) dx \quad (2.5)$$

发散. 这是因为其动量空间波函数 $\varphi(p) = 1$, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp |\varphi(p)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \quad (2.6)$$

发散. 再根据Parseval定理就有 $\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi(x)|^2$ 发散.

2.4 2d

能. 类似于2a,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|C|^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi(x)|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot \exp(-\alpha^2 x^2) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{|\alpha|} \end{aligned} \quad (2.7)$$

不失一般性, 取复数 C 的辐角为0, 则

$$C = \sqrt{\frac{|\alpha|}{\sqrt{\pi}}} \quad (2.8)$$

因此归一化后的波函数

$$\psi_{\text{normalized}}(x) = \sqrt{\frac{|\alpha|}{\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2\right) \quad (2.9)$$