# 2022 秋易为老师量子力学 B
# 习题三参考解答

刘丰铨　　宋冰睿

2022 年 10 月 3 日

## 1　第 1 题

请证明：

$$\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\hat{D}\right]=-\hat{A}\hat{C}\left\{\hat{D},\hat{B}\right\}+\hat{A}\left\{\hat{C},\hat{B}\right\}\hat{D}-\hat{C}\left\{\hat{D},\hat{A}\right\}\hat{B}+\left\{\hat{C},\hat{A}\right\}\hat{D}\hat{B}$$

解：直接将等式右端展开即可．为熟悉对易子性质，我们给出另一种方法．首先，我们利用

$$\left[\hat{P}\hat{Q},\hat{R}\right]=\hat{P}\left[\hat{Q},\hat{R}\right]+\left[\hat{P},\hat{Q}\right]\hat{R} \tag{1.1}$$

将欲证等式左端拆解成更易于处理的形式

$$\begin{aligned}\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\hat{D}\right]&=\hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\hat{D}\right]+\left[\hat{A},\hat{C}\hat{D}\right]\hat{B}\\&=\hat{A}\hat{C}\left[\hat{B},\hat{D}\right]+\hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right]\hat{D}+\hat{C}\left[\hat{A},\hat{D}\right]\hat{B}+\left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{D}\hat{B}\end{aligned} \tag{1.2}$$

此时利用

$$\left[\hat{P},\hat{Q}\right]=\left\{\hat{P},\hat{Q}\right\}-2\hat{Q}\hat{P} \tag{1.3}$$

以及对易子的交换反对称性和反对易子的交换对称性，有：

$$\begin{aligned}\hat{A}\hat{C}\left[\hat{B},\hat{D}\right]+\hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right]\hat{D}+\hat{C}\left[\hat{A},\hat{D}\right]\hat{B}+\left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{D}\hat{B}&=\left(-\hat{A}\hat{C}\left\{\hat{D},\hat{B}\right\}+2\hat{A}\hat{C}\hat{B}\hat{D}\right)+\left(\hat{A}\left\{\hat{C},\hat{B}\right\}\hat{D}-2\hat{A}\hat{C}\hat{B}\hat{D}\right)\\&\quad+\left(-\hat{C}\left\{\hat{D},\hat{A}\right\}\hat{B}+2\hat{C}\hat{A}\hat{D}\hat{B}\right)+\left(\left\{\hat{C},\hat{A}\right\}\hat{D}\hat{B}-2\hat{C}\hat{A}\hat{D}\hat{B}\right)\\&=-\hat{A}\hat{C}\left\{\hat{D},\hat{B}\right\}+\hat{A}\left\{\hat{C},\hat{B}\right\}\hat{D}-\hat{C}\left\{\hat{D},\hat{A}\right\}\hat{B}+\left\{\hat{C},\hat{A}\right\}\hat{D}\hat{B}\end{aligned} \tag{1.4}$$

即为欲证等式右端.

## 2　第 2 题

请证明：

(a)

$$\left[\hat{A},\hat{B}^n\right]=n\left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{B}^{n-1},\qquad if\left[\hat{B},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]=0$$

(b)

$$\left[\hat{A}^n,\hat{B}\right]=n\hat{A}^{n-1}\left[\hat{A},\hat{B}\right],\qquad if\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]=0$$

(c)

$$\left[\hat{C}, \hat{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{B}}\right] = \left[\hat{C}, \hat{\boldsymbol{A}}\right] \cdot \hat{\boldsymbol{B}} + \hat{\boldsymbol{A}} \cdot \left[\hat{C}, \hat{\boldsymbol{B}}\right]$$

(d)

$$\left[\hat{C}, \hat{\boldsymbol{A}} \times \hat{\boldsymbol{B}}\right] = \left[\hat{C}, \hat{\boldsymbol{A}}\right] \times \hat{\boldsymbol{B}} + \hat{\boldsymbol{A}} \times \left[\hat{C}, \hat{\boldsymbol{B}}\right]$$

## 2.1 2a

解：根据对易子的性质1.1和题干中的对易关系, 有：

$$\left[\hat{A}, \hat{B}^k\right] = \left[\hat{A}, \hat{B}^{k-1} \cdot \hat{B}\right] = \left[\hat{A}, \hat{B}^{k-1}\right]\hat{B} + \hat{B}^{k-1}\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \left[\hat{A}, \hat{B}^{k-1}\right]\hat{B} + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{B}^{k-1} \tag{2.1}$$

注意到上式中 $\left[\hat{A}, \hat{B}^{k-1}\right]$ 与目标对易子形式上的一致性，利用数学归纳法证明. 首先，当 $n = 1$ 时，欲证关系显然成立. 接下来，我们假设对于 $n = k - 1$ $(k > 2, k \in \mathbb{Z})$，结论成立，亦即

$$\left[\hat{A}, \hat{B}^{k-1}\right] = (k-1)\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{B}^{k-2} \tag{2.2}$$

将上式代入2.1，简单化简后立即得到：

$$\left[\hat{A}, \hat{B}^k\right] = (k-1)\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{B}^{k-1} + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{B}^{k-1} = k\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{B}^{k-1} \tag{2.3}$$

根据 $k$ 在合法取值范围内的任意性，欲证结论对所有正整数 $n$ 成立.

## 2.2 2b

解：常规解法与上节完全相同，不再赘述，这里为了帮助同学们熟悉对易子的反对称性质，采用如下证法.

在上节所得结论

$$\left[\hat{A}, \hat{B}^n\right] = n\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{B}^{n-1} \tag{2.4}$$

中，在等号左端交换 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}^n$ 的位置，并在等号右端相应地添上负号，并再次利用对易子的反对称性质，有：

$$\left[\hat{B}^n, \hat{A}\right] = -n\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{B}^{n-1} = n\left[\hat{B}, \hat{A}\right]\hat{B}^{n-1} \tag{2.5}$$

在上式中将 $\hat{A}$ 用 $\hat{B}$ 替代而将 $\hat{B}$ 用 $\hat{A}$ 替代（注意：此处的替代与此前的交换完全不同，其合理性亦不依赖于对易子的性质)，得到：

$$\left[\hat{A}^n, \hat{B}\right] = n\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{A}^{n-1} \tag{2.6}$$

此时 2a 中的条件

$$\left[\hat{B}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] = 0 \tag{2.7}$$

相应地改变为

$$\left[\hat{A}, \left[\hat{B}, \hat{A}\right]\right] = 0 \tag{2.8}$$

显然恰好与 2b 题干中的条件等价. 在式2.6中利用之，得到：

$$\left[\hat{A}^n, \hat{B}\right] = n\hat{A}^{n-1}\left[\hat{A}, \hat{B}\right] \tag{2.9}$$

根据 $n$ 在正整数范围内取值的任意性，以上即为欲证结论.

### 2.3 2c

解：利用 Einstein 求和约定和对易子性质1.1，有：

$$\left[\hat{C},\hat{A}_i\hat{B}_i\right]=\left[\hat{C},\hat{A}_i\right]\hat{B}_i+\hat{A}_i\left[\hat{C},\hat{B}_i\right]=\left[\hat{C},\hat{A}\right]_i\hat{B}_i+\hat{A}_i\left[\hat{C},\hat{B}\right]_i \tag{2.10}$$

即得所证.

### 2.4 2d

解：利用 Einstein 求和约定和对易子性质1.1，有：

$$\left[\hat{C},\varepsilon_{ijk}\hat{A}_j\hat{B}_k\right]=\varepsilon_{ijk}\left[\hat{C},\hat{A}_j\right]\hat{B}_k+\varepsilon_{ijk}\hat{A}_j\left[\hat{C},\hat{B}_k\right]=\varepsilon_{ijk}\left[\hat{C},\hat{A}\right]_j\hat{B}_k+\varepsilon_{ijk}\hat{A}_j\left[\hat{C},\hat{B}\right]_k \tag{2.11}$$

即得所证.

## 3 第 3 题

请根据角动量算符的对易关系，证明：

(a)

$$\left[\hat{L}_\alpha,\hat{\boldsymbol{p}}^2\right]=0,\qquad \alpha=x,y,z$$

(b)

$$\left[\hat{L}_+,\hat{L}_-\right]=2\hbar\hat{L}_z,\qquad \textit{in which}\ \ \hat{L}_\pm=\hat{L}_x\pm \mathrm{i}\hat{L}_y$$

(c)

$$\left[\hat{\boldsymbol{L}}^2,\hat{L}_\alpha\right]=0,\qquad \alpha=x,y,z$$

### 3.1 3a

解：由于

$$\left[\hat{L}_\alpha,\hat{p}_\mu\right]=\left[\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{r}_\beta\hat{p}_\gamma,\hat{p}_\mu\right] \tag{3.1}$$

利用基本对易关系

$$\left[\hat{r}_\alpha,\hat{r}_\beta\right]=0 \tag{3.2}$$

$$\left[\hat{p}_\alpha,\hat{p}_\beta\right]=0 \tag{3.3}$$

$$\left[\hat{r}_\alpha,\hat{p}_\beta\right]=\mathrm{i}\hbar\hat{I}\delta_{\alpha\beta} \tag{3.4}$$

其中 $\hat{I}$ 为单位算符，有：

$$\left[\hat{L}_\alpha,\hat{p}_\mu\right]=\mathrm{i}\hbar\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{I}\delta_{\beta\mu}\hat{p}_\gamma=\mathrm{i}\hbar\varepsilon_{\alpha\mu\gamma}\hat{p}_\gamma \tag{3.5}$$

因此

$$\left[\hat{L}_\alpha, \hat{p}_\mu \hat{p}_\mu\right] = 2\mathrm{i}\hbar \varepsilon_{\alpha\mu\gamma} \hat{p}_\mu \hat{p}_\gamma = 0 \tag{3.6}$$

其中已利用对易子的性质1.1. 以上即为欲证结论.

### 3.2 3b

解：根据角动量算符的基本对易关系

$$\left[\hat{L}_\alpha, \hat{L}_\beta\right] = \mathrm{i}\hbar \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{L}_\gamma \tag{3.7}$$

以及对易子的线性性，有：

$$\begin{aligned}\left[\hat{L}_+, \hat{L}_-\right] &= \left[\hat{L}_x, \hat{L}_x\right] - \mathrm{i}\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] + \mathrm{i}\left[\hat{L}_y, \hat{L}_x\right] + \left[\hat{L}_y, \hat{L}_y\right] \\ &= 0 - \mathrm{i}\left(\mathrm{i}\hbar \hat{L}_z\right) + \mathrm{i}\left(-\mathrm{i}\hbar \hat{L}_z\right) + 0 \\ &= 2\hbar \hat{L}_z\end{aligned} \tag{3.8}$$

### 3.3 3c

解：根据角动量算符的基本对易关系3.7和对易子的性质，有：

$$\left[\hat{L}_\beta \hat{L}_\beta, \hat{L}_\alpha\right] = \mathrm{i}\hbar \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{L}_\beta \hat{L}_\gamma + \mathrm{i}\hbar \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{L}_\gamma \hat{L}_\beta = \mathrm{i}\hbar \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left\{\hat{L}_\beta, \hat{L}_\gamma\right\} \tag{3.9}$$

注意到上式中 $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ 关于 $\beta, \gamma$ 交换反对称，而反对易子 $\left\{\hat{L}_\beta, \hat{L}_\gamma\right\}$ 关于 $\beta, \gamma$ 交换对称，故而上式等号右边为零（注：角动量矢量算符与自身叉乘不为零，见附录）. 因此

$$\left[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{L}_\alpha\right] = 0 \tag{3.10}$$

即为欲证结论.

## 4 第 4 题

定义：

$$\hat{C} \equiv \left[\hat{A}, \hat{B}\right]$$

假设算符均与 $\lambda$ 无关，并在本题 (b)、(c) 两小题中假设：

$$\left[\hat{C}, \hat{A}\right] = \left[\hat{C}, \hat{B}\right] = 0$$

请证明：

(a)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \mathrm{e}^{\lambda\hat{A}} = \hat{A}\mathrm{e}^{\lambda\hat{A}} = \mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\hat{A}$$

(b)

$$\left[\hat{A}, \mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}\right] = \lambda\hat{C}\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}$$

(c)

$$\mathrm{e}^{\lambda\left(\hat{A}+\hat{B}\right)} = \mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}}$$

### 4.1 4a

解：根据算符函数的定义（亦即算符函数 $f(\hat{A})$ 可表达为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近展开后将 $x$ 替换为 $\hat{A}$ 的形式），有：

$$\mathrm{e}^{\lambda\hat{A}} = \hat{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\hat{A}^n \tag{4.1}$$

其中 $\hat{I}$ 为单位算符，因而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{e}^{\lambda\hat{A}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\hat{A}^n = \hat{A}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\hat{A}^n = \hat{A}\left(\hat{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\hat{A}^n\right) = \hat{A}\mathrm{e}^{\lambda\hat{A}} \tag{4.2}$$

显然 $\hat{A}$ 与其自身对易，故有：

$$\hat{A}\mathrm{e}^{\lambda\hat{A}} = \mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\hat{A} \tag{4.3}$$

综上所述，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{e}^{\lambda\hat{A}} = \hat{A}\mathrm{e}^{\lambda\hat{A}} = \mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\hat{A} \tag{4.4}$$

即为欲证结论.

### 4.2 4b

解：根据以算符为自变量的指数函数定义4.1以及 3c 的结论2.3，有：

$$\begin{aligned}\left[\hat{A}, \mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}\right] &= \left[\hat{A}, \hat{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\hat{B}^n\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} n\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{B}^{n-1} \\ &= \lambda\hat{C}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\hat{B}^n = \lambda\hat{C}\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}\end{aligned} \tag{4.5}$$

其中第三个等号的处理与上题中的过程一致.

### 4.3 4c

解：注意到分别对各项利用幂级数不易处理本问题，我们转而考虑将等号两端的表达式分别视作一个整体，即令：

$$\hat{f}(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda\left(\hat{A}+\hat{B}\right)} \tag{4.6}$$

$$\hat{g}(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}} \tag{4.7}$$

并尝试分析两函数各阶导数的性质. 首先，我们有：

$$\frac{\mathrm{d}\hat{f}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \mathrm{e}^{\lambda\left(\hat{A}+\hat{B}\right)}\left(\hat{A}+\hat{B}\right) \tag{4.8}$$

特别地，在 $\lambda = 0$ 处，

$$\left(\frac{\mathrm{d}\hat{f}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right)_{\lambda=0} = \hat{A} + \hat{B} \tag{4.9}$$

因为 $\left(\hat{A}+\hat{B}\right)$ 与 $\lambda$ 无关，所以容易证明：

$$\left(\frac{\mathrm{d}^n\hat{f}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^n}\right)_{\lambda=0} = \left(\hat{A} + \hat{B}\right)^n \tag{4.10}$$

而利用 4a 和 4b 的结论，有：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{g}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} &= \mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\hat{A}\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}} + \mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}\hat{B}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}} - \lambda\mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}}\hat{C}\\ &= \mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\left[\hat{A},\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}\right]\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}} + \mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}\hat{A}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}} + \mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}\hat{B}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}} - \lambda\mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}}\hat{C}\\ &= \lambda\mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}}\hat{C} + \mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}} - \lambda\mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}}\hat{C}\\ &= \mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}}\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\end{aligned} \tag{4.11}$$

其中在第二个等号处利用了

$$\hat{A}\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}} = \left[\hat{A},\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}\right] + \mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}\hat{A} \tag{4.12}$$

这一将不易处理的项换成对应的已知对易子与另一易于处理的项之和或差的处理方法非常重要，并将在今后的学习中经常出现，请同学们务必加以掌握． 同理于关于 $\hat{f}(\lambda)$ 的讨论，由 $\left(\hat{A}+\hat{B}\right)$ 与 $\lambda$ 无关可以得到：

$$\left(\frac{\mathrm{d}^n\hat{g}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^n}\right)_{\lambda=0} = \left(\hat{A} + \hat{B}\right)^n \tag{4.13}$$

从而我们得知，$\hat{f}(\lambda)$ 和 $\hat{g}(\lambda)$ 关于 $\lambda$ 的各阶导函数在 $\lambda=0$ 处形式完全相同，同时显然两函数本身在 $\lambda=0$ 处也相等． 利用两函数在 $\lambda=0$ 的幂级数展开式，有：

$$\hat{f}(\lambda) = \hat{I} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^n}{n!}\lambda^n = \hat{g}(\lambda) \tag{4.14}$$

即

$$\mathrm{e}^{\lambda\left(\hat{A}+\hat{B}\right)} = \mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}} \tag{4.15}$$

正是欲证结论.

讨论：

1、用同样的方法可以证明著名的 Baker-Campbell-Hausdorff 公式：

$$\mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\hat{B}\mathrm{e}^{-\lambda\hat{A}} = \hat{B} + \lambda\left[\hat{A},\hat{B}\right] + \frac{\lambda^2}{2!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] + \cdots \tag{4.16}$$

2、本题中所证结论又称为 Glauber 公式． 另一种可考虑采用的证法为考虑

$$\hat{h}(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda\left(\hat{A}+\hat{B}\right)}\mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}} \tag{4.17}$$

对 $\lambda$ 求导并处理，得到微分方程，解得：

$$\hat{h}(\lambda) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}} \tag{4.18}$$

即可证得结论.

附录：角动量算符叉乘自身的结果说明（对应 3c 题）：

$$
\begin{aligned}
\left(\hat{\boldsymbol{L}}\times\hat{\boldsymbol{L}}\right)_\alpha &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{L}_\beta\hat{L}_\gamma \\
&= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\varepsilon_{\beta\mu\nu}\hat{r}_\mu\hat{p}_\nu\right)\left(\varepsilon_{\gamma\xi\zeta}\hat{r}_\xi\hat{p}_\zeta\right) \\
&= \left(\delta_{\alpha\xi}\delta_{\beta\zeta}-\delta_{\alpha\zeta}\delta_{\beta\xi}\right)\varepsilon_{\beta\mu\nu}\hat{r}_\mu\hat{p}_\nu\hat{r}_\xi\hat{p}_\zeta \\
&= \varepsilon_{\beta\mu\nu}\hat{r}_\mu\hat{p}_\nu\hat{r}_\alpha\hat{p}_\beta-\varepsilon_{\beta\mu\nu}\hat{r}_\mu\hat{p}_\nu\hat{r}_\beta\hat{p}_\alpha \\
&= \varepsilon_{\beta\mu\nu}\hat{r}_\mu\hat{p}_\nu\left[\hat{r}_\alpha,\hat{p}_\beta\right] \\
&= \mathrm{i}\hbar\delta_{\alpha\beta}\hat{L}_\beta = \mathrm{i}\hbar\hat{L}_\alpha
\end{aligned}
$$

亦即

$$\hat{\boldsymbol{L}}\times\hat{\boldsymbol{L}} = \mathrm{i}\hbar\hat{\boldsymbol{L}} \neq 0$$

其中已利用 Levi-Civita 符号和 Kronecker 符号的关系

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\gamma\xi\zeta} = \varepsilon_{\gamma\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\xi\zeta} = \delta_{\alpha\xi}\delta_{\beta\zeta}-\delta_{\alpha\zeta}\delta_{\beta\xi}$$

请同学们务必关注量子力学中算符运算与经典力学中矢量运算的差别. 一般而言，在所讨论的问题涉及彼此不对易的算符时，倘若需要利用经典力学中矢量运算的结论，最好加以验证或证明.