2022秋量子力学B
第二次习题课讲义

课程主讲老师：易为 教授
助教：宋冰睿，刘丰铨

2022 年 11 月 13 日

目录

1 习题情况总结与期中备考指南

总体上看，大家的作业上交及时、完成质量高，这是令人欣慰的. 虽然习题解答已经尽可能详细，这里我们还是着重强调以下几点，以便大家有针对性地复习期中考试.

1. 对易关系计算.

   尤其注意务必熟练掌握与谐振子升降算符有关的对易关系计算，如作业5题1的四个小问. 对易关系计算是几乎贯穿量子力学课程的基本功之一，常见的技巧有如第一次习题课讲义中的式1.3，大家可参阅并进行巩固练习.

   在此基础上，可以注意Baker-(Campbell-)Hausdorff(BCH)公式及Glauber公式的掌握. Glauber公式在作业3中已作为习题要求大家证明过，助教在参考解答中也借此机会引出了BCH公式. 如有对此尚不清楚的同学，可以仔细浏览. 这两个公式在对易关系表达式中常常可使计算大为简化.

2. 时间演化问题.

   由于我们并不深入讨论相互作用绘景，因此只需理清Schrödinger绘景和Heisenberg绘景即可.

   类比刚体转动的两种观点，我们常将前者称为主动观点，而将后者称为被动观点. 在Schrödinger绘景中，态矢量随时间演化而力学量不变，类似于刚体自身转动而坐标架不动；在Heisenberg绘景中，力学量随时间演化而态矢量不变，类似于坐标架进行转动而刚体自身保持静止. 两种观点下，刚体在坐标架中的运动学参量均产生变化，对应于两种绘景中均能看到时间演化给体系带来的影响.

   在Schrödinger绘景中，我们常常遇到初态是一些体系能量本征态线性叠加的情况. 只需明确，体系将会以保持叠加系数不变的形式让本征态分别随时间演化，基本就能把握住大多数时间演化问题的要义.

   而在Heisenberg绘景中，灵活选用Heisenberg运动方程，或时间演化算符$\hat{U}(t)$ 去求解力学量算符随时间的变化，通常是简化计算的一大法宝，如作业8题1a.

3. 表象变换问题.

   该类型问题大致见于作业6，以求解矩阵本征问题为基本方法，以存在简并为主要难点. 特别地，应注意表象变换矩阵中的各本征矢的排列位序问题，它们需与本征值的顺序相对应. 在作业6中，我们就有不少同学因此出错.

   另外，虽然老师主要使用的表象变换矩阵是S，但仍需要注意S和U二者的区别：一个是对基向量的变换，另一个则是对展开系数的变换. 由于在作业6题2.1之参考解答中已叙述得十分详细，这里就不再赘述.

另外，请大家尽量抽空阅读作业的参考答案，我们会将批改作业过程中遇到的共性问题，及由题目引出的处理技巧一并编写于其中.

2 例题选讲

2.1 一维谐振子的升降算符伴谬

已知在$t=0$时刻，某一维谐振子的状态是

$$|\psi\rangle=\cos\alpha|0\rangle+\mathrm{i}\sin\alpha|1\rangle$$

为便于讨论，这里采取如下处理方式：作无量纲化，令

$$\hat{x}'=\beta\hat{x},\ \hat{p}'=\frac{1}{\hbar\beta}\hat{p}$$

并在以后的叙述略去撇号. 式中，$\beta\triangleq\sqrt{\dfrac{m\omega}{\hbar}}$.

(a) 利用升降算符

$$\begin{cases}\hat{a}_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}+\mathrm{i}\hat{p}\right)\\ \hat{a}_0^\dagger=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}-\mathrm{i}\hat{p}\right)\end{cases}$$

求$t>0$时刻的振子位置坐标的期望值.

(b) 定义算符

$$\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{p}-\mathrm{i}\hat{x}\right)$$

试证明$\left(\hat{a},\hat{a}^\dagger\right)$同样构成一组升降算符，并直接利用它们重新计算问题(a).

(c) 观察(a)(b)中得到的结果. 二者相同吗？若不同，请尝试说明原因.

首先，在Schrödinger绘景中我们容易给出t时刻的量子态

$$|\psi\left(t\right)\rangle=\cos\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}|0\rangle+\mathrm{i}\sin\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\omega t/2}|1\rangle \tag{2.1}$$

2.1.1 1a

利用

$$\hat{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}_0+\hat{a}_0^\dagger\right) \tag{2.2}$$

可以直接计算t时刻振子位置坐标的期望值：

$$\begin{aligned}\langle\hat{x}\rangle\left(t\right)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle\psi\left(t\right)\middle|\left(\hat{a}_0+\hat{a}_0^\dagger\right)\middle|\psi\left(t\right)\right\rangle\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t/2}\langle0|-\mathrm{i}\sin\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\omega t/2}\langle1|\right)\left(\hat{a}_0+\hat{a}_0^\dagger\right)\left(\cos\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}|0\rangle+\mathrm{i}\sin\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\omega t/2}|1\rangle\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t/2}\langle0|-\mathrm{i}\sin\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\omega t/2}\langle1|\right)\left(\mathrm{i}\sin\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\omega t/2}|0\rangle+\cos\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}|1\rangle+\sqrt{2}\mathrm{i}\sin\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\omega t/2}|2\rangle\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\sin\alpha\cos\alpha\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin2\alpha\sin\omega t\end{aligned} \tag{2.3}$$

2.1.2 1b

不难看出

$$\hat{a} = -\mathrm{i}\hat{a}_0,\ \hat{a}^\dagger = \mathrm{i}\hat{a}_0^\dagger \tag{2.4}$$

故

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = \left[-\mathrm{i}\hat{a}_0, \mathrm{i}\hat{a}_0^\dagger\right] = \left[\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger\right] = \mathbb{1} \tag{2.5}$$

因此，$\left(\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right)$也是一组升降算符.

下面考虑问题(a). 根据式2.2，

$$\hat{x} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger\right) \tag{2.6}$$

因此依题，直接计算t时刻振子位置坐标的期望值

$$\begin{aligned}
\langle \hat{x} \rangle (t) &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \left\langle \psi(t) \right| \left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger\right) \left| \psi(t) \right\rangle \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \left(\cos\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t/2}\langle 0| - \mathrm{i}\sin\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\omega t/2}\langle 1|\right) \left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger\right) \left(\cos\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}|0\rangle + \mathrm{i}\sin\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\omega t/2}|1\rangle\right) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \left(\cos\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t/2}\langle 0| - \mathrm{i}\sin\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\omega t/2}\langle 1|\right) \left(\mathrm{i}\sin\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\omega t/2}|0\rangle - \cos\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}|1\rangle - \sqrt{2}\mathrm{i}\sin\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\omega t/2}|2\rangle\right) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \mathrm{i}\sin\alpha\cos\alpha \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\alpha \cos\omega t
\end{aligned} \tag{2.7}$$

2.1.3 1c

(a)(b)中答案显然不同. 那么产生这种矛盾的原因是什么呢？

站在全局的角度来考虑这个问题，我们将发现所涉及到的对象只有两种——升降算符和本征态$\{|0\rangle, |1\rangle\}$. 在已经证明两组升降算符均合法的情况下，矛盾只可能源自谐振子的本征态. 换言之，**(b)中不应沿用与(a)相同的本征态$\{|n\rangle\}$** .

我们知道，相差一个相位对于两个量子态来说没有本质影响——但这是整体相差的情况. 如果两组本征态间每一对态的相差均不同，则可能就会产生一些意想不到的效果.

遵循这个思路，下面记(b)中实际本征态为$\{|n'\rangle\}$，并尝试设

$$|n'\rangle = c_n |n\rangle \tag{2.8}$$

且$n' = n$. 由降算子的性质，

$$\hat{a}|n'\rangle = -\mathrm{i}a_0 c_n |n\rangle = -\mathrm{i}c_n\sqrt{n-1}|n-1\rangle = -\mathrm{i}\frac{c_n}{c_{n-1}}\sqrt{n'-1}|n'-1\rangle \tag{2.9}$$

立即有

$$-\mathrm{i}\frac{c_n}{c_{n-1}} = 1 \tag{2.10}$$

即

$$c_n = \mathrm{i}c_{n-1} \tag{2.11}$$

若规定$c_0 = 1$，则

$$c_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/2} \tag{2.12}$$

因此，式2.8可改写为

$$|n'\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/2}|n\rangle \tag{2.13}$$

可以看到，对于每一对本征态$|n'\rangle$和$|n\rangle$，其相差确随n变化. 特别地，对于题中所涉及到的这两个本征态，我们有

$$|0'\rangle = |0\rangle,\ |1'\rangle = \mathrm{i}|1\rangle \tag{2.14}$$

下面可以重新考虑式2.7. 若在其中代之以式2.14的替换关系，可将其改写为

$$\begin{aligned}
\langle\hat{x}\rangle(t) &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left\langle\psi(t)\,\middle|\left(\hat{a}-\hat{a}^{\dagger}\right)\middle|\,\psi(t)\right\rangle \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left(\cos\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t/2}\langle 0| - \mathrm{i}\sin\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\omega t/2}\langle 1|\right)\left(\hat{a}-\hat{a}^{\dagger}\right)\left(\cos\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}|0\rangle + \mathrm{i}\sin\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\omega t/2}|1\rangle\right) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left(\cos\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t/2}\langle 0'| + \sin\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\omega t/2}\langle 1'|\right)\left(\hat{a}-\hat{a}^{\dagger}\right)\left(\cos\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}|0'\rangle + \sin\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\omega t/2}|1'\rangle\right) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left(\cos\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t/2}\langle 0'| + \sin\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\omega t/2}\langle 1'|\right)\left(\sin\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\omega t/2}|0'\rangle - \cos\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}|1'\rangle - \sqrt{2}\sin\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\omega t/2}|2'\rangle\right) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\sin\alpha\cos\alpha\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\alpha\sin\omega t
\end{aligned} \tag{2.15}$$

与(a)中结果相同!

因此，只要我们规定本征态的初始相位，两种方式计算出的结果就将一致.

2.2 一维晶格模型

设某一维体系共有N个电子，系统电子态可用最近邻交换相互作用模型来描述，其Hamiltonian是

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^{N} E_0 |n\rangle\langle n| + \sum_{n=1}^{N} W\left(|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|\right)$$

其中，$\{|n\rangle\}$是一组归一化的正交完备基，E_0, W为给定参数.

假定有环形边界条件使得$|N+1\rangle = |1\rangle$，试求体系的本征能级及能量本征态.

倘若定义

$$\hat{A} = \sum_{n=1}^{N} |n\rangle\langle n+1|\,,\ \hat{A}^{\dagger} = \sum_{n=1}^{N} |n+1\rangle\langle n| \tag{2.16}$$

则Hamiltonian可简化为

$$\hat{H} = E_0 + W\left(\hat{A} + \hat{A}^{\dagger}\right) \tag{2.17}$$

进一步地，我们考察$\hat{A}$和$\hat{A}^{\dagger}$：

$$\hat{A}|n\rangle = |n-1\rangle\,,\ \hat{A}^{\dagger}|n\rangle = |n+1\rangle \tag{2.18}$$

这意味着，$\left(\hat{A}, \hat{A}^{\dagger}\right)$有着类似谐振子升降算符的性质. 但不同的是，$\hat{A}$是Unitary的，这是因为

$$\hat{A}^{\dagger}\hat{A} = \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} |m+1\rangle\langle m\,|\,n\rangle\langle n+1| = \sum_{n=1}^{N} |n+1\rangle\langle n+1| = \mathbb{1} = \hat{A}\hat{A}^{\dagger} \tag{2.19}$$

从上式还能看出$\hat{A}$及$\hat{A}^{\dagger}$互相对易，进而推知它们均与Hamiltonian互相对易. 这意味着$\left\{\hat{H}, \hat{A}, \hat{A}^{\dagger}\right\}$组成一力学量完全集 (Complete Set of Compatible Observables, CSCO)，存在一组共同本征态. 因此，只要求解$\hat{A}$的本征问题，体系的能量本征问题也就迎刃而解.

首先写出其矩阵表示

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

解久期方程

$$0 = \det\left(A - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & -\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{N}\left(\lambda^{N} - 1\right) \tag{2.21}$$

即可得本征值

$$\lambda_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\ \left(\theta = \frac{2\pi}{N},\ k = 0, 1, \cdots, N-1\right) \tag{2.22}$$

和本征态

$$|E_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\theta} \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(N-1)k\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix} \lambda_k^0 \\ \lambda_k^1 \\ \lambda_k^2 \\ \vdots \\ \lambda_k^{N-1} \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

即有

$$\begin{cases} \hat{A}\,|E_k\rangle = \lambda_k\,|E_k\rangle \\ \hat{A}^{\dagger}\,|E_k\rangle = \lambda_k^{-1}\,|E_k\rangle \end{cases} \tag{2.24}$$

因此，

$$\hat{H}\,|E_k\rangle = \left[E_0 + W\left(\lambda_k + \lambda_k^{-1}\right)\right]|E_k\rangle \tag{2.25}$$

即体系的N个本征能量为$\varepsilon_k = E_0 + 2W\cos k\theta$.

从上述结果中可看出，体系本征能量有有限个，且为有限值. 这是与一维谐振子问题的显著区别.

事实上，本题属于一维晶格模型. 当$N \to \infty$时，最后得到的能谱将成为准连续的，即为**能带**.

2.3 任意算符的表示

试证明：任意算符$\hat{A}$可表示为

$$\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$$

其中，$\hat{B}$是Hermitian，$\hat{C}$是Anti-Hermitian.

我们尝试取

$$\begin{cases} \hat{B} = \dfrac{1}{2}\left(\hat{A} + \hat{A}^\dagger\right) \\ \hat{C} = \dfrac{1}{2}\left(\hat{A} - \hat{A}^\dagger\right) \end{cases} \tag{2.26}$$

由于

$$\begin{cases} \hat{B}^\dagger = \dfrac{1}{2}\left(\hat{A}^\dagger + \hat{A}\right) = \hat{B} \\ \hat{C}^\dagger = \dfrac{1}{2}\left(\hat{A}^\dagger - \hat{A}\right) = -\hat{C} \end{cases} \tag{2.27}$$

分别满足Hermitian及Anti-Hermitian条件，因此该取法成立，命题得证.

本题较为容易，有些类似于高中数学中我们熟知的，任意定义在关于原点对称区间上的函数，可以表示为该区间上奇函数和偶函数的和.

2.4 盒中光子的测量与分辨

设想有两个方盒可以储存光子.

第一个方盒中储存了10^6个沿x方向偏振的光子$|H\rangle$和10^6个沿y方向偏振的光子$|V\rangle$，第二个方盒中则储存了10^6个右旋圆偏振光子$|\sigma^+\rangle$和10^6个左旋圆偏振光子$|\sigma^-\rangle$. 盒的尺寸远大于光子的相干波长，因此光子所遵从的Bose统计可略. 已知

$$\left|\sigma^\pm\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle \pm \mathrm{i}\,|V\rangle\right)$$

现在，我们随机选取其中一个方盒（因而不清楚盒中光子有着怎样的偏振行为），并可以将盒子里的光子一一引出，测量它们在x方向（事实上任意方向均可）的偏振状态. 当测得光子的偏振为x方向时，探测器产生响应；反之，则没有响应（意味着测量结束时该光子偏振为y方向）. 假设探测器是理想的.

(a) 能否通过观测来确定，选取的到底是哪一个方盒？

(b) 若能，试估算猜测失败的可能性？

这是一道与众不同的题目，其重点不在我们常见的算符、表象，而在于测量. 通过本题，我们将进一步深化对测量的认识.

倘若我们测量单个光子的偏振状态：

- 对于方盒一，根据所引出光子偏振状态的不同，其结果可以预言，必然为有响应或无响应；
- 对于方盒二，无论引出的光子是何种偏振状态，其结果均无法预言，有响应、无响应的概率各占$1/2$.

注意两者的区别.

可想而知，我们将无法从单次测量中提取任何有效信息；而只有将盒中的2×10^6个光子全部引出测量，才能一窥一二.

从期望值的角度考虑，我们将发现两方盒中，测得x方向（有响应）和y方向（无响应）的次数期望值均为10^6. 因此，二者在该意义下不可区分.

不过，**它们的涨落是不同的**. 具体而言：

- 方盒一中，两事件（探测器有/无响应）出现的次数一定均为10^6，其总结果是确定的. 换言之，二者恰好为各10^6次的概率是

$$P_1 = 1 \tag{2.28}$$

- 方盒二中，两事件出现的次数应当是二项分布，其恰好也为各10^6次的概率是

$$P_2 = \frac{C_{2\times 10^6}^{10^6}}{2^{2\times 10^6}} \approx 0.00056419 \ll 1 \tag{2.29}$$

基本可以忽略.

2.4.1 4a

原则上，我们只要将盒中所有光子全部引出，并测量它们在x方向或y方向的偏振状态，就能**猜测**所选取的是哪一方盒.

- 若探测器有/无响应不是各10^6次，则**必为**方盒二；
- 若探测器有/无响应各为10^6次，则**基本**可以确定为方盒一.

2.4.2 4b

在计算猜测失败的概率前，我们首先要弄明白：什么是所谓的“猜测失败”？

根据(a)中的讨论我们知道，当探测器有/无响应的次数各为10^6时，虽然是方盒一的可能性很大，但仍有一定几率P是方盒二.

由于我们**猜测该盒为方盒一**，因此P就是我们要求的“猜测失败”的概率. 它与P_2有关，但不完全等于P_2. 这是因为，P_2是在已知该盒是方盒二的条件下求得的**条件概率**；而在考虑P时，这个条件是未知的.

若我们记事件A=“拿到方盒一”、事件B=“拿到方盒二”、事件C=“探测器有/无响应的次数各为10^6”，则$P_1 = P\left(C|A\right), P_2 = P\left(C|B\right)$.

根据条件概率的Bayes公式，本题要求的实际上是

$$\begin{aligned} P = P\left(B|C\right) &= \frac{P\left(B\right)P\left(C|B\right)}{P\left(A\right)P\left(C|A\right)+P\left(B\right)P\left(C|B\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}P_2}{\frac{1}{2}P_1+\frac{1}{2}P_2} \approx 0.00056387 \ll 1 \end{aligned} \tag{2.30}$$

仍然很小. 虽然与P_2差别不大，但为求严谨还是应如此计算.

2.5 互相反对易但与Hamiltonian对易的力学量算符

某可用一有限维Hilbert空间描述的量子力学体系存在可观测量$\hat{A}$与$\hat{B}$. 它们均与体系的Hamiltonian对易，但它们之间是反对易的，且均没有零本征值. 试证明：

(a) 系统的能量本征态必定都是简并的.

(b) 力学量算符$\hat{A}$和$\hat{B}$对应矩阵的迹为零，即$\mathrm{Tr}\,(A) = 0 = \mathrm{Tr}\,(B)$.

2.5.1 法一

2.5.1.1 5a

采用反证法. 假设存在体系的某一本征能级E_i无简并，则可设该能量本征态为$|\psi_i\rangle$.

已知$\left[\hat{H}, \hat{A}\right] = 0 = \left[\hat{H}, \hat{B}\right]$，则有

$$\hat{H}\left(\hat{A}\,|\psi_i\rangle\right) = \hat{A}\hat{H}\,|\psi_i\rangle = E_i\left(\hat{A}\,|\psi_i\rangle\right) \tag{2.31}$$

即$\hat{A}\,|\psi_i\rangle \propto |\psi_i\rangle$. 因此，$|\psi_i\rangle$也是$\hat{A}$的本征态，对应的本征值记作$a_i$，即$\hat{A}\,|\psi_i\rangle = a_i\,|\psi_i\rangle$.

同理，$|\psi_i\rangle$也是$\hat{B}$的本征态，对应的本征值记作b_i，即$\hat{B}\,|\psi_i\rangle = b_i\,|\psi_i\rangle$.

又由于$\left\{\hat{A}, \hat{B}\right\} = 0$，我们就有

$$0 = \left(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}\right)|\psi_i\rangle = b_i\hat{A}\,|\psi_i\rangle + a_i\hat{B}\,|\psi_i\rangle = 2a_ib_i\,|\psi_i\rangle \tag{2.32}$$

本征态不能为空态，因而只有$a_ib_i = 0$，意味着a_i、b_i中至少有一个是0 ——这与题设中$\hat{A}$和$\hat{B}$没有零本征值矛盾！

因此，我们最初的假设不成立，即体系的任意本征能级必然都存在简并.

2.5.1.2 5b

抛开上面反证法的假设，不失一般性，我们记$\hat{A}$一组正交完备的本征态为$\{|\alpha_{ip}\rangle\}$，其中$i = 1, \cdots, n$，n为Hilbert空间的维数；$p = 1, \cdots r_i$，r_i是第i个本征值a_i的简并度. 且由于$\hat{A}$是力学量算符，故$a_i \in \mathbb{R}$.

在以该组本征态构建的表象A中，根据$\left\{\hat{A}, \hat{B}\right\} = 0$有

$$0 = \left\langle \alpha_{ip} \middle| \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \middle| \alpha_{ip} \right\rangle = 2a_i \left\langle \alpha_{ip} \middle| \hat{B} \middle| \alpha_{ip} \right\rangle \tag{2.33}$$

而$a_i \neq 0$，因此$\left\langle \alpha_{ip} \middle| \hat{B} \middle| \alpha_{ip} \right\rangle = 0$对于任意合法的$(i, p)$取值成立. 换言之，在表象A中，力学量$\hat{B}$对应矩阵$B$的对角元皆为0. 因此，

$$\mathrm{Tr}\,(B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{r_i} \langle \alpha_{ip} \,|\, B \,|\, \alpha_{ip} \rangle = 0 \tag{2.34}$$

注意**矩阵的迹不依赖于表象的选择**.（$\mathrm{Tr}\,(A) = 0$同理）

2.5.2 法二

2.5.2.1 5a

由于$\hat{H}$与$\hat{A}$对易，因此存在一组共同本征态$\{|n\rangle\}$. 对其中任意一个$|i\rangle$，有

$$\hat{H}|i\rangle = E_i|i\rangle\,,\ \hat{A}|i\rangle = a_i|i\rangle \tag{2.35}$$

且依题$a_i \neq 0$.

根据$\left[\hat{H},\hat{B}\right] = 0 = \left\{\hat{A},\hat{B}\right\}$，我们有

$$\begin{cases} \hat{H}\left(\hat{B}|i\rangle\right) = \hat{B}\hat{H}|i\rangle = E_i\left(\hat{B}|i\rangle\right) \\ \hat{A}\left(\hat{B}|i\rangle\right) = -\hat{B}\hat{A}|i\rangle = -a_i\left(\hat{B}|i\rangle\right) \end{cases} \tag{2.36}$$

上面的第二式说明，$|i\rangle$与$\hat{B}|i\rangle$是$\hat{A}$的属于不同本征值a_i与$-a_i$的本征态，因而属于不同子空间，故必然是**不同的态**；而第一式却说明了它们皆为Hamiltonian属于同一本征值E_i的本征态——因此，E_i只能存在简并.

鉴于E_i选择上的任意性，我们即得知体系的所有能量本征值均是简并的.

2.5.2.2 5b

由(a)中讨论可知，只要非零实数a_n被判定为$\hat{A}$的本征值，其相反数$-a_n$亦是其本征值.

又因为力学量$\hat{A}$对应矩阵A的迹是所有本征值的和，因此遍历所有的a_n即证得$\mathrm{Tr}\,(A) = 0$. （$\mathrm{Tr}\,(B) = 0$同理）

2.6 Quantum Zeno Effect

在一两维Hilbert空间中，假设体系在某Hamiltonian的支配下作时间演化，其量子态的形式是

$$|\psi(t)\rangle = \cos\frac{\omega t}{2}|+\rangle - \mathrm{i}\sin\frac{\omega t}{2}|-\rangle$$

其中，$\{|+\rangle, |-\rangle\}$是某力学量$\hat{A}$一组正交完备归一的本征态，其对应的本征值分别为A_+和A_-.

现在考虑一个测量序列——在N个不同时刻$t_k = \frac{kT}{N}$测量体系的力学量$\hat{A}$. $(k = 1, \cdots, N)$

(a) 每次测量结果均为A_+的几率是多少？假设在相邻两次测量间，体系仍在原Hamiltonian的支配下作时间演化.

(b) 当测量次数$N \to \infty$时，(a)中得到的结果将化为多少？

2.6.1 6a

首先容易得到在t时刻作**首次**测量得到A_+的概率

$$P(t) = |\langle + \,|\, \psi(t)\rangle|^2 = \frac{1+\cos\omega t}{2} \tag{2.37}$$

可能会有一种解答是直接将N个不同的t_k代入，计算出N个概率并将其相乘，即

$$P_N\ ?= \prod_{k=1}^{N}\frac{1+\cos\frac{\omega kT}{N}}{2} \tag{2.38}$$

然而，这是不对的. 因为根据题意，该测量是投影测量——每次测量得到A_+后，体系量子态均坍缩到$|+\rangle$. 在直至下一次测量之前的这段时间里，系统量子态**重新从$|+\rangle$开始演化**.

因此，考虑任意两次测量之间的这段时间(t_k, t_{k+1})，我们需在式2.37中作替换$t \to T/N$，才得到连续N次测量均得到A_+的概率

$$P_N = \left(\frac{1 + \cos \frac{\omega T}{N}}{2} \right)^N \tag{2.39}$$

2.6.2 6b

当$N \to \infty$时，$\dfrac{\omega T}{N} \to 0$. 考虑

$$\begin{aligned} \ln P_N &= N \ln \left(\frac{1 + \cos \frac{\omega T}{N}}{2} \right) \approx N \ln \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\omega T}{N} \right)^2 \right] \\ &\approx N \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{\omega T}{N} \right)^2 \right] \to 0 \end{aligned} \tag{2.40}$$

即可知道

$$P_N \to 1 \tag{2.41}$$

事实上，这个问题被称为所谓的Quantum Zeno Effect（量子芝诺效应）：对一个不稳定量子系统频繁的测量可以冻结该系统的初始状态，或阻止系统的演化. 如若测量的时间间隔足够短，可以将该测量看作是连续的. 正是由于这样的投影测量所引起的量子态坍缩阻止了量子态之间的跃迁.

"Zeno"这个名字会使人很自然地联想到经典图像下的Zeno佯谬——假设有一位速度为10m/s的运动员和一只速度为1m的乌龟相距10m，某一时刻，运动员开始追乌龟，同时乌龟沿着同向开始逃跑.

古希腊哲学家Zeno认为，在这个问题中，$t_0 = 1\text{s}$过后，运动员已经到达了乌龟原来所处的位置，但此时乌龟向前前进了1m；再过$t_1 = 0.1\text{s}$，运动员又到达了乌龟原来所处的位置，但此时乌龟又向前前进了0.1m. 以此类推下去，似乎运动员永远都到达不了乌龟原来的位置，也就永远都“追不上乌龟”了.

当然，我们都很清楚这种思维错在何处：第k段的时间间隔$t_k = 10^{-k}\text{s}$将会随着$k \to \infty$而成为无穷小量——正如本题(b)小问中，测量次数$N \to \infty$时相邻两次测量的时间间隔趋于0.