电磁学A第一次习题课补充内容
矢量分析初步

宋冰睿

少年班学院，严济慈物理科技英才班

2022 年 3 月 9 日

1 引言

在物理学尤其是理论力学和电动力学的学习过程中，我们时常会碰到一些矢量分析的公式，如：

$$\nabla(\varphi\psi) = (\nabla\varphi)\psi + \varphi(\nabla\psi) \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) = (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{g} - (\nabla \times \vec{g}) \cdot \vec{f} \tag{1.2}$$

$$\nabla(\vec{f} \cdot \vec{g}) = \vec{f} \cdot \nabla\vec{g} + \vec{g} \cdot \nabla\vec{f} + \vec{f} \times (\nabla \times \vec{g}) + \vec{g} \times (\nabla \times \vec{f}) \tag{1.3}$$

$$\nabla \times (\vec{f} \times \vec{g}) = (\nabla \cdot \vec{g} + \vec{g} \cdot \nabla)\vec{f} - (\nabla \cdot \vec{f} + \vec{f} \cdot \nabla)\vec{g} \tag{1.4}$$

是不是感觉从上到下越来越不容易通过Leibniz求导法则直接观察出来了？事实上，这正是不少初涉矢量分析的同学常常困惑的问题——这些表达式到底是怎么来的？？？尤其是(1.3)和(1.4)两式，看起来似乎完全没有规律可言。

好在“天将降大任于Albert Einstein”，下面将要介绍的以他名字命名的求和约定会成为有效解决这些困惑的得力工具。

2 Einstein求和约定

2.1 引入

设有3×3的方阵A、B和C，那么可以考虑矩阵乘法ABC。对于这个问题，一种直接的思路是先求AB，再将AB与C相乘。那么首先有

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{3} A_{ik}B_{kj} \tag{2.1}$$

这时若考虑

$$(ABC)_{mn} = \sum_{k=1}^{3}(AB)_{mk}C_{kn} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} A_{ml}B_{lk}C_{kn} \tag{2.2}$$

则不可避免地要会出现两个求和式嵌套、对重复指标求和的情况，不仅书写较繁，还易出错。

现在不妨尝试去掉这些求和号，即将(2.1)式改写为：

$$(AB)_{ij} = A_{ik}B_{kj} \tag{2.3}$$

(2.2)式同理：

$$(ABC)_{mn} = (AB)_{mk}C_{kn} = A_{ml}B_{lk}C_{kn} \tag{2.4}$$

我们发现，这种方式似乎也能完美地给出各乘积项间的关系。这就是**Einstein求和约定(Einstein Notation)，即：若某一指标在同一单元中重复出现，则默认要对其求和；该指标称哑指标**。例如在式(2.3)中，k是哑指标；而在式(2.4)中，l, k均是哑指标。哑指标在最终的表达式中被消去，一般不再出现(*)。

作为指标的字母是可以任意选取的，只要表达式中不出现歧义即可。一般地，$i, j, k, m, n, l, r, s, t$都是常用的字母。

2.2 简单应用与说明

利用Einstein求和约定可以方便地证明一些简单的结论。例如线性代数告诉我们，对于两方阵A、B，有$(AB)^T = B^TA^T$。欲证明该式，就是要证明左右两端对应元素一一相等，即：

$$(AB)_{mn} = A_{mk}B_{kn} = B_{kn}A_{mk} = (B^T)_{nk}(A^T)_{km} = (B^TA^T)_{nm} \tag{2.5}$$

证明就完毕了，无需一般思路中还需将求和号写出再作求和顺序交换的步骤。

这里有一个需要说明的地方——哑指标并不一定只在不同矩阵处出现。我们有时可能会遇到下面这种情况：

$$A_{ii}B_{ij} = A_{11}B_{1j} + A_{22}B_{2j} + A_{33}B_{3j} \tag{2.6}$$

这里A处的两个指标均为i；而根据哑指标的约定(*)，i不能在用数字指标展开的表达式中出现，因此式中的三处i均需作求和处理。类似地有

$$A_{ij}B_{ji} = \begin{cases} (AB)_{ii} = (AB)_{11} + (AB)_{22} + (AB)_{33} \triangleq tr(AB) \\ (BA)_{jj} = (BA)_{11} + (BA)_{22} + (BA)_{33} \triangleq tr(BA) \end{cases} \tag{2.7}$$

给出了矩阵的迹。这同样验证了线性代数中的一个重要结论$tr(AB) = tr(BA)$。

3 两个重要记号

在Einstein求和约定中，有两个十分重要的记号δ_{ij}和ε_{ijk}。

3.1 Kronecker符号

3.1.1 定义

Kronecker符号定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{3.1}$$

它在线性代数的学习中应也有涉及。Kronecker符号与Dirac-δ符号$\delta(x - x')$有着异曲同工之处，二者都是在自变量（指标）不相等时取零值、在相等时取正值，且均满足归一化条件。

容易知道，Kronecker符号的两指标满足交换对称性，即：

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \tag{3.2}$$

3.1.2 简单应用

Kronecker符号的一个基本应用是它可将某一元素所含的与之相同的指标消去并作“代换”：

$$A_{ij}\delta_{jk} = A_{ik} \tag{3.3}$$

上式中j充当哑指标，最终被k代换掉了。

自然地，我们由上式可以进一步延伸：

$$A_{ij}\delta_{ji} = A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} \triangleq tr(A) \tag{3.4}$$

给出了A的迹。该式中由于i和j中均为哑指标，故在最终的用数字指标展开的表达式中不能出现。

将上式中的A换为单位阵$\mathbf{1}$会如何呢？

$$\mathbf{1}_{ii} = \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3 = tr(\mathbf{1}) \tag{3.5}$$

这说明，Einstein求和约定中的Kronecker符号在某些情况下是“可以给出大于1的值的”。

3.2 Levi-Civita符号

3.2.1 定义

设$i,j,k = 1,2,3$，则Levi-Civita符号的一种定义为

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & (i,j,k)\ is\ an\ even\ permutation\ of\ (1,2,3) \\ -1, & (i,j,k)\ is\ an\ odd\ permutation\ of\ (1,2,3) \\ 0, & Others \end{cases} \tag{3.6}$$

这里even permutation意为偶排列、odd permutation意为奇排列，而所谓的Others一般包含i,j,k中有两者以上取相同值的情况。另一种定义方式是：

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \tag{3.7}$$

虽然形式较为优美，但并不常用。

3.2.2 性质

Levi-Civita符号有几条值得注意的性质：

3.2.2.1 轮换对称性

即满足

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{jik} \tag{3.8}$$

3.2.2.2 行列式关系

$$\varepsilon_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3} = det(A) \tag{3.9}$$

对于三阶方阵来说，上式相当于把求行列式的所谓“对角线法则”以数学语言的形式表述了出来。一种更加一般的表示形式是

$$\varepsilon_{ijk}A_{il}A_{jm}A_{kn} = det(A)\varepsilon_{lmn} \tag{3.10}$$

3.2.2.3 乘积求和 这是最重要的性质之一，常常应用于后面将要提到的矢量分析公式证明中。

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \tag{3.11}$$

可以看到，两个具有相同指标k的Levi-Civita符号相乘时化为了一系列Kronecker符号的组合形式。该关系的证明可以使用Levi-Civita符号的行列式定义(3.7)式，这里从略。

3.2.3 简单应用

利用Levi-Civita符号的上述性质，我们能够给出下面的表达式：

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mjk} = \delta_{im}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jm} = 3\delta_{im} - \delta_{im} = 2\delta_{im} \tag{3.12}$$

上式中我们已令(3.11)式中的指标$n = j$，并且利用了(3.4)式。(3.10)式说明，Einstein求和约定中的Levi-Civita符号也是“可以给出大于1的值的”。倘若在此基础上再令(3.11)式中的指标$m = i$，就可以给出

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{ii} = 6 \tag{3.13}$$

还有一个基于行列式定义(3.7)式的有趣表达式：

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \tag{3.14}$$

证明从略。

4 矢量代数初步

按理说，此处应先介绍张量的基本知识；但由于电磁学课程并不涉及这部分内容，所以我们暂且跳过。

有了前面的铺垫，我们知道在Einstein求和约定下，一个三维矢量$\vec{A}$可以展开为

$$\vec{A} = A_i\hat{e}_i \tag{4.1}$$

其中$\hat{e}_i$是选取的坐标基矢，A_i则是$\vec{A}$在基矢$\hat{e}_i$下的分量。需要注意的是，无论基矢在空间中如何选取，其一定满足正交归一条件

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \tag{4.2}$$

以及轮换对称条件

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \varepsilon_{ijk}\hat{e}_k \tag{4.3}$$

而对于nabla算子∇，它在一组基矢$\{\hat{e}_i\}$下可以展开为

$$\nabla = \hat{e}_i\partial_i \tag{4.4}$$

注意此时一般不写成"$\nabla = \partial_i\hat{e}_i$"的形式，因为它意味着$\partial_i$要作用于基矢$\hat{e}_i$上——而这并非nabla算子的性质。$\partial_i\hat{e}_i$乍看之下似乎是0，但一个反例是如若选取球坐标$(r, \theta, \varphi)$，我们将会看到$\dfrac{\partial\hat{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -(sin\theta\hat{e}_r + cos\theta\hat{e}_\theta) \neq 0$。

4.1 矢量的基本乘法

与矢量有关的乘法主要分为点乘和叉乘两种。两三维矢量$\vec{A},\vec{B}$的点乘是

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_i\hat{e}_i\cdot B_j\hat{e}_j=A_iB_j\delta_{ij}=A_iB_i \tag{4.5}$$

式中利用了基矢的性质(4.2)式和Kronecker符号的性质(3.2)式。类似地，$\vec{A},\vec{B}$的叉乘写为

$$\vec{A}\times\vec{B}=A_i\hat{e}_i\times B_j\hat{e}_j=\left(\varepsilon_{ijk}A_iB_j\right)\hat{e}_k \tag{4.6}$$

式中利用了基矢的性质(4.3)式。

4.2 简单矢量分析公式的证明——Einstein求和约定法

4.2.1 $\nabla\cdot(\vec{f}\times\vec{g})=(\nabla\times\vec{f})\cdot\vec{g}-(\nabla\times\vec{g})\cdot\vec{f}$

我们尝试证明引言中给出的公式(1.2)。将该式两端按Einstein求和约定展开，并应用上面提到的一些性质有：

$$\begin{aligned}LHS&=\hat{e}_m\partial_m\cdot(\varepsilon_{ijk}f_ig_j)\hat{e}_k=\varepsilon_{ijk}\partial_m(f_ig_j)\delta_{mk}=\varepsilon_{ijk}\partial_k(f_ig_j)\\&=\varepsilon_{ijk}[(\partial_kf_i)g_j+f_i(\partial_kg_j)]=(\varepsilon_{kij}\partial_kf_i\hat{e}_j)\cdot(g_j\hat{e}_j)-(\varepsilon_{kji}\partial_kg_j\hat{e}_i)\cdot(f_i\hat{e}_i)\\&=(\nabla\times\vec{f})\cdot\vec{g}-(\nabla\times\vec{g})\cdot\vec{f}=RHS\end{aligned} \tag{4.7}$$

式中第二项前端出现了负号，是因为出现了轮换反对称的情况。这样，我们就通过指标展开的方法轻松证明了之前乍看之下甚至还有些怀疑其正确性的公式——毕竟仅从Leibniz法则的直观角度来看，(1.2)式中似乎不应出现负号。

4.2.2 $\nabla\times(\vec{f}\times\vec{g})=(\nabla\cdot\vec{g}+\vec{g}\cdot\nabla)\vec{f}-(\nabla\cdot\vec{f}+\vec{f}\cdot\nabla)\vec{g}$

类似地，我们还可以证明(1.4)式：

$$\begin{aligned}LHS&=\hat{e}_m\partial_m\times(\varepsilon_{ijk}f_ig_j)\hat{e}_k=\hat{e}_n\varepsilon_{ijk}\partial_m(f_ig_j)\varepsilon_{mkn}\\&=(\delta_{in}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jn})[(\partial_mf_i)g_j+f_i(\partial_mg_j)]\hat{e}_n\\&=[(\partial_mf_n)g_m+f_n(\partial_mg_m)-(\partial_mf_m)g_n-f_m(\partial_mg_n)]\hat{e}_n\\&=(\vec{g}\cdot\nabla+\nabla\cdot\vec{g})\vec{f}-(\nabla\cdot\vec{f}+\vec{f}\cdot\nabla)\vec{g}=RHS\end{aligned} \tag{4.8}$$

需要说明的是，式中的$(\vec{g}\cdot\nabla)\vec{f}$应理解为$\vec{g}\cdot(\nabla\vec{f})$，这是矢量$\vec{g}$与张量$\nabla\vec{f}$的点乘（表达式$(\vec{f}\cdot\nabla)\vec{g}$同理），这里不作过多介绍。也可以将$\vec{g}\cdot\nabla$视为一个新的算子作用在$\vec{f}$上，不过在具体计算时还是应采用第一种理解。

4.2.3 $\vec{f}\times(\nabla\times\vec{f})=\dfrac{1}{2}\nabla(f^2)-\vec{f}\cdot\nabla\vec{f}$

还有一个典型的可用类似方法推导的式子是$\vec{f}\times(\nabla\times\vec{f})=\dfrac{1}{2}\nabla(f^2)-\vec{f}\cdot\nabla\vec{f}$。由于该式整体给出的结果是个矢量，故可以写出其左端的第k个分量

$$\begin{aligned}(LHS)_k&=\varepsilon_{ijk}f_i(\nabla\times f)_j=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnj}f_i\partial_mf_n\\&=\left(\delta_{in}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{kn}\right)\left[\partial_m(f_if_n)-f_n(\partial_mf_i)\right]\\&=\partial_k(f_if_i)-f_i(\partial_kf_i)-\partial_i(f_if_k)+f_k(\partial_if_i)\\&=\partial_k(f_if_i)-f_i(\partial_kf_i)-f_k(\partial_if_i)-f_i(\partial_if_k)+f_k(\partial_if_i)\\&=\left[\nabla(f^2)\right]_k-f_i(\partial_kf_i+\partial_if_k)\end{aligned} \tag{4.9}$$

因此只需证明$\frac{1}{2}\nabla(f^2)+\vec{f}\cdot\nabla\vec{f}=f_i(\partial_k f_i+\partial_i f_k)\hat{e}_k$。将其展开：

$$\frac{1}{2}\nabla(f^2)+\vec{f}\cdot\nabla\vec{f}=\left[\frac{1}{2}\partial_k(f_if_i)+(f_i\partial_i)f_k\right]\hat{e}_k=\left[f_i\partial_k f_i+f_i\partial_i f_k\right]\hat{e}_k \tag{4.10}$$

证明完毕。

上面的叙述给出了利用Einstein求和约定推导矢量分析公式的一般思路，大家可自行推导其他未列出的方程式。不过需要注意的是，由于还未正式引进张量的概念，我们无法仅通过上述知识推导全部可能出现的公式。

4.3 简单矢量分析公式的证明——∇算符拆分法

利用Einstein求和约定推导矢量分析公式固然是通法，但有时却不免繁琐；而下面将要介绍的所谓“∇算符拆分法”相对前者则较为具象地给出了一些证明步骤。

4.3.1 $\nabla\cdot(\vec{f}\times\vec{g})=(\nabla\times\vec{f})\cdot\vec{g}-(\nabla\times\vec{g})\cdot\vec{f}$

所谓“∇算符拆分法”，即是将nabla算子改写成形如$\nabla=\nabla_f+\nabla_g$的形式，再向右作用于由$\vec{f},\vec{g}$组成的表达式上；这里∇_f,∇_g分别仅对$\vec{f},\vec{g}$产生作用。例如对本小节标题所示的公式就有：

$$\begin{aligned}LHS&=(\nabla_f+\nabla_g)\cdot(\vec{f}\times\vec{g})=(\nabla_f\times\vec{f})\cdot\vec{g}-\nabla_g\cdot(\vec{g}\times\vec{f})\\&=(\nabla\times\vec{f})\cdot\vec{g}-(\nabla\times\vec{g})\cdot\vec{f}\\&=RHS\end{aligned} \tag{4.11}$$

此处需要说明的有三点：

- 由于算符与矢量之间不能随意交换顺序，故∇_g想要对$\vec{g}$产生作用，就必须将$\vec{f},\vec{g}$交换顺序——表达式中的负号也正是因此产生，所以上面我们说该方法相对Einstein求和约定更加具象；
- 运算过程中用到了我们熟知的$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$，并且在此时将$\nabla_f$视为“矢量”（实则并不是，只是单单满足该性质）；
- 最后一步又将∇_f,∇_g重新写回∇的形式，是因为这时∇_f已与$\vec{f}$身处同一括号内，作用于且仅作用于$\vec{f}$上，无论是写成∇_f还是∇并无实质性的影响。（∇_g同理）

4.3.2 $\nabla\times(\vec{f}\times\vec{g})=(\nabla\cdot\vec{g}+\vec{g}\cdot\nabla)\vec{f}-(\nabla\cdot\vec{f}+\vec{f}\cdot\nabla)\vec{g}$

类似地，我们来证明这一公式。

$$\begin{aligned}LHS&=(\nabla_f+\nabla_g)\times(\vec{f}\times\vec{g})=\nabla_f\times(\vec{f}\times\vec{g})-\nabla_g\times(\vec{g}\times\vec{f})\\&=\left[(\vec{g}\cdot\nabla_f)\vec{f}-(\nabla_f\cdot\vec{f})\vec{g}\right]-\left[(\vec{f}\cdot\nabla_g)\vec{g}-(\nabla_g\cdot\vec{g})\vec{f}\right]\\&=(\nabla\cdot\vec{g}+\vec{g}\cdot\nabla)\vec{f}-(\nabla\cdot\vec{f}+\vec{f}\cdot\nabla)\vec{g}\\&=RHS\end{aligned} \tag{4.12}$$

相比上一小节，此处需要额外说明的有如下几点：

- 运算过程中用到了我们熟知的$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$;
- 形如$(\vec{g}\cdot\nabla_f)\vec{f}$的表达式不能写为$(\nabla_f\cdot\vec{g})\vec{f}$，形如$(\nabla_f\cdot\vec{f})\vec{g}$的表达式不能写为$(\vec{f}\cdot\nabla_f)\vec{g}$，均是因为前面已经提到$\nabla_f$仅对$\vec{f}$有作用。（$\nabla_g$同理）

4.3.3 $\vec{f}\times(\nabla\times\vec{f})=\frac{1}{2}\nabla(f^2)-\vec{f}\cdot\nabla\vec{f}$

此处与上面两小节相比有些许变化——表达式中仅含$\vec{f}$一个矢量了，如何应用拆分法呢？由于左端的∇仅作用于括号内的$\vec{f}$上而对第一个$\vec{f}$不产生作用，故将其从括号内“拿出来”时**需乘以一个系数**$\frac{1}{2}$。即：

$$LHS \doteq (\vec{f}\cdot\vec{f})\nabla-(\vec{f}\cdot\nabla)\vec{f} \doteq \frac{1}{2}\nabla(f^2)-\vec{f}\cdot\nabla\vec{f}=RHS \tag{4.13}$$

这里采用$\doteq$的意思是，表达式严格来说不能这么书写（不过此处我们为使之易于理解依然采用这种写法）。

4.4 有关∇算符的求导链式法则

作为结尾，这里介绍一下∇算符作用在含中间变量的表达式时满足的链式(Chain)法则。设有标量场$\varphi=\varphi(t_r)$和矢量场$\vec{A}=\vec{A}(t_r)$，其中$t_r=t_r(\vec{r})$是一个中间变量，$\vec{r}$则是空间位矢。再记$\dot{\varphi}=\frac{d\varphi}{dt_r},\dot{\vec{A}}=\frac{d\vec{A}}{dt_r}$，就有

$$\nabla\varphi(t_r)=\dot{\varphi}(t_r)\nabla t_r \tag{4.14}$$

$$\nabla\vec{A}(t_r)=(\nabla t_r)\dot{\vec{A}} \tag{4.15}$$

$$\nabla\times\vec{A}(t_r)=\nabla t_r\times\dot{\vec{A}}=-\dot{\vec{A}}\times\nabla t_r \tag{4.16}$$

$$\nabla\cdot\vec{A}(t_r)=\nabla t_r\cdot\dot{\vec{A}} \tag{4.17}$$

需要注意的是上面几式的张量阶数，从上至下依次为：矢量（1阶）、张量（2阶）、矢量、标量（0阶）。对此，一种形象的理解是按∇算子的作用类型分类：

- 若∇直接向右作用于某物理量，相当于将该量升了一阶。一个熟悉的例子是求梯度(grad)；
- 若∇向右叉乘作用于某物理量，得到的量与之阶数相同。一个熟悉的例子是求旋度(rot)；
- 若∇向右点乘作用于某物理量，相当于将该量降了一阶。一个熟悉的例子是求散度(div)。