

2022 秋易为老师量子力学 B

习题三参考解答

刘丰铨 宋冰睿

2022 年 10 月 3 日

1 第 1 题

请证明：

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\hat{D}] = -\hat{A}\hat{C}\{\hat{D}, \hat{B}\} + \hat{A}\{\hat{C}, \hat{B}\}\hat{D} - \hat{C}\{\hat{D}, \hat{A}\}\hat{B} + \{\hat{C}, \hat{A}\}\hat{D}\hat{B}$$

解：直接将等式右端展开即可。为熟悉对易子性质，我们给出另一种方法。首先，我们利用

$$[\hat{P}\hat{Q}, \hat{R}] = \hat{P}[\hat{Q}, \hat{R}] + [\hat{P}, \hat{Q}]\hat{R} \quad (1.1)$$

将欲证等式左端拆解成更易于处理的形式

$$\begin{aligned} [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\hat{D}] &= \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}\hat{D}] + [\hat{A}, \hat{C}\hat{D}]\hat{B} \\ &= \hat{A}\hat{C}[\hat{B}, \hat{D}] + \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}]\hat{D} + \hat{C}[\hat{A}, \hat{D}]\hat{B} + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{D}\hat{B} \end{aligned} \quad (1.2)$$

此时利用

$$[\hat{P}, \hat{Q}] = \{\hat{P}, \hat{Q}\} - 2\hat{Q}\hat{P} \quad (1.3)$$

以及对易子的交换反对称性和反对易子的交换对称性，有：

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{C}[\hat{B}, \hat{D}] + \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}]\hat{D} + \hat{C}[\hat{A}, \hat{D}]\hat{B} + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{D}\hat{B} &= (-\hat{A}\hat{C}\{\hat{D}, \hat{B}\} + 2\hat{A}\hat{C}\hat{B}\hat{D}) + (\hat{A}\{\hat{C}, \hat{B}\}\hat{D} - 2\hat{A}\hat{C}\hat{B}\hat{D}) \\ &\quad + (-\hat{C}\{\hat{D}, \hat{A}\}\hat{B} + 2\hat{C}\hat{A}\hat{D}\hat{B}) + (\{\hat{C}, \hat{A}\}\hat{D}\hat{B} - 2\hat{C}\hat{A}\hat{D}\hat{B}) \\ &= -\hat{A}\hat{C}\{\hat{D}, \hat{B}\} + \hat{A}\{\hat{C}, \hat{B}\}\hat{D} - \hat{C}\{\hat{D}, \hat{A}\}\hat{B} + \{\hat{C}, \hat{A}\}\hat{D}\hat{B} \end{aligned} \quad (1.4)$$

即为欲证等式右端。

2 第 2 题

请证明：

(a)

$$[\hat{A}, \hat{B}^n] = n[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n-1}, \quad \text{if } [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$$

(b)

$$[\hat{A}^n, \hat{B}] = n\hat{A}^{n-1}[\hat{A}, \hat{B}], \quad \text{if } [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$$

(c)

$$[\hat{C}, \hat{A} \cdot \hat{B}] = [\hat{C}, \hat{A}] \cdot \hat{B} + \hat{A} \cdot [\hat{C}, \hat{B}]$$

(d)

$$[\hat{C}, \hat{A} \times \hat{B}] = [\hat{C}, \hat{A}] \times \hat{B} + \hat{A} \times [\hat{C}, \hat{B}]$$

2.1 2a

解：根据对易子的性质1.1和题干中的对易关系, 有:

$$[\hat{A}, \hat{B}^k] = [\hat{A}, \hat{B}^{k-1} \cdot \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{B}^{k-1}] \hat{B} + \hat{B}^{k-1} [\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{B}^{k-1}] \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] \hat{B}^{k-1} \quad (2.1)$$

注意到上式中 $[\hat{A}, \hat{B}^{k-1}]$ 与目标对易子形式上的一致性, 利用数学归纳法证明. 首先, 当 $n = 1$ 时, 欲证关系显然成立. 接下来, 我们假设对于 $n = k - 1$ ($k > 2, k \in \mathbb{Z}$), 结论成立, 亦即

$$[\hat{A}, \hat{B}^{k-1}] = (k - 1) [\hat{A}, \hat{B}] \hat{B}^{k-2} \quad (2.2)$$

将上式代入2.1, 简单化简后立即得到:

$$[\hat{A}, \hat{B}^k] = (k - 1) [\hat{A}, \hat{B}] \hat{B}^{k-1} + [\hat{A}, \hat{B}] \hat{B}^{k-1} = k [\hat{A}, \hat{B}] \hat{B}^{k-1} \quad (2.3)$$

根据 k 在合法取值范围内的任意性, 欲证结论对所有正整数 n 成立.

2.2 2b

解：常规解法与上节完全相同, 不再赘述, 这里为了帮助同学们熟悉对易子的反对称性质, 采用如下证法.

在上节所得结论

$$[\hat{A}, \hat{B}^n] = n [\hat{A}, \hat{B}] \hat{B}^{n-1} \quad (2.4)$$

中, 在等号左端交换 \hat{A} 和 \hat{B}^n 的位置, 并在等号右端相应地添上负号, 并再次利用对易子的反对称性质, 有:

$$[\hat{B}^n, \hat{A}] = -n [\hat{A}, \hat{B}] \hat{B}^{n-1} = n [\hat{B}, \hat{A}] \hat{B}^{n-1} \quad (2.5)$$

在上式中将 \hat{A} 用 \hat{B} 替代而将 \hat{B} 用 \hat{A} 替代 (注意: 此处的替代与此前的交换完全不同, 其合理性亦不依赖于对易子的性质), 得到:

$$[\hat{A}^n, \hat{B}] = n [\hat{A}, \hat{B}] \hat{A}^{n-1} \quad (2.6)$$

此时 2a 中的条件

$$[\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 \quad (2.7)$$

相应地改变为

$$[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{A}]] = 0 \quad (2.8)$$

显然恰好与 2b 题干中的条件等价. 在式2.6中利用之, 得到:

$$[\hat{A}^n, \hat{B}] = n \hat{A}^{n-1} [\hat{A}, \hat{B}] \quad (2.9)$$

根据 n 在正整数范围内取值的任意性，以上即为欲证结论.

2.3 2c

解：利用 Einstein 求和约定和对易子性质1.1，有：

$$[\hat{C}, \hat{A}_i \hat{B}_i] = [\hat{C}, \hat{A}_i] \hat{B}_i + \hat{A}_i [\hat{C}, \hat{B}_i] = [\hat{C}, \hat{A}]_i \hat{B}_i + \hat{A}_i [\hat{C}, \hat{B}]_i \quad (2.10)$$

即得所证.

2.4 2d

解：利用 Einstein 求和约定和对易子性质1.1，有：

$$[\hat{C}, \varepsilon_{ijk} \hat{A}_j \hat{B}_k] = \varepsilon_{ijk} [\hat{C}, \hat{A}_j] \hat{B}_k + \varepsilon_{ijk} \hat{A}_j [\hat{C}, \hat{B}_k] = \varepsilon_{ijk} [\hat{C}, \hat{A}]_j \hat{B}_k + \varepsilon_{ijk} \hat{A}_j [\hat{C}, \hat{B}]_k \quad (2.11)$$

即得所证.

3 第3题

请根据角动量算符的对易关系，证明：

(a)

$$[\hat{L}_\alpha, \hat{p}^2] = 0, \quad \alpha = x, y, z$$

(b)

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar \hat{L}_z, \quad \text{in which } \hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$$

(c)

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_\alpha] = 0, \quad \alpha = x, y, z$$

3.1 3a

解：由于

$$[\hat{L}_\alpha, \hat{p}_\mu] = [\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{r}_\beta \hat{p}_\gamma, \hat{p}_\mu] \quad (3.1)$$

利用基本对易关系

$$[\hat{r}_\alpha, \hat{r}_\beta] = 0 \quad (3.2)$$

$$[\hat{p}_\alpha, \hat{p}_\beta] = 0 \quad (3.3)$$

$$[\hat{r}_\alpha, \hat{p}_\beta] = i\hbar \hat{I} \delta_{\alpha\beta} \quad (3.4)$$

其中 \hat{I} 为单位算符，有：

$$[\hat{L}_\alpha, \hat{p}_\mu] = i\hbar \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{I} \delta_{\beta\mu} \hat{p}_\gamma = i\hbar \varepsilon_{\alpha\mu\gamma} \hat{p}_\gamma \quad (3.5)$$

因此

$$[\hat{L}_\alpha, \hat{p}_\mu \hat{p}_\mu] = 2i\hbar \varepsilon_{\alpha\mu\gamma} \hat{p}_\mu \hat{p}_\gamma = 0 \quad (3.6)$$

其中已利用对易子的性质1.1. 以上即为欲证结论.

3.2 3b

解: 根据角动量算符的基本对易关系

$$[\hat{L}_\alpha, \hat{L}_\beta] = i\hbar \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{L}_\gamma \quad (3.7)$$

以及对易子的线性性, 有:

$$\begin{aligned} [\hat{L}_+, \hat{L}_-] &= [\hat{L}_x, \hat{L}_x] - i[\hat{L}_x, \hat{L}_y] + i[\hat{L}_y, \hat{L}_x] + [\hat{L}_y, \hat{L}_y] \\ &= 0 - i(i\hbar \hat{L}_z) + i(-i\hbar \hat{L}_z) + 0 \\ &= 2\hbar \hat{L}_z \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.3 3c

解: 根据角动量算符的基本对易关系3.7和对易子的性质, 有:

$$[\hat{L}_\beta \hat{L}_\beta, \hat{L}_\alpha] = i\hbar \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{L}_\beta \hat{L}_\gamma + i\hbar \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{L}_\gamma \hat{L}_\beta = i\hbar \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \{\hat{L}_\beta, \hat{L}_\gamma\} \quad (3.9)$$

注意到上式中 $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ 关于 β, γ 交换反对称, 而反对易子 $\{\hat{L}_\beta, \hat{L}_\gamma\}$ 关于 β, γ 交换对称, 故而上式等号右边为零 (注: 角动量矢量算符与自身叉乘不为零, 见附录). 因此

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_\alpha] = 0 \quad (3.10)$$

即为欲证结论.

4 第4题

定义:

$$\hat{C} \equiv [\hat{A}, \hat{B}]$$

假设算符均与 λ 无关, 并在本题 (b)、(c) 两小题中假设:

$$[\hat{C}, \hat{A}] = [\hat{C}, \hat{B}] = 0$$

请证明:

(a)

$$\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda \hat{A}} = \hat{A} e^{\lambda \hat{A}} = e^{\lambda \hat{A}} \hat{A}$$

(b)

$$[\hat{A}, e^{\lambda \hat{B}}] = \lambda \hat{C} e^{\lambda \hat{B}}$$

(c)

$$e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})} = e^{\lambda \hat{A}} e^{\lambda \hat{B}} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 \hat{C}}$$

4.1 4a

解：根据算符函数的定义（亦即算符函数 $f(\hat{A})$ 可表达为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近展开后将 x 替换为 \hat{A} 的形式），有：

$$e^{\lambda\hat{A}} = \hat{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \hat{A}^n \quad (4.1)$$

其中 \hat{I} 为单位算符，因而

$$\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda\hat{A}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \hat{A}^n = \hat{A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \hat{A}^n = \hat{A} \left(\hat{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \hat{A}^n \right) = \hat{A} e^{\lambda\hat{A}} \quad (4.2)$$

显然 \hat{A} 与其自身对易，故有：

$$\hat{A} e^{\lambda\hat{A}} = e^{\lambda\hat{A}} \hat{A} \quad (4.3)$$

综上所述，

$$\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda\hat{A}} = \hat{A} e^{\lambda\hat{A}} = e^{\lambda\hat{A}} \hat{A} \quad (4.4)$$

即为欲证结论。

4.2 4b

解：根据以算符为自变量的指数函数定义4.1以及 3c 的结论2.3，有：

$$\begin{aligned} [\hat{A}, e^{\lambda\hat{B}}] &= \left[\hat{A}, \hat{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \hat{B}^n \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} n [\hat{A}, \hat{B}] \hat{B}^{n-1} \\ &= \lambda \hat{C} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \hat{B}^n = \lambda \hat{C} e^{\lambda\hat{B}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

其中第三个等号的处理与上题中的过程一致。

4.3 4c

解：注意到分别对各项利用幂级数不易处理本问题，我们转而考虑将等号两端的表达式分别视作一个整体，即令：

$$\hat{f}(\lambda) = e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})} \quad (4.6)$$

$$\hat{g}(\lambda) = e^{\lambda\hat{A}} e^{\lambda\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}} \quad (4.7)$$

并尝试分析两函数各阶导数的性质。首先，我们有：

$$\frac{d\hat{f}(\lambda)}{d\lambda} = e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})} (\hat{A} + \hat{B}) \quad (4.8)$$

特别地，在 $\lambda=0$ 处，

$$\left(\frac{d\hat{f}(\lambda)}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} = \hat{A} + \hat{B} \quad (4.9)$$

因为 $(\hat{A} + \hat{B})$ 与 λ 无关, 所以容易证明:

$$\left(\frac{d^n \hat{f}(\lambda)}{d\lambda^n} \right)_{\lambda=0} = (\hat{A} + \hat{B})^n \quad (4.10)$$

而利用 4a 和 4b 的结论, 有:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{g}(\lambda)}{d\lambda} &= e^{\lambda\hat{A}} \hat{A} e^{\lambda\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}} + e^{\lambda\hat{A}} e^{\lambda\hat{B}} \hat{B} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}} - \lambda e^{\lambda\hat{A}} e^{\lambda\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}} \hat{C} \\ &= e^{\lambda\hat{A}} [\hat{A}, e^{\lambda\hat{B}}] e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}} + e^{\lambda\hat{A}} e^{\lambda\hat{B}} \hat{A} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}} + e^{\lambda\hat{A}} e^{\lambda\hat{B}} \hat{B} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}} - \lambda e^{\lambda\hat{A}} e^{\lambda\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}} \hat{C} \\ &= \lambda e^{\lambda\hat{A}} e^{\lambda\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}} \hat{C} + e^{\lambda\hat{A}} e^{\lambda\hat{B}} (\hat{A} + \hat{B}) e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}} - \lambda e^{\lambda\hat{A}} e^{\lambda\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}} \hat{C} \\ &= e^{\lambda\hat{A}} e^{\lambda\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}} (\hat{A} + \hat{B}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

其中在第二个等号处利用了

$$\hat{A} e^{\lambda\hat{B}} = [\hat{A}, e^{\lambda\hat{B}}] + e^{\lambda\hat{B}} \hat{A} \quad (4.12)$$

这一将不易处理的项换成对应的已知对易于另一易于处理的项之和或差的处理方法非常重要, 并将在今后的学习中经常出现, 请同学们务必加以掌握. 同理于关于 $\hat{f}(\lambda)$ 的讨论, 由 $(\hat{A} + \hat{B})$ 与 λ 无关可以得到:

$$\left(\frac{d^n \hat{g}(\lambda)}{d\lambda^n} \right)_{\lambda=0} = (\hat{A} + \hat{B})^n \quad (4.13)$$

从而我们得知, $\hat{f}(\lambda)$ 和 $\hat{g}(\lambda)$ 关于 λ 的各阶导函数在 $\lambda = 0$ 处形式完全相同, 同时显然两函数本身在 $\lambda = 0$ 处也相等. 利用两函数在 $\lambda = 0$ 的幂级数展开式, 有:

$$\hat{f}(\lambda) = \hat{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\hat{A} + \hat{B})^n}{n!} \lambda^n = \hat{g}(\lambda) \quad (4.14)$$

即

$$e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})} = e^{\lambda\hat{A}} e^{\lambda\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}} \quad (4.15)$$

正是欲证结论.

讨论:

1、用同样的方法可以证明著名的 Baker-Campbell-Hausdorff 公式:

$$e^{\lambda\hat{A}} \hat{B} e^{-\lambda\hat{A}} = \hat{B} + \lambda [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\lambda^2}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (4.16)$$

2、本题中所证结论又称为 Glauber 公式. 另一种可考虑采用的证法为考虑

$$\hat{h}(\lambda) = e^{-\lambda(\hat{A}+\hat{B})} e^{\lambda\hat{A}} e^{\lambda\hat{B}} \quad (4.17)$$

对 λ 求导并处理, 得到微分方程, 解得:

$$\hat{h}(\lambda) = e^{\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}} \quad (4.18)$$

即可证得结论.

附录：角动量算符叉乘自身的结果说明（对应 3c 题）：

$$\begin{aligned}
 (\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{L}})_\alpha &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{L}_\beta \hat{L}_\gamma \\
 &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} (\varepsilon_{\beta\mu\nu} \hat{r}_\mu \hat{p}_\nu) (\varepsilon_{\gamma\xi\zeta} \hat{r}_\xi \hat{p}_\zeta) \\
 &= (\delta_{\alpha\xi} \delta_{\beta\zeta} - \delta_{\alpha\zeta} \delta_{\beta\xi}) \varepsilon_{\beta\mu\nu} \hat{r}_\mu \hat{p}_\nu \hat{r}_\xi \hat{p}_\zeta \\
 &= \varepsilon_{\beta\mu\nu} \hat{r}_\mu \hat{p}_\nu \hat{r}_\alpha \hat{p}_\beta - \varepsilon_{\beta\mu\nu} \hat{r}_\mu \hat{p}_\nu \hat{r}_\beta \hat{p}_\alpha \\
 &= \varepsilon_{\beta\mu\nu} \hat{r}_\mu \hat{p}_\nu [\hat{r}_\alpha, \hat{p}_\beta] \\
 &= i\hbar \delta_{\alpha\beta} \hat{L}_\beta = i\hbar \hat{L}_\alpha
 \end{aligned}$$

亦即

$$\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{L}} = i\hbar \hat{\mathbf{L}} \neq 0$$

其中已利用 Levi-Civita 符号和 Kronecker 符号的关系

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\gamma\xi\zeta} = \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\xi\zeta} = \delta_{\alpha\xi} \delta_{\beta\zeta} - \delta_{\alpha\zeta} \delta_{\beta\xi}$$

请同学们务必关注量子力学中算符运算与经典力学中矢量运算的差别. 一般而言, 在所讨论的问题涉及彼此不对易的算符时, 倘若需要利用经典力学中矢量运算的结论, 最好加以验证或证明.