2022 秋易为老师量子力学 B
习题一参考解答

刘丰铨　　宋冰睿

2022 年 9 月 15 日

1　第 1 题

根据 Bohr 原子模型角动量量子化的条件，假设电子轨道为圆形，推导氢原子能级公式，计算基态到第一激发态的能量差.

解：由 Bohr 给出的角动量量子化条件：

$$L = n\hbar, \qquad n \in \mathbb{N}^+ \tag{1.1}$$

令第 n 条轨道半径为 r_n，其中电子运动速率为 v_n，则有：

$$m_e v_n r_n = n\hbar \tag{1.2}$$

同时，根据圆周运动的动力学条件，有：

$$\frac{m_e v_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} \tag{1.3}$$

由上式即得：

$$v_n = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r_n}} \tag{1.4}$$

代入式1.2，得：

$$r_n = n^2\hbar^2\frac{4\pi\varepsilon_0}{m_e e^2} \tag{1.5}$$

根据 Virial 定理（或分别计算动能和势能），可知轨道能量的大小是相应轨道上势能大小的 1/2 倍，故：

$$E_n = \frac{1}{2}V_n = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{1}{n^2}\frac{m_e}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \tag{1.6}$$

因此，基态到第一激发态的能量差为：

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{3}{4}\frac{m_e}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \tag{1.7}$$

其数值为 10.2eV 或 1.63×10^{-18}J.

2　第 2 题

估算能量为 1eV，1keV 和 1MeV 的电子的 de Broglie 波长. 金属 Ni 的晶格间距约为 0.09nm，试估算为了用 Ni 晶格观测电子波动性，电子的能量大概应该在什么量级.

解：对于能量为 1eV 和 1keV 的系统，首先不考虑相对论，分别得到对应电子的运动速度大小：

$$v_1 = \sqrt{\frac{2E_{k1}}{m_e}} = 5.93 \times 10^5\ \mathrm{m/s} \tag{2.1}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2E_{k2}}{m_e}} = 1.88 \times 10^7\ \mathrm{m/s} \tag{2.2}$$

倘若我们认为运动速度小于光速的 1/10 时即不必考虑相对论效应，那么以上两种情况都符合该要求. 由此，我们无需对质量进行修正，即有对应的 de Broglie 波长：

$$\lambda_1 = \frac{h}{m_e v_1} = 1.23 \times 10^{-9}\ \mathrm{m} \tag{2.3}$$

$$\lambda_2 = \frac{h}{m_e v_2} = 3.87 \times 10^{-11}\ \mathrm{m} \tag{2.4}$$

然而，对于能量为 1MeV 的电子，我们显然必须考虑相对论效应，否则得到的电子运动速度将超过光速. 根据动能的表达式，我们有：

$$E_{k3} = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (p_3 c)^2} - m_e c^2 \tag{2.5}$$

解得：

$$p_3 = 7.60 \times 10^{-22}\ \mathrm{m/s} \tag{2.6}$$

因此有对应的 de Broglie 波长：

$$\lambda_3 = \frac{h}{p_3} = 8.72 \times 10^{-13}\ \mathrm{m} \tag{2.7}$$

倘若想要使用 Ni 晶格观测电子波动性，电子的 de Broglie 波长大致与晶格常数同量级. 结合以上结果，可知电子的能量大概应该在 100eV 或 1keV 量级.

3　第 3 题

已知气体分子热运动平均速率对应的物质波长称为热力学 de Broglie 波长，估算室温下大气分子的热力学 de Broglie 波长. 若气体具有宏观量子效应（即成为量子简并气体）的条件为分子间物质波相互交叠产生干涉，试说明室温下的大气是否为量子简并气体（设大气分子平均间距约为 10^{-7}m）. 估算密度为 $10^{-14}\mathrm{cm}^{-3}$ 的稀薄钠原子气体成为量子简并气体的温度.

解：气体分子热运动平均速率的表达式为：

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \tag{3.1}$$

取质量为大气分子平均质量 29u，室温为 293.15K，计算得：

$$\bar{v} = 4.63 \times 10^2\ \mathrm{m/s} \tag{3.2}$$

对应的 de Broglie 波长为：

$$\lambda = \frac{h}{m\bar{v}} = 2.97 \times 10^{-11}\ \mathrm{m} \tag{3.3}$$

远远小于分子平均间距，此时气体分子呈现粒子性，不产生干涉，因此不是量子简并气体.

对于密度为 $10^{-14}\ \mathrm{cm}^{-3}$ 的钠原子气体，有原子间平均间隔：

$$d = \sqrt[3]{10^{-14}\ \mathrm{cm}^{-3}} = 2.15 \times 10^{-7}\ \mathrm{m} \tag{3.4}$$

如前所述，我们要求钠原子气体的 de Broglie 波长与 d 同量级. 作为估算，不妨取等，于是有：

$$\overline{v_{Na}} = \frac{h}{m_{Na}\lambda_{Na}} = 8.05 \times 10^{-2}\ \mathrm{m/s} \tag{3.5}$$

根据式3.1，有：

$$T_{Na} = \frac{\overline{v_{Na}}^2 \pi m_{Na}}{8k_B} = 7.04 \times 10^{-6}\ \mathrm{K} \tag{3.6}$$

即所求温度大概在 10^{-6}K 量级.

4 第 4 题

J.J. Thomson 在阴极射线管中测电子轨道的时候，电子的能量约为 10eV，电子束截面线度约为 10^{-4}m. 试用不确定性原理定性说明这时电子轨道的概念是否适用. 这个实验中电子体现的是粒子性还是波动性？

解：仿照本次作业第 2 题的方法，容易得到电子的 de Broglie 波长：

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_eE_k}} = 3.88 \times 10^{-10}\ \mathrm{m} \tag{4.1}$$

远远小于截面的线度（后者可视作本实验中的空间分辨率），因此电子体现粒子性，轨道概念仍适用（可以理解为电子保持在电子束内运动）.