① 强行展开

② 下标法：求和约定——同一单项式中具有相同下标的字母进行求和

eg. $\vec{A}=A_1\hat{x}_1+A_2\hat{x}_2+A_3\hat{x}_3=A_i\hat{x}_i \quad (i=1,2,3)$

$$A_iB_{ik}=\sum_{i=1}^{3}A_iB_{ik}$$

· 对于单位正交的坐标系基矢 $\hat{x}_i,\hat{x}_j$：$\hat{x}_i\cdot\hat{x}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

· Levi-Civita 符号 $\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1, & ijk\text{为偶排列}\\ -1, & ijk\text{为奇排列}\\ 0, & \text{其他，例如 } i=1,j=1,k=2\end{cases} \quad (i,j,k=1,2,3)$

$\Rightarrow$ ε_{ijk} 完全反对称，即 $\varepsilon_{ijk}=-\varepsilon_{ikj}=\varepsilon_{kij}$

· 点乘 $\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_i\hat{x}_i)\cdot(B_j\hat{x}_j)$

$$=A_iB_j(\hat{x}_i\cdot\hat{x}_j)=A_iB_j\delta_{ij}=A_iB_i$$

· 叉乘 $\vec{A}\times\vec{B}=\varepsilon_{ijk}A_iB_j\hat{x}_k$

③ 符号法：$\nabla\cdot(\vec{A}+\vec{B})=\nabla_A\cdot(\vec{A}+\vec{B})+\nabla_B\cdot(\vec{A}+\vec{B})$

↓仅作用于 $\vec{A}$

$$=\nabla_A\cdot\vec{A}+\nabla_B\cdot\vec{B}=\nabla\cdot\vec{A}+\nabla\cdot\vec{B}$$

等价

证明：· $d\varphi=d\vec{r}\cdot\nabla\varphi$

下标：$d\varphi=\partial_i\varphi\, dx_i$

$$=\partial_i\varphi\, dx_j\delta_{ij}$$
$$=(\partial_i\varphi\hat{x}_i)\cdot(dx_j\hat{x}_j)$$
$$=d\vec{r}\cdot\nabla\varphi$$

· $\nabla f=f'(u)\nabla u$

下标：$\nabla f=\partial_i f\hat{x}_i$

$$=\frac{\partial f}{\partial x_i}\hat{x}_i=\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x_i}\hat{x}_i=f'(u)\nabla u$$

· $\nabla\cdot(\varphi\vec{A})=\varphi\nabla\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot\nabla\varphi$

下标：$\nabla\cdot(\varphi\vec{A})=\partial_i\hat{x}_i\cdot(\varphi A_j\hat{x}_j)$

$$=\partial_i(\varphi A_j)\delta_{ij}$$
$$=\partial_i(\varphi A_i)$$
$$=A_i\partial_i\varphi+\varphi\partial_iA_i$$
$$=\vec{A}\cdot\nabla\varphi+\varphi\nabla\cdot\vec{A}$$

* $\nabla\cdot(\vec A\times\vec B) = \vec B\cdot(\nabla\times\vec A) - \vec A\cdot(\nabla\times\vec B)$

下标: $\nabla\cdot(\vec A\times\vec B) = (\partial_i \hat x_i)\cdot(\varepsilon_{jkl}A_jB_k\hat x_l)$

$= \varepsilon_{jkl}(\partial_i(A_jB_k))(\hat x_i\cdot\hat x_l)$

$= \varepsilon_{jkl}(\partial_i(A_jB_k))\delta_{il}$

$= \varepsilon_{jki}(\partial_i(A_jB_k))$

$= \underline{\varepsilon_{ijk}}B_k\underline{\partial_iA_j} + \underline{\varepsilon_{ijk}}A_j\underline{\partial_iB_k}$

$= B_k\varepsilon_{ijk}\partial_iA_j - A_j\varepsilon_{ikj}\partial_iB_k$

$= \vec B\cdot(\nabla\times\vec A) - \vec A\cdot(\nabla\times\vec B)$

符号: $\nabla\cdot(\vec A\times\vec B) = \nabla_A\cdot(\vec A\times\vec B)+\nabla_B\cdot(\vec A\times\vec B)$

$=\vec B\cdot(\nabla_A\times\vec A) - \nabla_B\cdot(\vec B\times\vec A)$

$=\vec B\cdot(\nabla_A\times\vec A) - \vec A\cdot(\nabla_B\times\vec B)$ （混合积: $\vec A\cdot(\vec B\times\vec C) = \vec C\cdot(\vec A\times\vec B) = \vec B\cdot(\vec C\times\vec A)$）

$=\vec B\cdot(\nabla\times\vec A)-\vec A\cdot(\nabla\times\vec B)$

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

· $\nabla(\vec A\cdot\vec B)$

下标: $\nabla(\vec A\cdot\vec B) = \partial_i(A_jB_j)\hat x_i$

$= A_j\partial_iB_j\hat x_i + B_j\partial_iA_j\hat x_i$

$(\vec A\cdot\nabla)\vec B + (\vec B\cdot\nabla)\vec A + \vec A\times(\nabla\times\vec B)+\vec B\times(\nabla\times\vec A)$

$= A_i\partial_iB_j\hat x_j + B_i\partial_iA_j\hat x_j + \underline{\varepsilon_{ijk}A_i(\varepsilon_{mnj}\partial_mB_n)\hat x_k} + \varepsilon_{ijk}B_i(\varepsilon_{mnj}\partial_mA_n)\hat x_k$

$= \cancel{A_i\partial_iB_j\hat x_j} + \cancel{B_i\partial_iA_j\hat x_j} + (A_i\partial_jB_i - \cancel{A_i\partial_iB_j})\hat x_j + (B_i\partial_jA_i - \cancel{B_i\partial_iA_j})\hat x_j$

$= A_i\partial_jB_i\hat x_j + B_i\partial_jA_i\hat x_j$ #

注: $\varepsilon_{ijk}A_i(\varepsilon_{mnj}\partial_mB_n)\hat x_k$

$= -\underline{\varepsilon_{ikj}\varepsilon_{mnj}}A_i\partial_mB_n\hat x_k$

$= -\underline{(\delta_{im}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{km})}A_i\partial_mB_n\hat x_k$

$= -A_i\partial_iB_k\hat x_k + A_i\partial_kB_i\hat x_k$

$= A_i\partial_jB_i\hat x_j - A_i\partial_iB_j\hat x_j$ （将k换为j，不影响求和）

符号: $\nabla(\vec A\cdot\vec B) = \nabla_A\vec A\cdot\vec B + \nabla_B\vec B\cdot\vec A$

$= (\nabla_A\vec A - \vec A\nabla_A)\cdot\vec B + \vec A\nabla_A\cdot\vec B + (\nabla_B\vec B - \vec B\nabla_B)\cdot\vec A + \vec B\nabla_B\cdot\vec A$

$= \vec B\times(\nabla\times\vec A) + \vec B\cdot\nabla\vec A + \vec A\times(\nabla\times\vec B) + \vec A\cdot\nabla\vec B$

注: $\vec A\times(\vec C\times\vec B) = \vec B\cdot(\vec A\vec C - \vec C\vec A) = (\vec C\vec A - \vec A\vec C)\cdot\vec B$

∇_A 因只作用于A上，此时可完全当成一个普通矢量

其他公式方法类似，不再详解，有问题可问任一助教（不要求掌握，欣赏即可）

Remark：强行展开中 $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = 0$ （这题最好加"一阶二阶偏导连续）

$\vec{A}\times(\nabla\times\vec{A}) = \frac{1}{2}\nabla A^2 - (\vec{A}\cdot\nabla\vec{A})$ 简单证法：由 $\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \cdots$ 中 $\vec{A}=\vec{B}$

$\vec{r}=(x,y,z)$ ⇒ $d\vec{r}=(dx,dy,dz)$，不是 $\vec{r}(x,y,z)$ 未知函数

"·"要书写规范，表示点乘！ $(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$ $\varphi\nabla\cdot\vec{A}$

标量与矢量不能点乘

∇ 作用于后面 !!! 错误示例 $(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} = \frac{\partial A_x}{\partial x}$ -----

$\vec{B}(\vec{A}\cdot\nabla) \neq (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \cdots$ 不可直接令 $\vec{A}=\nabla$，套公式无法保证什么地方用了交换律，只有当如 ∇A，更具 ∇ 只作用于 A 时可直接把 ∇ 当矢量，见第[illegible]

*1.2 $F = kq_1q_2/r^2$

令 $q_1=q_2=1C$，$r=1m$

则 $F \approx 8.9876\times10^9\ kg\cdot m/s^2$

$= 8.9876\times10^{14}\ g\cdot cm/s^2$

若 $1C \Leftrightarrow x\ esu$

则 $F = q_1q_2/r^2$

$\Rightarrow x = \sqrt{8.9876\times10^{14}\times100}$

$\approx 2.9979\times10^9$

$\therefore 1C \Leftrightarrow 2.9979\times10^9\ esu$

$1esu \Leftrightarrow 3.3356\times10^{-10}\ C$

$\therefore e = 4.774\times10^{-10}\ esu$

$\approx 1.5924\times10^{-9}\ C$

注意：esu 与 C 只是对应关系，并非 km 与 m 之间有直接的转换关系（类比于温度单位 K、°C）

正确的转换关系应为 $\frac{1C}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} \approx 2.9979\times10^9\ esu$

1.3 (1) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^2} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$

$\Rightarrow Q_1Q_2 = 4\pi\varepsilon_0 Gm_1m_2$

$Q = Q_1+Q_2 \geq 2\sqrt{Q_1Q_2} \approx 1.14\times10^{14}C$

(2) $\begin{cases} Q_1Q_2 = 4\pi\varepsilon_0 Gm_1m_2 \\ \frac{Q_1}{m_1} = \frac{Q_2}{m_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 G}\,m_1 \\ Q_2 = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 G}\,m_2 \end{cases}$ $\therefore Q = Q_1+Q_2 \approx 5.21\times10^{14}C$

1.6 ① 距圆心 z 处 $\vec{E}=\frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)}\hat{z}$

$d\vec{F}=\vec{E}dq$, $dq=\lambda dz$

$\vec{F}=\int d\vec{F}=\int_0^{+\infty}\frac{Q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dz=\frac{Q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{Q\lambda}{4\pi\varepsilon_0R}\hat{z}$

②  对A点等效

* 1.7 距圆心 x_0 处 $\vec{F}=-\frac{Qqx_0}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x_0^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$

$=\frac{-Qqx_0R^{-3}}{4\pi\varepsilon_0}\left(1+\underbrace{\frac{x_0^2}{R^2}}_{\text{真正的小量}}\right)^{-\frac{3}{2}}\hat{z}$

$\simeq-\frac{Qqx_0}{4\pi\varepsilon_0R^3}\hat{z}$ $\left(\frac{d}{d\frac{x_0}{R}}\left[\frac{x_0}{R}\left(1+\frac{x_0^2}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]\Big|_{\frac{x_0}{R}\to0}=1 \therefore \frac{x_0}{R}\left(1+\frac{x_0^2}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\simeq\frac{x_0}{R}\right)$

$\therefore m\omega^2=\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0R^3}$, $\omega=\sqrt{\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0mR^2}}$, $x=x_0\cos\sqrt{\frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0mR^3}}\,t$

Remark: ① 近似时分子分母同时作为一个整体展开后保留带有小量的第一项

此题可以仅近似分母是因为分子仅为 $\frac{x_0}{R}$ 的幂次!!!

若1.14, 1.15题分别近似分子分母易得到错误答案!

② 不要抄答案，自己算，不少同学抄答案写成了 $x=x_0\cos\sqrt{\frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0mR^3}t}$ ×

1.8 (隐藏条件：质心系中径向初始速度为0!)

① $F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$ $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ $a=\frac{F}{\mu}$ ② $t=$

$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt}=\frac{dv}{dr}v$

$\Rightarrow v=\sqrt{\frac{q_1q_2(r_0-r)}{2\pi\varepsilon_0\mu r_0r}}=\frac{dr}{dt}$

$\Rightarrow t=\sqrt{\frac{\pi^3\varepsilon_0\mu r_0^3}{-2q_1q_2}}$

Remark: ☆

* 1.10 $\varepsilon_0\cdot E\cdot2\pi rl=l\int_0^r(ar-br^3)2\pi rdr$, $0<r<R$ ☆

$\Rightarrow\vec{E}=\left(\frac{ar^2}{3\varepsilon_0}-\frac{br^4}{5\varepsilon_0}\right)\hat{r}$

$\varepsilon_0\cdot E\cdot2\pi rl=l\int_0^R(ar-br^3)\cdot2\pi rdr$, $r>R$

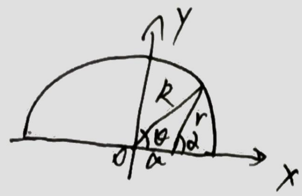
$\Rightarrow\vec{E}=\left(\frac{aR^3}{3\varepsilon_0r}-\frac{bR^5}{5\varepsilon_0r}\right)\hat{r}$, $r>R$

Remark: ① 柱坐标 dr $rd\varphi$ dz

球坐标 dr $r\sin\theta d\varphi$ $rd\theta$

② 场强为矢量，有方向 ☆☆

*1.11 ① 硬算 $E_{//}=0+E_{\perp}\neq 0$



$$dE_{//}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\cos\alpha$$

$$dq=\lambda_0\sin\theta\, R\,d\theta \qquad \cos\alpha=\frac{R^2-a^2-r^2}{2ra}$$

② 计算电势 $\varphi=\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}$

③ 等效法：$E_{//}=\int_0^{\pi}\frac{\lambda_0\sin\theta R\,d\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha=?$

考虑均匀分布的带电球壳：已知 $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sigma\cdot R\sin\theta d\theta\cdot R d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha$

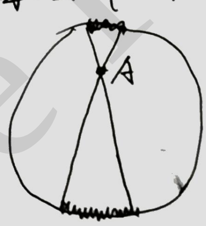
$$=2\pi\int_0^{\pi}\frac{\sigma R^2\sin\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha=0 \text{ (Gauss 或对称性分析)}$$

$\therefore E_{//}=0$

从物理上理解，相当于将球壳沿微分元的的界线切开，相同 $d\varphi$ 下，球壳切成的环的电荷线密度与弧长成正比，即与 θ 成 $\sin\theta$ 的关系

橘子瓣！

④ 由球壳对称面元在A点场强抵消，联想到可证圆弧上B、C两处线元在直径上水平场强相抵消，可自己尝试，但要注意，α极点不在圆心，并非简单的线元=弧度×距离



*1.12 ①硬算

②等效法

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d(\lambda R\tan\theta)}{(R/\cos\theta)^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda d\theta}{R}$$

等效：仅对O点成立！

仅在O点有上述等式！

因对等式两边积分时积分范围相同！

1.13 无限大直线 $dE=\frac{\lambda}{2\pi R\epsilon_0}$，$\lambda=\sigma R d\theta$

$$\therefore \vec{E}=\int_0^{\pi}\frac{\lambda}{2\pi R\epsilon_0}\sin\theta\,\hat{z}$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\sigma R\sin\theta}{2\pi R\epsilon_0}d\theta\,\hat{z}=\frac{\sigma}{\pi\epsilon_0}\hat{z}$$

注意：① σ 正负未知，方向不可说向下 or 向上 ② 不可拆分为半球面，因为面电荷密度等效后非均匀，求解麻烦

1.14 ① $\vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-2q}{r^2}+\frac{q}{(r-l)^2}+\frac{q}{(r+l)^2}\right)\hat{r}$

$\because (1+x)^{-2}\approx 1-2x+3x^2+\cdots$

而 $(r-l)^{-2}=r^{-2}(1-\underbrace{\frac{l}{r}}_{小量})^{-2}$ ☆

$=r^{-2}(1+2\frac{l}{r}+\underbrace{3\frac{l^2}{r^2}})$ 保留到带有 l 的第一项

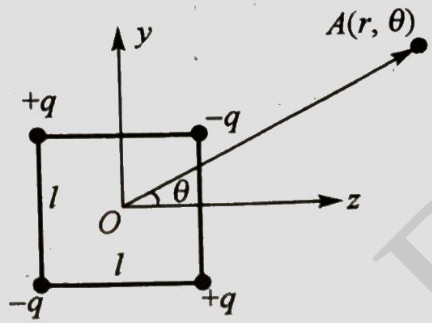
$\therefore \vec{E}\approx\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot 6q\frac{l^2}{r^4}\hat{r}$

② 先求电势再求 $\vec{E}$

~~[illegible]~~

$4\pi\varepsilon_0 r$

***1.18** 面电四极子如习题 1.18 图所示，点 $A(r,\theta)$ 与四极子共面，极轴（$\theta=0$）通过正方形中心并与两边平行. 设 $r \gg l$，求面电四极子在点 A 处产生的电势和电场强度.



习题 1.18 图

解 取无限远处为电势零点，电荷到 O 点的距离为 $a=l/\sqrt{2}$，则

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos(0.25\pi-\theta)}}+\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos(0.25\pi+\theta)}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos(0.75\pi-\theta)}}+\frac{-1}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos(0.75\pi+\theta)}}\right]$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left\{-\left[1+\left(\frac{a}{r}\right)^2-\frac{2a}{r}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]^{-1/2}+\left[1+\left(\frac{a}{r}\right)^2-\frac{2a}{r}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right]^{-1/2}\right.$$

$$\left.+\left[1+\left(\frac{a}{r}\right)^2+\frac{2a}{r}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right]^{-1/2}-\left[1+\left(\frac{a}{r}\right)^2+\frac{2a}{r}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]^{-1/2}\right\}$$

推导中用到如下恒等式：

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\pm\theta\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\mp\theta\right)$$

对远处（$r\gg l$），利用泰勒展开式

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\cdots=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\cdots$$

仅保留至二级小量，则上述电势表达式化为

$$\begin{aligned}U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\Bigg[&-1+\frac{a^2}{2r^2}-\frac{a}{r}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)-\frac{3a^2}{2r^2}\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\\&+1-\frac{a^2}{2r^2}+\frac{a}{r}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\frac{3a^2}{2r^2}\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\\&+1-\frac{a^2}{2r^2}-\frac{a}{r}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\frac{3a^2}{2r^2}\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\\&-1+\frac{a^2}{2r^2}+\frac{a}{r}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)-\frac{3a^2}{2r^2}\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\Bigg]\\=\frac{3qa^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}&\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]=\frac{3ql^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

下面从所得电势表达式出发计算电场（限于面电四极子所在平面）

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=-\nabla U=-\frac{\partial U}{\partial r}\boldsymbol{e}_r-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta\\&=-\frac{9ql^2\sin\theta\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\boldsymbol{e}_r+\frac{3ql^2\cos 2\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\boldsymbol{e}_\theta\end{aligned}$$

1.21 取高斯球面：$\varepsilon_0 E(r)\cdot 4\pi r^2=\int_0^r \frac{\rho_0 e^{-kr}}{r}\, 4\pi r^2 dr$

$$=\rho_0\int_0^r r e^{-kr}dr=-\frac{\rho_0}{k}\left(re^{-kr}\Big|_0^r-\int_0^r e^{-kr}dr\right)$$

$$=-\frac{\rho_0}{k}re^{-kr}-\frac{\rho_0}{k^2}\left(e^{-kr}-1\right)$$

故 $E(r)=\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2}e^{-kr}-\frac{1}{k}re^{-kr}\right)$

$$=\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 r^2k^2}\left[1-e^{-kr}(1+kr)\right]$$

ρ_0量纲实为面密度

注意：

(1) $\vec{E}=-\nabla\varphi$

$\Rightarrow$ (2) $\varphi=\int\vec{E}\cdot d\vec{l}$ 注意积分上下限

若无穷远处 $\varphi=0$

则 $\varphi=\int_{\vec{r}}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}$

$=-\int_{\infty}^{\vec{r}}\vec{E}\cdot d\vec{l}$

1.29. $\begin{cases}E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=+\frac{A}{2}(x^2+y^2+a^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x\\ E_y=Ay(x^2+y^2+a^2)^{-3/2}\\ E_z=0\end{cases}$ $\Rightarrow|\vec{E}|=A\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+a^2)^3}}$

1.30

[法一] $E(r<r_a)=\frac{1}{\varepsilon_0\cdot 4\pi r^2}\left(Ze+\int_0^r\rho\cdot 4\pi r^2dr\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(Ze+\frac{4}{3}\pi\rho r^3\right)\xrightarrow{\rho\triangleq-\frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi r_a^3}}\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{r}{r_a^3}\right)$

$\hookrightarrow\varphi(r<r_a)=\int_r^{r_a}E\,dr=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}-\frac{r^2}{2r_a^3}\right)\Big|_r^{r_a}=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}+\frac{r^2}{2r_a^3}-\frac{3}{2r_a}\right)$. [取 $\varphi(r=r_a)=0$]

[法二] $\varphi(r<r_a)=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r}+\int_0^r\frac{\rho\cdot 4\pi s^2ds}{4\pi\varepsilon_0 r}+\int_r^{r_a}\frac{\rho\cdot 4\pi s^2ds}{4\pi\varepsilon_0 s}=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r}-\frac{Ze}{\varepsilon_0\cdot\frac{4}{3}\pi r_a^3}\cdot\frac{1}{3}r^3-\frac{Ze}{\varepsilon_0\cdot\frac{4}{3}\pi r_a^3}\left(\frac{1}{2}r_a^2-\frac{1}{2}r^2\right)$

$=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{r^3}{r_a^3}-\frac{3}{2r_a}+\frac{3r^2}{2r_a^3}\right)$

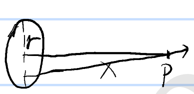
1.31 $-\frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=m\ddot{r}\Rightarrow\ddot{r}=-\frac{\rho q}{3\varepsilon_0 m}r$ 简谐．

$\hookrightarrow E(r<r_a)=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{e}_r=\cdots$

$\vec{E}=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{e}_r-\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta}=-\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{r}{r_a^3}\right)\hat{e}_r$

1.32 $\sigma=\rho dx\Rightarrow\begin{cases}-\frac{d}{2}\le x\le\frac{d}{2}\Rightarrow E=\int_{-d/2}^{x}\frac{\rho dx}{2\varepsilon_0}-\int_x^{d/2}\frac{\rho dx}{2\varepsilon_0}=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[\left(x+\frac{d}{2}\right)-\left(\frac{d}{2}-x\right)\right]\ \frac{\rho}{\varepsilon_0}x\\ x>\frac{d}{2}\Rightarrow E=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}d\\ x<-\frac{d}{2}\Rightarrow E=-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}d\end{cases}$

1.34 补偿原理



$\varphi_P'=\int_0^r\frac{\sigma\cdot 2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\int_0^r\frac{dr^2}{\sqrt{r^2+x^2}}$

$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{r^2+x^2}-x\right)$

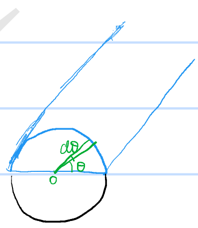
$\hookrightarrow E_{Px}'=-\frac{\partial\varphi_P'}{\partial x}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}}\right)$

$\hookrightarrow E_{Px}=E_{P0}-E_{Px}'=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}}$

以O为电势零点 $\Rightarrow\varphi_P=-\int_0^x E_{Px}dx=\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^x\frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}}dx$

$=-\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}2\sqrt{r^2+x^2}\Big|_0^x=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(r-\sqrt{r^2+x^2}\right)$

* 1.35



$\begin{cases}\text{面内：}E(r<R)=0\\ \text{外：}\sigma\cdot 2\pi Rh=\varepsilon_0 E(r)\cdot 2\pi rh\end{cases}$

$\hookrightarrow E(r>R)=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R}{r}$

故 单位长受力 $f_z=\int_0^\pi\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\sigma R d\theta\cdot\sin\theta=\frac{\sigma^2R}{\varepsilon_0}$

对两侧平均

为什么 $F=\int\langle\vec{E}\rangle dq$

$\vec{E}_{点外}=\vec{E}_{外}+E_{面}\hat{n}$

$\vec{E}_{点内}=\vec{E}_{外}-E_{面}\hat{n}$

$\therefore\ \vec{E}_{外}=\frac{1}{2}\left(\vec{E}_{点外}+\vec{E}_{点内}\right)$

$=\frac{1}{2}\langle\vec{E}\rangle$

1.36 (1) ① $E(r<R_1)=0$;

② $E(R_1<r<R_2)=\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$;

③ $E(r>R_2)=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}$;

(2) $\begin{cases}E(r<R_1)=E(r>R_2)=0\\ E(R_1<r<R_2)=\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}\end{cases}$

有通量的为侧面

关于唯一性定理：

真空：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0 \\ \nabla\cdot\vec{B}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B} \\ \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\partial_t\vec{E}\end{cases}$$ + 定解条件

从数学上理解：给定了一组定解条件，即有唯一的解。eg. 边界的电势

⇒ 保证了猜解的可行性，设置像电荷，其电场一定满足Maxwell方程，而若能满足定解条件，即满足了方程组的所有数学式，即为唯一的正确的解。

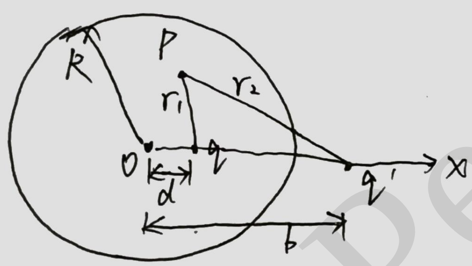
电像法：唯一性定理的应用

eg. 半径为R的导体球壳，内部距球心d处有点电荷q，求

(1) 球壳接地时球内$\vec{E}$与φ

(2) ---不---且带电量为Q时球内$\vec{E}$与φ

解：(1)



$$\begin{cases} db=R^2 \\ q'd=-Rq \end{cases}$$ 跟据题意有时可直接使用，

☆☆务必记住！但最好别直接搬出来

$$\Rightarrow \vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2+d^2-2rd\cos\theta}\vec{e}_{r_1}-\frac{R/d}{r^2+R^4/d^2-2r(R^2/d)\cos\theta}\vec{e}_{r_2}\right)$$

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}}-\frac{R}{\sqrt{r^2d^2+R^4-2rdR^2\cos\theta}}\right)$$

(2) 计算(1)中球壳带电量：求出$\vec{E}$后根据边值关系算出σ后积分可得 ☆☆☆ 与q或q'并无任何直接联系☆☆☆

(此题可用Gauss定理)

⇒ (1)中带电量为$-q$，但若点电荷在球外为q'，则带电量则为$-\frac{R}{d'}q'$ (见老师PPT)

∴ 设球壳外表面均匀分布虚拟面电荷$Q'=Q+q$（满足总电量为Q和等势条件）(错!!!)

∴ $\varphi_1=\varphi+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R}$，球内$\vec{E}$不变

注意：像电荷不可设在求解区域内，否则不满足电荷条件，即$\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$中$\rho$改变，即改变了方程！