电磁学A第四次习题课补充内容
正交曲线坐标系

宋冰睿

少年班学院，严济慈物理科技英才班

2022 年 4 月 12 日

1 引入

坐标系是物理学家描述世界的语言。在我们所处的这个三维空间中，最容易建立的就是直观的**直角坐标系(Cartesian Coordinates)**，直角坐标系也确实给我们处理物理问题带来了很多方便；然而，若考虑的问题是在一个具有特殊对称性的系统中发生的，直角坐标系有时就显得爱莫能助——这就需要新的坐标系来辅助我们。

众所周知，这里所谓“新的坐标系”在三维空间中一般是指**球坐标系(Spherical Coordinates)** 和**柱坐标系(Cylindrical Coordinates)**两种，它们分别适用于具有球对称性和柱对称性的系统。当然，三维空间中的坐标系也不仅仅只有这三种，我们还有沿质点运动轨道建立的所谓**自然坐标系(Natural Coordinates)**等，此处就不再赘述。

直角坐标系、球坐标系和柱坐标系都是**正交曲线坐标系(Orthogonal Curvilinear Coordinates)**。对“正交曲线”的一种理解是，在空间中任一点处的三个基矢$\{\hat{u}_a\}$满足正交归一条件

$$\hat{u}_a \cdot \hat{u}_b = \delta_{ab} \tag{1.1}$$

和轮换对称条件

$$\hat{u}_a \times \hat{u}_b = \varepsilon_{abc}\hat{u}_c \tag{1.2}$$

其中$a, b, c = 1, 2, 3$。这两个条件在上次习题课中已有提及。

倘若再记u_a为空间任一点的位矢在基矢$\hat{u}_a$上的分量，该点的位矢就是

$$\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3) \tag{1.3}$$

注意，本讲义余下部分默认不采用Einstein求和约定。

2 Lame系数

若将(1.3)式两端微分，就得到一段元位移

$$d\vec{l} = d\vec{r} = \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_a} du_a \triangleq \sum_{a=1}^{3} (h_a du_a)\, \hat{u}_a \tag{2.1}$$

上式定义了**Lame**系数

$$h_a \triangleq \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_a}\right| \tag{2.2}$$

和基矢

$$\hat{u}_a \triangleq \frac{1}{h_a}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_a} \tag{2.3}$$

球坐标系(r, θ, φ)中的Lame系数是

$$\begin{cases} h_r = 1 \\ h_\theta = r \\ h_\varphi = r sin\theta \end{cases} \tag{2.4}$$

柱坐标系(s, ϕ, z)中的Lame系数则是

$$\begin{cases} h_s = 1 \\ h_\phi = s \\ h_z = 1 \end{cases} \tag{2.5}$$

为了便于下面的讨论，也可以定义三个Lame系数之积

$$H = h_1 h_2 h_3 = \begin{cases} r^2 sin\theta, & Spherical\ \ Coordinates \\ s, & Cylindrical\ \ Coordinates \end{cases} \tag{2.6}$$

我们会发现，其实H就是体积元$dV = dxdydz$变换的Jacobi行列式——因此Lame系数在某种程度上可看作从直角坐标系变换至任一正交曲线坐标系的“变换系数”。

3 场的导数

由(2.1)式可以导出标量场φ的微分

$$d\varphi = \nabla\varphi \cdot d\vec{l} = \sum_a (\nabla\varphi)_a (h_a du_a) \tag{3.1}$$

而另一方面

$$d\varphi = \sum_a \frac{\partial \varphi}{\partial u_a} du_a \tag{3.2}$$

对比两式就得到

$$(\nabla\varphi)_a = \frac{1}{h_a}\frac{\partial \varphi}{\partial u_a} \tag{3.3}$$

因此，标量场φ的梯度是

$$\nabla\varphi = \sum_a \frac{\hat{u}_a}{h_a}\frac{\partial \varphi}{\partial u_a} \tag{3.4}$$

该式实际上也给出了nabla算子在正交曲线坐标系下的表示

$$\nabla = \sum_a \frac{\hat{u}_a}{h_a}\frac{\partial}{\partial u_a} \tag{3.5}$$

由上式也可以证明如下定理：

Theorem 1 若一个标量函数f仅依赖于某坐标u_a，即$f = f(u_a)$，那么其梯度$\nabla f(u_a) // \hat{u}_a$。

在研究完梯度之后，我们自然就会想到考虑散度和旋度。由于前者是标量，相对容易，故首先考察一个矢量场$\vec{F}$的散度

$$\nabla \cdot \vec{F} = \sum_a \nabla \cdot (F_a \hat{u}_a) = \sum_a (\nabla F_a) \cdot \hat{u}_a + \sum_a F_a (\nabla \cdot \hat{u}_a) \tag{3.6}$$

第二个等号可由Einstein求和约定导出。利用(3.5)式，上式右端的第一项容易改写成$\sum_a \frac{1}{h_a} \frac{\partial F_a}{\partial u_a}$；但是第二项中的$\nabla \cdot \hat{u}_a$看起来就有些棘手了——因为若仍沿用(3.5)式来表示nabla算子，就将出现含$\frac{\partial \hat{u}_a}{\partial u_a}$的项，而这是我们目前未知的。不过，下面将要介绍的“三剑客”将会提供解决这个问题的有力工具。

4 “三剑客”

4.1 定义

所谓“三剑客”，是指下面三个公式：

$$\nabla u_a = \frac{\hat{u}_a}{h_a} \tag{4.1}$$

$$\nabla \times \frac{\hat{u}_a}{h_a} = 0 \tag{4.2}$$

$$\nabla \cdot \frac{h_a \hat{u}_a}{H} = 0 \tag{4.3}$$

前两式不难理解——将$\varphi = u_a$代入(3.4)式即得到(4.1)式，再利用恒等式$\nabla \times \nabla u_a = 0$即可推出(4.2)式；关键是(4.3)式。上节中已经提到，直接计算该式是比较困难的，因此我们不妨另辟蹊径，看看前两式是否能给我们一些帮助。

考虑$\nabla u_b \times \nabla u_c$这个式子。一方面，由(4.1)式得

$$\nabla u_b \times \nabla u_c = \frac{\hat{u}_b \times \hat{u}_c}{h_b h_c} = \frac{h_a \varepsilon_{abc} \hat{u}_a}{H} \tag{4.4}$$

式中利用了基矢的轮换对称性(1.2)式和Lame系数之积(2.6)式。并且，由于(2.6)式的使用实际要求了a, b, c互不相等，故$\varepsilon_{abc} = \pm 1$。另一方面，利用矢量分析公式

$$\nabla \times \left(\varphi \vec{F}\right) = (\nabla \varphi) \times \vec{F} + \varphi \left(\nabla \times \vec{F}\right) \tag{4.5}$$

并令$\varphi = u_b, \vec{F} = \nabla u_c$就得

$$\nabla u_b \times \nabla u_c = \nabla \times (u_b \nabla u_c) - u_b (\nabla \times \nabla u_c) = \nabla \times (u_b \nabla u_c) \tag{4.6}$$

再对给出的结果求散度

$$\varepsilon_{abc} \left(\nabla \cdot \frac{h_a \hat{u}_a}{H}\right) = \nabla \cdot [\nabla \times (u_b \nabla u_c)] = 0 \tag{4.7}$$

就给出了欲证式(4.3)。

根据(2.4)和(2.5)式所示的Lame系数容易知道，“三剑客”在球坐标系中为

$$\begin{pmatrix} \nabla r = \hat{r} & \nabla \times \hat{r} = 0 & \nabla \cdot \frac{\hat{r}}{r^2 sin\theta} = 0 \\ \nabla \theta = \frac{\hat{\theta}}{r} & \nabla \times \frac{\hat{\theta}}{r} = 0 & \nabla \cdot \frac{\hat{\theta}}{r sin\theta} = 0 \\ \nabla \varphi = \frac{\hat{\varphi}}{r sin\theta} & \nabla \times \frac{\hat{\varphi}}{r sin\theta} = 0 & \nabla \cdot \frac{\hat{\varphi}}{r} = 0 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

在柱坐标系中则是

$$\begin{pmatrix} \nabla s = \hat{s} & \nabla \times \hat{s} = 0 & \nabla \cdot \dfrac{\hat{s}}{s} = 0 \\ \nabla \phi = \dfrac{\hat{\phi}}{s} & \nabla \times \dfrac{\hat{\phi}}{s} = 0 & \nabla \cdot \hat{\phi} = 0 \\ \nabla z = \hat{z} & \nabla \times \hat{z} = 0 & \nabla \cdot \dfrac{\hat{z}}{s} = 0 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

4.2 应用

4.2.1 散度

下面再来考虑(3.6)式：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{F} &= \sum_a \nabla \cdot (\hat{u}_a F_a) = \sum_a \nabla \cdot \left(\frac{h_a \hat{u}_a}{H} \frac{H}{h_a} F_a \right) \\ &= \sum_a \frac{h_a \hat{u}_a}{H} \cdot \nabla \left(\frac{H}{h_a} F_a \right) = \sum_a \frac{h_a \hat{u}_a}{H} \cdot \frac{\hat{u}_a}{h_a} \frac{\partial}{\partial u_a} \left(\frac{H}{h_a} F_a \right) \\ &= \frac{1}{H} \sum_a \frac{\partial}{\partial u_a} \left(\frac{H}{h_a} F_a \right) \end{aligned} \tag{4.10}$$

将各Lame系数代入，就得到球坐标系下的散度

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 F_r \right) + \frac{1}{r sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (sin\theta F_\theta) + \frac{1}{r sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} F_\varphi \tag{4.11}$$

以及柱坐标系下的散度

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s F_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \phi} F_\phi + \frac{\partial}{\partial z} F_z \tag{4.12}$$

当然，也可以给出直角坐标系下的散度

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{\partial z} F_z \tag{4.13}$$

4.2.2 Laplace算子

倘若在(4.10)式中令$\vec{F} = \nabla \varphi$，代入(3.3)式即$F_a = \dfrac{1}{h_a} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_a}$，就得到

$$\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot (\nabla \varphi) = \frac{1}{H} \sum_a \frac{\partial}{\partial u_a} \left(\frac{H}{h_a^2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_a} \right) \tag{4.14}$$

因此Laplace算子在任一正交曲线坐标系下的表示是

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{1}{H} \sum_a \frac{\partial}{\partial u_a} \left(\frac{H}{h_a^2} \frac{\partial}{\partial u_a} \right) \tag{4.15}$$

将各Lame系数代入，就可以得到球坐标系下的Laplace算子

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tag{4.16}$$

柱坐标系下的Laplace算子同理

$$\nabla^2 = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{4.17}$$

当然，也能得到直角坐标系下的Laplace算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{4.18}$$

现在，我们终于得以了解这些常用表达式的来由。

4.3 举例

不妨来看两个具体的矢量场，以便加深对上述理论的具象了解。

4.3.1 $\vec{F} = \hat{\phi} lns$

该矢量场定义在柱坐标系下，且默认$s > 0$。首先考虑其散度

$$\nabla \cdot \left(\hat{\phi} lns\right) = \left(\nabla \cdot \hat{\phi}\right) lns + \hat{\phi} \cdot (\nabla lns) \tag{4.19}$$

上式中，第一项包含的散度项由(4.9)式知为0；第二项的∇lns由第3节中的Theorem 1知$//\hat{s}$，再和$\hat{\phi}$点乘后也为0——因此上式结果为0。

其次考虑其旋度

$$\nabla \times \left(\hat{\phi} lns\right) = \nabla \times \left(\frac{\hat{\phi}}{s} slns\right) = \left(\nabla \times \frac{\hat{\phi}}{s}\right) slns + \left[\nabla \left(slns\right)\right] \times \frac{\hat{\phi}}{s} \tag{4.20}$$

上式中，第一项包含的旋度项由(4.9)式知为0，因此只需考虑第二项；而

$$\nabla \left(slns\right) = \frac{\partial \left(slns\right)}{\partial s} \nabla s = \left(lns + 1\right) \hat{s} \tag{4.21}$$

故(4.20)式最终可化为

$$\nabla \times \left(\hat{\phi} lns\right) = \frac{lns + 1}{s} \hat{z} \tag{4.22}$$

其中利用了轮换对称性$\hat{s} \times \hat{\phi} = \hat{z}$。

从这个例子中可以看到，处理矢量场的相关问题时，最重要的**“凑”出“三剑客”的形式**，以便应用(4.8)和(4.9)式。

4.3.2 $\vec{F} = \dfrac{\hat{\theta}}{rsin\theta}$

该矢量场定义在球坐标系下，且默认$0 < \theta < \pi$。其散度由(4.8)式可直接给出无需计算，故考虑其旋度

$$\nabla \times \frac{\hat{\theta}}{rsin\theta} = \nabla \times \left(\frac{1}{sin\theta} \frac{\hat{\theta}}{r}\right) = \left(\nabla \times \frac{\hat{\theta}}{r}\right) \frac{1}{sin\theta} + \nabla \left(\frac{1}{sin\theta}\right) \times \frac{\hat{\theta}}{r} \tag{4.23}$$

上式中，第一项包含的旋度项由(4.8)式知为0；第二项的$\nabla \left(\dfrac{1}{sin\theta}\right)$由第3节中的Theorem 1知$//\hat{\theta}$，再和$\hat{\theta}$叉乘后也为0——因此上式结果为0。