

# 2022秋易为老师量子力学B

## 习题八参考解答

宋冰睿 刘丰铨

2022 年 11 月 12 日

### 1 第一题

一维简谐振子的Hamiltonian为

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

(a) 已知在 $t = 0$ 时刻谐振子的坐标和动量算符为 $\hat{x}(0)$ 和 $\hat{p}(0)$ ，试在Heisenberg绘景下求坐标算符在任意 $t (t > 0)$ 时刻的表达式 $\hat{x}^H(t)$ 。

(b) 若在 $t = 0$ 时刻谐振子的量子态为

$$|\psi\rangle = e^{-i\frac{\hat{p}l}{\hbar}}|0\rangle$$

其中 $l$ 是量纲为长度的实数。试求在任意 $t (t > 0)$ 时刻 $\langle\hat{x}(t)\rangle$ 的表达式。

(c) 说明b中的谐振子在 $t = 0$ 时处于相干态。在Schrödinger绘景下写出该谐振子在任意时刻 $t (t > 0)$ 所处的态，并说明其是否仍然是相干态。

首先给出符号约定：在Heisenberg绘景下，力学量算符 $\hat{A}$ 在 $t$ 时刻表示为 $\hat{A}^H(t) = \hat{U}^\dagger(t) \hat{A} \hat{U}(t)$ ，其中 $\hat{U}(t)$ 是时间演化算符。

#### 1.1 1a

由于坐标算符和动量算符自身不含时，因此根据Heisenberg运动方程立即有

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}^H(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{x}^H, \hat{H}^H] = \frac{\hat{p}^H}{m} \\ \frac{d\hat{p}^H(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{p}^H, \hat{H}^H] = -m\omega^2\hat{x}^H \end{cases} \quad (1.1)$$

联立两式可得关于坐标算符的微分方程

$$\frac{d^2\hat{x}^H}{dt^2} + \omega^2\hat{x}^H = 0 \quad (1.2)$$

其形式解是

$$\hat{x}^H(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad (1.3)$$

将初值条件代入，可最终得到

$$\hat{x}^H(t) = \hat{x}(0) \cos \omega t + \frac{\hat{p}(0)}{m\omega} \sin \omega t \quad (1.4)$$

上面选取 $(\hat{x}, \hat{p})$ 这一组力学量对系统的动力学性质进行了描述. 事实上, 由于 $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ 与之等价, 我们当然也可以考虑降算符的Heisenberg运动方程

$$\frac{d\hat{a}^H(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{a}^H, \hat{H}^H] = \frac{1}{i\hbar} \hbar\omega \hat{a}^H = -i\omega \hat{a}^H \quad (1.5)$$

从中解得

$$\hat{a}^H(t) = \hat{a}(0) e^{-i\omega t} \quad (1.6)$$

并同时得到 $(\hat{a}^\dagger)^H(t)$ , 辅以升降算符的初值条件即可求得与上面一样的结果.

另外, 还可以直接使用时间演化算符, 即

$$\hat{a}^H(t) = \hat{U}^\dagger(t) \hat{a}(0) \hat{U}(t) = \exp\left[i\left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right)\omega t\right] \hat{a} \exp\left[-i\left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right)\omega t\right] \quad (1.7)$$

根据Baker-(Campbell-)Hausdorff公式 (证明方法参见习题三参考解答)

$$e^{\lambda \hat{A}} \hat{B} e^{-\lambda \hat{A}} = \hat{B} + \lambda [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\lambda^2}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (1.8)$$

进行化简, 也能得到相同结果.

## 1.2 1b

仍在Heisenberg绘景中考虑问题. 任意 $t$ 时刻, 坐标算符的期望值可表为

$$\langle \hat{x}(t) \rangle = \langle \psi | \hat{x}^H(t) | \psi \rangle = \left\langle 0 \left| e^{i\frac{\hat{p}l}{\hbar}} \left[ \hat{x}(0) \cos \omega t + \frac{\hat{p}(0)}{m\omega} \sin \omega t \right] e^{-i\frac{\hat{p}l}{\hbar}} \right| 0 \right\rangle \quad (1.9)$$

利用BCH公式, 或直接使用对易关系交换的技巧, 式1.9中bracket的中间项可化为

$$\cos \omega t \cdot e^{i\frac{\hat{p}l}{\hbar}} \hat{x}(0) e^{-i\frac{\hat{p}l}{\hbar}} + \frac{\sin \omega t}{m\omega} \cdot e^{i\frac{\hat{p}l}{\hbar}} \hat{p}(0) e^{-i\frac{\hat{p}l}{\hbar}} = \cos \omega t [\hat{x}(0) + l] + \frac{\sin \omega t}{m\omega} \hat{p}(0) \quad (1.10)$$

最后, 根据作业四题7a所证明的谐振子本征态之性质

$$\langle n | \hat{x}(0) | n \rangle = 0 = \langle n | \hat{p}(0) | n \rangle \quad (1.11)$$

式1.9即最终化为

$$\langle \hat{x}(t) \rangle = l \cos \omega t \quad (1.12)$$

## 1.3 1c

将 $\hat{p}$ 用升降算符表示为

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (1.13)$$

欲证明 $|\psi\rangle$ 是相干态, 则可尝试将降算符作用于其上, 得到

$$\hat{a}|\psi\rangle = \hat{a} \exp\left[-l\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)\right] |0\rangle \quad (1.14)$$

根据作业三题4b之结论，我们有

$$\left[ \hat{a}, \exp \left[ -l \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \right] \right] = l \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \exp \left[ l \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \right] \quad (1.15)$$

因此，式1.14可化为

$$\hat{a}|\psi\rangle = \exp \left[ l \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \right] \hat{a}|0\rangle + l \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \exp \left[ l \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \right] |0\rangle = l \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} |\psi\rangle \quad (1.16)$$

式中第一项为0. 是故1b中谐振子的初态 $|\psi\rangle$ 是相干态，其对应的降算符本征值为 $\lambda = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} l$ .

下面考虑 $|\psi\rangle$ 的时间演化. 由于一般情况下，其并非Hamiltonian的本征态，故需将其在Fock态构成的正交完备基上展开，其结果为

$$|\psi\rangle = e^{-|\lambda|^2/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1.17)$$

Fock态 $|n\rangle$ 对应的能量本征值为 $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$ ，因此在Schrödinger绘景下，任意时刻的量子态可写为

$$|\psi(t)\rangle = e^{-|\lambda|^2/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} |n\rangle \quad (1.18)$$

欲检验其是否仍为相干态，我们有如下两种方法.

### 1.3.1 法一

从式1.18中不难发现，若记 $\lambda(t) = \lambda e^{-i\omega t} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} l e^{-i\omega t}$ ，则该式可改写为

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega t/2} e^{-|\lambda|^2/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-i\omega t/2} |\lambda(t)\rangle \quad (1.19)$$

式中，我们发现中间一项即为相干态在Fock态上的展开形式1.17，故利用本征值 $\lambda(t)$ 对其进行了标定.

可以看到， $|\psi(t)\rangle$ 仅比相干态 $|\lambda(t)\rangle$ 多一个可以忽略的相因子，因此，该谐振子在任意时刻的态均为相干态.

### 1.3.2 法二

我们也可以效仿证明初态为相干态的思路，直接将降算符作用于其上，得到的是

$$\begin{aligned} \hat{a}|\psi(t)\rangle &= e^{-|\lambda|^2/2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{(n-1)!}} e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} \sqrt{n} |n-1\rangle \\ &= \lambda e^{-i\omega t} e^{-|\lambda|^2/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} |n\rangle \\ &= \lambda(t) |\psi(t)\rangle \end{aligned} \quad (1.20)$$

注意由于是在Schrödinger绘景下考虑问题，故降算符 $\hat{a}$ 不随时变.

因此,  $|\psi(t)\rangle$  是降算符的本征态——相干态.

事实上,  $\exp(-i\frac{\hat{p}l}{\hbar})$  是一种相空间平移变换, 只改变态的“位置”而不影响其本身性质, 因此  $|\psi\rangle$  和  $|0\rangle$  一样, 是相干态.

另外, 有相当一部分同学在讨论  $|\psi(t)\rangle$  采取了如下解法. 考虑

$$\hat{a}|\psi(t)\rangle = \hat{a}e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\psi\rangle \quad (1.21)$$

利用作业三题4b之结论求算对易关系

$$\begin{aligned} [\hat{a}, e^{-i\hat{H}t/\hbar}] &= -\frac{it}{\hbar} [\hat{a}, \hat{H}] e^{-i\hat{H}t/\hbar} \\ \hat{a}e^{-i\hat{H}t/\hbar} - e^{-i\hat{H}t/\hbar}\hat{a} &= -i\omega t \hat{a}e^{-i\hat{H}t/\hbar} \end{aligned} \quad (1.22)$$

从而得到

$$\hat{a}e^{-i\hat{H}t/\hbar} = \frac{1}{1+i\omega t} e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{a} \quad (1.23)$$

代入式1.21中, 得到

$$\begin{aligned} \hat{a}|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{1+i\omega t} e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{a}|\psi\rangle \\ &= \frac{1}{1+i\omega t} e^{-i\hat{H}t/\hbar} \lambda|\psi\rangle \\ &= \frac{\lambda}{1+i\omega t} |\psi(t)\rangle \end{aligned} \quad (1.24)$$

从而给出  $\lambda(t) = \frac{\lambda}{1+i\omega t}$ .

乍看之下, 该解法似乎每一步推导都有理有据. 但是, 式1.22的第一步利用的作业三题4b之结论, 其成立需要满足

$$[\hat{H}, [\hat{a}, \hat{H}]] = 0 \quad (1.25)$$

然而该式显然不成立.

这提醒我们, 在应用一些特定公式或结论前, 一定要注意它们的前提条件.

## 2 第二题

已知一维无限深方势阱

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , 0 < x < a \\ +\infty & , x < 0 \text{ 或 } x > a \end{cases}$$

(a) 写出归一化的能量本征波函数与本征能级.

(b) 求粒子处于体系基态时出现在  $(0, a/2)$  区间内的几率.

## 2.1 2a

直接解Schrödinger方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x) \psi(x) = E \psi(x) \quad (2.1)$$

可得形式解

$$\psi(x) = \begin{cases} C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx} & , 0 < x < a \\ 0 & , x < 0 \text{ 或 } x > a \end{cases} \quad (2.2)$$

其中  $k \triangleq \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ . 再根据

$$\text{边界条件: } \psi(0) = 0 = \psi(a)$$

$$\text{归一化条件: } \int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi(x)|^2 = 1 \quad (2.3)$$

即可最终得到 ( $n \in \mathbb{N}^+$ )

$$\begin{cases} \psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} & , 0 < x < a \\ 0 & , x < 0 \text{ 或 } x > a \end{cases} \\ E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \end{cases} \quad (2.4)$$

## 2.2 2b

在  $(0, a)$  区间内, 基态波函数是

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} \quad (2.5)$$

因此粒子出现在  $(0, a/2)$  区间内的概率为

$$P(0 < x < a/2) = \int_0^{a/2} dx |\psi_1(x)|^2 = \frac{1}{2} \quad (2.6)$$

## 3 第三题

设某粒子在  $t = 0$  时处在上题势阱能量最低的本征态上. 在  $t > 0$  时, 势阱的形式突变为

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , 0 < x < 2a \\ +\infty & , x < 0 \text{ 或 } x > 2a \end{cases}$$

假设势场在  $t = 0$  时刻的突变不改变波函数在  $t = 0$  时刻的形式.

(a) 求新的势阱中能量本征波函数与本征能级.

(b) 写出粒子在  $t > 0$  时的演化形式.

(c) 写出在  $t$  时刻粒子处在新的势阱中能量最低本征态的几率.

(d)写出在 $t$ 时刻粒子处在初态的几率。(给出表达式即可)

### 3.1 3a

在上题结果中作替换 $a \rightarrow 2a$ , 即可得到新势阱中能量本征问题的解( $n \in \mathbb{N}^+$ ):

$$\begin{cases} \tilde{\psi}_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{a}} \sin \frac{n\pi x}{2a} & , 0 < x < 2a \\ 0 & , x < 0 \text{ 或 } x > 2a \end{cases} \\ \tilde{E}_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{8ma^2} \end{cases} \quad (3.1)$$

### 3.2 3b

下面仅在 $(0, 2a)$ 区间内进行讨论. 粒子的初态依题写为

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} & , 0 < x < a \\ 0 & , a < x < 2a \end{cases} \quad (3.2)$$

为求时间演化形式, 需首先将其在新能量本征波函数构成的正交完备基上展开:

$$\psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(0) \tilde{\psi}_n(x) \quad (3.3)$$

展开系数是

$$\begin{aligned} c_n(0) &= \int_0^{2a} dx \tilde{\psi}_n^*(x) \psi(x, 0) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{a} \int_0^a dx \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x}{2a} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2a} \int_0^a dx \left\{ \cos \left[ \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \frac{\pi x}{a} \right] - \cos \left[ \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \frac{\pi x}{a} \right] \right\} \\ &= \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2a} \left[ \frac{2a}{(n-2)\pi} \sin \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \pi - \frac{2a}{(n+2)\pi} \sin \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \pi \right] & , n \neq 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2a} \int_0^a dx \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) & , n = 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{4\sqrt{2}}{(4-n^2)\pi} \sin \frac{n\pi}{2} & , n \neq 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & , n = 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

因此,  $t > 0$ 时刻粒子所处态的演化形式是

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(0) \exp \left( -i \frac{n^2 \pi^2 \hbar}{8ma^2} t \right) \tilde{\psi}_n(x) \quad (3.5)$$

### 3.3 3c

粒子在 $t$ 时刻处于新基态的概率

$$P_1(t) = \left| c_1(0) \exp\left(-i\frac{\pi^2\hbar}{8ma^2}t\right) \right|^2 = \frac{32}{9\pi^2} \quad (3.6)$$

为一常数.

推广可知, 粒子处于任一能量本征态的概率时不变, 这是因为每一个本征态均独立演化、互不影响.

### 3.4 3d

粒子在 $t$ 时刻仍处于初态的概率为

$$\begin{aligned} P(t) &= \left| \int_0^{2a} dx \psi^*(x, 0) \psi(x, t) \right|^2 \\ &= \left| \int_0^{2a} dx \left[ \sum_{m=1}^{+\infty} c_m^*(0) \tilde{\psi}_m^*(x) \right] \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(0) \exp\left(-i\frac{n^2\pi^2\hbar}{8ma^2}t\right) \tilde{\psi}_n(x) \right] \right|^2 \\ &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n(0)|^2 \exp\left(-i\frac{n^2\pi^2\hbar}{8ma^2}t\right) \right|^2 \\ &= \left| \frac{32}{9\pi^2} \exp\left(-i\frac{\pi^2\hbar}{8ma^2}t\right) + \frac{1}{2} \exp\left(-i\frac{\pi^2\hbar}{2ma^2}t\right) + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{32}{(n^2-4)^2\pi^2} \sin^2\frac{n\pi}{2} \exp\left(-i\frac{n^2\pi^2\hbar}{8ma^2}t\right) \right|^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中利用了新能量本征波函数的正交归一条件

$$\int_0^{2a} dx \tilde{\psi}_m^*(x) \tilde{\psi}_n(x) = \delta_{mn} \quad (3.8)$$

有的同学可能会对“仍处于初态”感到费解, 认为既然已经演化至别的态, “处于初态”的概率就应为0. 然而这个概率并非是0, 通过 $P(t) = |\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle|^2$ 可以进行求算.

实际上, 若记投影算符 $\Pi(0) = |\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|$ , 密度矩阵 $\psi(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ , 这个概率可以站在更高的视角理解为投影算符在 $t$ 时刻的期望值

$$\begin{aligned} P(t) &= \text{Tr}(\Pi(0) \psi(t)) \\ &= \text{Tr}(|\psi(0)\rangle\langle\psi(0)| \psi(t)) \\ &= \langle\psi(0)|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\psi(0)\rangle \\ &= |\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle|^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$