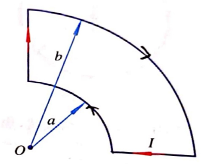
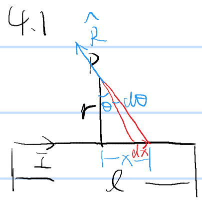
4.1 一段长度为 l 的通电导线，电流为 I，求离导线中点为 r 的 P 点的磁感应强度，并讨论 $l \gg r$ 的结果。

4.2 一电流环由两个同心圆弧和两段相互垂直的导线组成，如图所示，通有电流 I，求：(1) 圆心 O 点的磁感应强度；(2) 若 $I = 20$ A，$a = 30$ mm，$b = 50$ mm，计算圆心处 B 的值。



习题 4.2 图

4.1



直接微元法.

dx段电流元产生的元磁感强度

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{x}\times\hat{R}}{R^2} \qquad (R^2 = r^2 + x^2)$$

易知 $\vec{B}$ ⊙，$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dx\cos\theta}{r^2+x^2} \xrightarrow{x = r\tan\theta} \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{r\sec^2\theta\cos\theta\,d\theta}{r^2(1+\tan^2\theta)}$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\cos\theta\,d\theta$$

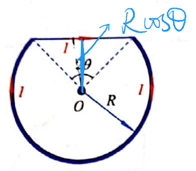
故 $|\vec{B}| = \int_{-\theta_0}^{\theta_0}|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}2\sin\theta_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{l^2}{\sqrt{l^2+4r^2}} \xrightarrow{l \gg r} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ —"无限长直导线"

4.2 (1) 首先，两段(沿长线)过圆心的直导线对 $\vec{B}_0$ 无贡献易知.

再考虑两段圆弧 $|\vec{B}_0| = \frac{1}{4}\left(\frac{\mu_0 I}{2a} - \frac{\mu_0 I}{2b}\right) = \frac{\mu_0 I}{8}\frac{b-a}{ab}$ & $\vec{B}_0$ ⊙

(2) 数值代入计算知 $|\vec{B}_0| = 4.189\times10^{-5}$ T

4.6 一载有电流为 I 的导线弯成半径为 R 的圆弧，圆弧的两端是一条直线，对圆心的夹角为 2θ，求圆心处的磁感应强度。



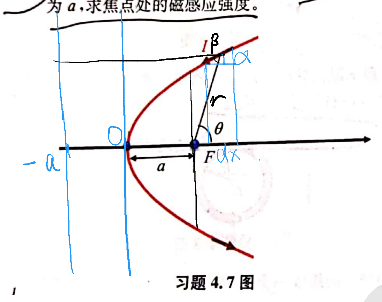
习题 4.6 图

利用上两题的结论.

$$\begin{cases} |\vec{B}_0| = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(1 - \frac{2\theta}{2\pi}\right) + \frac{\mu_0 I}{2\pi R\cos\theta}\sin\theta \\ \quad\;\; = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(1 + \frac{\tan\theta - \theta}{\pi}\right) \\ \vec{B}_0 \otimes \end{cases}$$

[法一]

4.7 一载有电流 I 的导线弯成抛物线状，焦点到顶点的距离为 a，求焦点处的磁感应强度。



习题 4.7 图

如图建系.

$y^2 = 4ax$

切线方向 $\tan\alpha = \frac{dy}{dx} = \sqrt{4a}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{a}{x}}$.

Biot-Savart-Laplace.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dx\sqrt{1+\tan^2\alpha}\cdot\sin\beta}{(x+a)^2} \quad (*)$$

其中有几何关系 $\beta = \theta - \alpha$. 且 $\tan\theta = \frac{y}{x-a}$

(*)式中 $\begin{cases} \sqrt{1+\tan^2\alpha}\,(= \sec\alpha) = \sqrt{1+\frac{a}{x}} \\ \sin\beta = \sin\theta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\theta = \frac{y}{x+a}\sqrt{\frac{x}{x+a}} - \frac{x-a}{x+a}\sqrt{\frac{a}{x+a}} = \frac{\sqrt{4ax}-(x-a)\sqrt{a}}{(x+a)^{3/2}} = \frac{\sqrt{a}(x+a)}{(x+a)^{3/2}} = \sqrt{\frac{a}{x+a}}. \end{cases}$

故 $(*) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{(x+a)^2}\sqrt{\frac{x+a}{x}}\sqrt{\frac{a}{x+a}}\,dx$

$|\vec{B}| = 2\int_0^{+\infty}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\sqrt{a}\frac{dx}{(x+a)^2\sqrt{x}}$

作换元 $t = \sqrt{x}$，则积分 $I \triangleq \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+a)^2\sqrt{x}} = 2\int_0^{+\infty}\frac{d\sqrt{x}}{(x+a)^2} = 2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t^2+a)^2}$.

而我们已知 $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+a} = \cancel{\left.\frac{t}{t^2+a}\right|_0^{+\infty}}_{\to 0} + \int_0^{+\infty}\frac{2t^2}{(t^2+a)^2}dt$

$= 2\int_0^{+\infty}\frac{t^2+a-a}{(t^2+a)^2}dt = 2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+a} - aI$

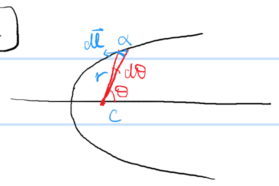
[另一方面，$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty}\frac{d(t/\sqrt{a})}{(t/\sqrt{a})^2+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$].

即 $\frac{\pi}{2\sqrt{a}} = \frac{\pi}{\sqrt{a}} - aI \Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{2a\sqrt{a}}}$.

最后得到 $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{a}\frac{\pi}{2a\sqrt{a}} = \boxed{\frac{\mu_0 I}{4a}}$.

⇒ 此法纯粹是解析几何与积分计算，没啥物理含量就是说.

[法二]



$|d\vec{B}| = \left|\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}\right| = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{dl\sin\alpha}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\theta}{r}$.

故 $|\vec{B}| = \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\theta}{\frac{2a}{1-\cos\theta}} = \frac{\mu_0 I}{8\pi a}\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)\,d\theta = \frac{\mu_0 I}{4a}$.

⇒ 此法运用极坐标方程，简明很多.

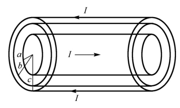
[法三] $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{(dx\,\hat{e}_x + dy\,\hat{e}_y)\times((a-x)\hat{e}_x + (-y)\hat{e}_y)}{(x+a)^3}$

$= \frac{\mu_0 I}{4\pi(x+a)^3}\left[-y\,dx - (a-x)\,dy\right]\hat{e}_z$.

$$\begin{cases} |B|_1 = 2\int_0^{+\infty}\frac{-\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sqrt{4ax}}{(x+a)^3}dx \\ |B|_2 = 2\int_0^{+\infty}\frac{-\mu_0 I}{4\pi}\cdots dy. \end{cases}$$

4.12 一根很长的同轴电缆，由一导体圆柱（半径为 a）和一同轴的导体圆管构成，导体圆管的内、外半径分别为 b、c，沿导体柱和导体管通以反向电流，电流强度均为 I，且均匀地分布在导体的横截面上，求：(1) 导体圆柱内($r<a$)、(2) 两导体之间($a<r<b$)、(3) 导体圆管内($b<r<c$)、(4) 电缆外($r>c$)各处的磁感应强度大小。

5.10 如习题 5.10 图所示，一根很长的同轴电缆，由一导体圆柱（半径为 a）和与之共轴的导体圆管（内、外半径分别为 b、c）构成，沿导体柱和导体管通以反向电流，电流强度均为 I，且均匀地分布在导体的横截面上，求下述各区内的磁感应强度：



习题 5.10 图

（1）导体圆柱内 $(r<a)$；
（2）两导体之间 $(a<r<b)$；
（3）导体圆管内 $(b<r<c)$；
（4）电缆外 $(r>c)$.

解 取圆柱坐标（r,ϕ,z），z 轴与导体柱轴重合，方向沿 I 的方向. 由对称性分析知 $\boldsymbol{B}$ 沿 $\boldsymbol{e}_\phi$ 方向，其大小仅与 r 有关. 选择与圆柱轴线垂直、半径为 r、圆心位于圆柱轴线的圆环回路，运用安培环路定理计算各区磁场.

（1）导体圆柱内（$r<a$）：穿越回路的电流等于 Ir^2/a^2，由安培环路定理得

$$2\pi rB=\frac{\mu_0 r^2 I}{a^2}\quad\Rightarrow\quad B=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2}$$

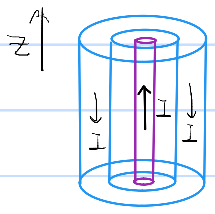
（2）两导体之间 $(a<r<b)$：穿越回路的电流等于 I，由安培环路定理得

$$2\pi rB=\frac{\mu_0 I}{a^2}\quad\Rightarrow\quad B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

（3）导体圆管内 $(b<r<c)$：穿越回路的电流等于 $I-(r^2-b^2)I/(c^2-b^2)$，由安培环路定理得

$$2\pi rB=\mu_0 I\left(1-\frac{r^2-b^2}{c^2-b^2}\right)\quad\Rightarrow\quad B=\frac{\mu_0 I(c^2-r^2)}{2\pi r(c^2-b^2)}$$

（4）电缆外 $(r>c)$：穿越回路的电流等于零，由安培环路定理得 $B=0$.



首先，求出二者电流密度 $\begin{cases} \vec{j}_1=\dfrac{I}{\pi a^2}\hat{e}_z \\ \vec{j}_2=\dfrac{I}{\pi(c^2-b^2)}(-\hat{e}_z) \end{cases}$

下面利用 Ampere 环路定理.

[所有 $B(r)$ 均沿 $\hat{e}_\phi$ 方向]

(1) $r<a$.　$B(r)\cdot 2\pi r=\mu_0 j_1\cdot\pi r^2 \Rightarrow B(r<a)=\frac{1}{2}\mu_0 j_1 r=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\dfrac{r}{a^2}$

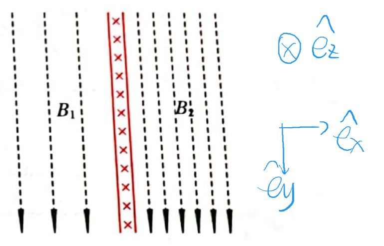
(2) $a<r<b$　$B(r)\cdot 2\pi r=\mu_0 I \Rightarrow B(a<r<b)=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ⇒ 这告诉我们，圆柱形载流导线在其外部的磁感强度与一理想导线相同.

(3) $b<r<c$　$B(r)\cdot 2\pi r=\mu_0[I-j_2\pi(r^2-b^2)] \Rightarrow B(b<r<c)$
$=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1-\dfrac{r^2-b^2}{c^2-b^2}\right)=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\dfrac{c^2-r^2}{r(c^2-b^2)}$

(4) $r>c$　$B(r)=0$.

⇒ 容易发现，$B(r)$ 在径向(除去未讨论的理想载流面外)是连续的.

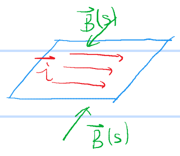
4.20 将一电流均匀分布的无限大载流平面放入均匀磁场 B_0 中，放入后平面两侧的磁感应强度分别为 B_1 和 B_2，如图所示。求：(1) 无限大载流平面的电流密度 i；(2) 无限大载流平面单位面积上的安培力。



习题 4.20 图

首先单独分析无限大的载流平面.

s 为考察点至平面的垂直距离.



Ampere 环路定理：

$2B(s)\cdot l=\mu_0(il)$，l 为所取回路的长度.

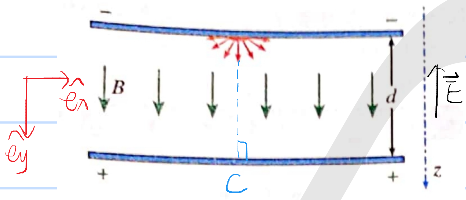
上式已明确磁感强度平行于平面

即 $B(s)=\frac{1}{2}\mu_0 i\equiv\text{const}$.

⇒ 回原题，由叠加原理 $\begin{cases} B_1=B_0-\frac{1}{2}\mu_0 i \\ B_2=B_0+\frac{1}{2}\mu_0 i \end{cases}$ ⇒ $i=\dfrac{B_2-B_1}{\mu_0}$.

(2)　$\vec{F}=\vec{i}\times\vec{B}=\dfrac{B_2-B_1}{\mu_0}\hat{e}_z\times\frac{1}{2}(B_2+B_1)\hat{e}_y=-\dfrac{B_2^2-B_1^2}{2\mu_0}\hat{e}_x$.　注意方向

4.30



习题 4.30 图

由于垂直于 $\vec{B}$ 的两个方向在本系统中等价，故不妨仅考虑图示的二维情况.

"慢速" ⇒ $v_0\ll E/B$，$E=V/d$.

$\begin{cases} v_{x_0}=v_0\cos\theta \\ v_{y_0}=v_0\sin\theta \end{cases}$，$\theta$ 为某粒子初速度方向与极板夹角.

在 $\vec{E}$、$\vec{B}$ 同时作用下 $\begin{cases} v_x\text{ 将绕 }\vec{B}\text{ 作圆周运动} \\ v_y\text{ 将被 }\vec{E}\text{ 加速} \end{cases}$

"聚焦"，由于 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 粒子的限制，"焦点" C 只能如图.

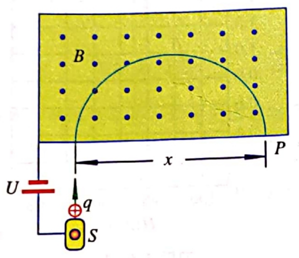
故 $\theta\neq\frac{\pi}{2}$ 粒子的圆周运动到C点时应恰好经过了 n 个周期.

即 $t=nT=n\dfrac{2\pi m}{eB}$　$(n\in N)$

而 $d=v_{y_0}t+\frac{1}{2}\dfrac{eE}{m}t^2\approx\dfrac{eE}{2m}n^2\dfrac{4\pi^2m^2}{e^2B^2}=\dfrac{2\pi^2 m}{eB^2}n^2E$

解得 $V=Ed=\dfrac{eB^2}{2\pi^2n^2m}d^2$　[纯粹的高中题就是说]

4.31 一质谱仪的构造原理如图所示，离子源 S 产生质量为 m、电荷为 q 的离子，发射时速度很小，可以认为是静止的。离子经电势为 U 的区域加速，然后进入磁感应强度为 B 的均匀磁场中，最后到达荧光屏 P 点，求：(1) P 点距离离子入口处的距离 x；(2) 若 $U=750$ V，$B=3\,580$ G，$x=10$ cm，则入射离子的荷质比为多少？



习题 4.31 图

(1) $x=2R=\dfrac{2mv}{qB}=\dfrac{2}{qB}\sqrt{2mqU}=\sqrt{\dfrac{8mU}{qB^2}}$

(2) $\gamma=\dfrac{q}{m}=\dfrac{8U}{B^2x^2}=4.682\times10^6\ \text{C/kg}$.

5.1 顺磁质分子的磁矩和玻尔磁矩 $m_B = eh/(4\pi m_e)$ 同量级。设顺磁质温度为 $T = 300$ K，磁感应强度 $B = 1$ T，问 kT 是 $m_B B$ 的多少倍？（$h = 6.626\times10^{-34}$ J·s^{-1}，$e = 1.602\times10^{-19}$ C，$m_e = 9.11\times10^{-31}$ kg，$k = 1.3\times10^{-23}$ J·K^{-1}。）

5.2 一均匀磁化棒直径为 10 mm，长为 30 mm，磁化强度为 1 200 A·m^{-1}，求它的磁矩 μ。

5.1 **6.8** 顺磁质分子的磁矩和玻尔磁矩 $m_B = eh/(4\pi m_e)$ 同量级．设顺磁质温度为 T=300K，磁感应强度 B=1T，问 kT 是 $m_B B$ 的多少倍？（h = 6.626×10^{-34} J·s^{-1}，e = 1.602×10^{-19} C，m_e = 9.11×10^{-31} kg，k = 1.38×10^{-23} J·K^{-1}）

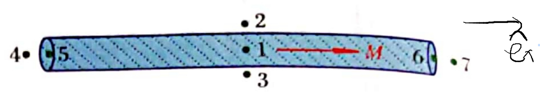
解　将有关数据代入，求得这一比值等于

$$\frac{kT}{m_B B} = \frac{4\pi\times9.11\times10^{-31}\times1.38\times10^{-23}\times300}{1.602\times10^{-19}\times6.626\times10^{-34}\times1} = 446$$

5.2 磁化强度的定义 $\vec{M} = \frac{\sum \vec{\mu_i}}{V}$

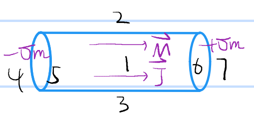
因而 $\vec{\mu}_{tot} = \sum_i \vec{\mu_i} = \vec{M}V = [1200\times(\pi\cdot5^2\times30)\times10^{-9}](A\cdot m^2) \approx 2.827\times10^{-3}(A\cdot m^2)$

5.7 一细长的均匀磁化棒，磁化强度为 M，M 沿棒长方向，如图所示，求习题 5.7 图中各点的磁场强度 H 和磁感应强度 B。



习题 5.7 图

⇒ [法二] 磁荷法．适用于无传导电流的情况．



$\sigma_m = \vec{J}\cdot\hat{n} = \mu_0 M$.

$H_6 = -\frac{\sigma_m}{2\mu_0} = -\frac{M}{2}$ (H_7、H_4、H_5 类似)

$\pm\sigma_m$ 产生的"退极化场"抵消了原来的 $\vec{H}_{int}$

故而 $\vec{H}_1 = 0 \Rightarrow \vec{B}_1 = \mu_0(\vec{H}_1+\vec{M}) = \mu_0 M\hat{e}_x$

① $\begin{cases}\vec{j}_1' = \nabla\times\vec{M}_1 = 0\\ \vec{j}_{10} = 0\end{cases} \Rightarrow \vec{j}_1 = \vec{j}_1' + \vec{j}_{10} = 0 \Rightarrow \vec{H}_1 = 0 \Rightarrow \vec{B}_1 = \mu_0(\vec{H}_1+\vec{M}_1) = \mu_0 M\hat{e}_x$ [或理解为均匀磁化]

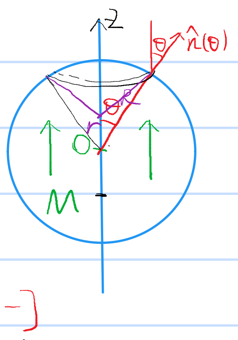
②③ $\vec{B}_2 = \vec{B}_3 = 0$ & $\vec{H}_2 = \vec{H}_3 = 0$

④⑤ $\vec{B}$、$\vec{H}$ 垂直于介质界面，因而 $\vec{B}$ 连续，即 $\vec{B}_4 = \vec{B}_5$

于是 $\begin{cases}\vec{M}_4 = \frac{\vec{B}_4}{\mu_0} - \vec{H}_4 = 0\\ \vec{M}_5 = \frac{\vec{B}_5}{\mu_0} - \vec{H}_5 = \vec{M}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{B}_4 = \vec{B}_5 = \frac{1}{2}\mu_0 M\hat{e}_x\\ \vec{H}_4 = -\vec{H}_5 = \frac{1}{2}M\hat{e}_x.\end{cases}$

⑥⑦ 同理 $\begin{cases}\vec{B}_6 = \vec{B}_7 = \frac{1}{2}\mu_0 M\hat{e}_x\\ \vec{H}_7 = -\vec{H}_6 = \frac{1}{2}M\hat{e}_x.\end{cases}$

5.12 一介质球均匀磁化，磁化强度为 M，试求沿 M 的直径上球内离球心为 r 处的磁感应强度。



不妨设 球内 $\vec{M} = M\hat{e}_z$.

方向为 θ 的边界外法向量

$\hat{n}(\theta) = \cos\theta\,\hat{e}_z + \sin\theta\,\hat{e}_\rho$.

采用柱坐标 (ρ,φ,z)

球坐标 (r,θ,φ)

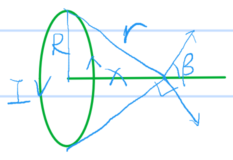
因而 θ 处磁化面电流密度 $\vec{k}(\theta) = \vec{M}\times\hat{n}(\theta) = M\sin\theta\,\hat{e}_\varphi$.

[法一] 若引入磁荷观点，则 $\sigma_m'(\theta) = \hat{n}(\theta)\cdot\vec{J} = \mu_0 M\cos\theta$

套用静电学结论，球内均匀磁化，因而 $\vec{B} = \frac{2}{3}\mu_0 M\hat{e}_z$.

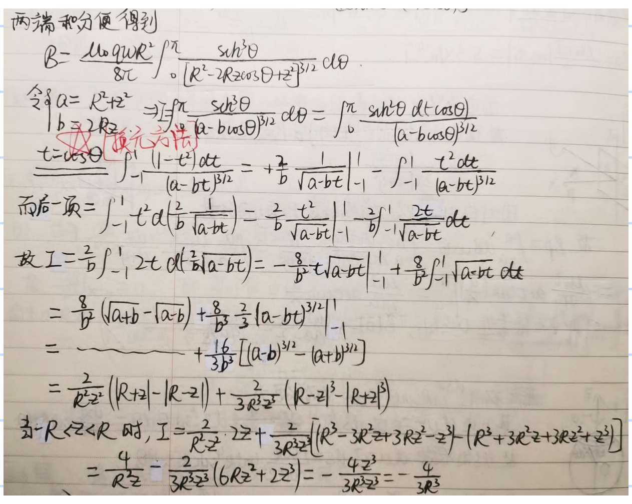
[法二] 用磁化电流观点计算：

极角为 θ 处 电流环产生的元磁感强度 $d\vec{B}(r,\theta) = \frac{\mu_0 k\cdot Rd\theta}{2}\frac{(R\sin\theta)^2}{(r^2+R^2-2rR\cos\theta)^{3/2}}\hat{e}_z$.



$\Rightarrow |\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cdot2\pi R}{r^2}\cdot\frac{R}{r} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+x^2)^{3/2}}$

因而 $\vec{B}(r) = \int_0^\pi d\vec{B}(r,\theta) = \hat{e}_z\frac{\mu_0 MR^3}{2}\int_0^\pi\frac{\sin^3\theta}{(r^2+R^2-2rR\cos\theta)^{3/2}}d\theta$.


两端积分便得到

$B = \frac{\mu_0 q\omega R^2}{8\pi}\int_0^\pi\frac{\sin^3\theta}{[R^2-2Rz\cos\theta+z^2]^{3/2}}d\theta$.

令 $\begin{cases}a = R^2+z^2\\ b = 2Rz\end{cases} \Rightarrow I = \int_0^\pi\frac{\sin^3\theta}{(a-b\cos\theta)^{3/2}}d\theta = \int_0^\pi\frac{\sin^2\theta\,d(-\cos\theta)}{(a-b\cos\theta)^{3/2}}$

[换元方法] $\underline{\underline{t=\cos\theta}}\ \int_{-1}^1\frac{(1-t^2)dt}{(a-bt)^{3/2}} = +\frac{2}{b}\frac{1}{\sqrt{a-bt}}\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1\frac{t^2dt}{(a-bt)^{3/2}}$

而后一项 $= \int_{-1}^1 t^2 d\left(\frac{2}{b}\frac{1}{\sqrt{a-bt}}\right) = \frac{2}{b}\frac{t^2}{\sqrt{a-bt}}\Big|_{-1}^1 - \frac{2}{b}\int_{-1}^1\frac{2t}{\sqrt{a-bt}}dt$

故 $I = \frac{2}{b}\int_{-1}^1 2t\,d\left(\frac{2}{b}\sqrt{a-bt}\right) = -\frac{8}{b^2}t\sqrt{a-bt}\Big|_{-1}^1 + \frac{8}{b^2}\int_{-1}^1\sqrt{a-bt}\,dt$

$= \frac{8}{b^2}(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}) + \frac{8}{b^3}\frac{2}{3}(a-bt)^{3/2}\Big|_{-1}^1$

$= \sim\sim\sim + \frac{16}{3b^3}[(a-b)^{3/2}-(a+b)^{3/2}]$

$= \frac{2}{R^2z^2}(|R+z|-|R-z|) + \frac{2}{3R^3z^3}(|R-z|^3-|R+z|^3)$

当 $-R<z<R$ 时，$I = \frac{2}{R^2z^2}\cdot2z + \frac{2}{3R^3z^3}[(R^3-3R^2z+3Rz^2-z^3)-(R^3+3R^2z+3Rz^2+z^3)]$

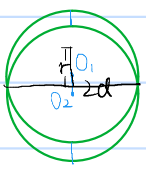
$= \frac{4}{R^2z} - \frac{2}{3R^3z^3}(6R^2z+2z^3) = -\frac{4z^3}{3R^3z^3} = -\frac{4}{3R^3}$

[左图为我学电磁时候写的积分过程，以供参考．]

可知在 $r\in(-R,R)$ 时，积分项 $= \frac{4}{3R^3}$.

因而 $\vec{B} = \frac{2}{3}\mu_0 M\hat{e}_z = \vec{B}(r)$

[法三] 用磁荷观点．　由于磁荷呈余弦型分布，故可拆成两错位球面 ($\overline{O_1O_2} \triangleq 2d$)



两球分别均匀磁化，其体磁荷密度 $\pm\rho_{m0}$

满足 $\rho_{m0}\cdot2d\cos\theta = \sigma_m'(\theta) = \mu_0 M\cos\theta \Rightarrow \rho_{m0} = \frac{\mu_0 M}{2d}$.

因而 $\begin{cases}\vec{H}_+ = \frac{+\rho_{m0}}{3\mu_0}(r-d)\hat{e}_z\\ \vec{H}_- = \frac{-\rho_{m0}}{3\mu_0}(r+d)\hat{e}_z\end{cases} \Rightarrow \vec{H} = \vec{H}_+ + \vec{H}_- = -\frac{2\rho_{m0}d}{3\mu_0}\hat{e}_z = -\frac{M}{3}\hat{e}_z$.

故 $\vec{B} = \mu_0(\vec{H}+\vec{M}) = \boxed{\frac{2}{3}\mu_0 M\hat{e}_z}$　(实际上就是将法一中套用的结论证了一遍．)

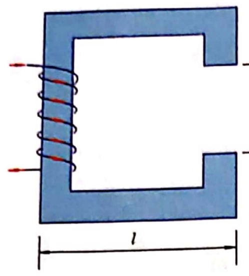
⇒ 上面的过程还可以推广至球内任一点的情况．

只需 将磁场强度改写为 $\begin{cases}\vec{H}_+ = \frac{+\rho_{m0}}{3\mu_0}(\vec{r}-d\hat{e}_z)\\ \vec{H}_- = \frac{-\rho_{m0}}{3\mu_0}(\vec{r}+d\hat{e}_z)\end{cases} \Rightarrow \vec{H} = \vec{H}_+ + \vec{H}_- = -\frac{M}{3}\hat{e}_z$.

因而 球内实际是匀强场，

而不仅局限于沿 $\vec{M}$ 的直径方向．⇒ 这也是磁荷法的一大优势．

5.18 已知一个电磁铁由绕有 N 匝载流线圈的 C 形铁片 $(\mu\gg\mu_0)$ 所构成（如图所示）。如果铁的横截面积为 A，电流为 I，气隙宽度为 d，C 形的每边边长为 l，求气隙中的磁感应强度。



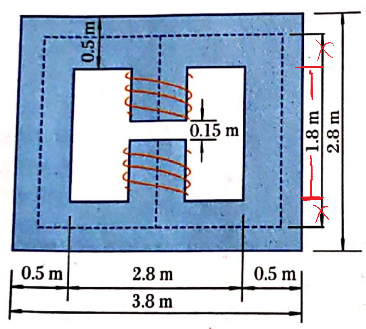
习题 5.18 图

5.18 由磁路定理.

$$NI=\phi_m\left(\frac{4l-d}{\mu A}+\frac{d}{\mu_0 A}\right)$$

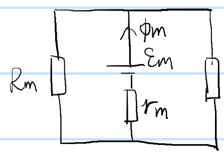
因而 $|\vec B|=\dfrac{\phi_m}{A}=\dfrac{NI}{\frac{4l-d}{\mu}+\frac{d}{\mu_0}}=\dfrac{\mu_0\mu NI}{4\mu_0 l+(\mu-\mu_0)d}$

图所示是一个电磁铁的结构，尺寸见图中标注，电磁铁的两极是圆柱形的，半径为 0.25 m，两极间气隙的间距为0.15 m，磁路其他部分是边长为 0.5 m 的正方形铁芯，如果要在气隙中产生 1.0 T 的磁场，则其线圈的总匝数为多少？设铁的相对磁导率为 3 000。



习题 5.20 图

5.20 以磁路中心线为基准绘制等效磁路图.



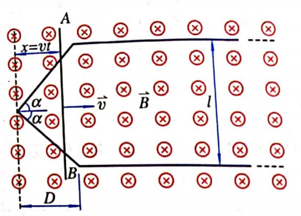
易知 $\phi_m=\dfrac{\mathcal{E}_m}{r_m+\frac{1}{2}R_m}$.

其中 $\begin{cases}\phi_m=B\cdot S_1=S_1\\ r_m=\dfrac{1.8-0.15}{3000\mu_0 S_1}+\dfrac{0.15}{\mu_0 S_1}\\ R_m=\dfrac{1.65\times2+1.8}{3000\mu_0 S_2}\end{cases}$ （均采用SI制）

其中 $S_1=\pi\times0.25^2$ 为圆柱截面积，$S_2=0.5^2$ 为正方形截面积.

因而 $\mathcal{E}_m=\dfrac{1.65}{3000\mu_0}+\dfrac{0.15}{\mu_0}+\dfrac{5.1}{3000\mu_0}\cdot\dfrac{S_1}{S_2}\times\dfrac{1}{2}(A)\approx1.20335\times10^5\ (A)$

6.1 如图所示，一根可以滑动的导线 AB 放置在一个导轨上，导轨的形状如图所示，均匀磁场 B 垂直于导轨平面，求：导轨以恒定的速度 v 运动时所产生的动生电动势为多少？



习题 6.1 图

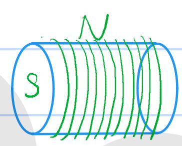
6.1

$$\mathcal{E}=\begin{cases}Bv\cdot2vt\tan\alpha=2Bv^2t\tan\alpha, & 0<t\le\frac{D}{v}\\ Blv, & t>\frac{D}{v}\end{cases}$$

[图中应有关系：$\tan\alpha=\frac{l}{2D}$]

6.2 复位线圈有时用来测量某区域的磁场大小。有这样一个线圈，匝数为 N，每匝的面积为 S，线圈很小，以使其内的磁场是近似均匀的，这个线圈最初以其轴与磁场线相平行的方式放置，然后绕其轴翻转（转动）180°，使得其轴线与磁场反平行，该线圈与一冲击电流计相接，通过它可以测出流过的总电量为 Q，假设线圈的总电阻为 R，求线圈处的磁场大小。

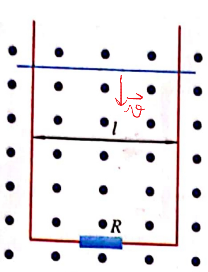
6.2 $\Delta\phi_m=2NBS$.



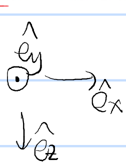
$\int\left|\dfrac{d\phi_m}{dt}\right|dt=\int I(t)R\,dt\Rightarrow|\Delta\phi_m|=QR$.

因而 $|\vec B|=\dfrac{QR}{2NS}$.

6.9 一个滑动导线电路平面被垂直安置于板上，如图所示，假设导线上所有电阻 R 都集中在底部，导轨摩擦力可以忽略，均匀磁场与平面垂直，导轨的质量为 m，长度为 l。(1) 证明滑动导轨的收尾速度为 $v_T=mgR/B^2l^2$；(2) 如果磁场与平面成 θ 角，收尾速度又为多少？



习题 6.9 图



(1) 导轨的动力学方程：$mg-\dfrac{B^2l^2v}{R}=m\dfrac{dv}{dt}$. (on z axis)

$\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{B^2l^2}{mR}v=g\Rightarrow v(t)=\dfrac{mgR}{B^2l^2}\left[1-\exp\left(-\dfrac{B^2l^2}{mR}t\right)\right]$

因而 $v(t\to\infty)=\dfrac{mgR}{B^2l^2}$；

(2) $\mathcal{E}=\int(\vec v\times\vec B)\cdot d\vec l$.

$\begin{cases}\vec v=v\hat e_z\\ d\vec l=-dl\,\hat e_x\end{cases}$ $\vec B$与板成θ角 $\Rightarrow\vec B\cdot\hat e_y=B\sin\theta$. 因而不妨设 $\vec B=B(\sin\theta\,\hat e_y+\cos\theta\cos\phi\,\hat e_x+\cos\theta\sin\phi\,\hat e_z)$

$\mathcal{E}=vB(\sin\theta\,\hat e_x-\cos\theta\cos\phi\,\hat e_y)\cdot l\hat e_x=Blv\sin\theta$.

因而 $\vec F_{Ampere}=\dfrac{\mathcal{E}}{R}\vec l\times\vec B=\dfrac{Blv\sin\theta}{R}l\hat e_x\times\vec B=B^2l^2v\sin\theta(\sin\theta\,\hat e_z-\cos\theta\sin\phi\,\hat e_y)$

我们仅关心z向受力 $\Rightarrow F_z=B^2l^2v\sin^2\theta$

故而 $v(t\to\infty)=\dfrac{mgR}{B^2l^2\sin^2\theta}$

磁荷法：应用于不存在传导电流的空间。

	静电学	静磁学
场强度	$\vec{E}$	$\vec{H}$
感应强度	$\vec{D}$	$\vec{B}$
极化强度	$\vec{P}$	$\vec{J}$
(常数)	ε_0	μ_0

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{J} = \mu_0 \vec{M}} = \mu_0 \chi_m \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \overbrace{\mu_0(1+\chi_m)}^{\mu} \vec{H}$$

磁化的微观机制

假想磁荷存在。

静磁场 $\begin{cases} \text{Gauss Theorem: } \nabla\cdot\vec{H} = \sigma_m \text{ (magnetic)} \\ \text{环路: } \nabla\times\vec{H} = 0 \end{cases}$ ⇒可引出积分形式。

无旋性⇒引入磁标势 φ_m：$\vec{H} = -\nabla\varphi_m$. $(\vec{E} = -\nabla\varphi)$

(见第一节)

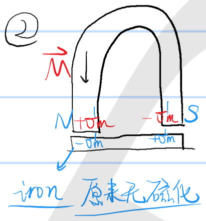
$$\begin{cases} \text{电偶极子：} \varphi = \dfrac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ \text{磁 ---：} \varphi_m = \dfrac{\vec{p}_m\cdot\hat{r}}{4\pi\mu_0 r^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = \dfrac{3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ \vec{H} = \dfrac{3(\vec{p}_m\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}_m}{4\pi\mu_0 r^3} \end{cases}$$

结合 $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r} - \hat{m}}{r^3}$ 得到对应关系 $\begin{cases} \vec{H} \leftrightarrow \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} \\ \vec{p}_m \leftrightarrow \mu_0 \vec{m} \end{cases}$

$\vec{J}$ 的 def：$\vec{J} = \dfrac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V} \Rightarrow \oiint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = -\sum_{S内} q_m'$.

故而面极化磁荷：$\sigma_m' = \vec{J}\cdot\hat{n}$. ('表示极化)

① ⇒作业题的[法二]

② 

$\sigma_m' = J = \mu_0 M$.

因而 $F = 2\boxed{\dfrac{\sigma_m'}{2\mu_0}}\sigma_m' A$

$= \dfrac{\sigma_m'^2 A}{\mu_0} = \mu_0 M^2 A$.

⇒ 磁矢势 $\vec{A}$ s.t. $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$

1. 规范不变性. $\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi \\ \varphi' = \varphi - \partial_t\psi \end{cases}$

2. $\begin{cases} \text{Coulomb 规范 } \nabla\cdot\vec{A} = 0. \\ \text{Lorentz 规范 } L \triangleq \nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t\varphi = 0 \end{cases}$

$\mu_0\vec{j} = \nabla\times\vec{B} = \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\underbrace{\cancel{\nabla\cdot\vec{A}}}_{\text{Coulomb}=0}) - \nabla^2\vec{A}$

3. 势方程 $\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$

4. 局域电流 $\vec{A}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \dfrac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}$. 验证 $\nabla\times\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \, \nabla\times\dfrac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ ('代表场源空间') $\to -\nabla'\times\dfrac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \dfrac{\nabla\times\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

建立了与 Poisson eq. 的良好对应关系 $\nabla^2\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$.

磁矢势的引入某种程度上基于场源 $\vec{j}$ 是矢量 $(\vec{j}\,dV)$