2022秋易为老师量子力学B
习题二参考解答

宋冰睿　　刘丰铨

2022 年 9 月 17 日

1　第一题

假设某粒子的坐标空间波函数是Gaussian，即（只考虑一维情况）

$$\psi\left(x\right)=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha x^2\right)$$

(a) 请写出粒子在动量空间的波函数；

(b) 利用坐标空间波函数计算

$$\overline{x}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\psi^*\left(x\right)\psi\left(x\right)x$$
$$\overline{x^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\psi^*\left(x\right)\psi\left(x\right)x^2$$

(c) 利用动量空间波函数计算

$$\overline{p}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p\psi^*\left(p\right)\psi\left(p\right)p$$
$$\overline{p^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p\psi^*\left(p\right)\psi\left(p\right)p^2$$

(d) 利用坐标空间波函数计算

$$\overline{p}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\psi^*\left(x\right)\hat{p}\psi\left(x\right)$$
$$\overline{p^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\psi^*\left(x\right)\hat{p}^2\psi\left(x\right)$$
$$\hat{p}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

(e) 由上述结果，试验证波函数满足不确定性关系. 其中涨落定义为

$$\Delta p\equiv\sqrt{\overline{\left(p-\overline{p}\right)^2}}$$
$$\Delta x\equiv\sqrt{\overline{\left(x-\overline{x}\right)^2}}$$

1.1 1a

动量空间波函数可由坐标空间波函数经Fourier变换得到：

$$\begin{aligned}
\varphi(p) =& \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \cdot \psi(x) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha x^2 - \frac{ipx}{\hbar}\right) \\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \cdot \exp\left[-\frac{\alpha}{2}\left(x - i\frac{p}{\alpha\hbar}\right)^2 - \frac{p^2}{2\alpha\hbar^2}\right] \\
=& \left(\frac{\alpha}{4\pi^3\hbar^2}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{p^2}{2\alpha\hbar^2}\right) \\
=& \left(\frac{1}{\alpha\pi\hbar^2}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{p^2}{2\alpha\hbar^2}\right)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

同样为Gaussian.

1.2 1b

由于Gaussian是偶函数，故

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp\left(-\alpha x^2\right) x = 0 \tag{1.2}$$

另外，

$$\begin{aligned}
\overline{x^2} =& \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp\left(-\alpha x^2\right) x^2 \\
=& 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}x \cdot x^2 \exp\left(-\alpha x^2\right) \\
=& 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}} \mathrm{d}t \cdot \frac{t}{\alpha} \mathrm{e}^{-t} \\
=& \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\
=& \frac{1}{2\alpha}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

其中已令$t = \alpha x^2$，即$x = \sqrt{\frac{t}{\alpha}}$.

1.3 1c

类似于1b，有

$$
\begin{aligned}
\overline{p} &= 0 && (1.4)\\
\overline{p^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha\pi\hbar^2}} \exp\left(-\frac{p^2}{\alpha\hbar^2}\right) p^2 \\
&= 2\sqrt{\frac{1}{\alpha\pi\hbar^2}} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}p \cdot p^2 \exp\left(-\frac{p^2}{\alpha\hbar^2}\right) \\
&= 2\sqrt{\frac{1}{\alpha\pi\hbar^2}} \int_0^{+\infty} \hbar\sqrt{\frac{\alpha}{4t}} \mathrm{d}t \cdot \alpha\hbar^2 t \mathrm{e}^{-t} && (1.5)\\
&= \alpha\hbar^2 \sqrt{\frac{1}{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\alpha\hbar^2
\end{aligned}
$$

其中已令$t = \dfrac{p^2}{\alpha\hbar^2}$，即$p = \hbar\sqrt{\alpha t}$.

1.4 1d

注意到一维情况下$\dfrac{\partial}{\partial x}$化为$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$，直接计算：

$$
\begin{aligned}
\overline{p} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha x^2\right) \left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha x^2\right) \\
&= -i\hbar\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \cdot \exp\left(-\alpha x^2\right)(-\alpha x) && (1.6)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{p^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha x^2\right) \left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha x^2\right) \\
&= -\hbar^2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha x^2\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha x^2\right)(-\alpha x)\right] && (1.7)\\
&= \alpha\hbar^2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \cdot \exp\left(-\alpha x^2\right)\left[x(-\alpha x) + 1\right]
\end{aligned}
$$

借助公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \cdot \exp\left(-\alpha x^2\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{1.8}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \cdot \exp\left(-\alpha x^2\right) x^2 = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{1.9}$$

式1.7改写为

$$\overline{p^2} = \alpha\hbar^2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\left[\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} - \alpha \cdot \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right] = \frac{1}{2}\alpha\hbar^2 \tag{1.10}$$

1.5 1e

借助上几小问的结果，有

$$\Delta p = \sqrt{\overline{p^2} - \overline{p}^2} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\hbar \tag{1.11}$$

$$\Delta x = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{1}{2\alpha}} \tag{1.12}$$

因此

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \geq \frac{\hbar}{2} \tag{1.13}$$

满足不确定性关系.

2 第二题

下列一维波函数能否归一化？如果可以，请写出归一化后的波函数.

(a)

$$\psi\left(x\right) = \begin{cases} \sin\dfrac{\pi x}{a} & ,0 \leq x \leq a \\ 0 & ,\text{其它} \end{cases}$$

(b) 平面波

$$\psi\left(x\right) = \exp\left(ikx\right)$$

(c) Dirac函数

$$\psi\left(x\right) = \delta\left(x\right)$$

(d) Gaussian

$$\psi\left(x\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2\right)$$

2.1 2a

能. 设归一化系数为C，则

$$\begin{aligned} \frac{1}{|C|^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x |\psi\left(x\right)|^2 \\ &= \int_0^a \mathrm{d}x \cdot \sin^2\frac{\pi x}{a} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^a \mathrm{d}x \left(1 - \cos\frac{2\pi x}{a}\right) \\ &= \frac{a}{2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

不失一般性，取复数C的辐角为0，则

$$C = \sqrt{\frac{2}{a}} \tag{2.2}$$

因此归一化后的波函数

$$\psi'\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\dfrac{\pi x}{a} & ,0\leq x\leq a\\ 0 & ,\text{其它}\end{cases} \tag{2.3}$$

2.2 2b

否. 因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x|\exp\left(ikx\right)|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x \tag{2.4}$$

发散.

2.3 2c

否. 因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x|\psi\left(x\right)|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^2\left(x\right)\mathrm{d}x \tag{2.5}$$

发散.

2.3.1 法一

一种证明其发散的方法是利用$\delta\left(t\right)\rightleftharpoons 1$这组Fourier变换对的性质. 考虑函数

$$y\left(t\right)=\delta\left(t\right)*\delta\left(t\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-x\right)\delta\left(x\right)\mathrm{d}x \tag{2.6}$$

根据卷积的性质，其Fourier变换为

$$Y\left(j\omega\right)=1\cdot 1=1 \tag{2.7}$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}Y\left(j\omega\right)\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega \tag{2.8}$$

发散，进而$\int_{-\infty}^{+\infty}y\left(t\right)\mathrm{d}t$发散. 又当$t\neq 0$时$y\left(t\right)=0$显然，因此必有

$$y\left(0\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\cdot\delta\left(0-x\right)\delta\left(x\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^2\left(x\right)\mathrm{d}x \tag{2.9}$$

发散.

2.3.2 法二

除此之外，还可直接计算出动量空间波函数$\varphi\left(p\right)=1$，再根据

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p|\varphi\left(p\right)|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p \tag{2.10}$$

发散推知$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x|\psi\left(x\right)|^2$发散.

2.4 2d

能. 类似于2a，

$$\begin{aligned}\frac{1}{|C|^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x |\psi(x)|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \cdot \exp\left(-\alpha^2 x^2\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\end{aligned} \tag{2.11}$$

不失一般性，取复数C的辐角为0，则

$$C = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}} \tag{2.12}$$

因此归一化后的波函数

$$\psi'(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2\right) \tag{2.13}$$