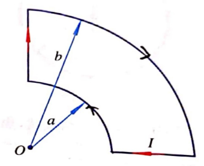
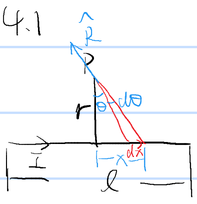
4.1 一段长度为 l 的通电导线，电流为 I，求离导线中点为 r 的 P 点的磁感应强度，并讨论 $l \gg r$ 的结果。

4.2 一电流环由两个同心圆弧和两段相互垂直的导线组成，如图所示，通有电流 I，求：(1) 圆心 O 点的磁感应强度；(2) 若 $I = 20$ A，$a = 30$ mm，$b = 50$ mm，计算圆心处 B 的值。



习题 4.2 图

4.1



直接微元法.

dx 段电流元产生的元磁感强度

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{x}\times\hat{R}}{R^2} \qquad (R^2 = r^2 + x^2)$$

易知 $\vec{B}$ ⊙，$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dx\cos\theta}{r^2+x^2} \xrightarrow{x = r\tan\theta} \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{r\sec^2\theta\cos\theta\,d\theta}{r^2(1+\tan^2\theta)}$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\cos\theta\,d\theta.$$

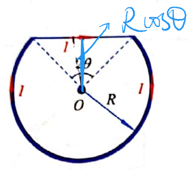
故 $|\vec{B}| = \int_{-\theta_0}^{\theta_0}|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}2\sin\theta_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{l^2}{\sqrt{l^2+4r^2}} \xrightarrow{l \gg r} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ —"无限长直导线"

4.2 (1) 首先，两段(沿长线)过圆心的直导线对 $\vec{B}_0$ 无贡献易知.

再考虑两段圆弧 $|\vec{B}_0| = \frac{1}{4}\left(\frac{\mu_0 I}{2a} - \frac{\mu_0 I}{2b}\right) = \frac{\mu_0 I}{8}\frac{b-a}{ab}$ & $\vec{B}_0$ ⊙

(2) 数值代入计算知 $|\vec{B}_0| = 4.189\times10^{-5}$ T

4.6 一载有电流为 I 的导线弯成半径为 R 的圆弧，圆弧的两端是一条直线，对圆心的夹角为 2θ，求圆心处的磁感应强度。

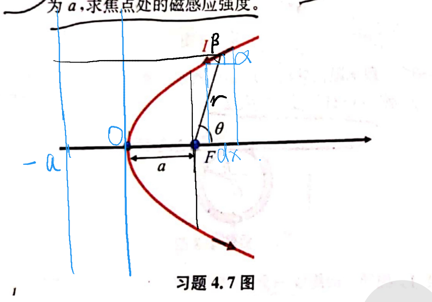


习题 4.6 图

利用上两题的结论.

$$\begin{cases} |\vec{B}_0| = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(1 - \frac{2\theta}{2\pi}\right) + \frac{\mu_0 I}{2\pi R\cos\theta}\sin\theta \\ \quad = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(1 + \frac{\tan\theta - \theta}{\pi}\right) \\ \vec{B}_0 \ \otimes \end{cases}$$

4.7 一载有电流 I 的导线弯成抛物线状，焦点到顶点的距离为 a，求焦点处的磁感应强度。



习题 4.7 图

[法一]

如图建系

$y^2 = 4ax$

切线方向 $\tan\alpha = \frac{dy}{dx} = \sqrt{4a}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{a}{x}}$

Biot-Savart-Laplace.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dx\sqrt{1+\tan^2\alpha}\cdot\sin\beta}{(x+a)^2} \quad (*)$$

其中有几何关系 $\beta = \theta - \alpha$. 且 $\tan\theta = \frac{y}{x-a}$

(*)式中 $\begin{cases}\sqrt{1+\tan^2\alpha}\,(=\sec\alpha) = \sqrt{1+\frac{a}{x}} \\ \sin\beta = \sin\theta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\theta = \frac{y}{x+a}\sqrt{\frac{x}{x+a}} - \frac{x-a}{x+a}\sqrt{\frac{a}{x+a}} = \frac{\sqrt{4ax}-(x-a)\sqrt{a}}{(x+a)^{3/2}} = \frac{\sqrt{a}(x+a)}{(x+a)^{3/2}} = \sqrt{\frac{a}{x+a}}\end{cases}$

故 $(*) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{(x+a)^2}\sqrt{\frac{x+a}{x}}\sqrt{\frac{a}{x+a}}\,dx$

$$|\vec{B}| = 2\int_0^{+\infty}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\sqrt{a}\frac{dx}{(x+a)^2\sqrt{x}}$$

作换元 $t = \sqrt{x}$，则积分 $I \triangleq \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+a)^2\sqrt{x}} = 2\int_0^{+\infty}\frac{d\sqrt{x}}{(x+a)^2} = 2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t^2+a)^2}$.

而我们已知 $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+a} = \cancel{\left.\frac{t}{t^2+a}\right|_0^{+\infty}} + \int_0^{+\infty}\frac{2t^2}{(t^2+a)^2}dt$

$$= 2\int_0^{+\infty}\frac{t^2+a-a}{(t^2+a)^2}dt = 2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+a} - aI$$

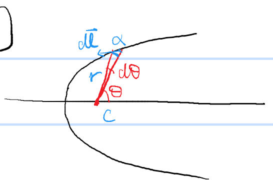
[另一方面，$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty}\frac{d(t/\sqrt{a})}{(t/\sqrt{a})^2+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$]

即 $\frac{\pi}{2\sqrt{a}} = \frac{\pi}{\sqrt{a}} - aI \Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{2a\sqrt{a}}}$

最后得到 $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{a}\frac{\pi}{2a\sqrt{a}} = \boxed{\frac{\mu_0 I}{4a}}$.

⇒ 此法纯粹是解析几何与积分计算，没啥物理含量就是说.

[法二]



$|d\vec{B}| = \left|\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}\right| = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{dl\sin\alpha}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\theta}{r}$.

故 $|\vec{B}| = \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\theta}{\frac{2a}{1-\cos\theta}} = \frac{\mu_0 I}{8\pi a}\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)\,d\theta = \frac{\mu_0 I}{4a}$.

⇒ 此法运用极坐标方程，简明很多.

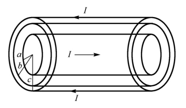
[法三] $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{(dx\,\hat{e}_x + dy\,\hat{e}_y)\times((a-x)\hat{e}_x + (-y)\hat{e}_y)}{(x+a)^3}$

$= \frac{\mu_0 I}{4\pi(x+a)^3}\left[-y\,dx - (a-x)\,dy\right]\hat{e}_z$.

$$\begin{cases}|B|_1 = 2\int_0^{+\infty}\frac{-\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sqrt{4ax}}{(x+a)^3}dx \\ |B|_2 = 2\int_0^{+\infty}\frac{-\mu_0 I}{4\pi}\cdots\, dy\end{cases}$$

4.12 一根很长的同轴电缆，由一导体圆柱(半径为 a)和一同轴的导体圆管构成，导体圆管的内、外半径分别为 b、c，沿导体柱和导体管通以反向电流，电流强度均为 I，且均匀地分布在导体的横截面上，求：(1) 导体圆柱内($r<a$)、(2) 两导体之间($a<r<b$)、(3) 导体圆管内($b<r<c$)、(4) 电缆外($r>c$)各处的磁感应强度大小。

5.10 如习题 5.10 图所示，一根很长的同轴电缆，由一导体圆柱（半径为 a）和与之共轴的导体圆管（内、外半径分别为 b、c）构成，沿导体柱和导体管通以反向电流，电流强度均为 I，且均匀地分布在导体的横截面上，求下述各区内的磁感应强度：



习题 5.10 图

（1）导体圆柱内 $(r<a)$；
（2）两导体之间 $(a<r<b)$；
（3）导体圆管内 $(b<r<c)$；
（4）电缆外 $(r>c)$.

解 取圆柱坐标（r,ϕ,z），z 轴与导体柱轴重合，方向沿 I 的方向. 由对称性分析知 $\boldsymbol{B}$ 沿 $\boldsymbol{e}_\phi$ 方向，其大小仅与 r 有关. 选择与圆柱轴线垂直、半径为 r、圆心位于圆柱轴线的圆环回路，运用安培环路定理计算各区磁场.

（1）导体圆柱内（$r<a$）：穿越回路的电流等于 Ir^2/a^2，由安培环路定理得

$$2\pi rB=\frac{\mu_0 r^2 I}{a^2} \quad\Rightarrow\quad B=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2}$$

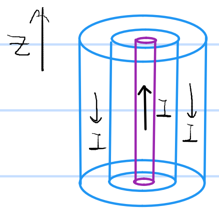
（2）两导体之间 $(a<r<b)$：穿越回路的电流等于 I，由安培环路定理得

$$2\pi rB=\frac{\mu_0 I}{a^2} \quad\Rightarrow\quad B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

（3）导体圆管内 $(b<r<c)$：穿越回路的电流等于 $I-(r^2-b^2)I/(c^2-b^2)$，由安培环路定理得

$$2\pi rB=\mu_0 I\left(1-\frac{r^2-b^2}{c^2-b^2}\right) \quad\Rightarrow\quad B=\frac{\mu_0 I(c^2-r^2)}{2\pi r(c^2-b^2)}$$

（4）电缆外 $(r>c)$：穿越回路的电流等于零，由安培环路定理得 $B=0$.



首先，求出二者电流密度 $\begin{cases} \vec{j}_1=\dfrac{I}{\pi a^2}\hat{e}_z \\ \vec{j}_2=\dfrac{I}{\pi(c^2-b^2)}(-\hat{e}_z) \end{cases}$

下面利用 Ampere 环路定理.

[所有 $B(r)$ 均沿 $\hat{e}_\phi$ 方向]

(1) $r<a$. $B(r)\cdot 2\pi r=\mu_0 j_1\cdot\pi r^2 \Rightarrow B(r<a)=\frac{1}{2}\mu_0 j_1 r=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{a^2}$

(2) $a<r<b$ $B(r)\cdot 2\pi r=\mu_0 I \Rightarrow B(a<r<b)=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ⇒ 这告诉我们，圆柱形载流导线在其外部的磁感强度与一理想导线相同.

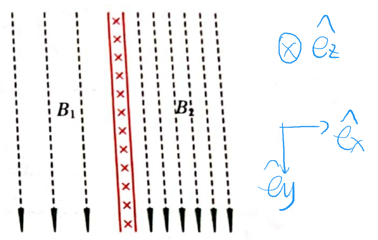
(3) $b<r<c$ $B(r)\cdot 2\pi r=\mu_0[I-j_2\pi(r^2-b^2)] \Rightarrow B(b<r<c)$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1-\frac{r^2-b^2}{c^2-b^2}\right)=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{c^2-r^2}{r(c^2-b^2)}$$

(4) $r>c$ $B(r)=0$.

⇒ 容易发现，$B(r)$在径向(除去未讨论的理想载流面处)是连续的.

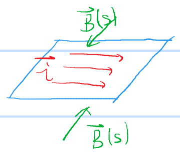
4.20 将一电流均匀分布的无限大载流平面放入均匀磁场 B_0 中，放入后平面两侧的磁感应强度分别为 B_1 和 B_2，如图所示。求：(1) 无限大载流平面的电流密度 i；(2) 无限大载流平面单位面积上的安培力。



习题 4.20 图

首先单独分析无限大均匀载流平面.

s为考察点至平面的垂直距离.



Ampere环路定理：

$2B(s)\cdot l=\mu_0(il)$，l为所取回路的长度.

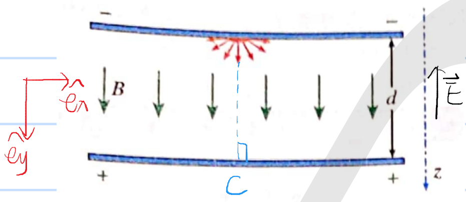
上式已明确磁感强度平行于平面.

即 $B(s)=\frac{1}{2}\mu_0 i\equiv \text{const}$.

⇒ 回原题，由叠加原理 $\begin{cases} B_1=B_0-\frac{1}{2}\mu_0 i \\ B_2=B_0+\frac{1}{2}\mu_0 i \end{cases} \Rightarrow i=\dfrac{B_2-B_1}{\mu_0}$.

(2) $\vec{F}=\vec{i}\times\vec{B}=\dfrac{B_2-B_1}{\mu_0}\hat{e}_z\times\frac{1}{2}(B_2+B_1)\hat{e}_y=-\dfrac{B_2^2-B_1^2}{2\mu_0}\hat{e}_x$. 注意方向

4.30



习题 4.30 图

由于垂直于$\vec{B}$的两个方向在本系统中等价，故不妨仅考虑图示的二维情况.

"慢速" ⇒ $v_0 \ll E/B$，$E=V/d$.

$\begin{cases} v_{x_0}=v_0\cos\theta \\ v_{y_0}=v_0\sin\theta \end{cases}$，$\theta$为粒子初速度方向与极板夹角.

在$\vec{E}$、$\vec{B}$同时作用下 $\begin{cases} v_x \text{ 将绕}\vec{B}\text{作圆周运动} \\ v_y \text{ 将被}\vec{E}\text{加速} \end{cases}$

"聚焦"，由于$\theta=\frac{\pi}{2}$粒子的限制，"焦点"C只能如图.

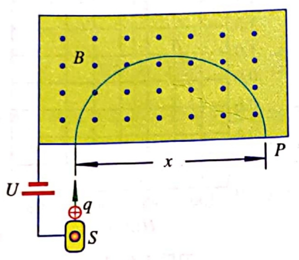
故$\theta\neq\frac{\pi}{2}$粒子的圆周运动到C点时应恰好经过了n个周期.

即 $t=nT=n\dfrac{2\pi m}{eB}$ $(n\in N)$

而 $d=v_{y_0}t+\frac{1}{2}\dfrac{eE}{m}t^2\approx\dfrac{eE}{2m}n^2\dfrac{4\pi^2m^2}{e^2B^2}=\dfrac{2\pi^2m}{eB^2}n^2E$

解得 $V=Ed=\dfrac{eB^2}{2\pi^2n^2m}d^2$ [纯粹的高中题就是说]

4.31 一质谱仪的构造原理如图所示，离子源 S 产生质量为 m、电荷为 q 的离子，发射时速度很小，可以认为是静止的。离子经电势为 U 的区域加速，然后进入磁感应强度为 B 的均匀磁场中，最后到达荧光屏 P 点，求：(1) P 点距离离子入口处的距离 x；(2) 若 $U=750$ V，$B=3\,580$ G，$x=10$ cm，则入射离子的荷质比为多少？



习题 4.31 图

(1) $x=2R=\dfrac{2mv}{qB}=\dfrac{2}{qB}\sqrt{2mqU}=\sqrt{\dfrac{8mU}{qB^2}}$

(2) $\gamma=\dfrac{q}{m}=\dfrac{8U}{B^2x^2}=4.682\times10^6$ C/kg.

5.1 顺磁质分子的磁矩和玻尔磁矩 $m_B = eh/(4\pi m_e)$ 同量级。设顺磁质温度为 $T=300$ K，磁感应强度 $B=1$ T，问 kT 是 $m_B B$ 的多少倍？（$h=6.626\times10^{-34}$ J·s^{-1}，$e=1.602\times10^{-19}$ C，$m_e=9.11\times10^{-31}$ kg，$k=1.3\times10^{-23}$ J·K^{-1}。）

5.2 一均匀磁化棒直径为 10 mm，长为 30 mm，磁化强度为 1 200 A·m^{-1}，求它的磁矩 μ。

5.1 **6.8** 顺磁质分子的磁矩和玻尔磁矩 $m_B = eh/(4\pi m_e)$ 同量级．设顺磁质温度为 T=300K，磁感应强度 B=1T，问 kT 是 $m_B B$ 的多少倍？（$h=6.626\times10^{-34}$ J·s^{-1}，$e=1.602\times10^{-19}$ C，$m_e=9.11\times10^{-31}$ kg，$k=1.38\times10^{-23}$ J·K^{-1}）

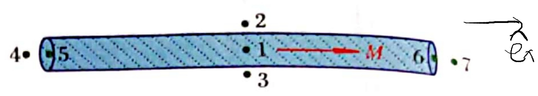
解 将有关数据代入，求得这一比值等于

$$\frac{kT}{m_B B}=\frac{4\pi\times9.11\times10^{-31}\times1.38\times10^{-23}\times300}{1.602\times10^{-19}\times6.626\times10^{-34}\times1}=446$$

5.2 磁化强度的定义 $\vec{M}=\frac{\sum\vec{\mu_i}}{V}$

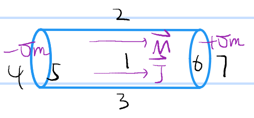
因而 $\vec{\mu}_{tot}=\sum_i\vec{\mu_i}=\vec{M}V=\left[1200\times(\pi\cdot5^2\times30)\times10^{-9}\right](A\cdot m^2)\approx2.827\times10^{-3}(A\cdot m^2)$

5.7 一细长的均匀磁化棒，磁化强度为 M，M 沿棒长方向，如图所示，求习题 5.7 图中各点的磁场强度 H 和磁感应强度 B。



习题 5.7 图

⇒ [法二] 磁荷法．适用于无传导电流的情况．



$\sigma_m=\vec{J}\cdot\hat{n}=\mu_0 M$．

$H_6=-\frac{\sigma_m}{2\mu_0}=-\frac{M}{2}$ （H_7、H_4、H_5 类似）

$\pm\sigma_m$ 产生的"退极化场"抵消了原来的 $\vec{H}_{int}$

故而 $\vec{H}_1=0\Rightarrow\vec{B}_1=\mu_0(\vec{H}_1+\vec{M})=\mu_0M\hat{e_x}$

① $\begin{cases}\vec{j}_1'=\nabla\times\vec{M}_1=0\\ \vec{j}_{10}=0\end{cases}\Rightarrow\vec{j}_1=\vec{j}_1'+\vec{j}_{10}=0\Rightarrow\vec{H}_1=0\Rightarrow\vec{B}_1=\mu_0(\vec{H}_1+\vec{M}_1)=\mu_0M\hat{e_x}$ [或理解为均匀磁化]

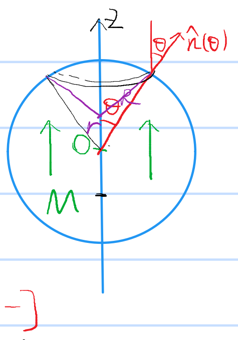
②③ $\vec{B}_2=\vec{B}_3=0$ & $\vec{H}_2=\vec{H}_3=0$

④⑤ $\vec{B}$、$\vec{H}$ 垂直于介质界面，因而 $\vec{B}$ 连续，即 $\vec{B}_4=\vec{B}_5$

于是 $\begin{cases}\vec{M}_4=\frac{\vec{B}_4}{\mu_0}-\vec{H}_4=0\\ \vec{M}_5=\frac{\vec{B}_5}{\mu_0}-\vec{H}_5=\vec{M}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{B}_4=\vec{B}_5=\frac{1}{2}\mu_0M\hat{e_x}\\ \vec{H}_4=-\vec{H}_5=\frac{1}{2}M\hat{e_x}\end{cases}$

⑥⑦ 同理 $\begin{cases}\vec{B}_6=\vec{B}_7=\frac{1}{2}\mu_0M\hat{e_x}\\ \vec{H}_7=-\vec{H}_6=\frac{1}{2}M\hat{e_x}\end{cases}$

5.12 一介质球均匀磁化，磁化强度为 M，试求沿 M 的直径上球内离球心为 r 处的磁感应强度。



不妨设 球内 $\vec{M}=M\hat{e_z}$

方向为 θ 的边界外法向量

$\hat{n}(\theta)=\cos\theta\,\hat{e_z}+\sin\theta\,\hat{e_\rho}$ 采用柱坐标 (ρ,φ,z) 球坐标 (r,θ,φ)

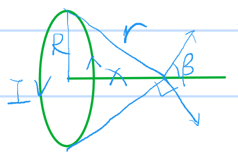
因而 θ 处磁化面电流密度 $\vec{k}(\theta)=\vec{M}\times\hat{n}(\theta)=M\sin\theta\,\hat{e_\varphi}$

[法一] 若引入磁荷观点 则 $\sigma_m(\theta)=\hat{n}(\theta)\cdot\vec{J}=\mu_0M\cos\theta$

套用静电学结论，球内均匀磁化，因而 $\vec{B}=\frac{2}{3}\mu_0M\hat{e_z}$．

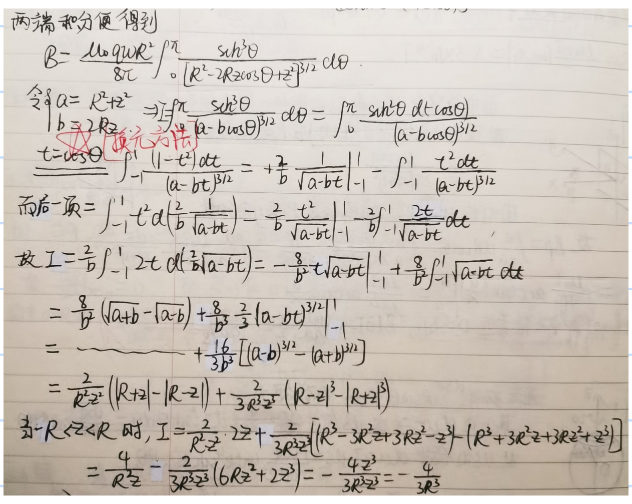
[法二] 用磁化电流观点计算：

极角为 θ 处 电流环产生的元磁感强度 $d\vec{B}(r,\theta)=\frac{\mu_0 k\cdot Rd\theta}{2}\frac{(R\sin\theta)^2}{(r^2+R^2-2rR\cos\theta)^{3/2}}\hat{e_z}$



$\Rightarrow|\vec{B}|=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot2\pi R}{r^2}\cdot\frac{R}{r}=\frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+x^2)^{3/2}}$

因而 $\vec{B}(r)=\int_0^\pi d\vec{B}(r,\theta)=\hat{e_z}\frac{\mu_0MR^3}{2}\int_0^\pi\frac{\sin^3\theta}{(r^2+R^2-2rR\cos\theta)^{3/2}}d\theta$


两端积分便得到

$B=\frac{\mu_0 q\omega R^2}{8\pi}\int_0^\pi\frac{\sin^3\theta}{[R^2-2Rz\cos\theta+z^2]^{3/2}}d\theta$

令 $\begin{cases}a=R^2+z^2\\ b=2Rz\end{cases}\Rightarrow I=\int_0^\pi\frac{\sin^3\theta}{(a-b\cos\theta)^{3/2}}d\theta=\int_0^\pi\frac{\sin^2\theta\,d(\cos\theta)}{(a-b\cos\theta)^{3/2}}$ [换元方法]

$\underline{\underline{t=\cos\theta}}\int_{-1}^1\frac{(1-t^2)dt}{(a-bt)^{3/2}}=+\frac{2}{b}\frac{1}{\sqrt{a-bt}}\Big|_{-1}^1-\int_{-1}^1\frac{t^2dt}{(a-bt)^{3/2}}$

而后一项 $=\int_{-1}^1t^2d\left(\frac{2}{b}\frac{1}{\sqrt{a-bt}}\right)=\frac{2}{b}\frac{t^2}{\sqrt{a-bt}}\Big|_{-1}^1-\frac{2}{b}\int_{-1}^1\frac{2t}{\sqrt{a-bt}}dt$

故 $I=\frac{2}{b}\int_{-1}^1 2t\,d\left(\frac{2}{b}\sqrt{a-bt}\right)=-\frac{8}{b^2}t\sqrt{a-bt}\Big|_{-1}^1+\frac{8}{b^2}\int_{-1}^1\sqrt{a-bt}\,dt$

$=\frac{8}{b^2}(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})+\frac{8}{b^3}\frac{2}{3}(a-bt)^{3/2}\Big|_{-1}^1$

$=\sim\sim\sim+\frac{16}{3b^3}[(a-b)^{3/2}-(a+b)^{3/2}]$

$=\frac{2}{R^2z^2}(|R+z|-|R-z|)+\frac{2}{3R^3z^3}(|R-z|^3-|R+z|^3)$

当 $-R<z<R$ 时，$I=\frac{2}{R^2z^2}\cdot2z+\frac{2}{3R^3z^3}[(R^3-3R^2z+3Rz^2-z^3)-(R^3+3R^2z+3Rz^2+z^3)]$

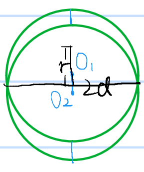
$=\frac{4}{R^2z}-\frac{2}{3R^3z^3}(6R^2z+2z^3)=-\frac{4z^3}{3R^3z^3}=-\frac{4}{3R^3}$

[左图为我学电磁时做写的积分过程，以供参考．]

可知在 $r\in(-R,R)$ 时，积分项 $=\frac{4}{3R^3}$．

因而 $\vec{B}=\frac{2}{3}\mu_0M\hat{e_z}=\vec{B}(r)$

[法三] 用磁荷观点、 由于磁荷呈余弦型分布，故可拆成两错位球面 $(\overline{O_1O_2}\triangleq2d)$



两球分别均匀磁化，其体磁荷密度 $\pm\rho_{m0}$

满足 $\rho_{m0}\cdot2d\cos\theta=\sigma_m(\theta)=\mu_0M\cos\theta\Rightarrow\rho_{m0}=\frac{\mu_0M}{2d}$．

因而 $\begin{cases}\vec{H}_+=\frac{+\rho_{m0}}{3\mu_0}(r-d)\hat{e_z}\\ \vec{H}_-=\frac{-\rho_{m0}}{3\mu_0}(r+d)\hat{e_z}\end{cases}\Rightarrow\vec{H}=\vec{H}_++\vec{H}_-=-\frac{2\rho_{m0}d}{3\mu_0}\hat{e_z}=-\frac{M}{3}\hat{e_z}$

故 $\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})=\boxed{\frac{2}{3}\mu_0M\hat{e_z}}$ （实际上就是将法一中套用的结论证了一遍）

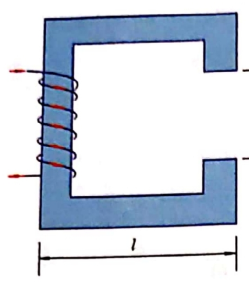
⇒ 上面的过程还可以推广至球内任一点的情况．

只需 将磁场强度改写为 $\begin{cases}\vec{H}_+=\frac{+\rho_{m0}}{3\mu_0}(\vec{r}-d\hat{e_z})\\ \vec{H}_-=\frac{-\rho_{m0}}{3\mu_0}(\vec{r}+d\hat{e_z})\end{cases}\Rightarrow\vec{H}=\vec{H}_++\vec{H}_-=-\frac{M}{3}\hat{e_z}$

因而 球内实际是匀强场，

而不仅局限于沿 $\vec{M}$ 的直径方向 ⇒ 这也是磁荷法的一大优势．

5.18 已知一个电磁铁由绕有 N 匝载流线圈的 C 形铁片($\mu \gg \mu_0$)所构成(如图所示)。如果铁的横截面积为 A,电流为 I,气隙宽度为 d,C 形的每边边长为 l,求气隙中的磁感应强度。



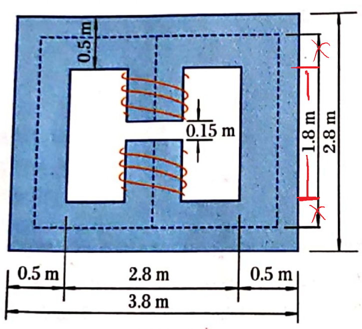
习题 5.18 图

5.18 由磁路定理

$$NI = \phi_m\left(\frac{4l-d}{\mu A} + \frac{d}{\mu_0 A}\right)$$

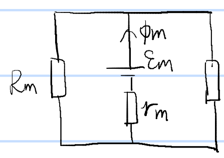
因而 $|\vec{B}| = \dfrac{\phi_m}{A} = \dfrac{NI}{\frac{4l-d}{\mu} + \frac{d}{\mu_0}} = \dfrac{\mu_0 \mu NI}{4\mu_0 l + (\mu - \mu_0)d}$

图所示是一个电磁铁的结构,尺寸见图中标注,电磁铁的两极是圆柱形的,半径为 0.25 m,两极间气隙的间距为 0.15 m,磁路其他部分是边长为 0.5 m 的正方形铁芯,如果要在气隙中产生 1.0 T 的磁场,则其线圈的总匝数为多少?设铁的相对磁导率为 3 000。



习题 5.20 图

5.20 以磁路中心线为基准绘制等效磁路图.



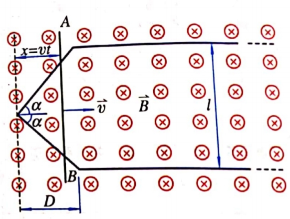
易知 $\phi_m = \dfrac{\mathcal{E}_m}{r_m + \frac{1}{2}R_m}$.

其中 $\begin{cases} \phi_m = B \cdot S_1 = S_1 \\ r_m = \dfrac{1.8-0.15}{3000\mu_0 S_1} + \dfrac{0.15}{\mu_0 S_1} \\ R_m = \dfrac{1.65\times 2 + 1.8}{3000\mu_0 S_2} \end{cases}$ (均采用SI制)

其中 $\begin{cases} S_1 = \pi \times 0.25^2 \text{ 为圆柱截面积} \\ S_2 = 0.5^2 \text{ 为正方形截面积} \end{cases}$

因而 $\mathcal{E}_m = \dfrac{1.65}{3000\mu_0} + \dfrac{0.15}{\mu_0} + \dfrac{5.1}{3000\mu_0}\dfrac{S_1}{S_2} \times \dfrac{1}{2}(A) \approx 1.20335 \times 10^5\ (A)$

6.1 如图所示,一根可以滑动的导线 AB 放置在一个导轨上,导轨的形状如图所示,均匀磁场 B 垂直于导轨平面,求:导轨以恒定的速度 v 运动时所产生的动生电动势为多少?



习题 6.1 图

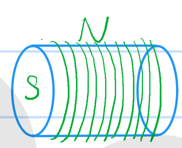
6.1

$$\mathcal{E} = \begin{cases} Bv \cdot 2vt\tan\alpha = 2Bv^2 t \tan\alpha, & 0 < t \leq \frac{D}{v} \\ Blv, & t > \frac{D}{v} \end{cases}$$

[图中应有关系:$\tan\alpha = \frac{l}{2D}$]

6.2 复位线圈有时用来测量某区域的磁场大小。有这样一个线圈,匝数为 N,每匝的面积为 S,线圈很小,以使其内的磁场是近似均匀的,这个线圈最初以其轴与磁场线相平行的方式放置,然后绕其轴翻转(转动)180°,使得其轴线与磁场反平行,该线圈与一冲击电流计相接,通过它可以测出流过的总电量为 Q,假设线圈的总电阻为 R,求线圈处的磁场大小。

6.2

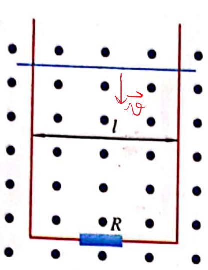


$\Delta\phi_m = 2NBS$.

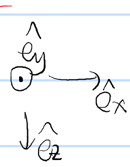
$\displaystyle\int \left|\frac{d\phi_m}{dt}\right| dt = \int I(t) R\, dt \Rightarrow |\Delta\phi_m| = QR$.

因而 $|\vec{B}| = \dfrac{QR}{2NS}$.

6.9 一个滑动导线电路平面被垂直安置于板上,如图所示,假设导线上所有电阻 R 都集中在底部,导轨摩擦力可以忽略,均匀磁场与平面垂直,导轨的质量为 m,长度为 l。(1) 证明滑动导轨的收尾速度为 $v_T = mgR/B^2 l^2$;(2) 如果磁场与平面成 θ 角,收尾速度又为多少?



习题 6.9 图



(1) 导轨的动力学方程: $mg - \dfrac{B^2l^2 v}{R} = m\dfrac{dv}{dt}$. (on z axis)

$\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{B^2l^2}{mR}v = g \Rightarrow v(t) = \dfrac{mgR}{B^2l^2}\left[1 - \exp\left(-\dfrac{B^2l^2}{mR}t\right)\right]$

因而 $v(t\to\infty) = \dfrac{mgR}{B^2l^2}$;

(2) $\mathcal{E} = \int (\vec{v}\times\vec{B}) \cdot d\vec{l}$.

$\begin{cases} \vec{v} = v\hat{e}_z \\ d\vec{l} = -dl\,\hat{e}_x \end{cases}$ $\vec{B}$ 与板成 θ 角 $\Rightarrow \vec{B}\cdot\hat{e}_y = B\sin\theta$.

因而不妨设 $\vec{B} = B(\sin\theta\,\hat{e}_y + \cos\theta\cos\phi\,\hat{e}_x + \cos\theta\sin\phi\,\hat{e}_z)$

$\mathcal{E} = vB(\sin\theta\,\hat{e}_x - \cos\theta\cos\phi\,\hat{e}_y)\cdot l\hat{e}_x = Blv\sin\theta$.

因而 $\vec{F}_{Ampere} = \dfrac{\mathcal{E}}{R}\vec{l}\times\vec{B} = \dfrac{Blv\sin\theta}{R}\, l\hat{e}_x \times \vec{B} = B^2l^2 v\sin\theta(\sin\theta\,\hat{e}_z - \cos\theta\sin\phi\,\hat{e}_y)$

我们仅关心z向受力 $\Rightarrow F_z = B^2l^2 v\sin^2\theta$.

故而 $v(t\to\infty) = \dfrac{mgR}{B^2l^2\sin^2\theta}$

磁荷法：应用于不存在传导电流的空间.

	静电学	静磁学
场强度	$\vec{E}$	$\vec{H}$
感应强度	$\vec{D}$	$\vec{B}$
极化强度	$\vec{P}$	$\vec{J}$
(常数)	ε_0	μ_0

$$\begin{cases}\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\\ \vec{B}=\mu_0\vec{H}+\vec{J}\end{cases}\Rightarrow \boxed{\vec{J}=\mu_0\vec{M}}=\mu_0\chi_m\vec{H}\Rightarrow \vec{B}=\underbrace{\mu_0(1+\chi_m)}_{\text{磁化的微观机制}⊕}\vec{H}$$

μ

假想磁荷存在.

静磁场 $\begin{cases}\text{Gauss Theorem}: & \nabla\cdot\vec{H}=\sigma_m \quad \text{magnetic}\\ \text{环路} & \nabla\times\vec{H}=0\end{cases}$

⇒可引出积分形式.

无旋性⇒引入磁标势 φ_m：$\vec{H}=-\nabla\varphi_m$. $(\vec{E}=-\nabla\varphi)$

(參辞一节)

$$\begin{cases}\text{电偶极子}: & \varphi=\dfrac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\\ \text{磁} ---: & \varphi_m=\dfrac{\vec{p}_m\cdot\hat{r}}{4\pi\mu_0 r^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{E}=\dfrac{3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\\ \vec{H}=\dfrac{3(\vec{p}_m\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{p}_m}{4\pi\mu_0 r^3}\end{cases}$$

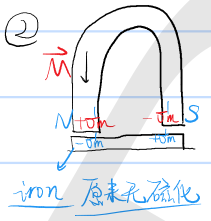
结合 $\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}-\hat{m}}{r^3}$ 得到对应关系 $\begin{cases}\vec{H}\leftrightarrow\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}\\ \vec{p}_m\leftrightarrow\mu_0\vec{m}\end{cases}$

$\vec{J}$ 的 def：$\vec{J}=\dfrac{\sum\vec{p}_m}{\Delta V}\Rightarrow\oint_S\vec{J}\cdot d\vec{S}=-\sum_{S内}q_m'$.

故而面极化磁荷：$\sigma_m'=\vec{J}\cdot\hat{n}$. $\boxed{\text{' 表示极化}}$

①⇒作业题的[法二]

②



$\sigma_m'=J=\mu_0 M$.

因而 $F=2\boxed{\dfrac{\sigma_m'}{2\mu_0}}\sigma_m' A$

$=\dfrac{\sigma_m'^2 A}{\mu_0}=\mu_0 M^2 A$.

二) 磁矢势 $\vec{A}$ s.t. $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

1、规范不变性. $\begin{cases}\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\psi\\ \varphi'=\varphi-\partial_t\psi\end{cases}$

2. $\begin{cases}\text{Coulomb 规范} & \nabla\cdot\vec{A}=0.\\ \text{Lorentz 规范} & L\triangleq\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi=0\end{cases}$

$\mu_0\vec{j}=\nabla\times\vec{B}=\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\cancel{\nabla\cdot\vec{A}})-\nabla^2\vec{A}$. Coulomb $=0$

3. 势方程 $\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{j}$

4. 局域电流 $\vec{A}(\vec{r})=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\dfrac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}$ 验证 $\nabla\times\vec{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\nabla\times\dfrac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ ("代表场源空间") $-\nabla'\times\dfrac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}+\dfrac{\nabla\times\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

建立了与 Poisson eq. 的良好对应关系 $\nabla^2\varphi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$.

磁矢势的引入某种程度上基于场源 是矢量 $(\vec{j}dV)$