2022 秋易为老师量子力学 B
习题七参考解答

刘丰铨　　宋冰睿

2022 年 11 月 2 日

1　第 1 题

考虑一维系统，利用坐标及动量表象中的正交完备关系，

(a) 计算：

$$\langle p'|f(\hat{x})|p''\rangle$$

(b) 证明：

$$\langle p'|\hat{x}|\phi\rangle = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|\phi\rangle$$

(c) 利用以上关系，证明：

$$\langle\psi|\hat{x}|\phi\rangle = \int\psi^*(p)\,\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p}\phi(p)\,\mathrm{d}p$$

其中 $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$ 且 $\phi(p) = \langle p|\phi\rangle$.

1.1　1a

解：依题意，注意到算符 $\hat{x}$ 作用在动量算符的本征态上不易直接处理，因此我们考虑利用

$$\int|x\rangle\langle x|\,\mathrm{d}x = \hat{I} \tag{1.1}$$

并将其插入题给表达式，得到：

$$\begin{aligned}\langle p'|f(\hat{x})|p''\rangle &= \int\langle p'|f(\hat{x})|x\rangle\langle x|p''\rangle\,\mathrm{d}x\\ &= \int f(x)\langle p'|x\rangle\langle x|p''\rangle\\ &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int f(x)\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(p''-p')x}{\hbar}}\,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{1.2}$$

亦即所求实际上是 $f(x)$ 的 Fourier 变换. 进一步地，我们假设 $f(x)$ 在全空间一致收敛于如下幂级数展开：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n \tag{1.3}$$

而我们不难得知：

$$x^n \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(p''-p')x}{\hbar}} = (\mathrm{i}\hbar)^n \frac{\partial^n}{\partial p'^n} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(p''-p')x}{\hbar}} \tag{1.4}$$

将上两式代入1.2，并依次交换求和、积分次序以及求导、积分次序，得到：

$$\langle p' | f(\hat{x}) | p'' \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\mathrm{i}\hbar)^n \frac{\partial^n}{\partial p'^n} \int \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(p''-p')x}{\hbar}} \mathrm{d}x = f\left(\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial p'}\right) \delta(p' - p'') \tag{1.5}$$

其中已利用

$$\int \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(p''-p')x}{\hbar}} \mathrm{d}x = 2\pi\hbar\delta(p' - p'') \tag{1.6}$$

1.2 1b

解：将

$$\int |p\rangle \langle p| \, \mathrm{d}p = \hat{I} \tag{1.7}$$

插入题给表达式等号左端，得到：

$$\langle p' | \hat{x} | \phi \rangle = \int \langle p' | \hat{x} | p \rangle \langle p | \phi \rangle \, \mathrm{d}p \tag{1.8}$$

再利用 1a 结论，并利用分部积分，得：

$$\begin{aligned} \int \langle p' | \hat{x} | p \rangle \langle p | \phi \rangle \, \mathrm{d}p &= \int \left[\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \delta(p' - p)\right] \langle p | \phi \rangle \, \mathrm{d}p \\ &= -\mathrm{i}\hbar \int \langle p | \phi \rangle \, \mathrm{d}\delta(p' - p) \\ &= \mathrm{i}\hbar \int \delta(p' - p) \frac{\partial}{\partial p} \langle p | \phi \rangle \, \mathrm{d}p \\ &= \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \langle p' | \phi \rangle \end{aligned} \tag{1.9}$$

其中已利用 $\frac{\partial}{\partial p'}\delta(p' - p) = -\frac{\partial}{\partial p}\delta(p' - p)$；以上即为欲证结论.

1.3 1c

解：我们故技重施，将单位算符插入题给表达式等号左端，得：

$$\langle \psi | \hat{x} | \phi \rangle = \int \langle \psi | p \rangle \langle p | \hat{x} | \phi \rangle \, \mathrm{d}p \tag{1.10}$$

利用 1b 结论，立即有：

$$\int \langle \psi | p \rangle \langle p | \hat{x} | \phi \rangle \, \mathrm{d}p = \int \langle \psi | p \rangle \, \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial p} \langle p | \phi \rangle \, \mathrm{d}p = \int \psi^*(p) \, \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial p} \phi(p) \, \mathrm{d}p \tag{1.11}$$

即为欲证表达式等号右端.

注：本题中利用力学量算符本征矢量的完备性，在表达式的任意位置插入单位算符并将单位算符改写为1.1和1.7形式的处理方法非常常见，且通常能很好地将棘手的问题变得易于分析和计算，请同学们务必加以掌握. 同样的方法在离散谱问题中也适用.

2 第 2 题

假设一维体系的 Hamiltonian 算符为：

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

请写出动量表象下的 Schrödinger 方程，并分别写出一维谐振子在坐标和动量表象下的 Schrödinger 方程.

解：本题中考虑的所有态矢量皆含时，我们在讨论中不再显式地将时间作为函数的自变量写出. 我们知道，Schrödinger 方程写作：

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle \tag{2.1}$$

利用动量算符的本征矢量不随时间变化的性质（请同学们注意此处的措辞. 因为动量算符本身不随时间改变，所以动量算符的本征矢量不随时间改变；然而，倘若粒子零时刻处在动量算符的本征态，那么这个粒子的态仍可能随时间演化.），在上式等号两端同时以 $\langle p|$ 作用，并记 $\psi_P(p) = \langle p|\psi\rangle$，得到：

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_P(p) = \left\langle p\left|\hat{H}\right|\psi\right\rangle = \frac{p^2}{2m}\psi_P(p) + \langle p|V(\hat{x})|\psi\rangle \tag{2.2}$$

仿照 1a 和 1b 的证明过程并多次利用分部积分，不难验证，1b 的结论可以外推得到：

$$\langle p|V(\hat{x})|\psi\rangle = V\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)\langle p|\psi\rangle \tag{2.3}$$

因此，题给 Hamiltonian 算符对应的动量表象下的 Schrödinger 方程写作：

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_P(p) = \frac{p^2}{2m}\psi_P(p) + V\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)\psi_P(p) \tag{2.4}$$

在谐振子情形中，

$$V(\hat{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \tag{2.5}$$

由是立即可以得到一维谐振子在动量表象下的 Schrödinger 方程：

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_P(p) = \frac{p^2}{2m}\psi_P(p) - \frac{m\omega^2\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\psi_P(p) \tag{2.6}$$

再记 $\psi_X(x) = \langle x|\psi\rangle$，利用与上文完全一致的论证方法可以得到一维谐振子在坐标表象下的 Schrödinger 方程：

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_X(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_X(x) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi_X(x) \tag{2.7}$$

这一结论我们已熟知且相应的推导已经在课程中完成，这里不再赘述.

3 第 3 题

假设体系 Hamiltonian 算符在基矢量 $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ 定义的表象下的矩阵表示为 $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}E/2 \\ -\mathrm{i}E/2 & 0 \end{pmatrix}$，其中 E 为非零实数. 倘若体系在 $t = 0$ 时刻的处于 $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$，试求在任意时刻 t 体系所处的状态. 在此基础上，假设 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 分别为力学量算符 $\hat{A}$ 本征值 A_1 和 A_2 对应的本征态，请写出任意时刻 t 对体系进行力学量 A 的测量时测量值为 A_1 的概率.

说明：由于 $\hat{H}$ 在题给基矢量下的矩阵表示不对角，我们应当先找出 $\hat{H}$ 的本征矢量，并将体系的初态表达为这两个本征矢量的线性组合的形式，再进行进一步的讨论. 这是处理时间演化问题的惯常思路，其合理性在于 $\hat{H}$ 的本征矢量随时间演化的规律较为简单，可以有效地简化讨论.

解：利用题给矩阵表示和常规的特征值求解方法，容易得到 $\hat{H}$ 的本征值：

$$\begin{cases} E_1 = \dfrac{E}{2} \\ E_2 = -\dfrac{E}{2} \end{cases} \tag{3.1}$$

以及对应的归一化本征态：

$$\begin{cases} \left|\psi_{E_1}\right\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - \mathrm{i}\,|2\rangle\right) \\ \left|\psi_{E_2}\right\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + \mathrm{i}\,|2\rangle\right) \end{cases} \tag{3.2}$$

我们知道，力学量算符 $\hat{H}$ 本征值为 E 的本征态 $|\psi_E(t)\rangle$ 随时间演化的规律为：

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_E(t)\rangle = E\,|\psi_E(t)\rangle \quad\Rightarrow\quad |\psi_E(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}Et}{\hbar}}\,|\psi_E(0)\rangle \tag{3.3}$$

而体系初态可表为：

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\psi_{E_1}\right\rangle + \left|\psi_{E_2}\right\rangle\right) \tag{3.4}$$

因此有对应的时间演化规律：

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}Et}{2\hbar}}\left|\psi_{E_1}\right\rangle + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}Et}{2\hbar}}\left|\psi_{E_2}\right\rangle\right) \tag{3.5}$$

再将3.2代入上式，整理得到：

$$|\psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{Et}{2\hbar}\right)|1\rangle - \sin\left(\frac{Et}{2\hbar}\right)|2\rangle \tag{3.6}$$

因此，在 t 时刻对力学量 A 进行测量，测量值为 A_1 即态矢量坍缩到 $|1\rangle$ 的概率为：

$$P_1 = \cos^2\left(\frac{Et}{2\hbar}\right) \tag{3.7}$$

显然有 $P_1 + P_2 = 1$，结果满足概率归一的要求.

4 第 4 题

自由粒子的 Hamiltonian 算符为：

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

请在 Heisenberg 绘景下求 $[\hat{x}(t), \hat{x}(0)]$.

解：依题意，我们希望能够得到 $\hat{x}(t)$ 的显式表达. 根据 Heisenberg 运动方程，有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{x}(t) = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left[\hat{x}(t), \hat{H}\right] \tag{4.1}$$

显然，由于题给 Hamiltonian 算符不显含 t 且与自身对易，故不随时间演化；由此或利用 Heisenberg 运动方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{p}(t)=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left[\hat{p}(t),\hat{H}\right]=0 \tag{4.2}$$

亦可推得：

$$\hat{p}(t)=\hat{p}(0) \tag{4.3}$$

因而：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{x}(t)=\frac{1}{2m\mathrm{i}\hbar}\left[\hat{x}(t),\hat{p}^2\right]=\frac{\hat{p}}{m} \tag{4.4}$$

其中利用了绘景变换下同一时刻对易子的不变性，证明见本题解答末. 由上式可知，位置算符的时间演化关系应是线性的，即有：

$$\hat{x}(t)=\hat{x}(0)+\frac{\hat{p}}{m}t \tag{4.5}$$

于是：

$$[\hat{x}(t),\hat{x}(0)]=\left[\hat{x}(0)+\frac{\hat{p}}{m}t,\hat{x}(0)\right]=\frac{t}{m}[\hat{p},\hat{x}(0)]=-\frac{\mathrm{i}\hbar t}{m}\hat{I} \tag{4.6}$$

即为所求.

附：绘景变换下同一时刻对易子不变性的证明.

记 Schrödinger 绘景下，有对易关系：

$$\left[\hat{A}^{(S)},\hat{B}^{(S)}\right]=\hat{C}^{(S)} \tag{4.7}$$

注意 $\hat{C}^{(S)}$ 一般不满足 Hermite 性质，不是力学量算符. 现在，记 $\hat{A}^{(H)}=\hat{U}^{\dagger}\hat{A}^{(S)}\hat{U}$，并利用 $\hat{U}$（注意它实际上是初始时刻 t_0 和终末时刻 t 的函数，即 $\hat{U}=\hat{U}(t,t_0)$）的幺正性质，有：

$$\begin{aligned}\left[\hat{A}^{(H)},\hat{B}^{(H)}\right]&=\left[\hat{U}^{\dagger}\hat{A}^{(S)}\hat{U},\hat{U}^{\dagger}\hat{B}^{(S)}\hat{U}\right]\\&=\hat{U}^{\dagger}\hat{A}^{(S)}\hat{U}\hat{U}^{\dagger}\hat{B}^{(S)}\hat{U}-\hat{U}^{\dagger}\hat{B}^{(S)}\hat{U}\hat{U}^{\dagger}\hat{A}^{(S)}\hat{U}\\&=\hat{U}^{\dagger}\hat{A}^{(S)}\hat{B}^{(S)}\hat{U}-\hat{U}^{\dagger}\hat{B}^{(S)}\hat{A}^{(S)}\hat{U}\\&=\hat{U}^{\dagger}\left[\hat{A}^{(S)},\hat{B}^{(S)}\right]\hat{U}=\hat{U}^{\dagger}\hat{C}^{(S)}\hat{U}=\hat{C}^{(H)}\end{aligned} \tag{4.8}$$

即为欲证结论.