2022秋易为老师量子力学B
习题六参考解答

宋冰睿　刘丰铨

2022 年 10 月 29 日

1 第一题

在三维ket矢空间有一组正交归一的基矢$\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$及相互对易的算符$\hat{A}$、$\hat{B}$. 已知算符$\hat{A}$在这组基矢下的矩阵表示为$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，算符$\hat{B}$的矩阵表示为$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \mathrm{i}\\ 0 & -\mathrm{i} & 3\end{pmatrix}$.

试求算符$\hat{A}$与算符$\hat{B}$一组正交归一的共同本征态，并写出这些共同本征态对应于算符$\hat{A}$与算符$\hat{B}$的本征值. 说明如何以这些本征值为量子数标定不同的共同本征态.

不妨设所求共同本征态在所给基矢下可表示为

$$|\psi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle + c|3\rangle = \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} \tag{1.1}$$

1.1 法一

$$A|\psi\rangle = \begin{pmatrix}a\\ -b\\ -c\end{pmatrix},\ B|\psi\rangle = \begin{pmatrix}2a\\ b+\mathrm{i}c\\ -\mathrm{i}b+3c\end{pmatrix} \tag{1.2}$$

由于$\hat{A}$、$\hat{B}$对易，因此$A|\psi\rangle$、$B|\psi\rangle$表示同一共同本征态，应只相差一个常倍数，即有

$$\frac{2a}{a} = \frac{b+\mathrm{i}c}{-b} = \frac{-\mathrm{i}b+3c}{-c} \tag{1.3}$$

1.1.1 $a \neq 0$

式1.3化为

$$\frac{b+\mathrm{i}c}{-b} = \frac{-\mathrm{i}b+3c}{-c} = 2 \tag{1.4}$$

只能有$b=c=0$，且此时a可取任意非零值. 若取$(a_1,b_1,c_1)=(1,0,0)$，可得共同本征态

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

1.1.2 $a=0$

式1.3化为

$$\frac{b+\mathrm{i}c}{-b} = \frac{-\mathrm{i}b+3c}{-c} \tag{1.6}$$

解得

$$b = \left(-1 \pm \sqrt{2}\right)\mathrm{i}c \tag{1.7}$$

再根据归一化条件$|a|^2+|b|^2+|c|^2=1$，并取c的辐角为0，可解得

$$\begin{cases} b_2 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\mathrm{i} \\ c_2 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} b_3 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\mathrm{i} \\ c_3 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases} \tag{1.8}$$

即

$$|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\mathrm{i} \\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix},\ |\psi_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\mathrm{i} \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

至此，我们得到了$\hat{A}$、$\hat{B}$的共同本征态，于是相应的本征值可求.

算符$\hat{A}$ 由于A已是对角形式，故本征值易知为$\{1,-1,-1\}$.

算符$\hat{B}$ 可简单计算得到

$$\begin{cases} B|\psi_1\rangle = 2|\psi_1\rangle \\ B|\psi_2\rangle = \left(2+\sqrt{2}\right)|\psi_2\rangle \\ B|\psi_3\rangle = \left(2-\sqrt{2}\right)|\psi_3\rangle \end{cases} \tag{1.10}$$

因此其本征值是$\{2,\left(2+\sqrt{2}\right),\left(2-\sqrt{2}\right)\}$.

最后，我们将说明如何以这些本征值为量子数标定不同的共同本征态：

$\hat{A}$的本征值存在简并，因此无法仅用其本征值完成标定；反之，由于$\hat{B}$的本征值无简并，我们可仅用其本征值为量子数对不同本征态进行标定：

$$\begin{cases} |\psi_1\rangle = |B_1 = 2\rangle \\ |\psi_2\rangle = \left|B_2 = 2+\sqrt{2}\right\rangle \\ |\psi_3\rangle = \left|B_3 = 2-\sqrt{2}\right\rangle \end{cases} \tag{1.11}$$

实际上，也可同时使用两者的本征值进行标定，即

$$\begin{cases} |\psi_1\rangle = |A_1 = 1, B_1 = 2\rangle \\ |\psi_2\rangle = \left|A_{2,3} = -1, B_2 = 2 + \sqrt{2}\right\rangle \\ |\psi_3\rangle = \left|A_{2,3} = -1, B_3 = 2 - \sqrt{2}\right\rangle \end{cases} \tag{1.12}$$

1.2 法二

我们尝试直接求出算符$\hat{B}$本征问题的解. 由久期方程

$$\begin{aligned} 0 = \det\left(\lambda I - B\right) &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\lambda - 2\right)\left[\left(\lambda - 1\right)\left(\lambda - 3\right) - 1\right] \\ &= \left(\lambda - 2\right)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 2\right) \end{aligned} \tag{1.13}$$

可解得

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 + \sqrt{2} \\ \lambda_3 = 2 - \sqrt{2} \end{cases} \tag{1.14}$$

事实上，也可通过将B右下角的二阶方阵进行块对角化的方法得到结果，不过无本质差异.

1.2.1 $\lambda_1 = 2$

有

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = 0 \tag{1.15}$$

可取

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

对应于1.1.1节，与式1.5相符.

1.2.2 $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$

有

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} + 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{1.17}$$

可知必有$a_2 = 0$，且$b_2 = \left(\sqrt{2} - 1\right)\mathrm{i}c_2$，对应于1.1.2节.

根据归一化条件$|a|^2+|b|^2+|c|^2=1$，并取c的辐角为0，可解得

$$\begin{cases} b_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\mathrm{i} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\mathrm{i} \\ c_2 = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{cases} \tag{1.18}$$

综上，

$$|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\mathrm{i} \\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

1.2.3 $\lambda_3 = 2-\sqrt{2}$

有

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}+1 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{1.20}$$

可知必有$a_3=0$，且$b_3=-\left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{i}c_3$，对应于1.1.2节.

与上小节类似，取c的辐角为0，根据归一化条件可解得

$$\begin{cases} b_3 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\mathrm{i} \\ c_3 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases} \tag{1.21}$$

综上，

$$|\psi_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\mathrm{i} \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

余下讨论与法一相同.

2 第二题

力学量$\hat{A}$的正交完备基$\{|1\rangle, |2\rangle\}$定义为表象I. 在此表象下，力学量$\hat{B}$的矩阵表示为$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$，力学量$\hat{A}$的矩阵表示为$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$.

a 试求力学量$\hat{B}$的本征值，并写出其本征态在表象I下的表示.

b 验证力学量$\hat{B}$的本征态也构成一组正交完备基，由此可以定义表象II.

c 试求力学量$\hat{B}$的本征态在表象II下的表示.

d 请写出由表象I到表象II的变换矩阵.

e 请写出力学量$\hat{A}$在表象II下的矩阵表示.

不妨将力学量$\hat{A}$、$\hat{B}$的本征值分别记为$\{A_1, A_2\}$、$\{B_1, B_2\}$. 二者

- 在表象I下的
  - 矩阵表示分别为A^{I}、B^{I}.
  - 本征态分别为$\left|\alpha^{\mathrm{I}}\right\rangle$、$\left|\beta^{\mathrm{I}}\right\rangle$.
- 在表象II下的
  - 矩阵表示分别为A^{II}、B^{II}.
  - 本征态分别为$\left|\alpha^{\mathrm{II}}\right\rangle$、$\left|\beta^{\mathrm{II}}\right\rangle$.

事实上，根据题意我们可分别写出两表象的基：

$$\begin{cases} \left|\alpha_1^{\mathrm{I}}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |1\rangle \\ \left|\alpha_2^{\mathrm{I}}\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |2\rangle \end{cases} \qquad \begin{cases} \left|\beta_1^{\mathrm{II}}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \left|\beta_2^{\mathrm{II}}\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{2.1}$$

2.1 对表象变换矩阵的讨论

所谓的表象变换矩阵，实际上有两种：

对基向量的变换U；

对态在基向量下展开系数的变换S，也即课堂上老师讲授的变换矩阵.

不难证明，两种变换矩阵满足$S = U^\dagger$，因此实际解题中求出任意一个即可.

在式2.1的符号约定下，基变换矩阵

$$U = \sum_i |\beta_i\rangle \langle\alpha_i| \tag{2.2}$$

基的变换关系是

$$|\beta_i\rangle = U\,|\alpha_i\rangle\,,\ i = 1, 2 \tag{2.3}$$

设在表象I中，系统量子态$|\psi\rangle$在两组基下可分别展开为

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i^{\mathrm{I}} \left|\alpha_i^{\mathrm{I}}\right\rangle = \sum_i c_i^{\mathrm{II}} \left|\beta_i^{\mathrm{I}}\right\rangle = \sum_i c_i^{\mathrm{II}} U \left|\alpha_i^{\mathrm{I}}\right\rangle \tag{2.4}$$

得到系数矩阵（量子态在表象下的表示）满足

$$C^{\mathrm{II}} = U^\dagger C^{\mathrm{I}} = S C^{\mathrm{I}} \tag{2.5}$$

另外，表象变换需**保证力学量期望值不变**，因此有

$$\left(C^{\mathrm{I}}\right)^\dagger A^{\mathrm{I}} C^{\mathrm{I}} = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \left(C^{\mathrm{II}}\right)^\dagger A^{\mathrm{II}} C^{\mathrm{II}} = \left(C^{\mathrm{I}}\right)^\dagger S^\dagger A^{\mathrm{II}} S C^{\mathrm{I}} \tag{2.6}$$

根据所设量子态的任意性，有

$$A^{\mathrm{I}} = S^{\dagger} A^{\mathrm{II}} S \tag{2.7}$$

即

$$A^{\mathrm{II}} = S A^{\mathrm{I}} S^{\dagger} \tag{2.8}$$

是为熟知结论.

2.2 2a

在表象I下解久期方程

$$0 = \det\left(\lambda I - B^{\mathrm{I}}\right) = \begin{vmatrix} \lambda & -1/2 \\ -1/2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4} \tag{2.9}$$

得

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1}{2} \\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{2.10}$$

并可设

$$\left|\beta^{\mathrm{I}}\right\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

其中两参数满足归一化条件$|b_1|^2 + |b_2|^2 = 1$.

2.2.1 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$

有

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.12}$$

可取

$$\left|\beta_1^{\mathrm{I}}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

2.2.2 $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

有

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.14}$$

可取

$$\left|\beta_2^{\mathrm{I}}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

2.3 2b

2.3.1 正交归一性

$$
\begin{aligned}
\langle \beta_1^{\mathrm{I}} | \beta_2^{\mathrm{I}} \rangle &= \frac{1}{2}(1-1) = 0 \\
\langle \beta_1^{\mathrm{I}} | \beta_1^{\mathrm{I}} \rangle &= \frac{1}{2}(1+1) = 1 \\
\langle \beta_2^{\mathrm{I}} | \beta_2^{\mathrm{I}} \rangle &= \frac{1}{2}(1+1) = 1
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

即得证

$$
\langle \beta_i^{\mathrm{I}} | \beta_j^{\mathrm{I}} \rangle = \delta_{ij} \ (i,j=1,2) \tag{2.17}
$$

2.3.2 完备性

$$
|\beta_1^{\mathrm{I}}\rangle \langle \beta_1^{\mathrm{I}}| + |\beta_2^{\mathrm{I}}\rangle \langle \beta_2^{\mathrm{I}}| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \tag{2.18}
$$

因此，$\hat{B}$的本征态也构成一组正交完备基.

2.4 2c

见于解答伊始.

2.5 2d

从表象I到表象II的基变换矩阵U应是

$$
U = |\beta_1^{\mathrm{I}}\rangle \langle 1| + |\beta_2^{\mathrm{I}}\rangle \langle 2| = \left(|\beta_1^{\mathrm{I}}\rangle, |\beta_2^{\mathrm{I}}\rangle\right) \tag{2.19}
$$

因此

$$
S = U^{\dagger} = \begin{pmatrix} \langle \beta_1^{\mathrm{I}}| \\ \langle \beta_2^{\mathrm{I}}| \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.20}
$$

2.6 2e

$$
A^{\mathrm{II}} = SA^{\mathrm{I}}S^{\dagger} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.21}
$$

3 第三题

a 已知算符$\hat{A}$在两个表象F,G之间的变换关系

$$\hat{A}^{(F)} = S\hat{A}^{(G)}S^{\dagger}$$

请证明

$$\left(\mathrm{e}^{\hat{A}}\right)^{(F)} = S\left(\mathrm{e}^{\hat{A}}\right)^{(G)}S^{\dagger}$$

b 如算符$\hat{A}$在某表象里的矩阵表示为$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$，求$\mathrm{e}^{\hat{A}}$在该表象里的矩阵表示.

c 如算符$\hat{A}$在某表象里的矩阵表示为$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$，求$\mathrm{e}^{\hat{A}}$在该表象里的矩阵表示.

3.1 3a

由于变换矩阵S是Unitary的，即满足

$$SS^{\dagger} = \mathbb{1} = S^{\dagger}S \tag{3.1}$$

因此对$\forall n \in \mathbb{N}$，不难证明

$$\left(\hat{A}^{(F)}\right)^n = S\hat{A}^{(G)}\left(S^{\dagger}S\right)\hat{A}^{(G)}S^{\dagger}\cdots S\hat{A}^{(G)}S^{\dagger} = S\left(\hat{A}^{(G)}\right)^n S^{\dagger} \tag{3.2}$$

于是

$$\left(\mathrm{e}^{\hat{A}}\right)^{(F)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\hat{A}^{(F)}\right)^n}{n!} = S\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\hat{A}^{(G)}\right)^n}{n!}S^{\dagger} = S\left(\mathrm{e}^{\hat{A}}\right)^{(G)}S^{\dagger} \tag{3.3}$$

3.2 3b

题述矩阵表示

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

为对角形式，因此

$$A_1^n = \begin{pmatrix} (1/2)^n & 0 \\ 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

是故$\mathrm{e}^{\hat{A}}$在同一表象下的矩阵表示

$$\mathrm{e}^{A_1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A_1^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\begin{pmatrix} (1/2)^n & 0 \\ 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-1/2} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

3.3 3c

遵循上小节思路，首先应将该矩阵表示

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

对角化.

恰巧，我们可以借用2.6节中结果. 变换矩阵是

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

对角化后的矩阵表示

$$A_2' = S A_2 S^\dagger = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_1 \tag{3.9}$$

即有

$$A_2 = S^\dagger A_1 S \tag{3.10}$$

参照上两小节的结果，我们最终有

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{A_2} = S^\dagger \mathrm{e}^{A_1} S &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{1/2} + \mathrm{e}^{-1/2} & \mathrm{e}^{1/2} - \mathrm{e}^{-1/2} \\ \mathrm{e}^{1/2} - \mathrm{e}^{-1/2} & \mathrm{e}^{1/2} + \mathrm{e}^{-1/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \frac{1}{2} & \sinh \frac{1}{2} \\ \sinh \frac{1}{2} & \cosh \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.11}$$

4 第四题

体系Hamiltonian$\left(\hat{H}\right)$在表象I中的矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}$，力学量$\hat{A}$的矩阵表示为$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3\mathrm{i} \\ 0 & 2 & 0 \\ 3\mathrm{i} & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a 证明$\hat{H}$和$\hat{A}$对易.

b 求$\hat{H}$和$\hat{A}$的共同本征态. 如利用共同本征态构建新的表象II，说明如何用本征值标定表象II的基.

c 如力学量$\hat{B}$在表象I中的矩阵表示为$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$，写出其在表象II中的矩阵.

4.1 4a

记二者在表象I下的矩阵表示分别为H^{I}、A^{I}，容易计算得到

$$H^{\mathrm{I}}A^{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 2 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & -3 \end{pmatrix} = A^{\mathrm{I}}H^{\mathrm{I}} \tag{4.1}$$

因此$\hat{H}$与$\hat{A}$对易.

4.2 4b

与第一题类似，首先设所求共同本征态在表象I下可表示为

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

采用1.1节所示的法一，考虑

$$H^{\mathrm{I}}|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \mathrm{i}c \\ b \\ -\mathrm{i}a \end{pmatrix}, A^{\mathrm{I}}|\psi\rangle = \begin{pmatrix} -a - 3\mathrm{i}c \\ 2b \\ 3\mathrm{i}a - c \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

由于两力学量对易，因此上两式应只相差一个常倍数，即有

$$\frac{2b}{b} = \frac{-a - 3\mathrm{i}c}{\mathrm{i}c} = \frac{3\mathrm{i}a - c}{-\mathrm{i}a} \tag{4.4}$$

4.2.1 $b \neq 0$

式4.4化为

$$\frac{-a - 3\mathrm{i}c}{\mathrm{i}c} = \frac{3\mathrm{i}a - c}{-\mathrm{i}a} = 2 \tag{4.5}$$

只能有$a = c = 0$，且此时b可取任意非零值. 若取$(a_1, b_1, c_1) = (0, 1, 0)$，可得共同本征态

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

4.2.2 $b = 0$

式4.4化为

$$\frac{-a - 3\mathrm{i}c}{\mathrm{i}c} = \frac{3\mathrm{i}a - c}{-\mathrm{i}a} \tag{4.7}$$

化简可得

$$a^2 + c^2 = 0 \tag{4.8}$$

再根据归一化条件$|a|^2+|b|^2+|c|^2=1$，并取c的辐角为0，将解得

$$\begin{cases} a_2 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_3 = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ c_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \tag{4.9}$$

即

$$|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, |\psi_3\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

至此，我们得到了$\hat{H}$、$\hat{A}$的共同本征态，于是相应的本征值可求.

Hamiltionian 可简单计算得到

$$\begin{cases} H^{\mathrm{I}}|\psi_1\rangle = |\psi_1\rangle \\ H^{\mathrm{I}}|\psi_2\rangle = |\psi_2\rangle \\ H^{\mathrm{I}}|\psi_3\rangle = -|\psi_3\rangle \end{cases} \tag{4.11}$$

因此其本征值是$\{1,1,-1\}$.

算符$\hat{A}$ 可简单计算得到

$$\begin{cases} A^{\mathrm{I}}|\psi_1\rangle = 2|\psi_1\rangle \\ A^{\mathrm{I}}|\psi_2\rangle = -4|\psi_2\rangle \\ A^{\mathrm{I}}|\psi_3\rangle = 2|\psi_3\rangle \end{cases} \tag{4.12}$$

因此其本征值是$\{2,-4,2\}$.

依题，利用共同本征态$\{|\psi_1\rangle,|\psi_2\rangle,|\psi_3\rangle\}$构建新表象II. 由于$\hat{H}$、$\hat{A}$均存在简并，因此我们将无法单独使用任意一者的本征值进行标定，而必须同时使用两者的本征值，即

$$\begin{cases} |\psi_1\rangle = |E_1 = 1, A_1 = 2\rangle \\ |\psi_2\rangle = |E_2 = 1, A_2 = -4\rangle \\ |\psi_3\rangle = |E_3 = -1, A_3 = 2\rangle \end{cases} \tag{4.13}$$

4.3 4c

由上小节可得到从表象I至表象II的变换矩阵

$$S = \begin{pmatrix} \langle\psi_1| \\ \langle\psi_2| \\ \langle\psi_3| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

因此力学量$\hat{B}$在表象II中的矩阵为

$$B^{\mathrm{II}} = SB^{\mathrm{I}}S^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{2}\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

注：由于$\langle\psi_i|$标号的选取任意，不同的选取方式将造成排布顺序的差异，因此最终得到的矩阵结果也可能有不同形式.

另外，本题还有一种基于矩阵本身性质的解法. 我们可选择$\hat{H}$、$\hat{A}$其中之一，如$\hat{H}$，并首先求解其本征问题. 使用$\hat{H}$的本征态作为一组基构建新的表象III，写出$\hat{A}$在该表象下的矩阵，根据$\hat{H}$的本征态选取的不同，将可能发现两种情况：

- A为块对角的. 此时应在A未对角化的子空间里作对角化，并将得到的结果作为基构建另一新的表象，即要求的表象II.
- A为完全对角的. 此时直接用本征值标定基即可，表象III就是表象II.