大作业 1

苏煜宸　　2022013267

1 Q1

1.1 (1)

考虑差分格式：

$$u_j^{n+1} = \sum_{k=-l}^{l} b_k u_{j+k}^n$$

对左边进行时间方向的泰勒展开：

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_j^n \Delta t + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_j^n \Delta t^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\bigg|_j^n \Delta t^3 + o(\Delta t^3)$$

对右边进行空间方向泰勒展开：

$$u_{j+k}^n = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_j^n (k\Delta x) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_j^n (k\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\bigg|_j^n (k\Delta x)^3 + o(\Delta x^3)$$

可以得到：

$$\sum_{k=-l}^{l} b_k u_{j+k}^n = u_j^n \sum b_k + \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_j^n \Delta x \sum b_k k + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_j^n \Delta x^2 \sum b_k k^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\bigg|_j^n \Delta x^3 \sum b_k k^3 + o(\Delta x^3)$$

$$\sum_{k=-l}^{l} b_k u_{j+k}^n = (\sum b_k) u_j^n + \Delta x \left(\sum b_k k\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!}\left(\sum b_k k^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!}\left(\sum b_k k^3\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \cdots$$

差分算子为：

$$L_\Delta(u)_j^n = \frac{u_j^{n+1} - \sum_{k=-l}^{k=l} b_k u_{j+k}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\{u_j^n + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\Delta t^i}{i!}\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\bigg|_j^n - (\sum b_k) u_j^n - \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\Delta x^i}{i!}\left(\sum b_k k^i\right)\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\}$$

由原始方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

可得：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = -a^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

由此如下精度条件：

常数项（保持一致性）: $\sum_{k=-l}^{l} b_k = 1$

一阶精度条件: $\sum_{k=-l}^{l} b_k k = -\frac{a\Delta t}{\Delta x}$

二阶精度条件: $\sum_{k=-l}^{l} b_k k^2 = a^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2$

由于此式共有 $2l+1$ 个变量，该格式理论上最多可达 $2l$ **阶时空精度**。

1.2 (2)

i. 设 u_i^n 随 i 单调递增，即

$$\forall j, u_{j+1}^n > u_j^n$$

又有 $b_k \geq 0, \forall k$

$$\begin{aligned}
u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} &= \sum_{k=-l}^{l} b_k u_{j+k+1}^n - \sum_{k=-l}^{l} b_k u_{j+k}^n \\
&= \sum_{k=-l}^{l} b_k \left(u_{j+k+1}^n - u_{j+k}^n\right) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

因此单调格式具有保单调特性。

ii. 由于 $b_k \geq 0, \forall k$ 对于二阶精度条件

$$\begin{aligned}
a^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 &= \left(\sum_{k=-l}^{l} b_k k\right)^2 \\
&\leq \left(\sum_{k=-l}^{l} b_k\right)\left(\sum_{k=-l}^{l} b_k k^2\right) \\
&= \sum_{k=-l}^{l} b_k k^2
\end{aligned}$$

等号成立的条件为 b_k 中只有一个非零项，而这是没有意义的，因此单调格式最多为一阶精度。

对于迎风格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_j^n - u_{j-1}^n)$$
$$u_j^{n+1} = (1-\lambda)u_j^n + \lambda u_{j-1}^n$$

当 $0 \leq \lambda \leq 1$，为单调格式。

2 Q2

2.1 (1)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x}\Bigg[& \left(-\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta\right) f_{-3} + \left(2\alpha + 3\beta + \frac{1}{12}\right) f_{-2} \\
& + \left(-\frac{5}{2}\alpha - \frac{15}{2}\beta - \frac{2}{3}\right) f_{-1} + 10\beta f_0 \\
& + \left(\frac{5}{2}\alpha - \frac{15}{2}\beta + \frac{2}{3}\right) f_1 + \left(-2\alpha + 3\beta - \frac{1}{12}\right) f_2 \\
& + \left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta\right) f_3 \Bigg]
\end{aligned}
$$

使用 Taylor 展开的方法确定差分近似的精度可以得到

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x}\left[(\sum_{k=-3}^{3} b_k)u + \sum_{k=-3}^{3} b_k k \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{i=2}^{\infty}\{\sum_{k=-3}^{3} b_k k^i (\Delta x)^i \frac{\partial^i u}{\partial x^i}\} \right]
$$

经计算可得，$\forall \alpha, \beta$，有 $\sum b_k = 0$，$\sum b_k k = 1$，$\sum b_k k^2 = 0$, $\sum b_k k^3 = 0$。

$$
\begin{aligned}
\sum b_k k^4 &= 0 \\
\sum b_k k^5 &= 240\alpha - 4 \\
\sum b_k k^6 &= -360\beta
\end{aligned}
$$

因此，$\forall \alpha, \beta$，该格式为 4 阶精度，若满足 $\alpha = \frac{1}{30}, \beta = 0$，则该格式为 6 阶精度。

2.2 (2)

把 $u(x,t) = A(t)e^{i\omega x}$，$k = \omega h$ 在网格上的离散之代入导数的差分近似公式，可得

$$
\frac{1}{h}\sum_{j=-3}^{3} b_j u(x + jh) = \frac{ik'}{h} u(x,t)
$$

$$
k' = Re(k') + iIm(k')
$$

$$
Re(k') = \sum_{j=-3}^{3} b_j sin(jk) = (\frac{4}{3} + 5\alpha)\mathrm{sin}k + (-\frac{1}{6} - 4\alpha)\mathrm{sin}2k + \alpha\mathrm{sin}3k
$$

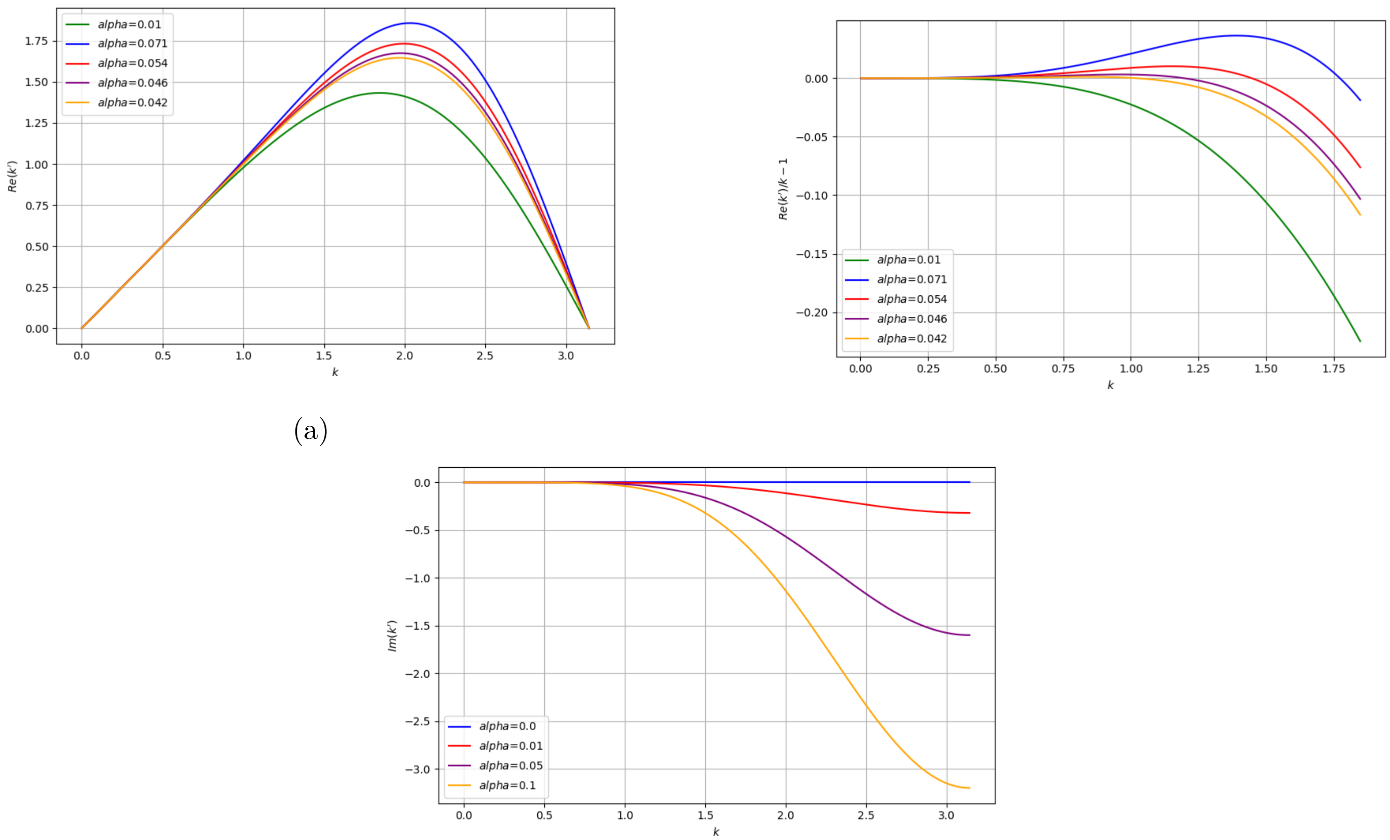
$$
Im(k') = -\sum_{j=-3}^{3} b_j cos(jk) = \beta g(cos(k))
$$

其中

$$g(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12^x - 4$$

因此，修正波数 k' 的实部，即与色散有关的部分只与 α 有关，k' 的虚部，即表征差分近似的耗散特性的部分只与 β 有关，也即半离散格式的色散和耗散特性分别由 α,β 决定。

绘制不同 α 和 β 取值下修正波数 k' 与 k 的关系如图 ??所示。可以看到在 $\alpha = 0.046$ 附近时，色



(a)

图 1: 波数 k' 与 k 的关系，(a)$Re(k')$ 与 k 的关系，(b)$Re(k')/k-1$ 与 k 的关系，(c)$Im(k')$ 与 k 的关系

散最小。

2.3 (3)

根据

$$E = \frac{1}{e^{\nu\pi}} \int_{k=0}^{\pi} e^{\nu(\pi-k)} (Re(k') - k)^2 dk$$

估计色散参数 α 的最佳值。通常 $\nu = 8 \sim 10$，我们取 $6, 7, 8, 9, 10$ 分别进行计算，可以得到如图 ??所示结果。不同的 ν 所对应的最优 α 值都已经标注在图中。

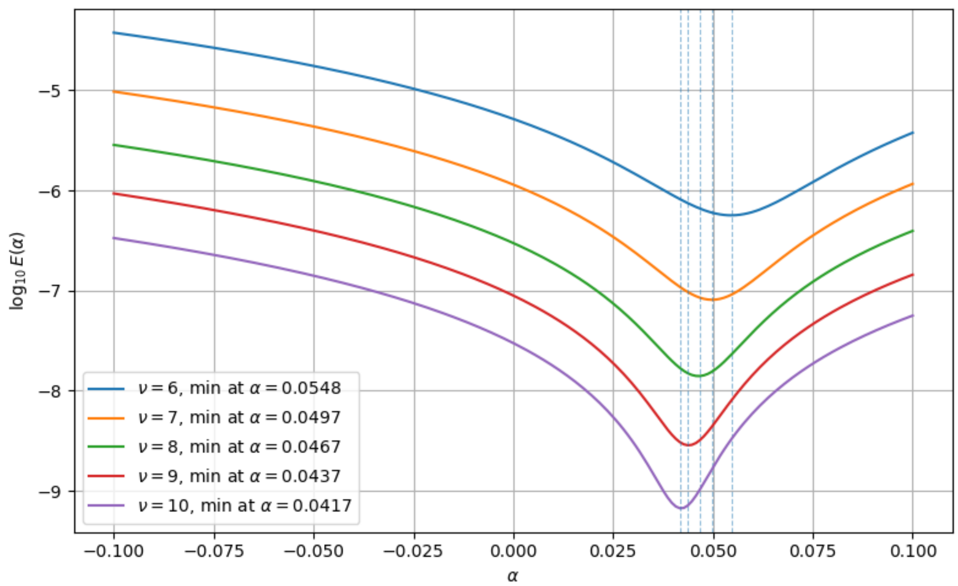


图 2: E 与 α 的关系

3 Q3

3.1 DRP

$$f'_{\Delta} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-l}^{l} a_k f_{j+k}$$

对于 $l = 3$，有

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0.0 \\
a_1 &= -a_{-1} = 0.79926643 \\
a_2 &= -a_{-2} = -0.18941314 \\
a_3 &= -a_{-3} = 0.02651995
\end{aligned}$$

3.2 Modified DRP

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \bar{D}$$

$$f'_{\Delta}(x) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-l}^{l} a_k f_{j+k} + \frac{\nu_a}{(\Delta x)^2} \sum_{j=-3}^{3} c_j u_j$$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0.0 \\
a_1 &= -a_{-1} = 0.770882380518 \\
a_2 &= -a_{-2} = -0.166705904415 \\
a_3 &= -a_{-3} = 0.020843142770 \\
c_0 &= 0.327698660846 \\
c_1 &= c_{-1} = -0.235718815308 \\
c_2 &= c_{-2} = 0.086150669577 \\
c_3 &= c_{-3} = -0.014281184692
\end{aligned}
$$

3.3 MDCD

$$
\begin{aligned}
f'_\Delta(x) = \frac{1}{\Delta x}\Bigg[& \left(-\frac{1}{2}\gamma_{\text{disp}} - \frac{1}{2}\gamma_{\text{diss}}\right) f_{-3} + \left(2\gamma_{\text{disp}} + 3\gamma_{\text{diss}} + \frac{1}{12}\right) f_{-2} \\
& + \left(-\frac{5}{2}\gamma_{\text{disp}} - \frac{15}{2}\gamma_{\text{diss}} - \frac{2}{3}\right) f_{-1} + 10\gamma_{\text{diss}} f_0 \\
& + \left(\frac{5}{2}\gamma_{\text{disp}} - \frac{15}{2}\gamma_{\text{diss}} + \frac{2}{3}\right) f_1 + \left(-2\gamma_{\text{disp}} + 3\gamma_{\text{diss}} - \frac{1}{12}\right) f_2 \\
& + \left(\frac{1}{2}\gamma_{\text{disp}} - \frac{1}{2}\gamma_{\text{diss}}\right) f_3 \Bigg]
\end{aligned}
$$

在我们的实现中，$\gamma_{\text{disp}} = 0.0463783$，$\gamma_{\text{diss}} = 0.001$

3.4 SA-DRP

SA-DRP 的实现完全参照文献三中的格式，在次不再多作叙述。

3.5 求解 wave packet

我们求解文献中 IIIA 的第二个例子，即

$$
u_0(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \sin(2\pi l x)
$$

其解析解为

$$
u_0(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \sin(2\pi l(x-t))
$$

我们根据论文中的参数，网格数设置为 $N = 256$，$CFL = 0.3$，$m = 20$，计算至 $t = 10s$，分别使用四种格式进行计算，得到的结果如图 ??所示。

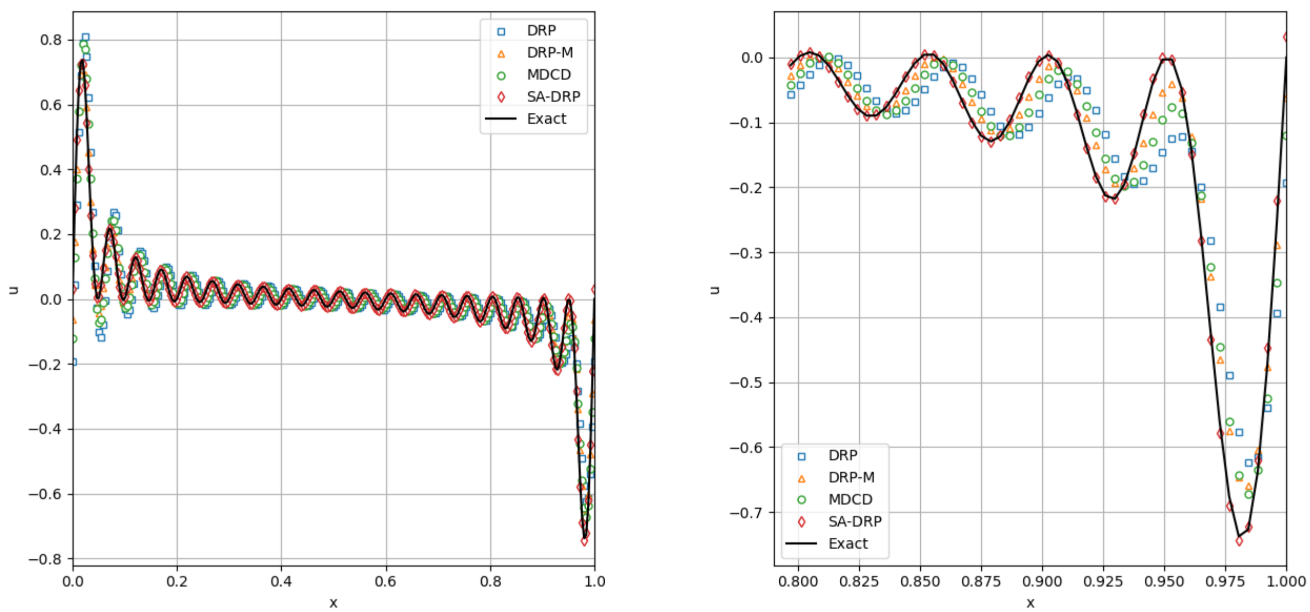


图 3: 四种格式的对比，（a）求解结果，（b）局部放大后的结果

我们得到的数值结果与原文高度一致：在传播了十个周期后，只有 SA-DRP 方法仍能准确捕捉解的相位，而其他格式均表现出不同程度的相位误差。值得注意的是，当 $m = 20$ 时，波包中的最大缩放波数约为 0.5。在该波数范围内，由 ~ ??可以看到，所有格式的色散误差都相对较小。然而，结果表明，即便色散误差很小，经过长时间传播后仍会积累，最终导致显著的相位偏移。由于 SA-DRP 方法在这一波数范围内几乎无色散误差，因此能够精准地保持波的相位，这也是其相较于其他传统格式的突出优势。此外，我们还对不同 m 值（$m = 5, 10, 15$）下的情形进行了计算，并比较了 L1 范数误差。结果显示，对于 $m = 20$,SA-DRP 的精度最优，与文献一致。但对于 $m = 5, 10, 15$ 的情况，在网格数不超过 $5 * 10^2$ 的范围内，SA-DRP 的收敛速度并未表现出明显优于其他格式的优势。这可能是因为在波数较小的频谱范围内，各格式的色散特性相近，导致误差表现趋于一致。

4 Q4

4.1 (1)

按题目要求令 $CFL = 0.2$,$N = 256$ 进行计算，计算所的结果如图 ??所示，不同格式对应的误差如 1所示。可以观察到，SA-DRP 方法的误差明显小于其他格式。$l = 64$ 时，波包中包含的高频分量较多，其最大缩放波数约为 1.5，已经进入具有显著色散误差的区域。尽管如此，SA-DRP 方法在该波数范围内仍表现出无耗散特性，因此能够有效地保持波的相位，其数值解与理论解之间的吻合程度依然较高。这进一步验证了 SA-DRP 在强色散环境下的稳定性与精度优势。

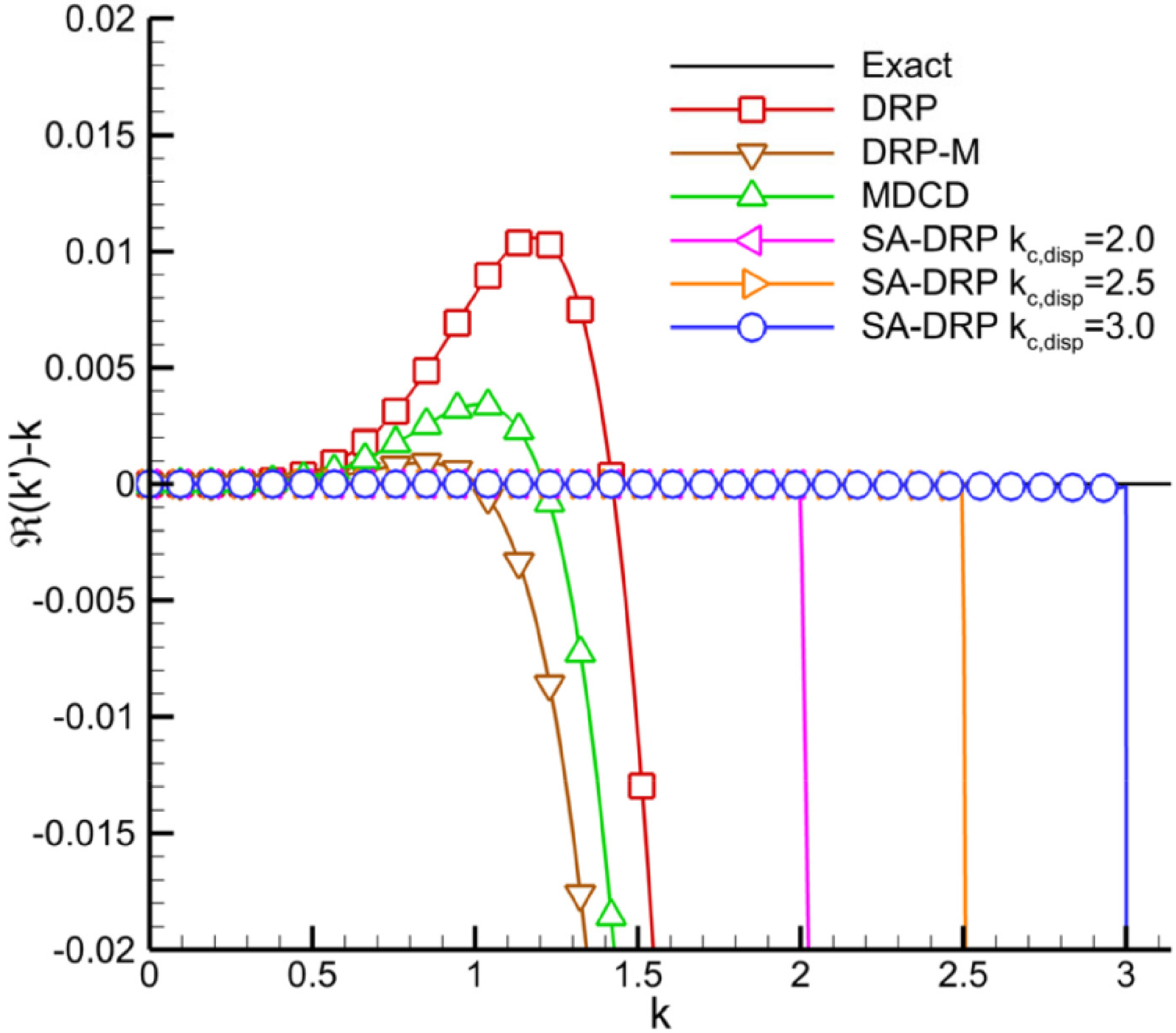


FIG. 6. Comparison between absolute dispersion errors for different schemes.

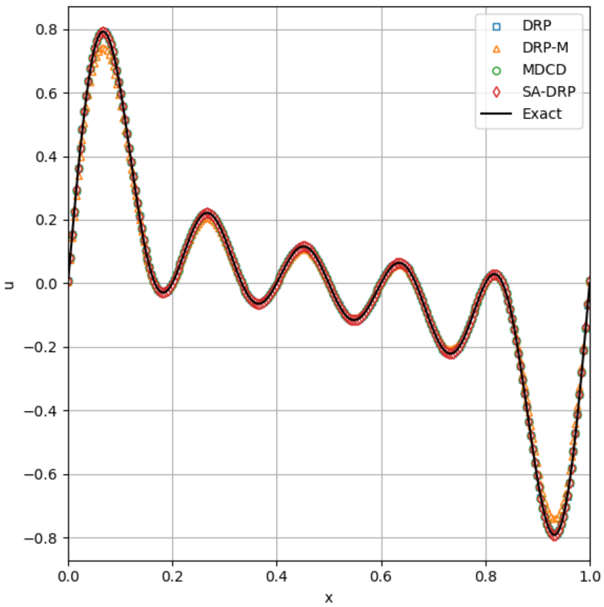
图 4: 各格式的色散特性，引用自作业参考文献 3

表 1: L^1 Error of Each Scheme at $t = 1.0$, $N = 256$

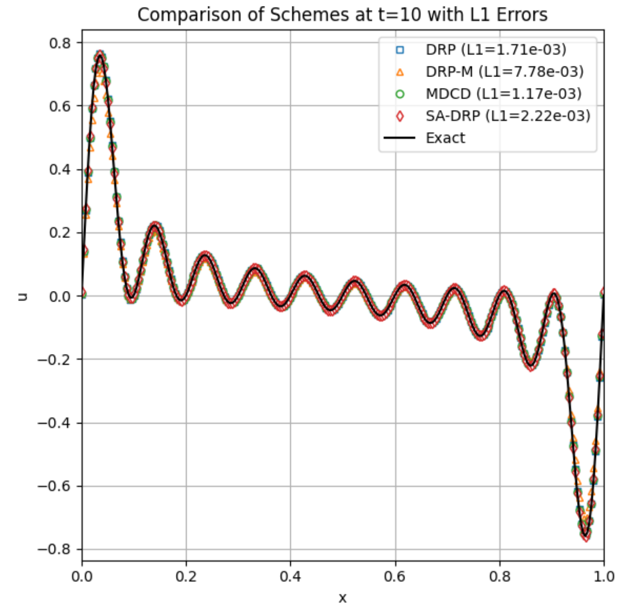
DRP	DRP-M	MDCD	SA-DRP
7.085e-02	1.981e-02	3.531e-02	1.729e-02

4.2 (2)

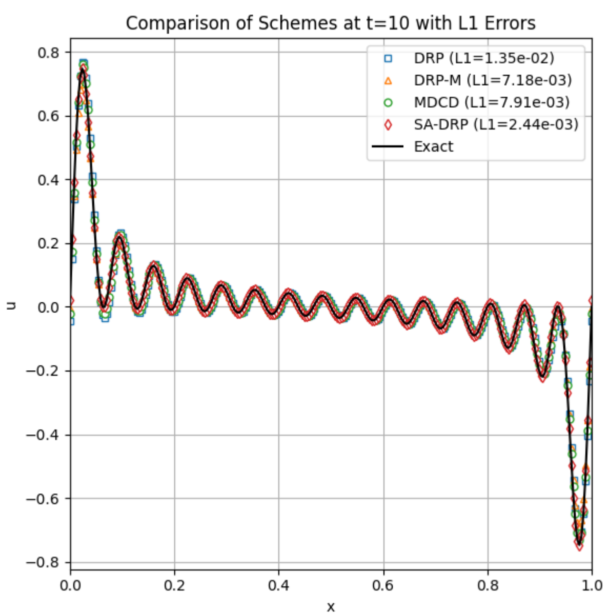
设置 N=54,128,256,512,1024，并计算 $1-\Delta x$ 范数误差由前面证明的结论可得，我们所使用的上述四种方法均为四阶精度收敛，我们也在图中标注了四阶收敛和 5 阶收敛的参照线。可以看到，DRP,DRP-M、MDCD 均为正常的四阶精度收敛，而 SA-DRP 的 L1 范数误差收敛速度是其它格式的



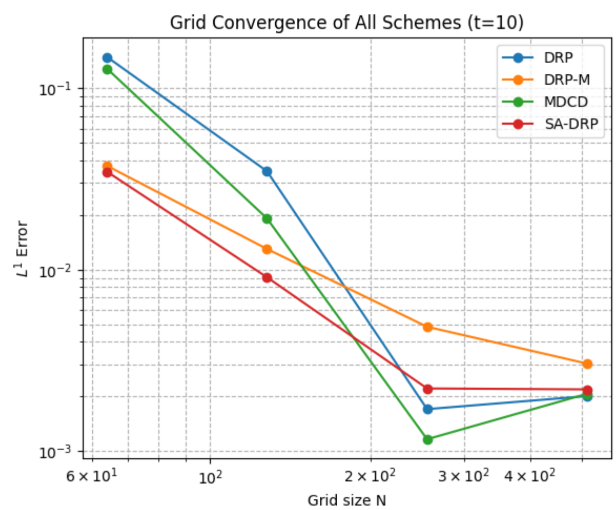
(a)



(b)



(c)



(d)

图 5: 不同 m 对应的计算结果及 L1 范数误差，(a) $m = 5$，(b) $m = 10$,(c)$m = 15$,(d)$m = 10$ 时，对于的误差范数与 N 的关系

2 倍，其收敛曲线接近五阶收敛。这是由于 SA-DRP 拥有极小的色散，因此能极大的减小相位差，尤其在波数很大的情况下，能很好的追踪波的相位变化。

4.3 (3)

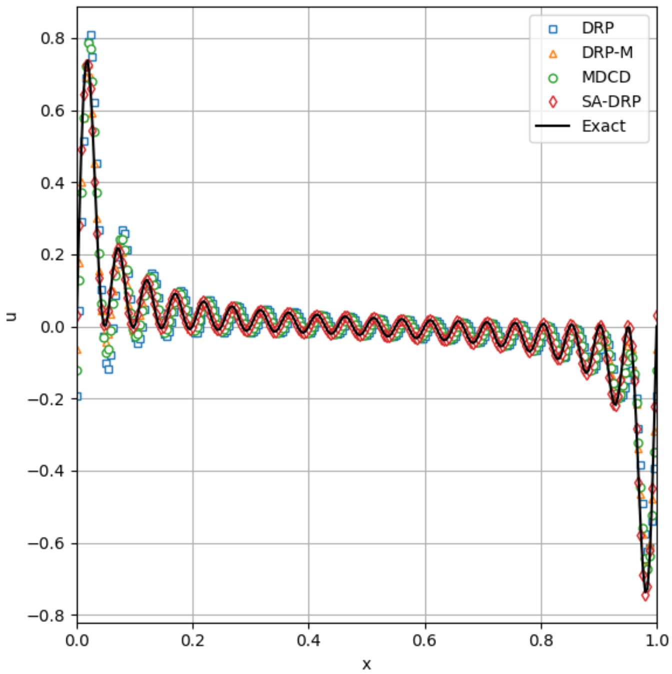


图 6: 求解结果

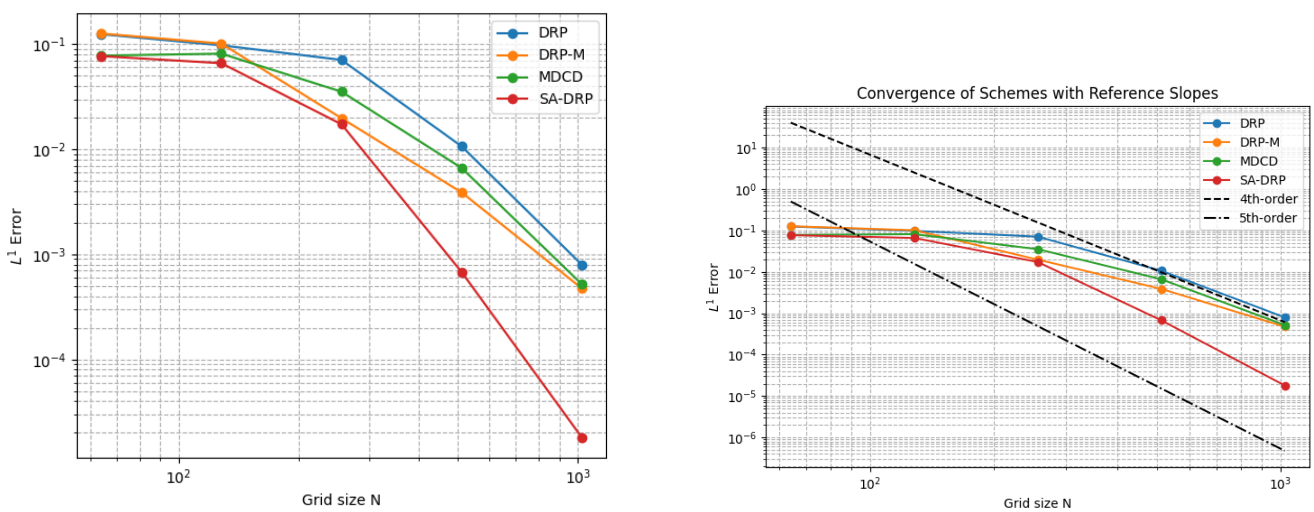


图 7: 精度评估，(a) 各个格式在不同网格数下的 L1 范数误差，(b) 添加 4 阶、5 阶收敛曲线后的示意图