

大作业 1

苏煜宸 2022013267

1 Q1

1.1 (1)

考虑差分格式：

$$u_j^{n+1} = \sum_{k=-l}^l b_k u_{j+k}^n$$

对左边进行时间方向的泰勒展开：

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^n \Delta t^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Big|_j^n \Delta t^3 + o(\Delta t^3)$$

对右边进行空间方向泰勒展开：

$$u_{j+k}^n = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n (k\Delta x) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n (k\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_j^n (k\Delta x)^3 + o(\Delta x^3)$$

可以得到：

$$\sum_{k=-l}^l b_k u_{j+k}^n = u_j^n \sum b_k + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n \Delta x \sum b_k k + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n \Delta x^2 \sum b_k k^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_j^n \Delta x^3 \sum b_k k^3 + o(\Delta x^3)$$

$$\sum_{k=-l}^l b_k u_{j+k}^n = \left(\sum b_k \right) u_j^n + \Delta x \left(\sum b_k k \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\sum b_k k^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\sum b_k k^3 \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots$$

差分算子为：

$$L_{\Delta}(u)_j^n = \frac{u_j^{n+1} - \sum_{k=-l}^l b_k u_{j+k}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left\{ u_j^n + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Delta t^i}{i!} \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \Big|_j^n - \left(\sum b_k \right) u_j^n - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Delta x^i}{i!} \left(\sum b_k k^i \right) \frac{\partial^i u}{\partial x^i} \right\}$$

由原始方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

可得：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = -a^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

由此如下精度条件：

常数项（保持一致性）： $\sum_{k=-l}^l b_k = 1$

一阶精度条件： $\sum_{k=-l}^l b_k k = -\frac{a\Delta t}{\Delta x}$

二阶精度条件： $\sum_{k=-l}^l b_k k^2 = a^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2$

由于此式共有 $2l + 1$ 个变量，该格式理论上最多可达 $2l$ 阶时空精度。

1.2 (2)

i. 设 u_i^n 随 i 单调递增，即

$$\forall j, u_{j+1}^n > u_j^n$$

又有 $b_k \geq 0, \forall k$

$$\begin{aligned} u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} &= \sum_{k=-l}^l b_k u_{j+k+1}^n - \sum_{k=-l}^l b_k u_{j+k}^n \\ &= \sum_{k=-l}^l b_k (u_{j+k+1}^n - u_{j+k}^n) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

因此单调格式具有保单调特性。

ii. 由于 $b_k \geq 0, \forall k$ 对于二阶精度条件

$$\begin{aligned} a^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 &= \left(\sum_{k=-l}^l b_k k\right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{k=-l}^l b_k\right) \left(\sum_{k=-l}^l b_k k^2\right) \\ &= \sum_{k=-l}^l b_k k^2 \end{aligned}$$

等号成立的条件为 b_k 中只有一个非零项，而这是没有意义的，因此单调格式最多为一阶精度。

对于迎风格式

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) \\ u_j^{n+1} &= (1 - \lambda) u_j^n + \lambda u_{j-1}^n \end{aligned}$$

当 $0 \leq \lambda \leq 1$ ，为单调格式。

2 Q2

2.1 (1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} & \left[\left(-\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta \right) f_{-3} + \left(2\alpha + 3\beta + \frac{1}{12} \right) f_{-2} \right. \\ & + \left(-\frac{5}{2}\alpha - \frac{15}{2}\beta - \frac{2}{3} \right) f_{-1} + 10\beta f_0 \\ & + \left(\frac{5}{2}\alpha - \frac{15}{2}\beta + \frac{2}{3} \right) f_1 + \left(-2\alpha + 3\beta - \frac{1}{12} \right) f_2 \\ & \left. + \left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta \right) f_3 \right]\end{aligned}$$

使用 Taylor 展开的方法确定差分近似的精度可以得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\sum_{k=-3}^3 b_k \right) u + \sum_{k=-3}^3 b_k k \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{i=2}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-3}^3 b_k k^i (\Delta x)^i \frac{\partial^i u}{\partial x^i} \right\} \right]$$

经计算可得, $\forall \alpha, \beta$, 有 $\sum b_k = 0$, $\sum b_k k = 1$, $\sum b_k k^2 = 0$, $\sum b_k k^3 = 0$ 。

$$\begin{aligned}\sum b_k k^4 &= 0 \\ \sum b_k k^5 &= 240\alpha - 4 \\ \sum b_k k^6 &= -360\beta\end{aligned}$$

因此, $\forall \alpha, \beta$, 该格式为 4 阶精度, 若满足 $\alpha = \frac{1}{30}$, $\beta = 0$, 则该格式为 6 阶精度。

2.2 (2)

把 $u(x, t) = A(t)e^{i\omega x}$, $k = \omega h$ 在网格上的离散之代入导数的差分近似公式, 可得

$$\frac{1}{h} \sum_{j=-3}^3 b_j u(x + jh) = \frac{ik'}{h} u(x, t)$$

$$k' = Re(k') + iIm(k')$$

$$Re(k') = \sum_{j=-3}^3 b_j \sin(jk) = \left(\frac{4}{3} + 5\alpha \right) \sin k + \left(-\frac{1}{6} - 4\alpha \right) \sin 2k + \alpha \sin 3k$$

$$Im(k') = - \sum_{j=-3}^3 b_j \cos(jk) = \beta g(\cos(k))$$

其中

$$g(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x^2 - 4$$

因此，修正波数 k' 的实部，即与色散有关的部分只与 α 有关， k' 的虚部，即表征差分近似的耗散特性的部分只与 β 有关，也即半离散格式的色散和耗散特性分别由 α, β 决定。

绘制不同 α 和 β 取值下修正波数 k' 与 k 的关系如图 1 所示。可以看到在 $\alpha = 0.046$ 附近时，色

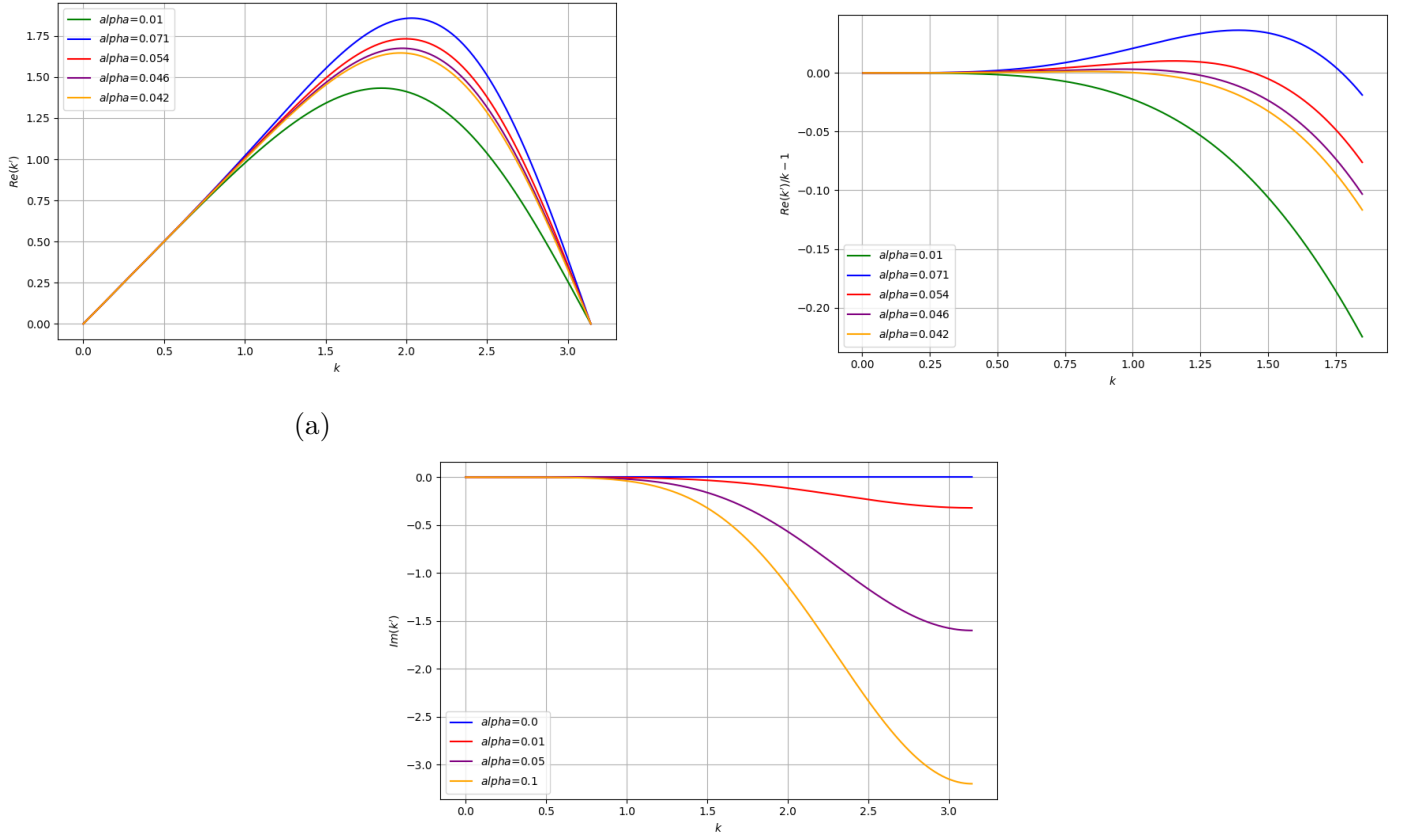


图 1: 波数 k' 与 k 的关系, (a) $Re(k')$ 与 k 的关系, (b) $Re(k')/k - 1$ 与 k 的关系, (c) $Im(k')$ 与 k 的关系

散最小。

2.3 (3)

根据

$$E = \frac{1}{e^{\nu\pi}} \int_{k=0}^{\pi} e^{\nu(\pi-k)} (Re(k') - k)^2 dk$$

估计色散参数 α 的最佳值。通常 $\nu = 8 \sim 10$ ，我们取 6, 7, 8, 9, 10 分别进行计算，可以得到如图 2 所示结果。不同的 ν 所对应的最优 α 值都已经标注在图中。

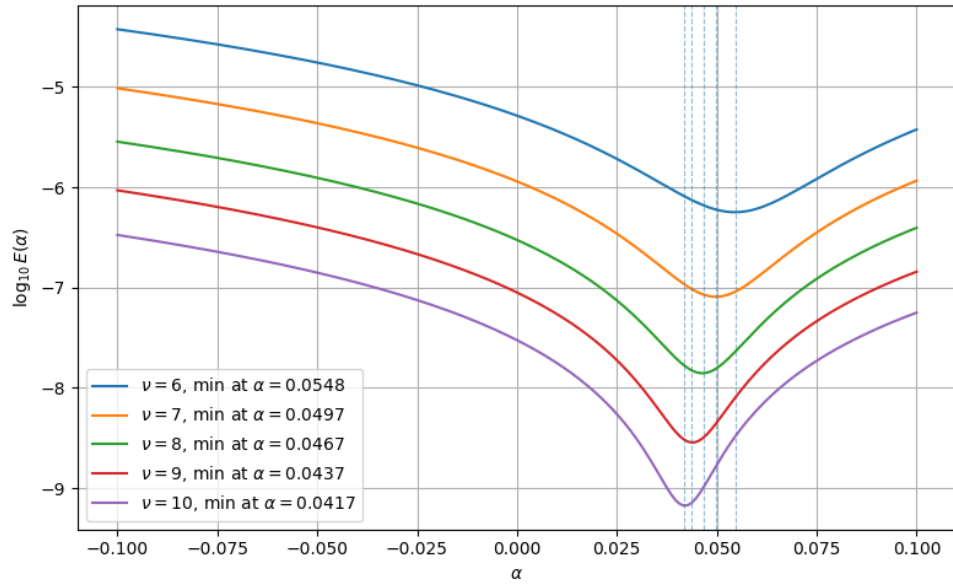


图 2: E 与 α 的关系

3 Q3

3.1 DRP

$$f'_\Delta = \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-l}^l a_k f_{j+k}$$

对于 $l = 3$, 有

$$a_0 = 0.0$$

$$a_1 = -a_{-1} = 0.79926643$$

$$a_2 = -a_{-2} = -0.18941314$$

$$a_3 = -a_{-3} = 0.02651995$$

3.2 Modified DRP

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \bar{D}$$

$$f'_\Delta(x) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-l}^l a_k f_{j+k} + \frac{\nu_a}{(\Delta x)^2} \sum_{j=-3}^3 c_j u_j$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0.0 \\
a_1 &= -a_{-1} = 0.770882380518 \\
a_2 &= -a_{-2} = -0.166705904415 \\
a_3 &= -a_{-3} = 0.020843142770 \\
c_0 &= 0.327698660846 \\
c_1 &= c_{-1} = -0.235718815308 \\
c_2 &= c_{-2} = 0.086150669577 \\
c_3 &= c_{-3} = -0.014281184692
\end{aligned}$$

3.3 MDCCD

$$\begin{aligned}
f'_\Delta(x) = \frac{1}{\Delta x} & \left[\left(-\frac{1}{2}\gamma_{\text{disp}} - \frac{1}{2}\gamma_{\text{diss}} \right) f_{-3} + \left(2\gamma_{\text{disp}} + 3\gamma_{\text{diss}} + \frac{1}{12} \right) f_{-2} \right. \\
& + \left(-\frac{5}{2}\gamma_{\text{disp}} - \frac{15}{2}\gamma_{\text{diss}} - \frac{2}{3} \right) f_{-1} + 10\gamma_{\text{diss}}f_0 \\
& + \left(\frac{5}{2}\gamma_{\text{disp}} - \frac{15}{2}\gamma_{\text{diss}} + \frac{2}{3} \right) f_1 + \left(-2\gamma_{\text{disp}} + 3\gamma_{\text{diss}} - \frac{1}{12} \right) f_2 \\
& \left. + \left(\frac{1}{2}\gamma_{\text{disp}} - \frac{1}{2}\gamma_{\text{diss}} \right) f_3 \right]
\end{aligned}$$

在我们的实现中, $\gamma_{\text{disp}} = 0.0463783$, $\gamma_{\text{diss}} = 0.001$

3.4 SA-DRP

SA-DRP 的实现完全参照文献三中的格式, 在此不再多作叙述。

3.5 求解 wave packet

我们求解文献中 IIIA 的第二个例子, 即

$$u_0(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sin(2\pi l x)$$

其解析解为

$$u_0(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sin(2\pi l(x - t))$$

我们根据论文中的参数, 网格数设置为 $N = 256$, $CFL = 0.3$, $m = 20$, 计算至 $t = 10s$, 分别使用四种格式进行计算, 得到的结果如图 2 所示。

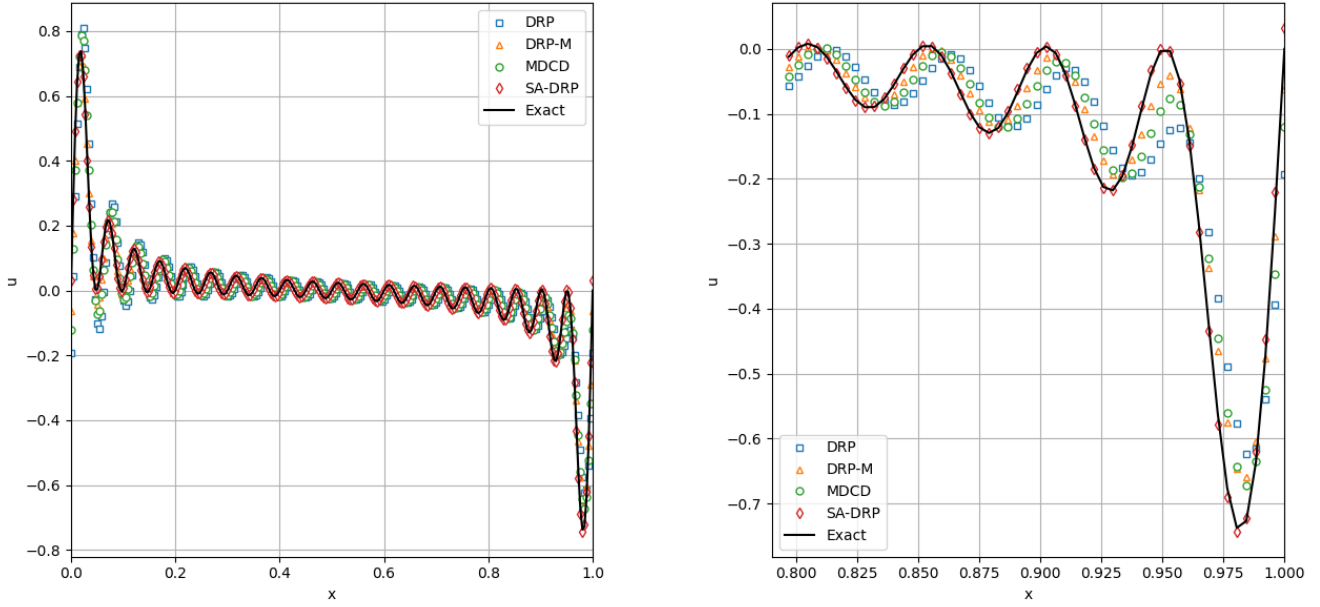


图 3: 四种格式的对比, (a) 求解结果, (b) 局部放大后的结果

我们得到的数值结果与原文高度一致：在传播了十个周期后，只有 SA-DRP 方法仍能准确捕捉解的相位，而其他格式均表现出不同程度的相位误差。值得注意的是，当 $m = 20$ 时，波包中的最大缩放波数约为 0.5。在该波数范围内，由图 4 可以看到，所有格式的色散误差都相对较小。然而，结果表明，即便色散误差很小，经过长时间传播后仍会积累，最终导致显著的相位偏移。由于 SA-DRP 方法在这一波数范围内几乎无色散误差，因此能够精准地保持波的相位，这也是其相较于其他传统格式的突出优势。此外，我们还对不同 m 值 ($m = 5, 10, 15$) 下的情形进行了计算，并比较了 L1 范数误差。结果显示，对于 $m = 20$, SA-DRP 的精度最优，与文献一致。但对于 $m = 5, 10, 15$ 的情况，在网格数不超过 5×10^2 的范围内，SA-DRP 的收敛速度并未表现出明显优于其他格式的优势。这可能是因为在波数较小的频谱范围内，各格式的色散特性相近，导致误差表现趋于一致。

4 Q4

4.1 (1)

按题目要求令 $CFL = 0.2, N = 256$ 进行计算，计算所的结果如图 5 所示，不同格式对应的误差如 1 所示。可以观察到，SA-DRP 方法的误差明显小于其他格式。 $l = 64$ 时，波包中包含的高频分量较多，其最大缩放波数约为 1.5，已经进入具有显著色散误差的区域。尽管如此，SA-DRP 方法在该波数范围内仍表现出无耗散特性，因此能够有效地保持波的相位，其数值解与理论解之间的吻合程度依然较高。这进一步验证了 SA-DRP 在强色散环境下的稳定性与精度优势。

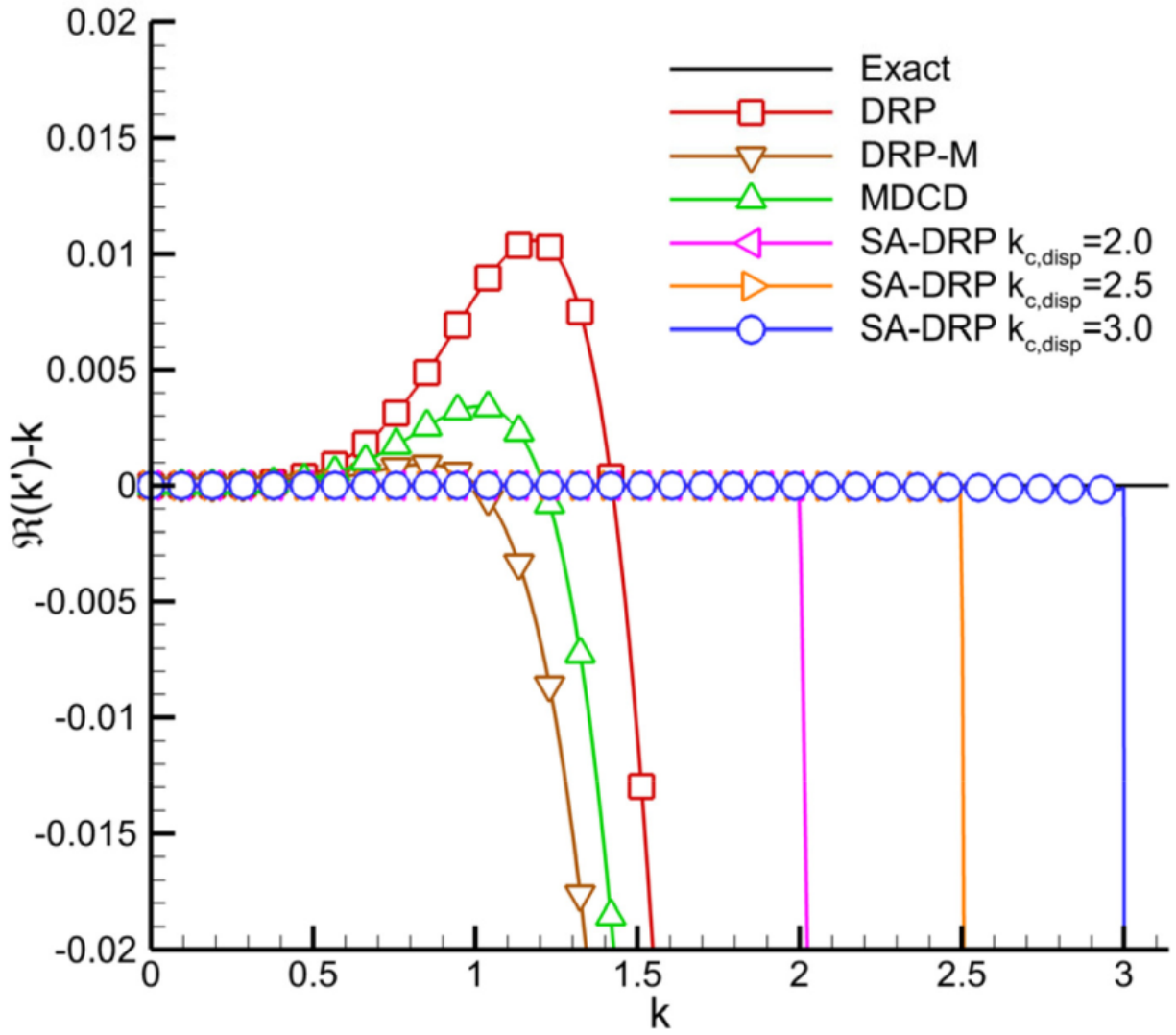


FIG. 6. Comparison between absolute dispersion errors for different schemes.

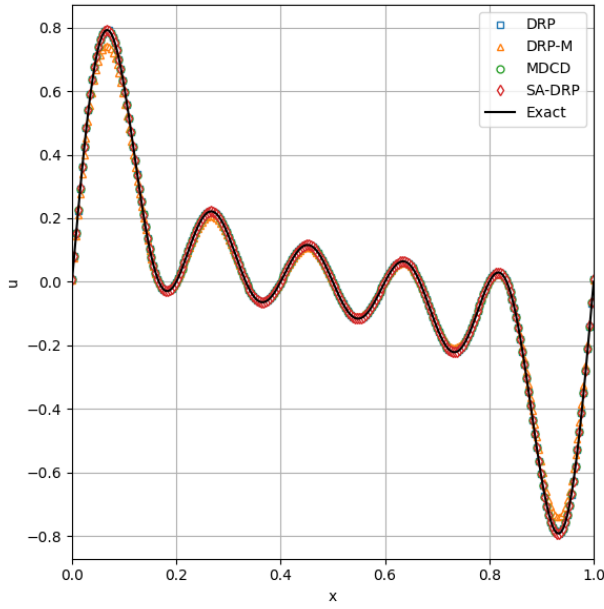
图 4: 各格式的色散特性, 引用自作业参考文献 3

表 1: L^1 Error of Each Scheme at $t = 1.0$, $N = 256$

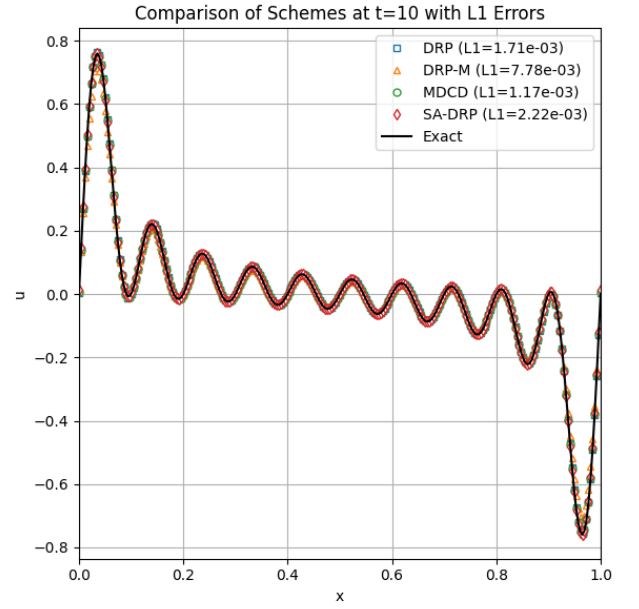
DRP	DRP-M	MDCD	SA-DRP
7.085e-02	1.981e-02	3.531e-02	1.729e-02

4.2 (2)

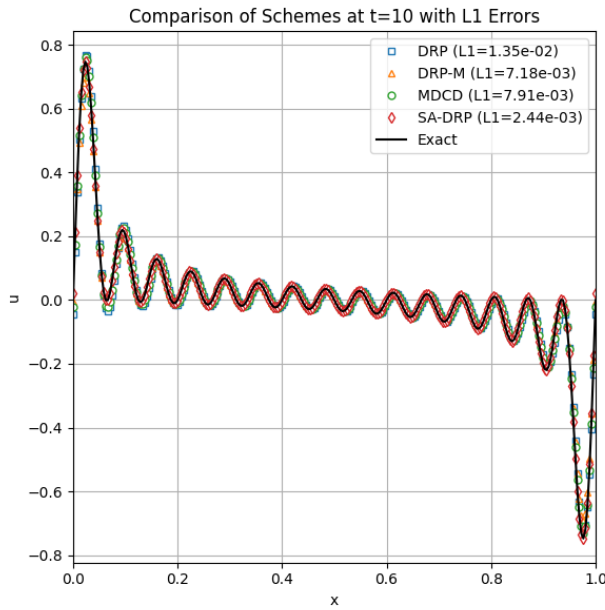
设置 $N=54,128,256,512,1024$, 并计算 $1 - \Delta x$ 范数误差由前面证明的结论可得, 我们所使用的上述四种方法均为四阶精度收敛, 我们也在图中标注了四阶收敛和 5 阶收敛的参照线。可以看到, DRP, DRP-M、MDCD 均为正常的四阶精度收敛, 而 SA-DRP 的 L^1 范数误差收敛速度是其它格式的



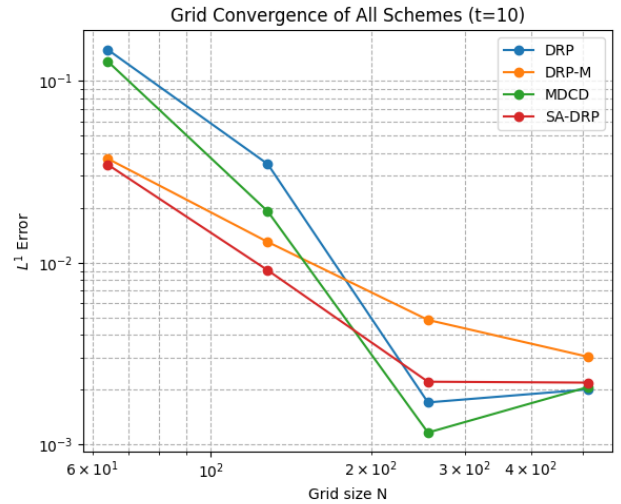
(a)



(b)



(c)



(d)

图 5: 不同 m 对应的计算结果及 L1 范数误差, (a) $m = 5$, (b) $m = 10$, (c) $m = 15$, (d) $m = 10$ 时, 对于的误差范数与 N 的关系

2 倍, 其收敛曲线接近五阶收敛。这是由于 SA-DRP 拥有极小的色散, 因此能极大的减小相位差, 尤其在波数很大的情况下, 能很好的追踪波的相位变化。

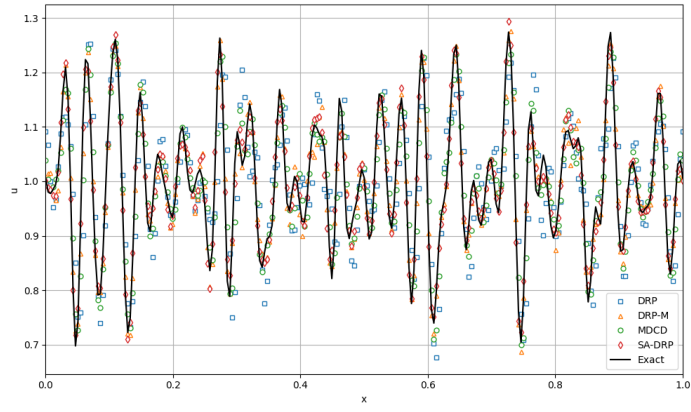


图 6: 求解结果

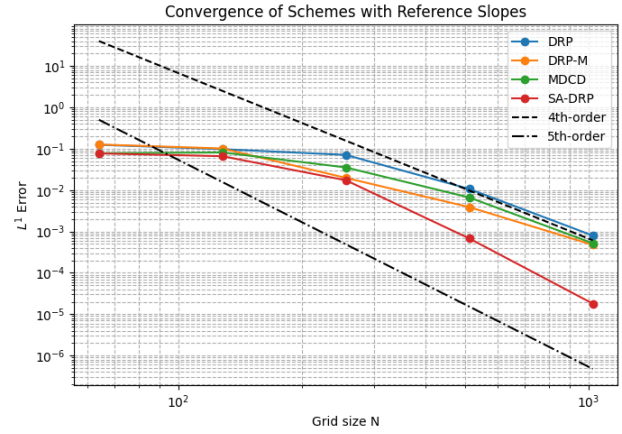
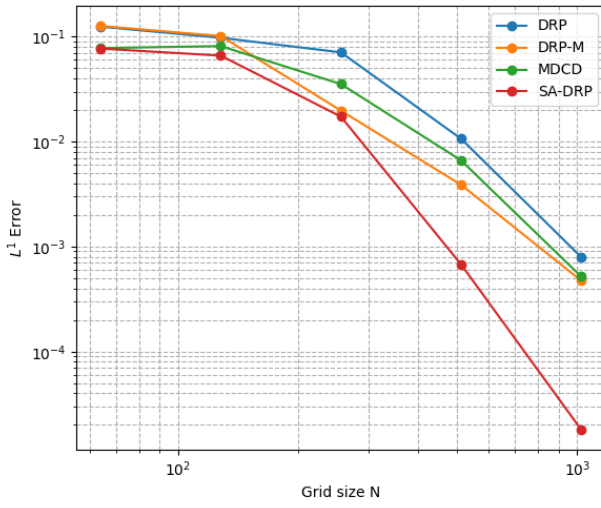


图 7: 精度评估, (a) 各个格式在不同网格数下的 L1 范数误差, (b) 添加 4 阶、5 阶收敛曲线后的示意图

4.3 分辨率评估

对于上述四种格式, 其分辨率如表 2-4

表 2: DRP

n	960	980	1000
L1 error	1.02e-3	2.6e-3	8.7e-4

表 3: DRP-M

n	780	800
L1 error	1.00e-3	9.28e-4

表 4: MD CD

n	860	880
L1 error	1.01e-3	9.27e-4

表 5: SA-DRP

n	460	480
L1 error	1.19e-3	9.51e-4

对于文献中所用的四种格式, DRP, DRP-M, MD CD, SA-DRP, 其分辨率分别在 1000, 800, 880, 480 左右, 当然, n 变化较小时, L1 范数会有一定程度的波动, 所以我们很难确定一个具体的值。由数据可以看到, SA-DRP 的分辨率显著高于其它几种格式, 有超收敛性, 而其它几种格式的分辨率大致相同。我们所得到的分辨率与图 7 中得到的数据基本相同。

如图 8 所示, 对于三阶迎风格式, 其分辨率大约在 2800, 当 $n = 3000$ 时, 其 L1 范数误差在 $5e-4$ 。(由于求解一次时间过长, 我们不严格求解, 仅通过误差范数曲线现行外推)。对于二阶迎风格式, 其 L1 范数误差在 $n = 13000$ 附近达到 $1e-3$ (在 $n = 13000$ 处为 $1.3e-3$)。对于一阶迎风格式, 由于其分辨率过低, 根据其一阶收敛性线性外推可能需要求解 $n = 1e6$, 对于我的电脑暂时无法承受, 可能要求解大于 1 个小时, 因此我们仅通过理论值线性外推的方式进行估计得到。

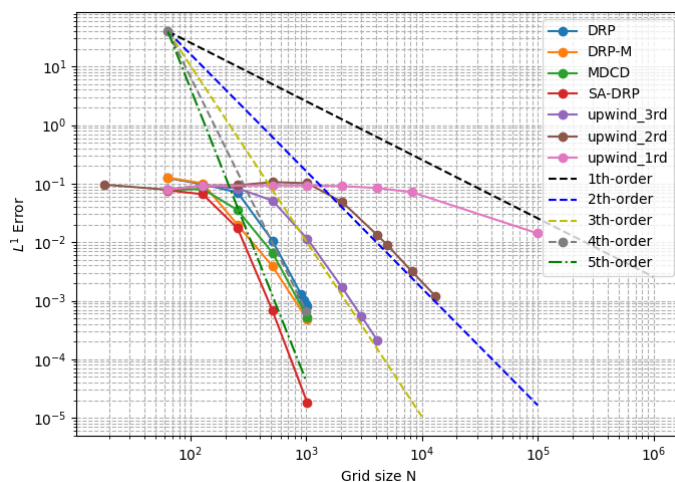


图 8: 误差结果

5 Q5

本次大作业中, 我们主要研究了四种半离散格式—DRP、DRP-M、MD CD 和 SA-DRP 格式。其中, 效果最优的是 SA-DRP 格式。传统的 DRP 格式的参数是通过最小化色散误差得到的。DRP-M 在此基础上对其参数进行了进一步的优化并且加入人工耗散项, 使得耗散更加可控, 且其基本没有增加额外的计算量。MD CD 格式则重新设计了差分格式, 添加了耗散项。SA-DRP 则引入 scale sensor 从而

使得其能应用于更大的波数范围，同时能对波动特性进行很好的跟踪。虽然文献中有提到，SA-DRP 在应用于二维格式的时候，并没有显著增加 CPU 时间，但在我们的计算中，使用 SA-DRP 增加了计算量，增加了计算时间，仍有待进一步优化。

对于 SA-DRP 进一步的优化，或许我们可以从更改局部网格精度的角度出发。目前我们使用的是固定步长的网格，但若像动态条长耗散和色散参数一样，动态调整步长，或许我们就能捕捉到更多的细节。（类似于现有求解流固耦合问题时使用的不规则网格）。

对于乐器发出的声波，其波数范围更大，有着更复杂的特性等待被仿真，有计算声学相关的工作通过 Finite Difference time domain 求解声音场，但其求解往往仅基于简单的差分格式，或许我们可以通过 SA-DRP 给予这类工作一些启发，使其在不显著增加计算量的同时能得到更好的声音仿真效果。

对于任意求解格式，其求解速度均较慢，将网格划分为 10000 时，在一台笔记本电脑上进行求解 1s 所需要的时间大约为 20 分钟。我们或许可以考虑将整个程序迁移至 GPU 上，相较 CPU，GPU 会更擅长于处理大规模并行的问题。

6 References

- [1] Sun, Z., Ren, Y., Larricq, C., Zhang, S., & Yang, Y. (2011). A class of finite difference schemes with low dispersion and controllable dissipation for DNS of compressible turbulence. *J. Comput. Phys.*, 230, 4616-4635.
- [2] Li, Y., Chen, C., & Ren, Y. (2022). A class of high-order finite difference schemes with minimized dispersion and adaptive dissipation for solving compressible flows. *J. Comput. Phys.*, 448, 110770.
- [3] Li, Y., & Ren, Y. (2023). A scale-aware dispersion-relation-preserving finite difference scheme for computational aeroacoustics. *Physics of Fluids*.
- [4] Tam, C.K., & Webb, J.C. (1993). Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. *Journal of Computational Physics*, 107, 262-281.
- [5] Tam, C.K., & Shen, H. (1993). Direct computation of nonlinear acoustic pulses using high-order finite difference schemes.
- [6] Kangrui Xue, Jui-Hsien Wang, Timothy R. Langlois, Doug L. James. WaveBlender: Practical Sound-Source Animation in Blended Domains. SIGGRAPH Asia 2024 Conference Papers.