

# Contents

1	概述	1
1.1	统计学习三要素	1
1.1.1	模型	1
1.1.2	策略	2
1.1.3	算法	3
1.2	模型评估与模型选择	3
1.2.1	训练误差与测试误差	3

## 1 概述

### 1.1 统计学习三要素

#### 1.1.1 模型

监督学习中，模型是要学习的条件概率分布或决策函数。

##### 1.1.1.1 模型的假设空间

假设空间是所有可能的条件概率分布或决策函数

###### 1.1.1.1.1 定义 1

可以定义为决策函数的集合：

$$\mathcal{F} = \{f|Y = f(X)\}$$

- $X$  和  $Y$  是定义在  $\mathcal{X}$  和  $\mathcal{Y}$  上的变量
- $\mathcal{F}$  是一个参数向量决定的函数族：

$$\mathcal{F} = \{f|Y = f_{\theta}(X), \theta \in R^n\}$$

参数向量  $\theta$  取值于  $n$  维欧式空间  $R^n$ ，称为参数空间

###### 1.1.1.1.2 定义 2

也可以定义为条件概率的集合：

$$\mathcal{F} = \{P|P(Y|X)\}$$

- $X$  和  $Y$  是定义在  $\mathcal{X}$  和  $\mathcal{Y}$  上的随机变量
- $\mathcal{F}$  是一个参数向量决定的条件概率分布族：

$$\mathcal{F} = \{P|P_{\theta}(Y|X), \theta \in R^n\}$$

## 1.1.2 策略

### 1.1.2.1 损失函数与风险函数

损失函数 (loss function) 或代价函数 (cost function): 度量预测值  $f(X)$  与真实值  $Y$  的误差程度, 记为  $L(Y, f(X))$ , 是个非负实值函数。损失函数越小, 模型越好。

- 0-1 损失函数:

$$L(Y, f(X)) = \begin{cases} 0 & Y \neq f(X) \\ 1 & Y = f(X) \end{cases}$$

- 平方损失函数:

$$L(Y, f(X)) = (Y - f(X))^2$$

- 绝对损失函数:

$$L(Y, f(x)) = |Y - f(X)|$$

- 对数损失函数 (logarithmic loss function)/对数似然损失函数 (log-likelihood loss function):

$$L(Y, P(Y|X)) = -\log P(Y|X)$$

风险函数 (risk function) 或期望损失 (expected loss):  $X$  和  $Y$  服从联合分布  $P(X, Y)$ , 理论上模型  $f(X)$  关于联合分布  $P(X, Y)$  的平均意义下的损失:

$$R_{exp}(f) = E_P[L(Y, f(X))] = \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} L(y, f(x)) P(x, y) dx dy$$

学习的目标: 选择期望风险最小的模型。但联合分布  $P(X, Y)$  是未知的, 所以无法直接计算  $R_{exp}(f)$ 。所以监督学习是病态问题 (ill-formed problem): 一方面需要联合分布, 另一方面联合分布是未知的。

给定训练集:

$$T = \{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)\}$$

经验风险 (empirical risk)/经验损失 (empirical loss): 模型  $f(X)$  关于训练集的平均损失

$$R_{emp}(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L(y_i, f(x_i))$$

根据大数定律, 当样本容量  $N$  趋向无穷时, 经验风险  $R_{emp}$  趋于期望风险  $R_{exp}(f)$ 。

### 1.1.2.2 经验风险最小化与结构风险最小化

经验风险最小化 (empirical risk minimization, ERM): 经验风险最小的模型就是最优模型。所以需要求解的最优化问题是:

$$\min_{f \in \mathcal{F}} R_{erm} = \min_{f \in \mathcal{F}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L(y_i, f(x_i))$$

当满足以下两个条件时, 经验风险最小化就等价于极大似然估计 (maximum likelihood estimation):

- 模型是条件概率分布

- 损失函数是对数损失函数

当样本量足够大时，ERM 能有很好的效果，但样本量不够多时，为了防止过拟合，需要用下面的方法。

结构风险最小化 (**structural risk minimization, SRM**) : 结构风险 = 经验风险 + 表示模型复杂度的正则化项 (regularizer) 或罚项 (penalty term)。结构风险定义如下：

$$R_{srn}(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L(y_i, f(x_i)) + \lambda J(f)$$

$J(f)$  是模型的复杂度，模型越复杂， $J(f)$  越大。 $\lambda \geq 0$  是用于权衡经验风险和模型复杂度的系数。

当满足以下 3 个条件时，结构化风险最小化等价于贝叶斯估计中的最大后验概率估计 (maximum posterior probability estimation, MAP)：

- 模型是条件概率分布
- 损失函数是对数损失函数
- 模型复杂度由模型的先验概率表示

所以结构风险最小化就是求解优化问题：

$$\min_{f \in \mathcal{F}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L(y_i, f(x_i)) + \lambda J(f)$$

### 1.1.3 算法

算法指的是学习模型的具体方法，即使用什么计算方法求解最优模型。

因为统计学习问题归结为最优化问题，所以统计学习的算法就是求解最优化问题的算法。

- 如果有显式的解析解，此最优化问题就比较简单
- 如果没有，需要用数值计算方法求解，需要考虑如何保证找到全局最优解，并使求解过程高效

## 1.2 模型评估与模型选择

### 1.2.1 训练误差与测试误差