整函数与亚纯函数

吴秉哲

February 8, 2015

若函数$f(z)$在C上解析，则称$f(z)$是一整函数.对整函数$f(z)$ 它的Taylor展开式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n \tag{1}$$

在C上成立.另一方面$z=\infty$为$f(z)$的孤立奇点，由Laurent展式.它的 奇异部分$\varphi(z)=f(z)$,解析部分$\varphi(z)=0$.

定理 1 若整函数$f(z)$在$\overline{C}$上解析，则$f(z)$为常数.

证明 1 条件表明$f(z)$在为一整函数，且$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=c_0$存在，所以$z=\infty$为$f(z)$在无穷远点的可去奇点，故$f(z)$的奇异部分$\varphi(z)=f(z)$ 应为常数.证毕.

定理也可以利用连续函数$|f(z)|$在紧集$\overline{C}$上 某一点z_0取到它的最大值，再根据最大模定理的$f(z)$为一常数.

若$z=\infty$是整函数的m级零点，则$f(z)$为一个m次的多项式.

若$z=\infty$为$f(z)$的本性奇点，则$f(z)$为超越整函数, 例如$e^z,\sin(z),\cos(z)$都是超越整函数.

若函数$f(z)$在区域$D\subset\overline{C}$上除去极点外解析，则 称$f(z)$是D内的亚纯函数或半纯函数. 由极点定义知极点是孤立的，所以D上的亚纯函数的极点集不可能有属于 D的极限点.例如函数$\tan(z)$是C上的亚纯函数,有理函数

$$R(z)=P_n(z)\setminus Q_m(z),$$

其中$P_n(z),Q_m(z)$分别是n,m次多项式，称$max(n,m)$为有理函数 $R(z)$的次数，则有理函数是C上的亚纯函数，因为在C上至多有m个 极点.事实上它也是$\overline{C}$上的亚纯函数,