1 集合与点集

定理 1 $[0,1] = x : 0 \leqslant x \leqslant 1$不是可数集.

证明 1 只需讨论$(0,1]$,为此，采用二进制小数表示法：

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

其中a_n等于*0*或*1*，并在表达式中存在无穷多个a_n等于*1*.显然，$(0,1]$与全体二进制数一一对应.

若在上述表示中，把a_n=*0*的项舍去，则得到$x = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-n_i}$,这里的$n_i$是严格上升的自然数数列.再令 $k_1 = n_1, k_i = n_i - n_{i-1}, i = 2, 3...$, 则$k_i$是自然数子列.把由自然数构成的序列的全体记为$\wp$，则$\wp$ 与$(0,1]$一一对应.

现在假定$(0,1]$是可数的，则$\wp$是可数的，不妨将其全体排列如下：