Γραμμική Άλγεβρα
(*Linear Algebra*)

ΑΓΓΕΛΟΣ ΣΙΦΑΛΕΡΑΣ

Καθηγητής

7η Διάλεξη (Θεωρία)

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

CMOR Lab

Computational Methodologies
and Operations Research

2ο παράδειγμα εύρεσης αντίστροφου πίνακα 2×2

Έστω: $$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Τότε: $$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3ο παράδειγμα εύρεσης αντίστροφου πίνακα

Έστω ο πίνακας:

$$G=\begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Να προσδιορίσετε αν αποτελεί τον αντίστροφο πίνακα κανενός από τους ακόλουθους πίνακες:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$AG \neq I$

μη τετραγωνικός

$CG = I$

D, G διαφορετικές διαστάσεις

4^{o} παράδειγμα εύρεσης αντίστροφου πίνακα, (1/2)

Να προσδιορίσετε τους αντίστροφους πίνακες των παρακάτω πινάκων, βάσει των ιδιοτήτων των στοιχειωδών γραμμο-πινάκων :

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

4ο παράδειγμα εύρεσης αντίστροφου πίνακα, (2/2)

$$A^{-1} = A, \qquad B^{-1} = B, \qquad C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Κανονικές μορφές

Αν ο B είναι ένας $m \times n$ πίνακας λέμε ότι είναι σε **κανονική μορφή** αν είναι ο μηδενικός πίνακας ή έχει τη μορφή:

$$B = \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathrm{O}_{r,n-r} \\ \hline \mathrm{O}_{m-r,r} & \mathrm{O}_{m-r,n-r} \end{array}\right]$$

όπου μερικά από τα μηδενικά μπλοκ μπορεί να λείπουν.

π.χ., οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι όλοι σε κανονική μορφή.

Βαθμός (*rank*) πίνακα

- Ο **βαθμός** του πίνακα A, (*rank*(*A*)) (είναι το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών ή στηλών του και) υπολογίζεται ως εξής:

  - η διάσταση του μεγαλύτερου τετραγωνικού υποπίνακα του *A* με μη μηδενική ορίζουσα, ή

  - το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του *rref* πίνακα που προκύπτει από τον πίνακα *A*.

- Ένας $n \times n$ πίνακας *A* έχει αντίστροφο, αν και μόνον αν $rank(A) = n$.

- Αν *A* είναι ένας $m \times n$ πίνακας, τότε έχει δεξιό αντίστροφο, αν και μόνον αν $rank(A) = m$, και αριστερό αντίστροφο, αν και μόνον αν $rank(A) = n$.

- Αν *A* είναι ένας $m \times n$ πίνακας, τότε:

  - $\mathrm{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$

  - $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^{T})$

Βαθμός (*rank*) πίνακα

- Αν A είναι ένας $m \times n$ πίνακας, $\boldsymbol{b}$ ένας $m \times 1$ πίνακας και $H = [A\ \boldsymbol{b}]$ ο $m \times (n+1)$ (επαυξημένος) πίνακας τότε:

$$\operatorname{rank}(A) \leq \operatorname{rank}(H) \leq \operatorname{rank}(A) + 1$$

Δηλαδή, η προσάρτηση μιας στήλης στον A αφήνει τον βαθμό του αμετάβλητο ή τον αυξάνει κατά 1.

- Αν A είναι $m \times n$ πίνακας, τότε υπάρχει $n \times 1$ πίνακας $\boldsymbol{x}$ τέτοιος, ώστε $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, αν και μόνον αν $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A \mid \boldsymbol{b}])$.

  Με άλλα λόγια, η σχέση: $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A \mid \boldsymbol{b}]) = r$

  είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη λύσης του $m \times n$ γραμμικού συστήματος $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Βαθμός (*rank*) πίνακα

- Ένας $m \times n$ πίνακας A έχει **πλήρη βαθμό κατά γραμμές** (*full row rank*) αν ισχύει $rank(A) = m$ και **πλήρη βαθμό κατά στήλες** (*full column rank*) αν $rank(A) = n$.

π.χ., οι πίνακες:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

είναι πίνακες με πλήρη βαθμό κατά γραμμές και οι:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

είναι πίνακες με πλήρη βαθμό κατά στήλες.

Βαθμός (*rank*) πίνακα

- Το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ είναι συμβιβαστό (υπάρχει τουλάχιστον μία λύση) για κάθε $\mathbf{b}$, αν και μόνο αν ο A έχει πλήρη βαθμό κατά γραμμές.

Matrix decompositions

Πολλές σύνθετες πράξεις πινάκων δεν μπορούν να υλοποιηθούν με αποτελεσματικό τρόπο ή με ευστάθεια υπολογισμών χρησιμοποιώντας πεπερασμένη ακρίβεια. Οι αναλύσεις (*decomposition*) πινάκων είναι μέθοδοι που ανάγουν μια μήτρα σε συστατικά τα οποία διευκολύνουν τον υπολογισμό πολύπλοκων πράξεων πινάκων. Οι μέθοδοι ανάλυσης πινάκων, που ονομάζονται επίσης μέθοδοι παραγοντοποίησης πινάκων, αποτελούν τη βάση της γραμμικής άλγεβρας σε υπολογιστές, ακόμη και για βασικές λειτουργίες όπως ο υπολογισμός της ορίζουσας μιας μήτρας, ο υπολογισμός του αντίστροφου, αλλά και η επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων.

Matrix decomposition είναι κάτι ανάλογο με την παραγοντοποίηση αριθμών (π.χ., 10 = 2x5) για αυτό επίσης ονομάζεται *Matrix factorization:*

- *LU Decomposition* (για τετραγωνικούς πίνακες)
- *QR Decomposition* (όχι απαραίτητα τετραγωνικούς πίνακες)
- *Cholesky Decomposition* (για τετραγωνικούς συμμετρικούς πίνακες με θετικές τιμές στοιχείων ή αλλιώς θετικά ορισμένες μήτρες, 2x ταχύτερη μέθοδος για επίλυση γραμμικών συστημάτων)
- *Eigendecomposition*
- *Singular Value Decomposition*

LU decomposition / LU factorization

- Εφαρμογές της τριγωνικής παραγοντοποίησης:
  - Επίλυση τετραγωνικών συστημάτων γραμμικών εξισώσεων
  - Υπολογισμός ορίζουσας ενός πίνακα
  - Αντιστροφή πίνακα
- Η τριγωνική παραγοντοποίηση παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τον *Alan Turing* το 1948.
  - Turing, A.M. (1948). Rounding-off errors in matrix processes. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1(1), 287-308.
- Η τριγωνική παραγοντοποίηση συμπεριλαμβάνεται στη βιβλιοθήκη αριθμητικής γραμμικής άλγεβρας *LAPACK* (η οποία χρησιμοποιείται, π.χ., στο *MATLAB* και στο *Mathematica*)

LU decomposition / LU factorization

Ένας αντιστρέψιμος πίνακας A (άρα και τετραγωνικός) έχει μια **τριγωνική παραγοντοποίηση** (*triangular factorization*) αν μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο ενός τριγωνικού κάτω πίνακα L και ενός τριγωνικού άνω πίνακα U: $A = LU$.

π.χ., ο αντιστρέψιμος πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 24 & 6 \\ 40 & 8 \end{bmatrix}$$

έχει μια τριγωνική παραγοντοποίηση γιατί μπορούμε να γράψουμε:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

LU decomposition / LU factorization

Η παραπάνω παραγοντοποίηση δεν είναι η μοναδική αφού, π.χ., ισχύει:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 & 6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του L είναι 1 τότε οι πίνακες L, U είναι μοναδικοί.

Παράδειγμα τριγωνικής παραγοντοποίησης, (1/3)

Να βρεθεί η LU παραγοντοποίηση του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 14 \\ 14 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

Θα μετατρέψουμε μέσω γραμμοπράξεων τον πίνακα A σε κλιμακωτή μορφή:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 14 \\ 14 & 10 & -5 \end{bmatrix}}_{A=A_1} \begin{matrix} \\ -3\Gamma_1 + \Gamma_2 \to \Gamma_2 \\ -7\Gamma_1 + \Gamma_3 \to \Gamma_3 \end{matrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -26 \end{bmatrix}}_{A_2} \begin{matrix} \\ \\ 4\Gamma_2 + \Gamma_3 \to \Gamma_3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = U$$

Τώρα μένει μονάχα να βρούμε τον τριγωνικό κάτω πίνακα L…

Παράδειγμα τριγωνικής παραγοντοποίησης, (2/3)

- Θα χρησιμοποιήσουμε τους προηγούμενους πίνακες A_1 (όπου $A = A_1$) και A_2, ώστε να κατασκευάσουμε τους πίνακες L_1 και L_2 (όπου $L_2 = L$).

- Ξεκινούμε από το μοναδιαίο πίνακα I_3. Τα στοιχεία στην 1η στήλη του I_3 κάτω από την μονάδα στη διαγώνιο, αντικαθίστανται από τα αντίστοιχα στοιχεία του A_1 διαιρεμένα δια του πιλότου 2. Οπότε:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L_0} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L_1}$$

Παράδειγμα τριγωνικής παραγοντοποίησης, (3/3)

- Έπειτα από τον A_2 και τον L_1 θα κατασκευάσουμε τον $L_2 = L$. Αντίστοιχα, τα στοιχεία της 2ης στήλης του L_2 κάτω από τη μονάδα στη διαγώνιο αντικαθίστανται από τα αντίστοιχα στοιχεία του A_2 διαιρεμένα δια του πιλότου 1. Οπότε:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L_1} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix}}_{L_2} = L$$

- Ο πίνακας L είναι κάτω τριγωνικός μόνο όταν δεν έχουμε εφαρμόσει εναλλαγές γραμμών (π.χ., για να αποφύγουμε μηδενικά στη διαγώνιο) κατά την απαλοιφή *Gauss*. Σε διαφορετική περίπτωση προκύπτει ένας (*permuted)* κάτω τριγωνικός πίνακας που έχει υποστεί εναλλαγή γραμμών.

Μέθοδοι τριγωνικής παραγοντοποίησης

Έστω ότι ζητούμε την LU παραγοντοποίηση του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 14 \\ 14 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

Στη γενική μορφή θα είναι:

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

άρα:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 14 \\ 14 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

Μέθοδοι τριγωνικής παραγοντοποίησης

- Έτσι, έχουμε να λύσουμε ένα σύστημα 9 γραμμικών εξισώσεων με 12 αγνώστους.

- Για να έχει μοναδική λύση το σύστημα, επιβάλλουμε 12 – 9 = 3 επιπλέον συνθήκες στα στοιχεία αυτών των τριγωνικών πινάκων.

- Αν θέσουμε μονάδες στην κύρια διαγώνιο του:

  i. L, τότε η μέθοδος ονομαζεται *Doolittle* παραγοντοποίηση.

  ii. U, τότε η μέθοδος ονομαζεται *Crout* παραγοντοποίηση.

Μέθοδος *Doolittle* για τριγωνική παραγοντοποίηση, (1/2)

Να βρεθεί η LU παραγοντοποίηση του πίνακα: $$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 14 \\ 14 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

Αρκεί να θεωρήσουμε κάτω τριγωνικούς πίνακες L, οι οποίοι έχουν μονάδες στη διαγώνιο.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 14 \\ 14 & 10 & -5 \end{bmatrix} = LU$$

όπου: $$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

Μέθοδος *Doolittle* για τριγωνική παραγοντοποίηση, (2/2)

Πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες LU και εξισώνοντας με τον Α, προκύπτει:

$$LU = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + U_{22} & L_{21}U_{13} + U_{23} \\ L_{31}U_{11} & L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + U_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 14 \\ 14 & 10 & -5 \end{bmatrix} = A$$

- Οπότε ξεκινούμε από την $1^{η}$ γραμμή και μετά διαδοχικά με αντικατάσταση υπολογίζουμε όλες τις μεταβλητές.

- Άρα: $U_{11} = 2$, $U_{12} = 2$, $U_{13} = 3$,
  $L_{21} = 3$, $U_{22} = 1$, $U_{23} = 5$,
  $L_{31} = 7$, $L_{32} = -4$, $U_{33} = -6$

$$\Rightarrow \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

3ο παράδειγμα τριγωνικής παραγοντοποίησης, (1/2)

Να βρεθεί η LU παραγοντοποίηση του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$$

- Αρκεί να θεωρήσουμε κάτω τριγωνικούς πίνακες L, οι οποίοι έχουν μονάδες στη διαγώνιο.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} = LU$$

όπου: $$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ L_{21} & 1 \end{bmatrix}$$ και $$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix}$$

3ο παράδειγμα τριγωνικής παραγοντοποίησης, (2/2)

Πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες *LU* και εξισώνοντας με τον Α, προκύπτει:

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ L_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} = A$$

- Οπότε ξεκινούμε από την 1η γραμμή και μετά διαδοχικά με αντικατάσταση υπολογίζουμε όλες τις μεταβλητές.

- Άρα: $U_{11} = 3$, $U_{12} = 1$,
  $L_{21} = -2$, $U_{22} = -2$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Μέθοδος *Crout* για τριγωνική παραγοντοποίηση, (1/2)

Να βρεθεί η LU παραγοντοποίηση με τη μέθοδο *Crout* του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 14 \\ 14 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

Αρκεί να θεωρήσουμε άνω τριγωνικούς πίνακες U, οι οποίοι έχουν μονάδες στη διαγώνιο.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 14 \\ 14 & 10 & -5 \end{bmatrix} = LU$$

όπου:

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μέθοδος *Crout* για τριγωνική παραγοντοποίηση, (2/2)

Πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες LU και εξισώνοντας με τον A, προκύπτει:

$$LU = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{11}U_{12} & L_{11}U_{13} \\ L_{21} & L_{21}U_{12} + L_{22} & L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23} \\ L_{31} & L_{31}U_{12} + L_{32} & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 14 \\ 14 & 10 & -5 \end{bmatrix} = A$$

- Οπότε ξεκινούμε από την 1$^{\eta}$ στήλη και μετά διαδοχικά με αντικατάσταση υπολογίζουμε όλες τις μεταβλητές.

- Άρα: $L_{11} = 2$, $L_{21} = 6$, $L_{31} = 14$,
  $U_{12} = 1$, $L_{22} = 1$, $L_{32} = -4$,
  $U_{13} = 1.5$, $U_{23} = 5$, $L_{33} = -6$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 14 & -4 & -6 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1.5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Προϋποθέσεις τριγωνικής παραγοντοποίησης, (1/3)

- Ένας αντιστρέψιμος πίνακας A έχει τριγωνική παραγοντοποίηση αν για κάθε k, όλες οι ηγετικές κύριες ελάσσονες ορίζουσες k τάξης είναι μη μηδενικές (k-οστοί *leading* υποπίνακες με μη μηδενικές ορίζουσες).

- Η ηγετική κύρια ελάσσονα ορίζουσα θα συμβολίζεται με $|A_k|$ και αντιστοιχεί στην ορίζουσα του πίνακα που αποτελείται από τις πάνω & αριστερά k γραμμές & στήλες αντίστοιχα.

- π.χ. αν: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 14 \\ 14 & 10 & -5 \end{bmatrix}$ τότε:

$$\begin{cases} A_1 = 2 & |A_1| = 2 \\ A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & |A_2| = 2 \\ A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 14 \\ 14 & 10 & -5 \end{bmatrix} & |A_3| = -12 \end{cases}$$

Προϋποθέσεις τριγωνικής παραγοντοποίησης, (2/3)

- Ν.δ.ο. ο διπλανός πίνακας δεν έχει τριγωνική παραγοντοποίηση: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Ο δεύτερος (*leading*) υποπίνακας έχει ορίζουσα ίση με:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

οπότε, ή τριγωνική παραγοντοποίηση δεν είναι εφικτή σε αυτήν την περίπτωση.

Προϋποθέσεις τριγωνικής παραγοντοποίησης, (3/3)

- Ποιοι από τους ακόλουθους πίνακες έχουν τριγωνική παραγοντοποίηση?

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

→ $|A_1| = 3$ και $|A_2| = 3$, άρα έχει τριγωνική παραγοντοποίηση

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

→ $|B_1| = 0$, άρα δεν έχει τριγωνική παραγοντοποίηση

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

→ $|C_2| = 0$, άρα δεν έχει τριγωνική παραγοντοποίηση

Επίλυση τετραγωνικών συστημάτων γραμμικών εξισώσεων με τριγωνική παραγοντοποίηση, (1/4)

- Η τριγωνική παραγοντοποίηση ενός τετραγωνικού πίνακα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην επίλυση ενός τετραγωνικού γραμμικού συστήματος.

- Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε το σύστημα $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Αν είναι γνωστή η παραγοντοποίηση $A = LU$ του πίνακα του συστήματος, τότε θα έχουμε:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow LU\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow L(U\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{cases} L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\ U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \end{cases}$$

- Πρόκειται όμως για τριγωνικά συστήματα, τα οποία μπορούν να λυθούν εύκολα με προς τα μπρος και προς τα πίσω αντικατάσταση, αντίστοιχα…

Επίλυση τετραγωνικών συστημάτων γραμμικών εξισώσεων με τριγωνική παραγοντοποίηση, (2/4)

Να λυθεί το διπλανό σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 6x_1 + 7x_2 + 14x_3 = 60 \\ 14x_1 + 10x_2 - 5x_3 = -23 \end{cases}$$

$$\underbrace{A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 14 \\ 14 & 10 & -5 \end{bmatrix}}_{\text{πίνακας του συστήματος}} \qquad \underbrace{\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 13 \\ 60 \\ -23 \end{bmatrix}}_{\text{δ/μα σταθερών όρων}}$$

Επίλυση τετραγωνικών συστημάτων γραμμικών εξισώσεων με τριγωνική παραγοντοποίηση, (3/4)

Έχουμε τώρα να λύσουμε δύο συστήματα:

1ο σύστημα:

$$L\mathbf{y}=\mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 60 \\ -23 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 13 \\ y_2 = 60 - 3y_1 \\ y_3 = -23 - 7y_1 + 4y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 13 \\ y_2 = 21 \\ y_3 = -30 \end{cases}$$

εμπροσθοδρομική αντικατάσταση

2ο σύστημα:

$$U\mathbf{x}=\mathbf{y} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 21 \\ -30 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 13 - 2x_2 - 3x_3 \\ x_2 = 21 - 5x_3 \\ x_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -4 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

οπισθοδρομική αντικατάσταση

Επίλυση τετραγωνικών συστημάτων γραμμικών εξισώσεων με τριγωνική παραγοντοποίηση, (4/4)

Να λυθεί το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων, με τη μέθοδο της τριγωνικής παραγοντοποίησης:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 6x_3 = 0 \\ -6x_1 - 16x_3 = 4 \\ 8x_2 - 17x_3 = 17 \end{cases}$$

<u>1ο Βήμα</u>: Τριγωνική παραγοντοποίηση: $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ $U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

<u>2ο Βήμα</u>: Επίλυση συστήματος: $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Υπολογισμός ορίζουσας ενός πίνακα με τριγωνική παραγοντοποίηση

Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 14 \\ 14 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

Έχοντας υπολογίσει την τριγωνική παραγοντοποίηση:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Είναι: $|A| = |LU| = |L||U| = 1 \times (-12) = -12$

Αντιστροφή πίνακα με τριγωνική παραγοντοποίηση

Να υπολογίσετε τον αντίστροφο του διπλανού πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 14 \\ 14 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

Έχοντας υπολογίσει την τριγωνική παραγοντοποίηση:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Είναι:

$$A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & -7/12 \\ 0 & 1 & 5/6 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -19 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 175/12 & -10/3 & -7/12 \\ -113/6 & 13/3 & 5/6 \\ 19/6 & -2/3 & -1/6 \end{bmatrix}$$