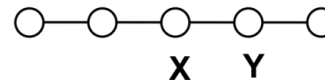
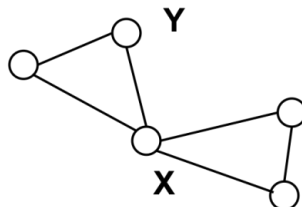
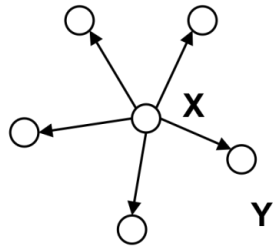
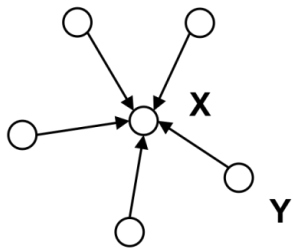


Κεντρικότητα κορυφής

Κεντρικότητα

- Η έννοια της **κεντρικότητας** (centrality) προτάθηκε στη δεκαετία του 1950 από κοινωνιολόγους για τη μελέτη μικρών ανθρώπινων δικτύων
- Παράδειγμα: σε όλους τους επόμενους γράφους, η κορυφή X είναι πιο κεντρική από την κορυφή Y με βάση τη θέση της στον εκάστοτε γράφο



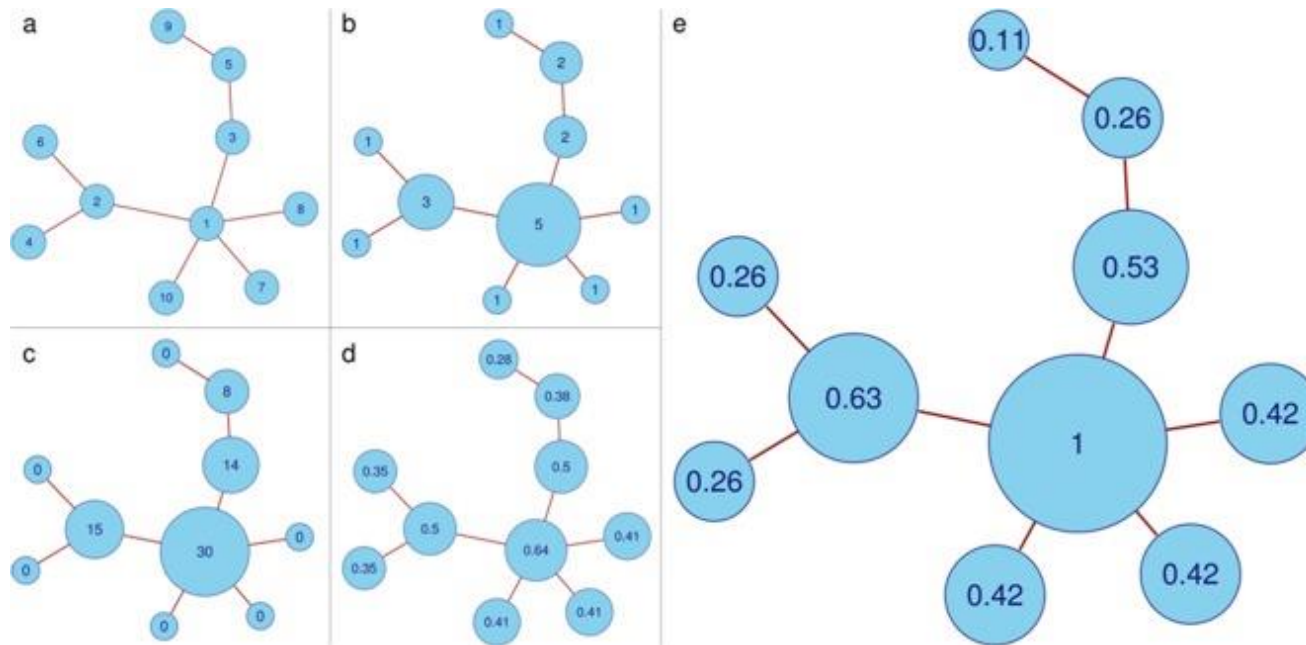
Σπουδαιότητα της κεντρικότητας

- Εφαρμογές:
 - στη διαμόρφωση της κοινής γνώμης (κοινωνικά δίκτυα, MME)
 - σε στρατιωτικές εφαρμογές (δίκτυα αισθητήρων)
 - στη μελέτη βιβλιογραφικών δεδομένων (συγγραφέων, εργασιών, περιοδικών, συνεδρίων)
 - σε παράνομα δίκτυα, σε πολεοδομικά συστήματα, σε στόχους marketing, στην επιδημιολογία, στην ασφάλεια του δικτύου, κλπ
- Σε ένα δίκτυο ανθρώπων, ποιος είναι:
 - ο πιο δημοφιλής;
 - αυτός που μαθαίνει τα νέα πιο γρήγορα;
 - αυτός που ελέγχει τη ροή των νέων πιο συχνά;
- Στη Θεωρία Γράφων & στην Ανάλυση Δικτύων υπάρχουν διάφορα τύποι για τη μέτρηση της κεντρικότητας μίας κορυφής

Τύποι κεντρικότητας κορυφών

- Μερικά τέτοια μέτρα είναι:
 - **κεντρικότητα βαθμού (degree)**
 - **κεντρικότητα εγγύτητας (closeness)**
 - **πληροφοριακή κεντρικότητα (information)**
 - **αρμονική κεντρικότητα (harmonic)**
 - **ενδιάμεση κεντρικότητα (betweenness)**
 - **ενδιάμεση κεντρικότητα ακμών (edge betweenness)**
 - **κεντρικότητα ιδιοδιανύσματος (eigenvector)**
 - **κεντρικότητα διύλησης (percolation)**
 - **κεντρικότητα διασταυρούμενων κλικών (cross-clique)**
 - **κεντρικότητα υπογράφου (subgraph)**
 - **κεντρικότητα alpha**
 - **κεντρικότητα Katz**
 - **κεντρικότητα Freeman**
 - **κεντρικότητα Pagerank**
 - και άλλες πολλές κεντρικότητες

Τύποι κεντρικότητας κορυφών



a) Απλός γράφος. b) Κεντρικότητα βαθμού. c) Ενδιάμεση κεντρικότητα. d) Κεντρικότητα εγγύτητας. e) Κεντρικότητα ιδιοδιανύσματος.

Κεντρικότητα βαθμού

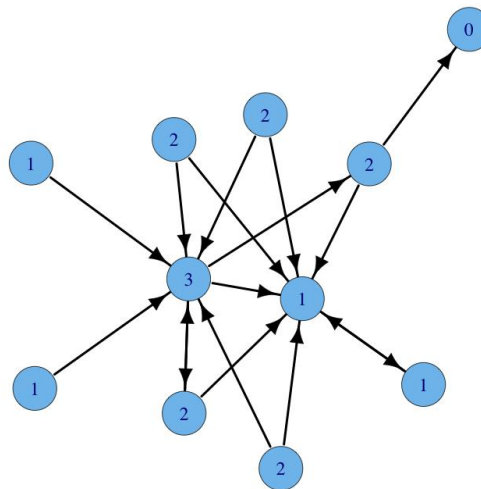
Κεντρικότητα βαθμού

- Η **κεντρικότητα βαθμού** (degree centrality) δηλώνει το πλήθος των ακμών που συνδέουν μια κορυφή με τους γείτονες της
- Σε μη κατευθυνόμενο γράφο η κεντρικότητα ορίζεται συναρτήσει του βαθμού των κορυφών

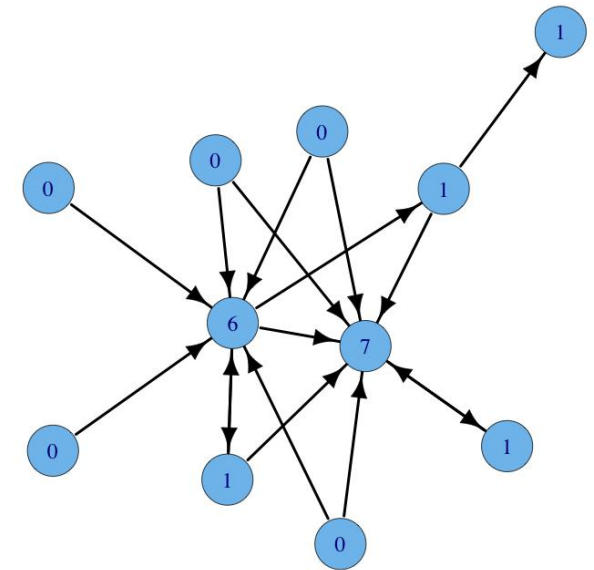


Κεντρικότητα βαθμού

- Σε κατευθυνόμενο γράφο η κεντρικότητα ορίζεται με τον έσω-βαθμό (in-degree) ή έξω-βαθμό (out-degree)
- Ο έσω-βαθμός αφορά τις προσκείμενες προς την κορυφή ακμές ενώ ο έξω-βαθμός αναφέρεται στις ακμές από την κορυφή προς άλλες κορυφές



Κεντρικότητα έξω βαθμού



Κεντρικότητα έσω βαθμού

Σύγκριση κεντρικότητας κόμβων

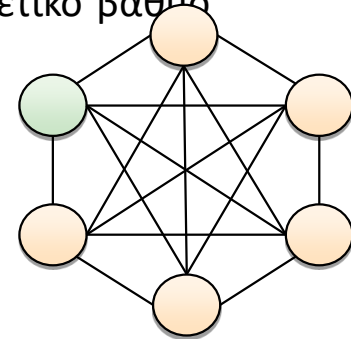
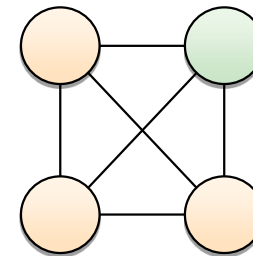
- Η κεντρικότητα βαθμού C_D κορυφής v δίνεται από τη σχέση:

$$C_D(v)=d(v)$$

- Μεγαλύτερες τιμές \rightarrow μεγαλύτερη κεντρικότητα
- Για λόγους σύγκρισης μεταξύ γράφων διαφορετικού μεγέθους, γίνεται κανονικοποίηση. Επομένως ισχύει:

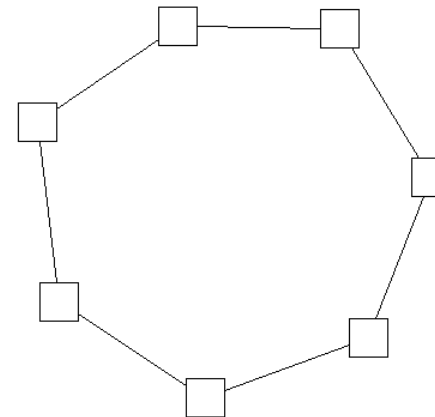
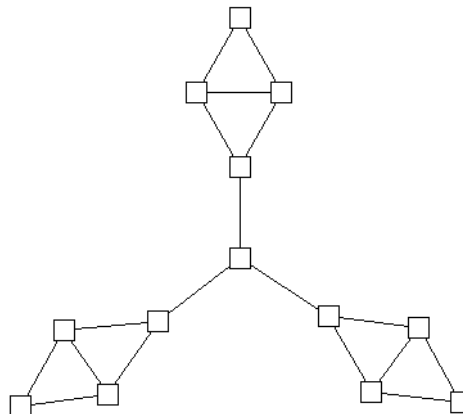
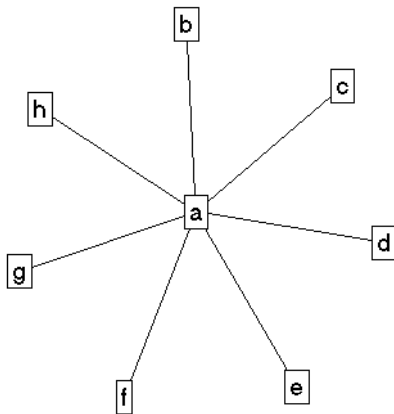
$$C_D(v)=d(v)/(n-1)$$

- Παράδειγμα: Οι δύο πράσινες κορυφές των K_4 και K_6 είναι εξ ίσου κεντρικές αν και έχουν διαφορετικό βαθμό κεντρικότητας



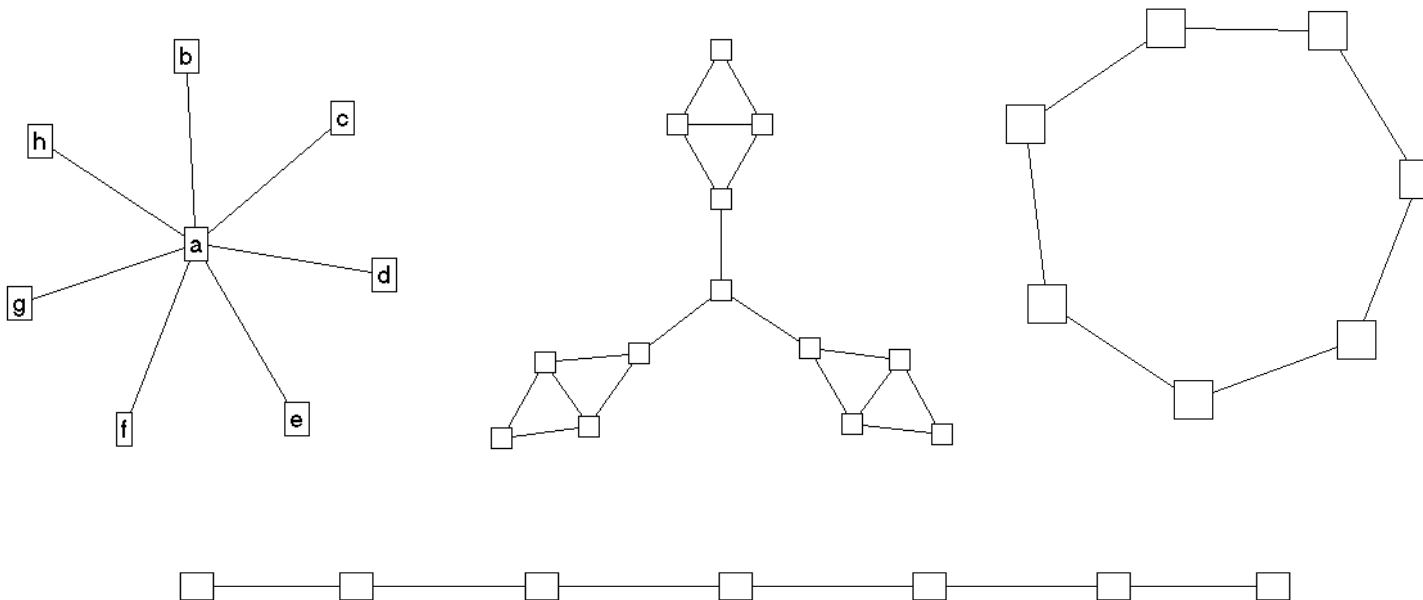
Σύγκριση κεντρικότητας κόμβων

- Υπολογισμός της κεντρικότητας βαθμού για τις κορυφές των γράφων:



Σύγκριση κεντρικότητας κόμβων

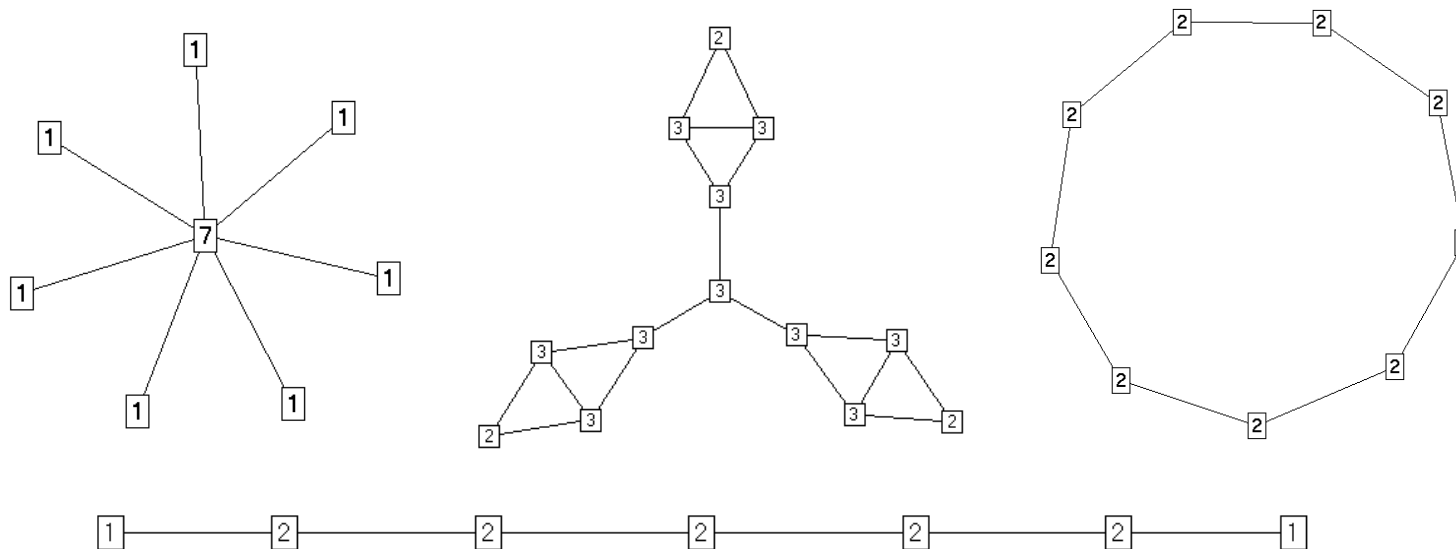
- Υπολογισμός της κεντρικότητας βαθμού για τις κορυφές των γράφων:



- Βήμα 1: Υπολογισμός των βαθμών των κορυφών των γράφων

Σύγκριση κεντρικότητας κόμβων

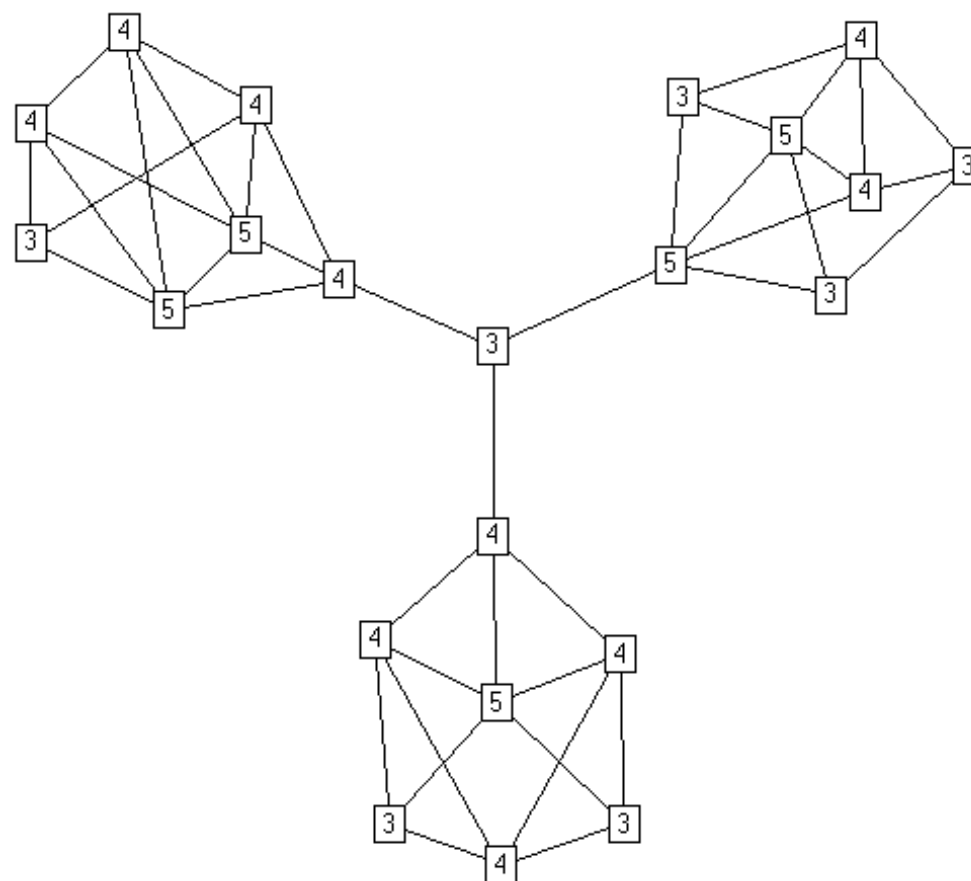
- Υπολογισμός της κεντρικότητας βαθμού για τις κορυφές των γράφων:



- Βήμα 2: Κανονικοποίηση δια του πλήθους των κορυφών $n-1$

Σύγκριση κεντρικότητας κορυφών

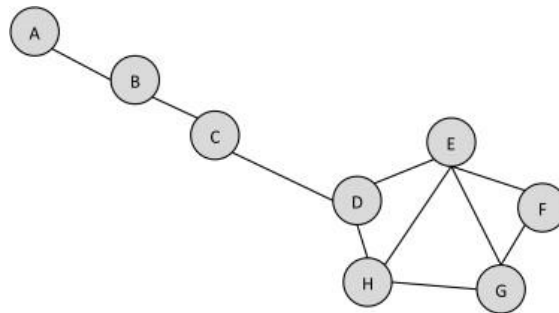
- Κανονικοποίηση διαιρώντας δια του 21



Κεντρικότητα εγγύτητας

Κεντρικότητα εγγύτητας

- Η κεντρικότητα εγγύτητας δείχνει πόσο **κοντά** είναι μια κορυφή στις υπόλοιπες κορυφές ενός γράφου
- Παράδειγμα για D:



- Κεντρικότητα εγγύτητας A: $1/(3 + 2 + 1 + 1 + 2 + 2 + 1) = 0.083$
- Κανονικοποιημένη κεντρικότητα εγγύτητας A: 0.583
- Μεγαλύτερες τιμές → μεγαλύτερη κεντρικότητα

Κορυφή	Μονοπάτι από το D
A	3
B	2
C	1
E	1
F	2
G	2
H	1

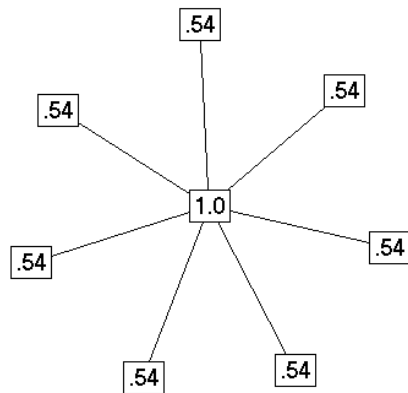
Κεντρικότητα εγγύτητας

- Η κεντρικότητα εγγύτητας μεταξύ μιας κορυφής v και όλων των υπολοίπων κορυφών, ορίζεται ως το αντίστροφο του αθροίσματος των μηκών των γεωδαισικών μονοπατιών προς όλες τις άλλες κορυφές:

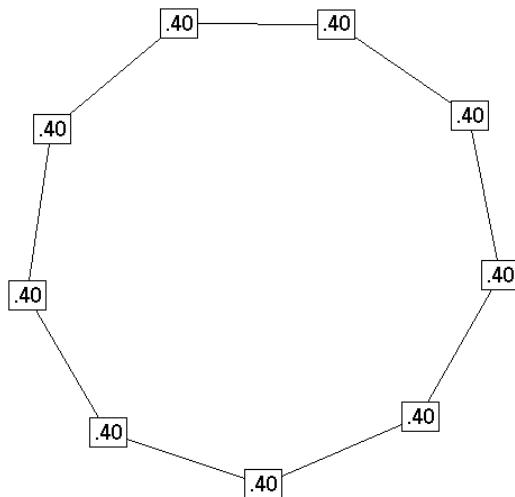
$$\Sigma_w \in \frac{1}{d(v, w)}$$

- Ο όρος στον παρονομαστή λέγεται **απομάκρυνση** (farness). Με άλλα λόγια, αν το άθροισμα των αποστάσεων είναι μεγάλο, τότε η εγγύτητα είναι μικρή και αντίστροφα
- Για λόγους κανονικοποίησης πολλαπλασιάζουμε με $n - 1$
- Η κεντρικότητα αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως η ικανότητα μίας κορυφής να διαδίδει πληροφορία ταχύτερα προς τις υπόλοιπες κορυφές

Κεντρικότητα εγγύτητας



Απόσταση	Κεντρικότητα	Κανονικοποιημένη
0 1 1 1 1 1 1 1	.143	1.00
1 0 2 2 2 2 2 2	.077	.538
1 2 0 2 2 2 2 2	.077	.538
1 2 2 0 2 2 2 2	.077	.538
1 2 2 2 0 2 2 2	.077	.538
1 2 2 2 2 0 2 2	.077	.538
1 2 2 2 2 2 0 2	.077	.538
1 2 2 2 2 2 2 0	.077	.538



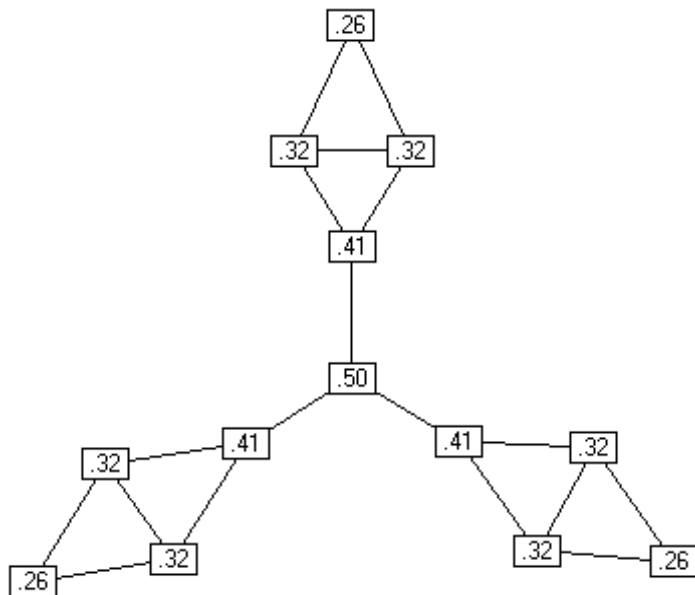
Απόσταση	Κεντρικότητα	Κανονικοποιημένη
0 1 2 3 4 4 3 2 1	.05	.40
1 0 1 2 3 4 4 3 2	.05	.40
2 1 0 1 2 3 4 4 3	.05	.40
3 2 1 0 1 2 3 4 4	.05	.40
4 3 2 1 0 1 2 3 4	.05	.40
4 4 3 2 1 0 1 2 3	.05	.40
3 4 4 3 2 1 0 1 2	.05	.40
2 3 4 4 3 2 1 0 1	.05	.40
1 2 3 4 4 3 2 1 0	.05	.40

Κεντρικότητα εγγύτητας



Απόσταση	Κεντρικότητα	Κανονικοποιημένη
0 1 2 3 4 5 6	.048	.286
1 0 1 2 3 4 5	.063	.375
2 1 0 1 2 3 4	.077	.462
3 2 1 0 1 2 3	.083	.500
4 3 2 1 0 1 2	.077	.462
5 4 3 2 1 0 1	.063	.375
6 5 4 3 2 1 0	.048	.286

Κεντρικότητα εγγύτητας

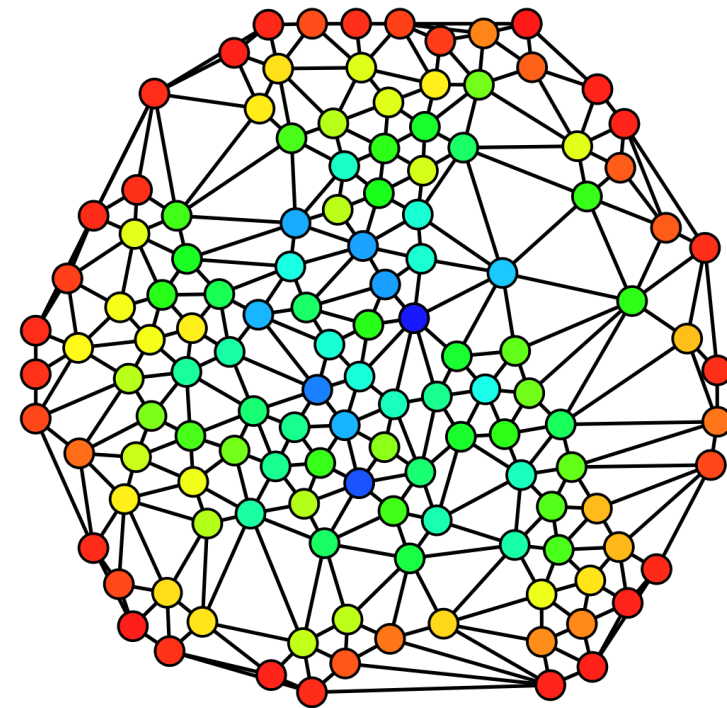


απόσταση	κεντρικότητα	κανονικοποιημένη
0 1 1 2 3 4 4 5 5 6 5 5 6	.021	.255
1 0 1 1 2 3 3 4 4 5 4 4 5	.027	.324
1 1 0 1 2 3 3 4 4 5 4 4 5	.027	.324
2 1 1 0 1 2 2 3 3 4 3 3 4	.034	.414
3 2 2 1 0 1 1 2 2 3 2 2 3	.042	.500
4 3 3 2 1 0 2 3 3 4 1 1 2	.034	.414
4 3 3 2 1 2 0 1 1 2 3 3 4	.034	.414
5 4 4 3 2 3 1 0 1 1 4 4 5	.027	.324
5 4 4 3 2 3 1 1 0 1 4 4 5	.027	.324
6 5 5 4 3 4 2 1 1 0 5 5 6	.021	.255
5 4 4 3 2 1 3 4 4 5 0 1 1	.027	.324
5 4 4 3 2 1 3 4 4 5 1 0 1	.027	.324
6 5 5 4 3 2 4 5 5 6 1 1 0	.021	.255

Ενδιάμεση κεντρικότητα

Ενδιάμεση κεντρικότητα (Betweenness centrality)

- Πόσο **σημαντική** είναι κάθε κορυφή ως προς το **συντομότερο μονοπάτι** στο γράφο; οι κορυφές μεγάλης ενδιάμεσης κεντρικότητας είναι σημαντικές για την επικοινωνία. Αν μπλοκαριστούν, τότε η επικοινωνία γίνεται δυσκολότερη
- Για κάθε ζεύγος κορυφών σε συνδεδεμένο γράφο, υπάρχει τουλάχιστον ένα συντομότερο μονοπάτι μεταξύ των κορυφών, τέτοιο ώστε είτε το πλήθος των ακμών (για γράφους χωρίς βάρη) ή το άθροισμα των βαρών (για γράφους με βάρη) είναι το ελάχιστο. Η ενδιάμεση κεντρικότητα για κάθε κορυφή είναι το πλήθος τέτοιων μονοπατιών τα οποία τη διασχίζουν
- Από το κόκκινο προς το μπλε αυξάνει η κεντρικότητα

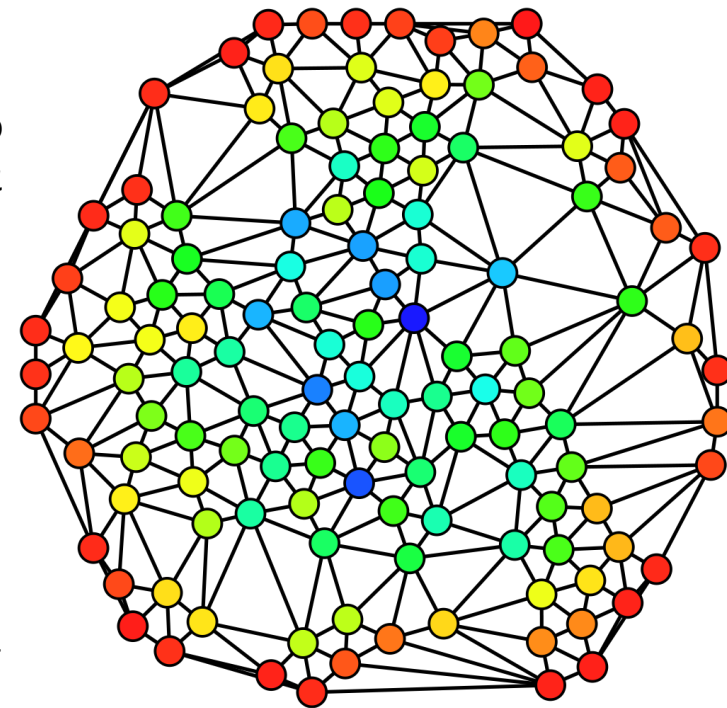


Ενδιάμεση κεντρικότητα (Betweenness centrality)

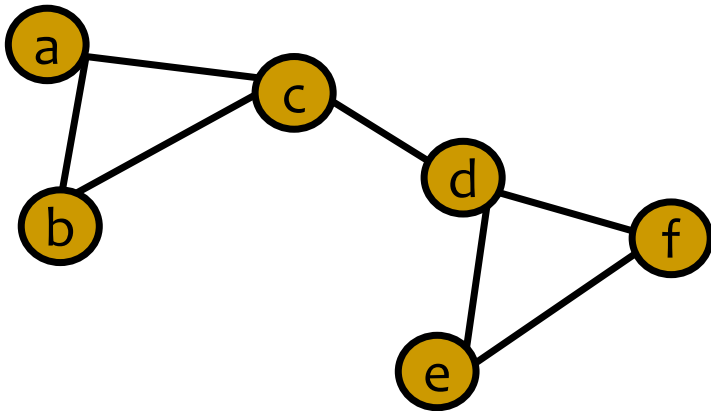
- Η ενδιάμεση κεντρικότητα για κορυφή v υπολογίζεται από:

$$B(u) = \sum_{v \neq u \neq w} \frac{\sigma_{v,w}(u)}{\sigma_{v,w}}$$

- Όπου $\sigma_{v,w}$ ο **συνολικός αριθμός** από **συντομότερα μονοπάτια** μεταξύ δυο κορυφών v και w και $\sigma_{v,w}(u)$ το πλήθος των μονοπατιών αυτών τα οποία διασχίζουν την κορυφή u
- Μεγαλύτερες τιμές \rightarrow μεγαλύτερη κεντρικότητα
- 1. Υπολογισμός μοναδικών ζευγών κορυφών (κορυφές v, w ίδιες με w, v)
- 2. Υπολογισμός γεωδесικών μονοπατιών μεταξύ όλων των ζευγών. Αφαίρεση μονοπατιών μεταξύ γειτονικών κορυφών
- 3. Υπολογισμός μονοπατιών που διέρχονται διαμέσου κάθε κορυφής u
- 4. Για κανονικοποίηση, διαίρεση με $(n-1)(n-2)$ για κατευθυντούς γράφους και $(n-1)(n-2)/2$ για μη κατευθυντούς



Ενδιάμεση κεντρικότητα



$$B(c) = 6$$

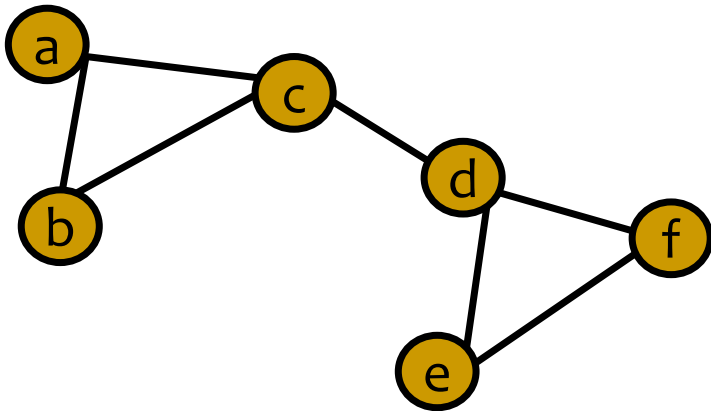
$$B(a) = 0$$

$$B(u) = \sum_{u \neq v \neq w} \frac{\sigma_{v,w}(u)}{\sigma_{v,w}}$$

Υπολογισμός του $B(c)$

	σ_{uw}	$\sigma_{uw}(v)$	$\sigma_{uw}(v)/\sigma_{uw}$
(a,b)	1	0	0
(a,c)	1	0	0
(a,d)	1	1	1
(a,e)	1	1	1
(a,f)	1	1	1
(b,c)	1	0	0
(b,d)	1	1	1
(b,e)	1	1	1
(b,f)	1	1	1
(c,d)	1	0	0
(c,e)	1	0	0
(c,f)	1	0	0
(d,e)	1	0	0
(d,f)	1	0	0
(e,f)	1	0	0

Ενδιάμεση κεντρικότητα



$$B(c) = 6$$

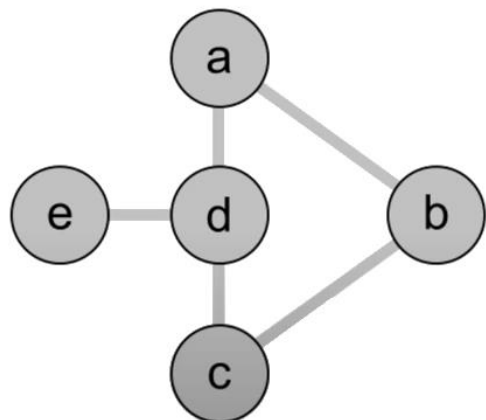
$$B(a) = 0$$

$$B(u) = \sum_{u \neq v \neq w} \frac{\sigma_{v,w}(u)}{\sigma_{v,w}}$$

Υπολογισμός του $B(c)$

	σ_{uw}	$\sigma_{uw}(v)$	$\sigma_{uw}(v)/\sigma_{uw}$
(a,b)	1	0	0
(a,c)	1	0	0
(a,d)	1	1	1
(a,e)	1	1	1
(a,f)	1	1	1
(b,c)	1	0	0
(b,d)	1	1	1
(b,e)	1	1	1
(b,f)	1	1	1
(c,d)	1	0	0
(c,e)	1	0	0
(c,f)	1	0	0
(d,e)	1	0	0
(d,f)	1	0	0
(e,f)	1	0	0

Ενδιάμεση κεντρικότητα



$$B(u) = \sum_{u \neq v \neq w} \frac{\sigma_{v,w}(u)}{\sigma_{v,w}}$$

Ενδιάμεση κεντρικότητα

Υπολογισμός μοναδικών ζευγών κορυφών και γεωδαισικών μονοπατιών

(a,b)

(a,c) (a-b-c)

(a,c) (a-d-c)

(a,d)

(a,e)

(b,c)

(b,d) (b-c-d)

(b,d) (b-a-d)

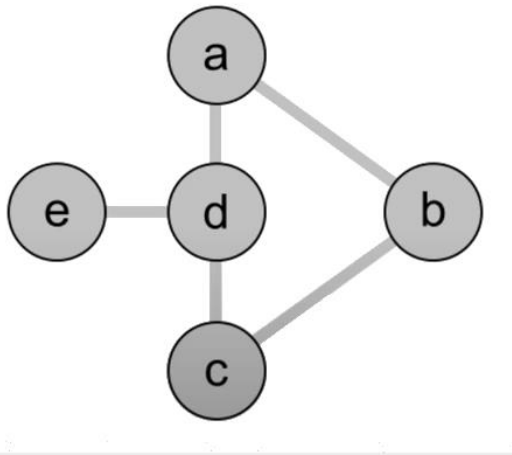
(b,e) (b-a-d-e)

(b,e) (b-c-d-e)

(c,d)

(c,e)

(d,e)



$$B(u) = \sum_{u \neq v \neq w} \frac{\sigma_{v,w}(u)}{\sigma_{v,w}}$$

Ενδιάμεση κεντρικότητα

Απλοποίηση

(a,c) (a-b-c)

(a,c) (a-d-c)

(a,e)

(b,d) (b-c-d)

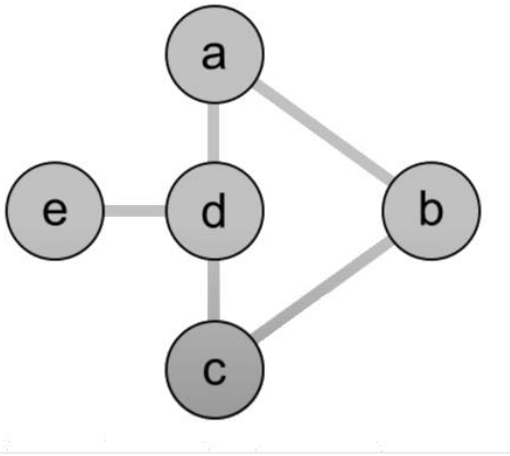
(b,d) (b-a-d)

(b,e) (b-a-d-e)

(b,e) (b-c-d-e)

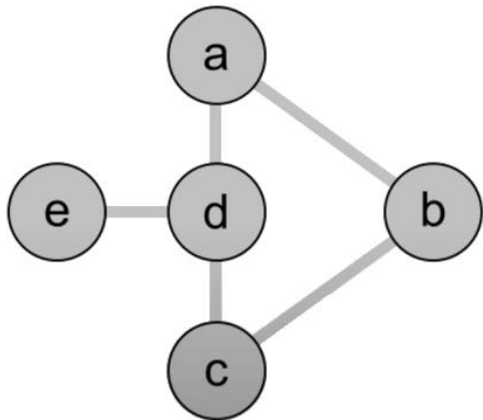
(c,e)

$$B(u) = \sum_{u \neq v \neq w} \frac{\sigma_{v,w}(u)}{\sigma_{v,w}}$$



Ενδιάμεση κεντρικότητα

Υπολογισμός κεντρικότητας. Οι κορυφές που είναι ενδιάμεσες μόνο σε x από τα y γεωδесικά μονοπάτια μεταξύ των κορυφών v, w θα έχουν ενδιάμεση κεντρικότητα x/y



$$B(u) = \sum_{u \neq v \neq w} \frac{\sigma_{v,w}(u)}{\sigma_{v,w}}$$

Ζεύγος	Γεωδесικά μονοπάτια	a	b	c	d	e
(a,c)	2 (a-b-c), (a-d-c)	0	1	0	1	0
(a,e)	1 (a-d-e)	0	0	0	1	0
(b,d)	2 (b-c-d), (b-a-d)	0	0	1	0	0
(b,e)	2 (b-a-d-e), (b-c-d-e)	1	0	0	1	0
(c,e)	1 (c-d-e)	0	0	0	1	0
		1	½	1	3.5	0