

# Γραμμική Άλγεβρα (*Linear Algebra*)

ΑΓΓΕΛΟΣ ΣΙΦΑΛΕΡΑΣ

Καθηγητής

1<sup>η</sup> Διάλεξη (Εργαστήριο)



**CMOR Lab**

Computational Methodologies  
and Operations Research

# Τι είναι το SageMath;

- Το SageMath είναι ένα Υπολογιστικό Σύστημα Άλγεβρας (Computer Algebra System - CAS).
- Αναπτύχθηκε από τον W. Stein το 2005 ως μια εναλλακτική λύση των εμπορικών CAS (Mathematica, MATLAB, Maple, κλπ).
- Είναι προσανατολισμένο σε εφαρμογές των μαθηματικών.

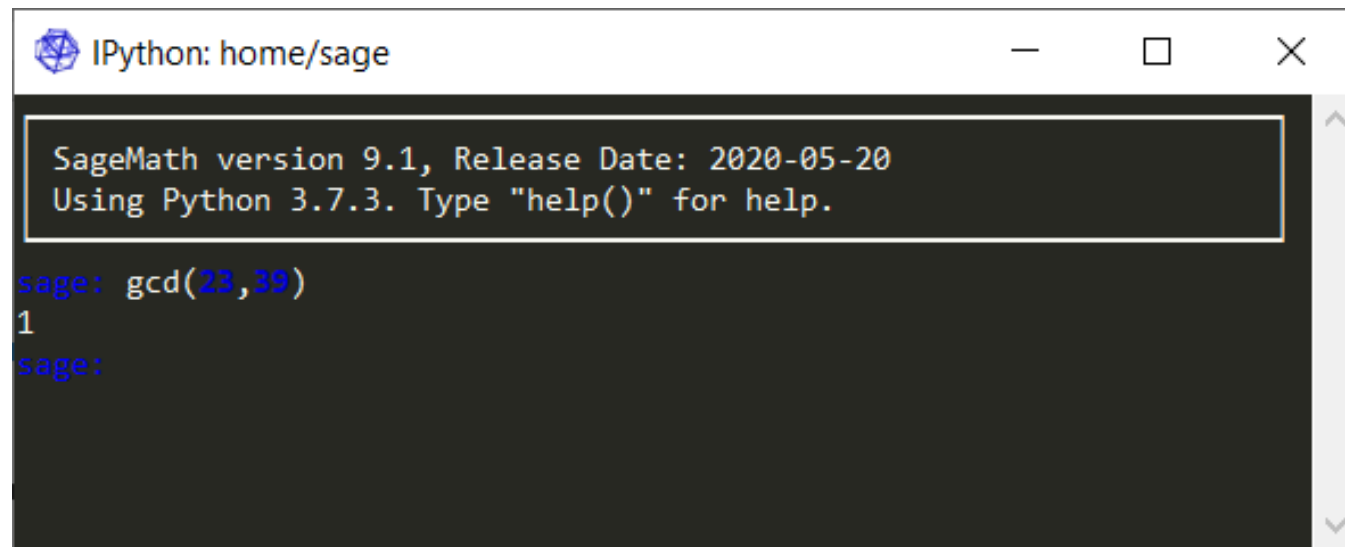


# Τι είναι το SageMath;

- Το SageMath αποτελείται από δύο μέρη:
  - Τον πυρήνα (kernel), ο οποίος εκτελεί τους υπολογισμούς.
  - Το κέλυφος (shell / front end), το οποίο χειρίζεται την επικοινωνία με το χρήστη.
- Το κέλυφος είναι έτσι σχεδιασμένο ώστε να εκμεταλλεύεται το περιβάλλον διασύνδεσης γραφικών (GUI) συγκεκριμένων Η/Υ.
- Υπάρχουν δύο είδη κελύφους:
  - Διασύνδεση κειμένου (Text-based Interfaces)
  - Διασύνδεση με σημειωματάρια (Notebook Interfaces)

# Διασύνδεση με σημειωματάρια (Notebook Interfaces)

- Το κέλυφος είναι συνήθως ένα ξεχωριστό πρόγραμμα που χειρίζεται τις τυχόν απαιτήσεις του χρήστη σε μια διασύνδεση με σημειωματάρια. Μεταφέρει τα μηνύματα του χρήστη στον πυρήνα και επιστρέφει το αποτέλεσμα που παράγει ο πυρήνας του SageMath.



```
IPython: home/sage

SageMath version 9.1, Release Date: 2020-05-20
Using Python 3.7.3. Type "help()" for help.

sage: gcd(23,39)
1
sage:
```

- Σε ένα σημειωματάριο, τα εισαγόμενα και τα εξαγόμενα εμφανίζονται σαν στοιχεία που μπορεί να συνυπάρχουν μαζί με (μορφοποιημένο) κείμενο και γραφικά.

# Διασύνδεση με σημειωματάρια (Notebook Interfaces)

- Τα στοιχεία ενός σημειωματαρίου είναι κατανεμημένα σε κελιά (cells).
- Τα εισαγόμενα τοποθετούνται σε κελιά εισόδου και εκτελούνται πατώντας Shift+Enter.

```
In [1]: gcd(2, 3)
```

```
Out[1]: 1
```

```
In [ ]:
```

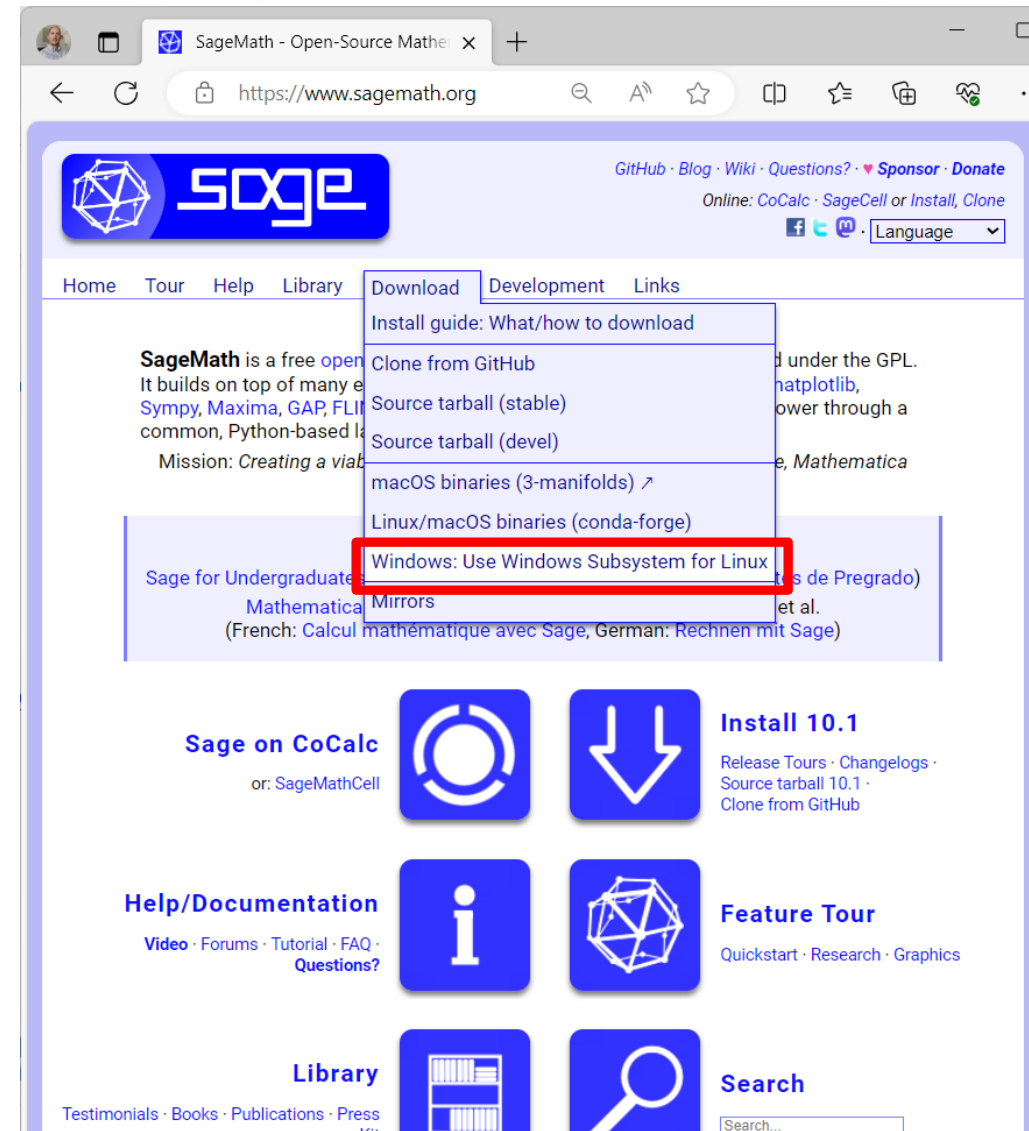
- Τα αποτελέσματα εμφανίζονται ακριβώς από κάτω.

# Γιατί SageMath;

- Είναι δωρεάν.
- Είναι ανοικτού κώδικα.
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί τοπικά ή/και online (<https://cocalc.com>, <http://sagecell.sagemath.org>)
- Η γλώσσα προγραμματισμού που χρησιμοποιεί είναι ένα υπερσύνολο της Python.
- Συνδυάζει την ισχύ πολλών ήδη υπαρχόντων πακέτων.
- Υποστηρίζεται από μία ολοένα αυξανόμενη κοινότητα.
- Είναι ιδανικό για την εκπαίδευση και την έρευνα.
- Η φιλοσοφία με την οποία είναι χτισμένο είναι καθαρά μαθηματική.

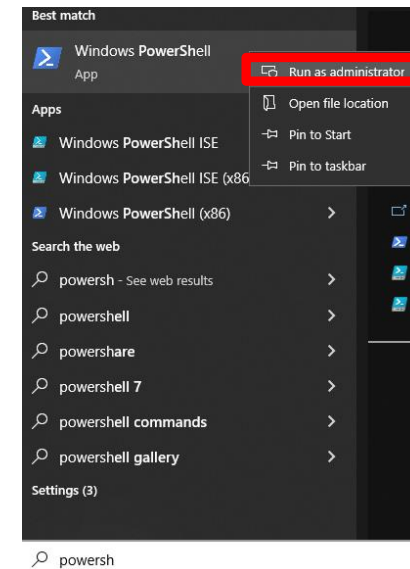
# Εγκατάσταση σε Microsoft Windows

- <http://www.sagemath.org>



# Εγκατάσταση σε Windows 10 & 11

- Ανοίγουμε το Windows Powershell ως administrator.
- Στο powershell, εισάγουμε την εντολή  
wsl --install  
για την εγκατάσταση του Windows Subsystem for Linux (WSL).
- Κάνουμε επανεκκίνηση τον υπολογιστή μας.
- Μετά την επανεκκίνηση, περιμένουμε να εγκαταστήσει το λειτουργικό σύστημα Ubuntu.



```
Administrator: Windows PowerShell
Windows PowerShell
Copyright (C) Microsoft Corporation. All rights reserved.

Try the new cross-platform PowerShell https://aka.ms/pscore6

PS C:\WINDOWS\system32>
```

```
Administrator: Windows PowerShell
Windows PowerShell
Copyright (C) Microsoft Corporation. All rights reserved.

Try the new cross-platform PowerShell https://aka.ms/pscore6

PS C:\WINDOWS\system32> wsl --install
Installing: Virtual Machine Platform
Virtual Machine Platform has been installed.
Installing: Windows Subsystem for Linux
Windows Subsystem for Linux has been installed.
Downloading: WSL Kernel
Installing: WSL Kernel
WSL Kernel has been installed.
Downloading: Ubuntu
The requested operation is successful. Changes will not be effective until the system is rebooted.
PS C:\WINDOWS\system32>
```



# Εγκατάσταση Ubuntu

- Μόλις εγκατασταθεί το Ubuntu, θα μας ζητηθεί να εισάγουμε ένα όνομα χρήστη και ένα κωδικό.
- Συνίσταται να εκτελέσουμε στη συνέχεια την εντολή:  
`sudo apt update && sudo apt upgrade`

Ακολουθούμε τις οδηγίες που βρίσκονται στον ιστότοπο:

<https://doc.sagemath.org/html/en/installation/conda.html#sec-installation-conda>

Δηλαδή:

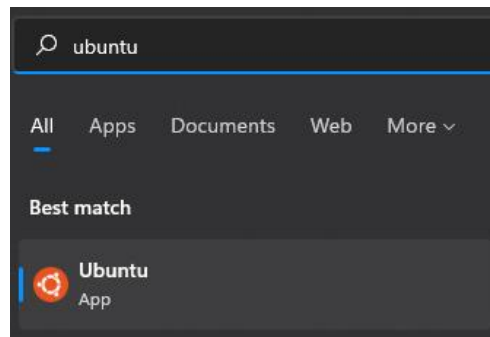
εκτελούμε τις εντολές

- `curl -L -O https://github.com/conda-forge/miniforge/releases/latest/download/Mambaforge-$(uname)-$(uname -m).sh`
- `sh Mambaforge-$(uname)-$(uname -m).sh`

Κλείνουμε το παράθυρο.

Ανοίγουμε πρόγραμμα “Ubuntu”

```
pc@DESKTOP-4KIEAN: ~  
Installing, this may take a few minutes...  
Please create a default UNIX user account. The username does not need to match your Windows username.  
For more information visit: https://aka.ms/wslusers  
Enter new UNIX username: pc  
New password:  
Retype new password:  
passwd: password updated successfully  
Installation successful!  
To run a command as administrator (user "root"), use "sudo <command>".  
See "man sudo_root" for details.  
  
Welcome to Ubuntu 20.04 LTS (GNU/Linux 5.10.16.3-microsoft-standard-WSL2 x86_64)  
  
* Documentation: https://help.ubuntu.com  
* Management: https://landscape.canonical.com  
* Support: https://ubuntu.com/advantage  
  
System information as of Tue Sep 27 18:39:48 EEST 2022  
  
System load: 0.23 Processes: 8  
Usage of /: 0.4% of 250.98GB Users logged in: 0  
Memory usage: 0% IPv4 address for eth0: 172.17.25.138  
Swap usage: 0%  
  
0 updates can be installed immediately.  
0 of these updates are security updates.  
  
The list of available updates is more than a week old.  
To check for new updates run: sudo apt update
```



# Εγκατάσταση SageMath

Εκτελούμε την εντολή:

- `conda create -n sage sage python=3.9`

Για να εκτελέσουμε το SageMath εισάγουμε τις εντολές

- `conda activate sage`
- `sage -n jupyter`

και στη συνέχεια ανοίγουμε τη σελίδα σε ένα φυλλομετρητή:

`http://127.0.0.1:8888`

The screenshot shows the JupyterLab web interface. At the top left is the Jupyter logo. On the top right are 'Quit' and 'Logout' buttons. Below the logo are three tabs: 'Files' (selected), 'Running', and 'Clusters'. A message says 'Select items to perform actions on them.' To the right of this message are 'Upload', 'New', and a refresh icon. The main area shows a file browser for the root directory '/'. It contains a table with two items:

<input type="checkbox"/>		Name ↓	Last Modified	File size
<input type="checkbox"/>	Folder icon	mambaforge	33 λεπτά πριν	
<input type="checkbox"/>	File icon	Mambaforge-Linux-x86_64.sh	33 λεπτά πριν	94.9 MB

# Παλαιότερες εκδόσεις του SageMath

- Σε περίπτωση που δυσκολευτείτε με την προηγούμενη διαδικασία, μπορείτε να εγκαταστήσετε μια παλαιότερη έκδοση του SageMath, από τη σελίδα:

<https://www.sagemath.org/download.html>

## Archived (Outdated) Mirror Content

- Microsoft Windows** — Image for virtualization or binary distribution for Windows
- Oracle Solaris** — binary and source
- Apple macOS** — binaries for Intel and PowerPC systems
- Live USB Key** — Bootable {{ sage }} Live USB Key
- Linux** — binaries, for 32 and 64 bit

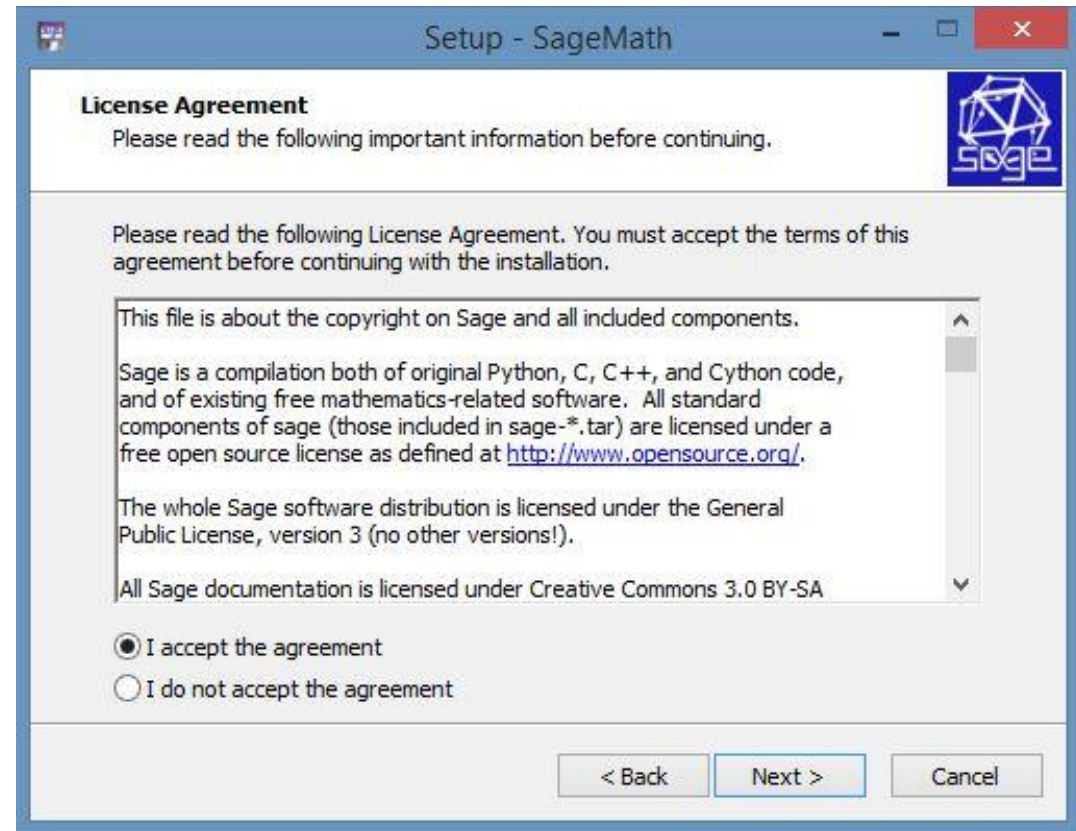
Filename	Other	Size	Date
<a href="#">SageMath-9.3-Installer-v0.6.3.exe</a> MD5: dfed4bf875d91f99f863e670e1b0c7b6	torrent	820.72 MB	2021-08-25 20:41
<a href="#">SageMath-9.2-Installer-v0.6.2.exe</a> MD5: 4c2da0841fc0703a45c8a20d41e20b	torrent	815.30 MB	2021-01-05 09:56
<a href="#">SageMath-9.2-Installer-v0.6.1.exe</a> MD5: 593337a6d23cf50c9c3eba5f8cc829ea	torrent	819.85 MB	2020-11-28 17:56
<a href="#">SageMath-9.1-Installer-v0.6.0.exe</a> MD5: be9580d1f8669e140f2287336384179f	torrent	799.07 MB	2020-07-29 15:45
<a href="#">SageMath-9.0-Installer-v0.6.0.exe</a> MD5: abc3b2578942f86c32168dd9ffe37c86	torrent	798.85 MB	2020-02-13 17:32

Please select a download server close to your location below.

Africa	 MARWAN, Morocco  Stellenbosch University, South Africa  Tertiary Education Network, Johannesburg, South Africa  University of the Free State, South Africa
America, North	 MIT, Cambridge, MA, USA  Simon Fraser University, B.C., Canada  University of Washington, Seattle, WA, USA  University of Waterloo, ON, Canada  XMission, Utah, USA
America, South	 Universidade Federal do Paraná, Brazil  University of São Paulo, Brazil
Asia	 Alibaba Cloud, China  KoDDoS Mirror, Hong Kong  Riken, Japan  Tsinghua University, Beijing, China  University of Science and Technology, China  Yamagata University, JP  eScience Center, Nanjing University, Jiangsu, China
Australia	 AARNet Research Network
Europe	 GARR, Italy  KoDDoS Mirror  LyraHosting  Mirrorservice Network, United Kingdom  RedIRIS Research Network, Spain  Universidade do Porto, Portugal  Université Pierre et Marie Curie, Paris, France  Yandex, Russia  dogado GmbH, Germany

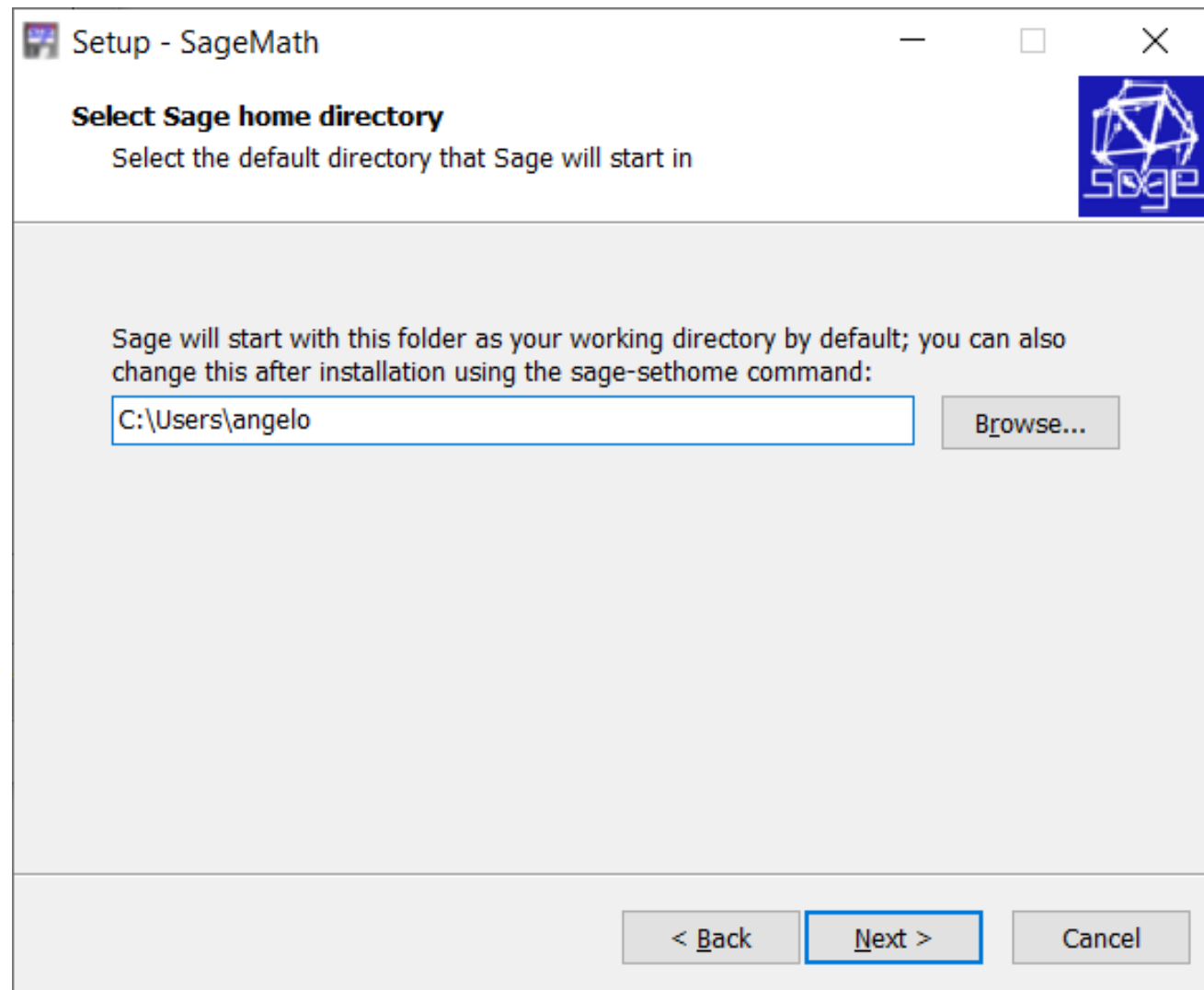
# Εγκατάσταση σε Windows

- Επιλέγουμε “I accept the agreement” στο παράθυρο του License Agreement και πατάμε “Next”. Στη συνέχεια προτείνεται να επιλέξουμε “Install for all users” αν ο τρέχων χρήστης είναι διαχειριστής:



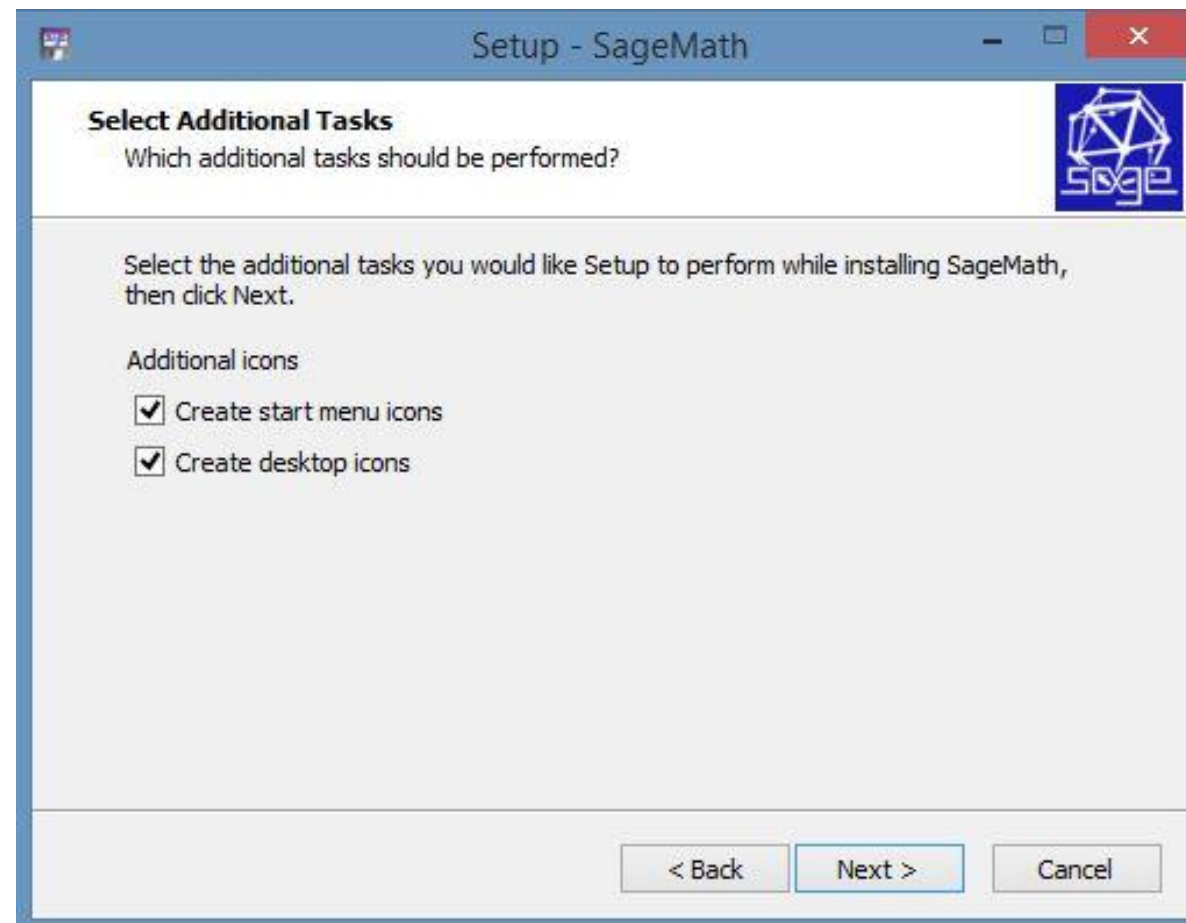
# Εγκατάσταση σε Windows

- Επιλέγουμε τον φάκελο στον οποίο θέλουμε να εγκατασταθεί το SageMath και πατάμε “Next”. Για απλότητα μπορούμε να «κρατήσουμε» τον προτεινόμενο φάκελο.



# Εγκατάσταση σε Windows

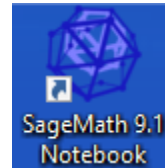
- Επιλέγουμε να δημιουργηθούν εικονίδια μενού και επιφάνειας εργασίας (Desktop) και στο επόμενο παράθυρο πατάμε “Install” και στο τέλος πατάμε “Finish”.



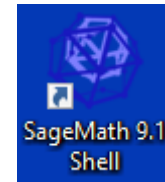
# Μετά το τέλος της εγκατάστασης

- Δημιουργούνται τρία εικονίδια στην επιφάνεια εργασίας:

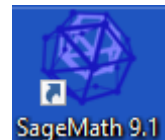
- το “SageMath 9.1 Notebook”,



- το “SageMath 9.1” και



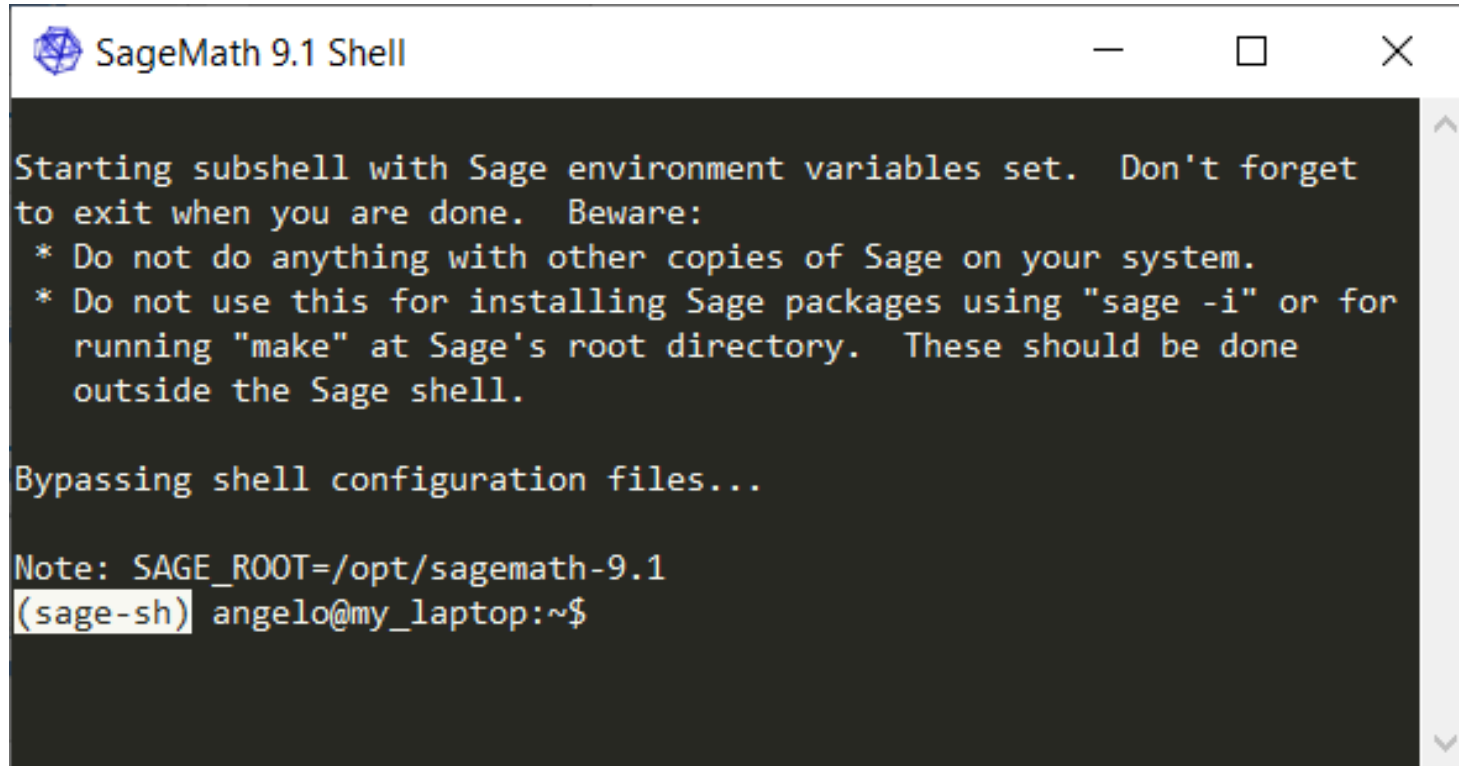
- το “SageMath 9.1 Shell”.



- Χρησιμοποιούμε κυρίως το πρώτο, για τη διασύνδεση με σημειωματάρια και το δεύτερο για τη διασύνδεση κειμένου.

# Εκτέλεση από την κονσόλα

- Οι εντολές εκτελούνται πατώντας Enter.
- Για να τερματίσετε τη λειτουργία του SageMath εκτελέστε την εντολή *exit*.
- Για να επιστρέψετε στο γραφικό περιβάλλον, πατήστε δεξί Ctrl+F2.

A screenshot of a terminal window titled "SageMath 9.1 Shell". The window has a dark background with light-colored text. The text inside the terminal reads: "Starting subshell with Sage environment variables set. Don't forget to exit when you are done. Beware:" followed by two bullet points: "\* Do not do anything with other copies of Sage on your system." and "\* Do not use this for installing Sage packages using 'sage -i' or for running 'make' at Sage's root directory. These should be done outside the Sage shell." Below this, it says "Bypassing shell configuration files...". Then, "Note: SAGE\_ROOT=/opt/sagemath-9.1" and finally "(sage-sh) angelo@my\_laptop:~\$". The terminal window has standard window controls (minimize, maximize, close) in the top right corner.

```
SageMath 9.1 Shell

Starting subshell with Sage environment variables set. Don't forget
to exit when you are done. Beware:
* Do not do anything with other copies of Sage on your system.
* Do not use this for installing Sage packages using "sage -i" or for
  running "make" at Sage's root directory. These should be done
  outside the Sage shell.

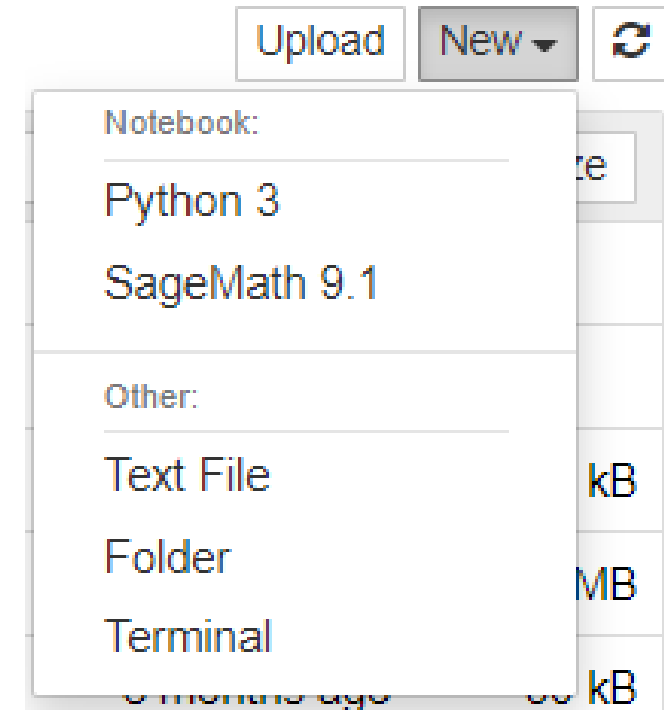
Bypassing shell configuration files...

Note: SAGE_ROOT=/opt/sagemath-9.1
(sage-sh) angelo@my_laptop:~$
```



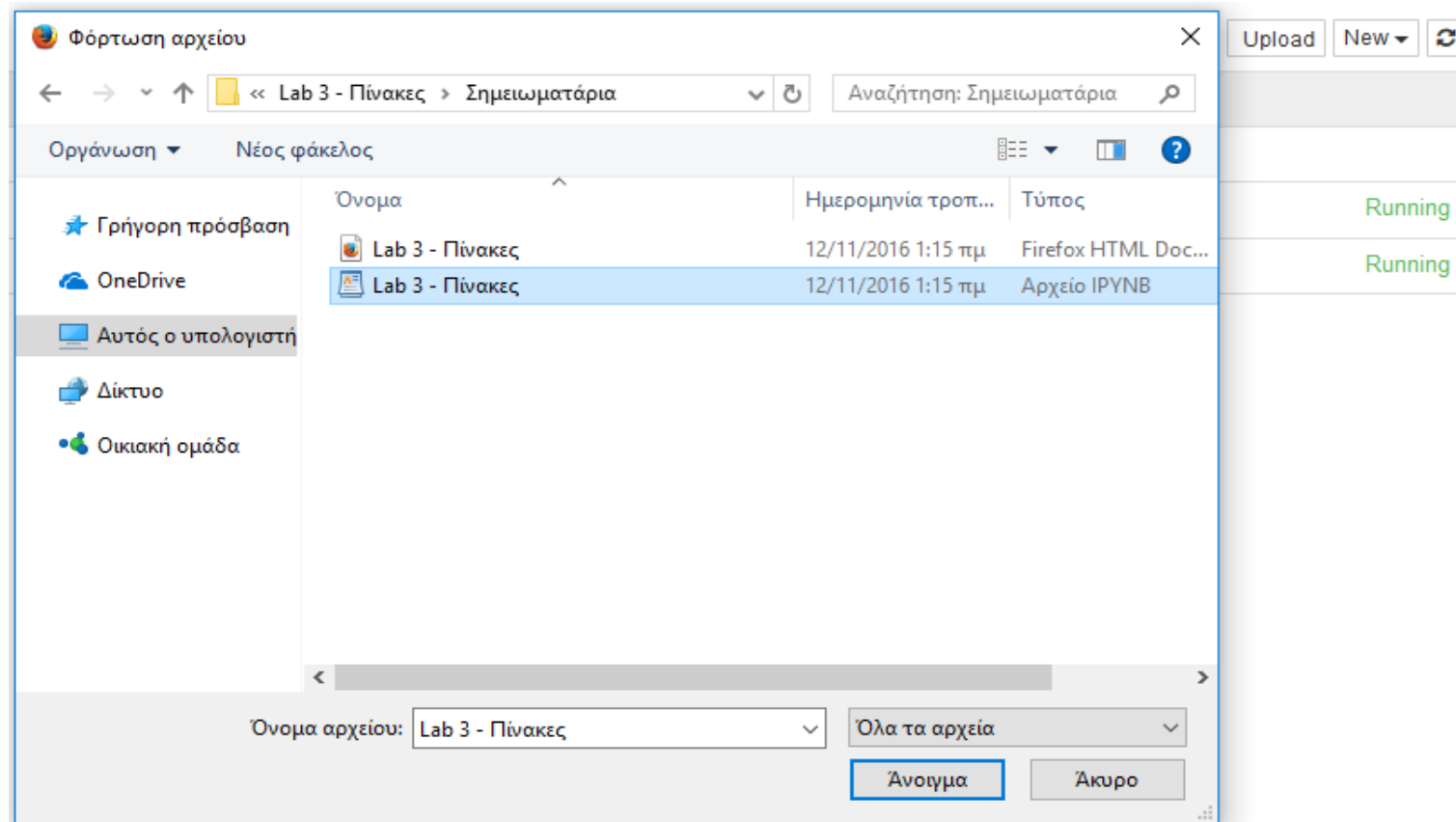
# Διασύνδεση με σημειωματάρια (Jupyter Notebook)

- Ανοίγουμε το SageMath Notebook
- Η γραφική διασύνδεση με σημειωματάρια στο SageMath γίνεται μέσω του Jupyter Notebook και η επέκταση των αρχείων του είναι .ipynb.
- Το μενού New σας επιτρέπει να δημιουργείτε νέα αρχεία και καταλόγους.
- Η επιλογή SageMath x.y δημιουργεί ένα νέο σημειωματάριο του Jupyter Notebook (αρχεία .ipynb).



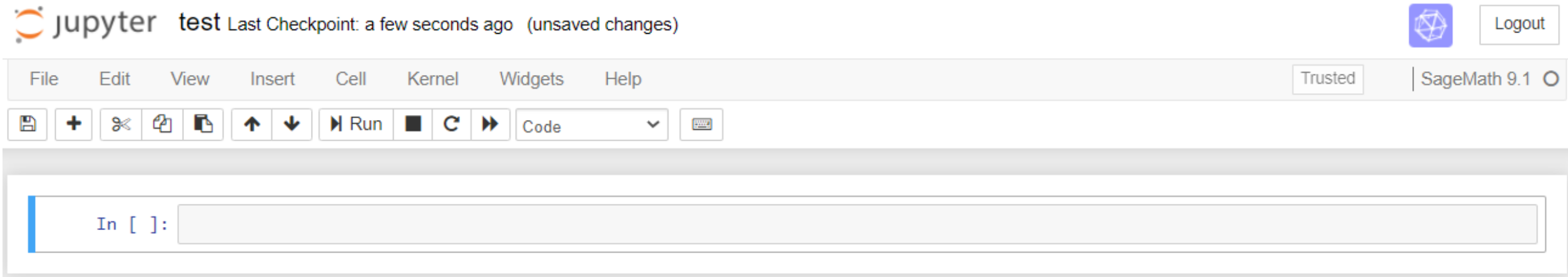
# Διασύνδεση με σημειωματάρια (Jupyter Notebook)

- Το πλήκτρο Upload σας επιτρέπει να ανεβάσετε αρχεία από το σύστημα αρχείων του υπολογιστή σας στον πίνακα ανακοινώσεων.



# Διασύνδεση με σημειωματάρια (Jupyter Notebook)

- Το γραφικό περιβάλλον διασύνδεσης φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



# Διασύνδεση με σημειωματάρια (Jupyter Notebook)

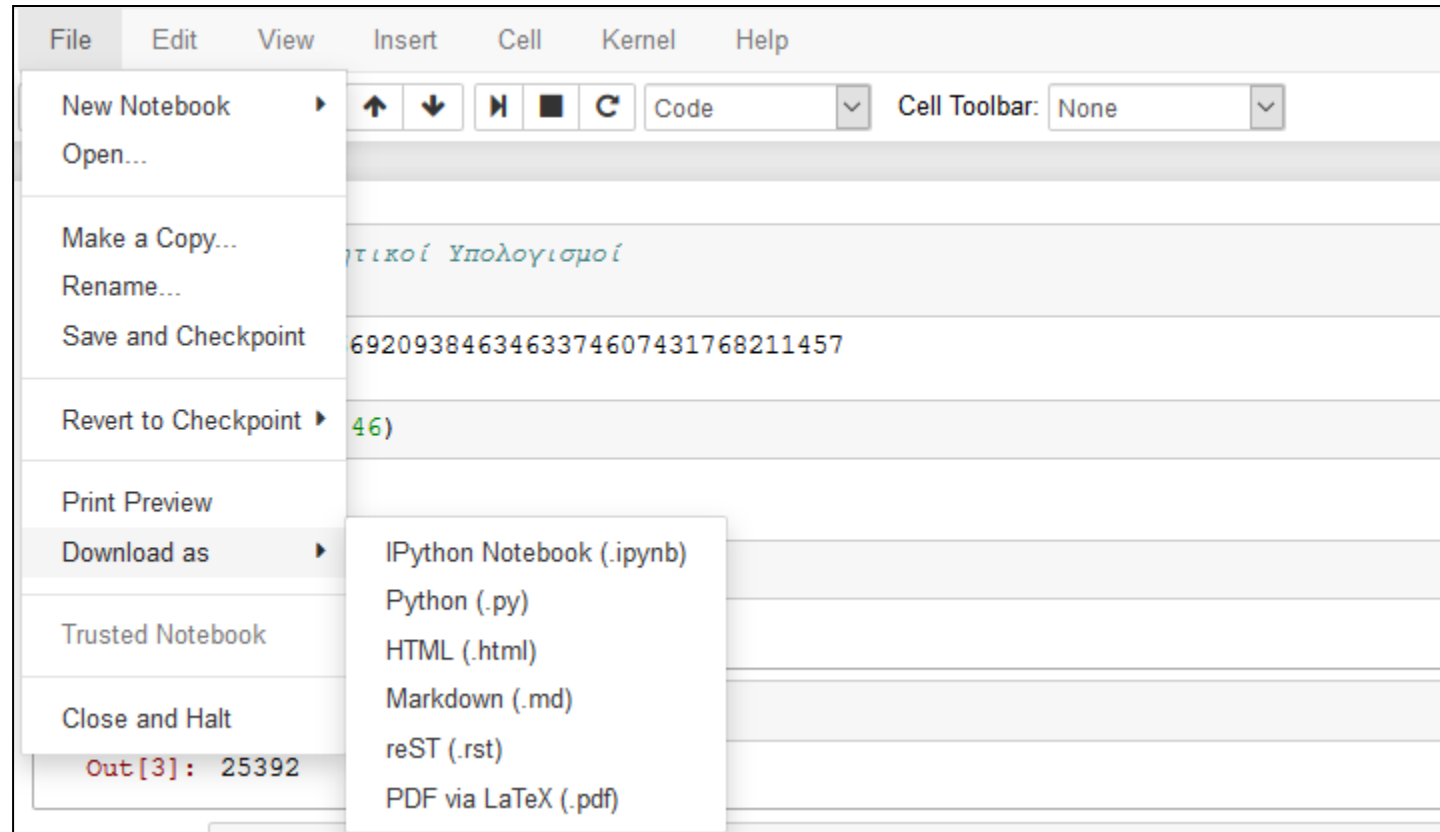
- Πληκτρολογήστε τον κώδικά σας σε ένα κελί εισόδου (In[.]) και για να τον εκτελέσετε, πατήστε Shift+Enter.

```
In [1]: gcd(2, 3)  
Out[1]: 1  
  
In [ ]:
```

- Η απόκριση του SageMath εμφανίζεται στο κελί εξόδου ακριβώς από κάτω (Out[.]).
- Για να αποθηκεύσετε τη δουλειά σας επιλέξτε Save and Checkpoint από το μενού File (ή πιάστε Ctrl+S).

# Διασύνδεση με σημειωματάρια (Jupyter Notebook)

- Για να κατεβάσετε τη δουλειά σας στο τοπικό (host) σύστημα αρχείων σας, επιλέξτε File -> Download as, κι έπειτα το επιθυμητό format.

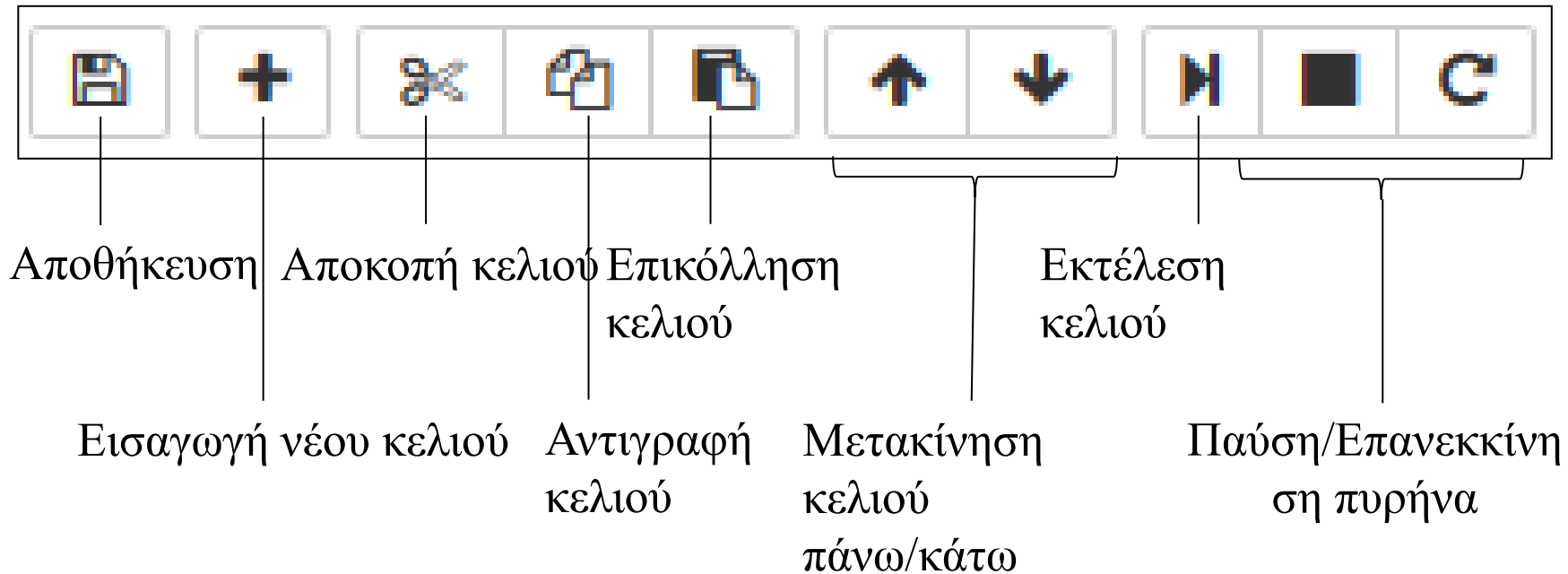


# Διασύνδεση με σημειωματάρια (Jupyter Notebook)

- Για να ανοίξετε ένα διαφορετικό αρχείο που έχει φορτωθεί στον server του SageMath, επιλέξτε File -> Open...
- Για να μετονομάσετε ένα σημειωματάριο, επιλέξτε File -> Rename...
- Για να κλείσετε ένα σημειωματάριο, επιλέξτε File -> Close and Halt. Η επιλογή αυτή τερματίζει και τον πυρήνα.

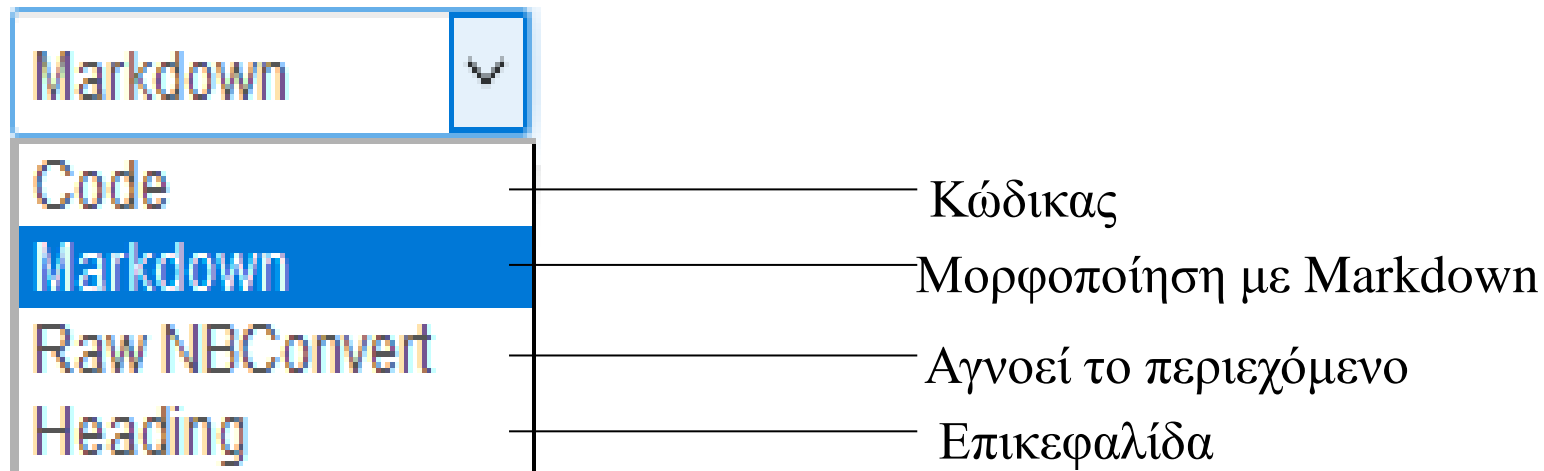
# Διασύνδεση με σημειωματάρια (Jupyter Notebook)

- Τα κουμπιά της γραμμής εργαλείων είναι τα ακόλουθα:



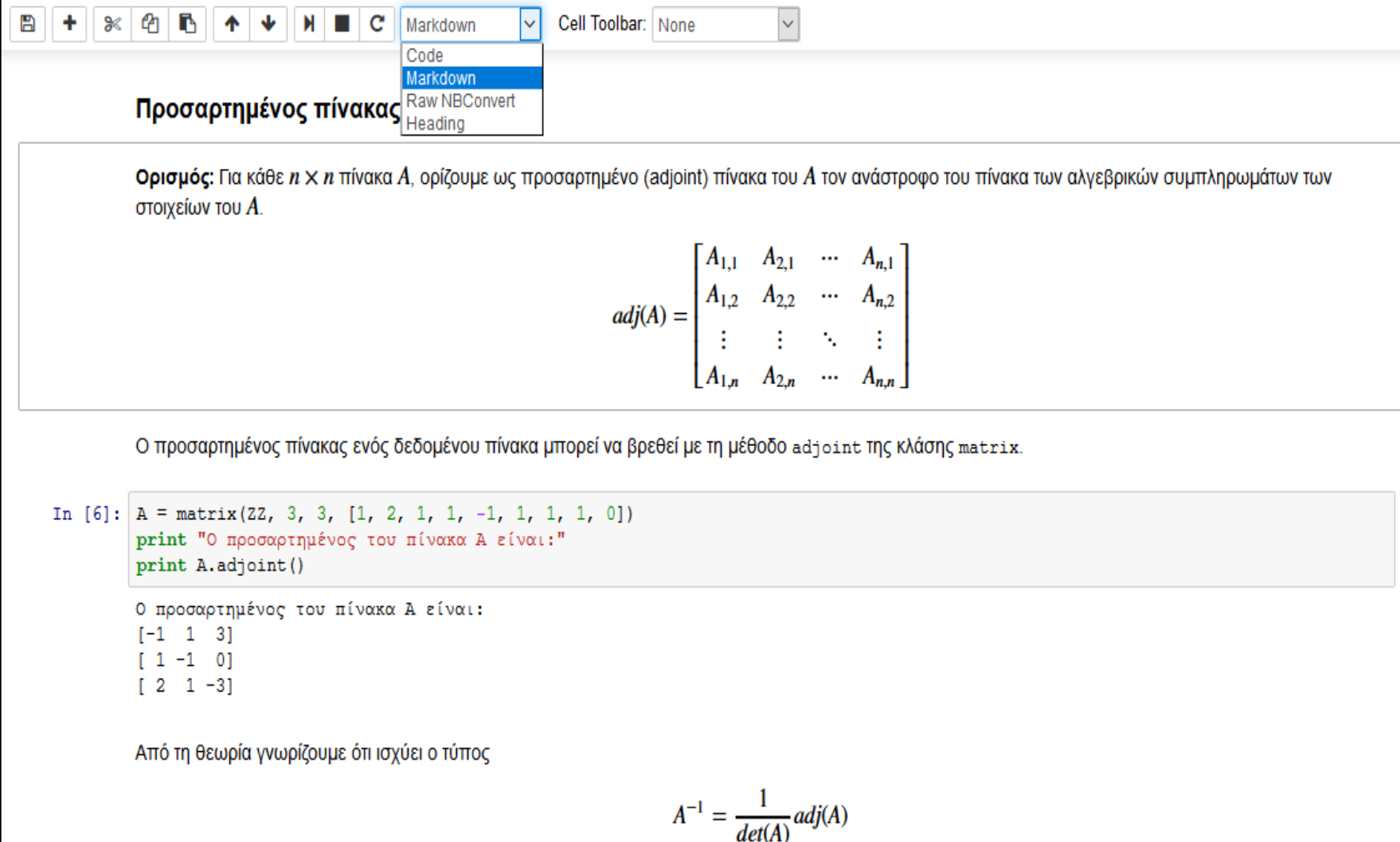
# Διασύνδεση με σημειωματάρια (Jupyter Notebook)

- Μπορούμε να συνδυάσουμε μορφοποιημένο κείμενο ([Markdown](#)) και γραφικά μαζί με τον κώδικά μας.
- Το πώς θα ερμηνευτεί το περιεχόμενο ενός κελιού, εξαρτάται από την ακόλουθη επιλογή:





# Διασύνδεση με σημειωματάρια (Jupyter Notebook)



Προσαρτημένος πίνακας

**Ορισμός:** Για κάθε  $n \times n$  πίνακα  $A$ , ορίζουμε ως προσαρτημένο (adjoint) πίνακα του  $A$  τον ανάστροφο του πίνακα των αλγεβρικών συμπληρωμάτων των στοιχείων του  $A$ .

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \cdots & A_{n,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \cdots & A_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,n} & A_{2,n} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix}$$

Ο προσαρτημένος πίνακας ενός δεδομένου πίνακα μπορεί να βρεθεί με τη μέθοδο `adjoint` της κλάσης `matrix`.

```
In [6]: A = matrix(ZZ, 3, 3, [1, 2, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 0])
print "Ο προσαρτημένος του πίνακα A είναι:"
print A.adjoint()
```

Ο προσαρτημένος του πίνακα  $A$  είναι:

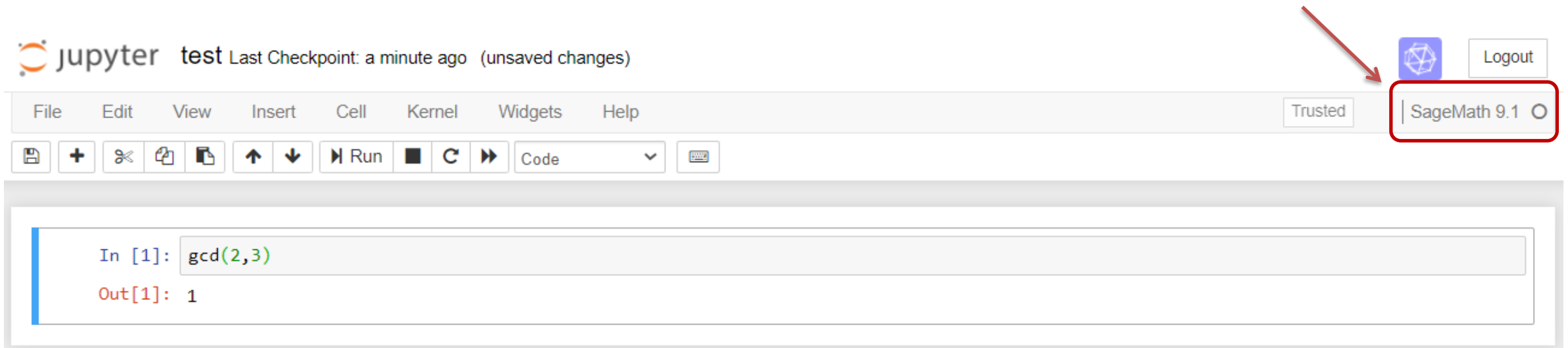
```
[ -1  1  3]
[  1 -1  0]
[  2  1 -3]
```

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ισχύει ο τύπος

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

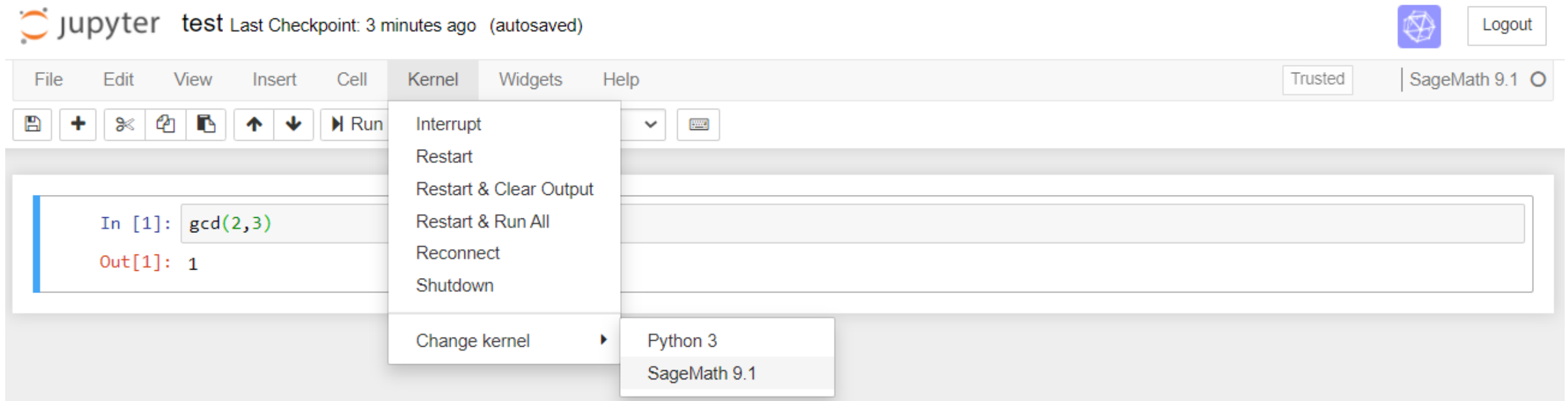
# Διασύνδεση με σημειωματάρια (Jupyter Notebook)

- Στο επάνω δεξιό μέρος του παραθύρου μπορείτε να δείτε τον χρησιμοποιούμενο πυρήνα. Στο Jupyter Notebook υπάρχει η δυνατότητα εγκατάστασης πολλαπλών πυρήνων (πχ: Python 2, Python 3, SageMath, Bash κλπ).



# Διασύνδεση με σημειωματάρια (Jupyter Notebook)

- Για να αλλάξετε τον χρησιμοποιούμενο πυρήνα, επιλέξτε Kernel -> Change kernel και κάντε κλικ στην επιλογή σας.



- Η επιλογή Interrupt διακόπτει τον τρέχον υπολογισμό του πυρήνα.
- Η επιλογή Restart επανεκκινεί τον πυρήνα.

# Χρήση online (SCS)

- Το SageMath μπορεί να εκτελεστεί και online: <https://sagecell.sagemath.org>

Type some Sage code below and press Evaluate.

```
1 A = matrix(ZZ, 3, 3, range(9))  
2 show(A)
```



Evaluate

Language: Sage ▼

# Χρήση online (SCS)

- Τα αποτελέσματα εμφανίζονται στο κελί εξόδου:

Share

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

[Help](#) | Powered by [SageMath](#)