Γραμμική Άλγεβρα
(*Linear Algebra*)

ΑΓΓΕΛΟΣ ΣΙΦΑΛΕΡΑΣ

Καθηγητής

6η Διάλεξη (Θεωρία)

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

CMOR Lab

Computational Methodologies and Operations Research

Εφαρμογή των οριζουσών – κανόνας του *Cramer*

Ο κανόνας του *Cramer* μας δίνει τη λύση ενός $n\times n$ γραμμικού συστήματος *όταν η ορίζουσα του πίνακα του συστήματος είναι διάφορη του μηδενός*.

Έστω A ένας $n\times n$ πίνακας με $\det(A)\neq 0$ και ας υποθέσουμε ότι $\mathbf{x}$ και $\mathbf{b}$ είναι $n\times 1$ πίνακες τέτοιοι, ώστε:

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

δηλ.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\ , \quad i=1,\ldots,n$$

τότε:

$$x_j=\frac{1}{\det(A)}\det\left(A^{(1)},\ldots,A^{(j-1)},b,A^{(j+1)},\ldots A^{(n)}\right)=\frac{D_{x_j}}{D},\quad j=1,\ldots,n$$

όπου:

$$D:=\det(A)$$

και

$$D_{x_j}:=\det\left(A^{(1)},\ldots,A^{(j-1)},b,A^{(j+1)},\ldots A^{(n)}\right)$$

1ο παράδειγμα με τον κανόνα του *Cramer*, (1/3)

Για το σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 & & -x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 1 \\ x_1 & +2x_2 & +5x_3 & = & 2 \end{cases}$$

έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$1^{ο}$ παράδειγμα με τον κανόνα του *Cramer*, (2/3)

Έτσι:

$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

και :

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 7$$

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -7$$

$$D_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

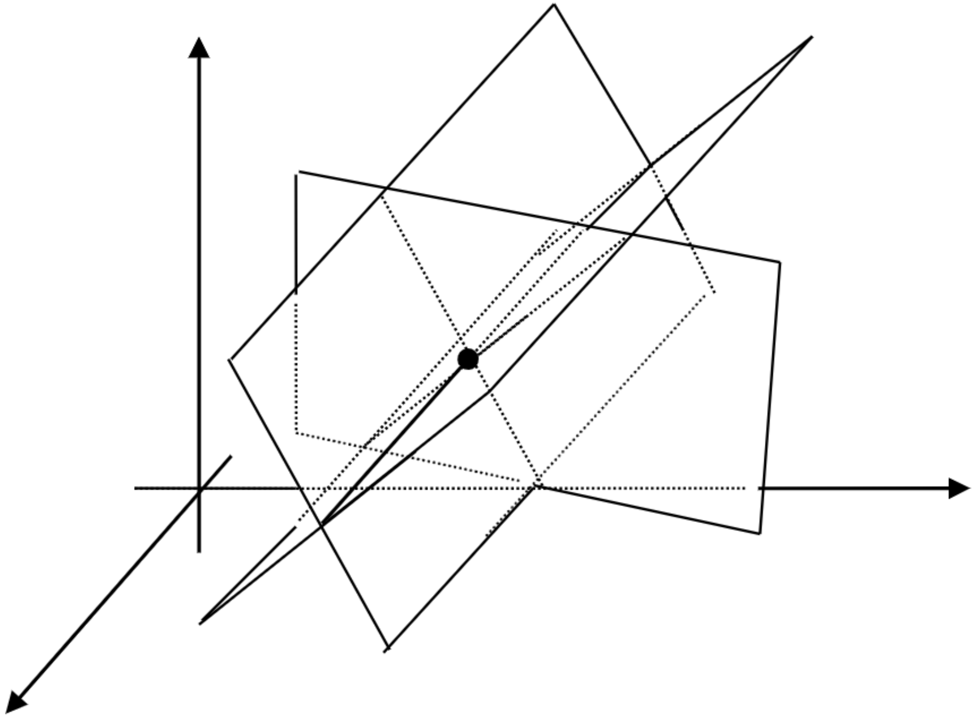
1ο παράδειγμα με τον κανόνα του *Cramer*, (3/3)

Επομένως, σύμφωνα με τον κανόνα του *Cramer*, είναι:

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = \frac{7}{4}$$

$$x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = -\frac{7}{4}$$

$$x_3 = \frac{D_{x_3}}{D} = \frac{3}{4}$$



δηλαδή το σύστημα έχει τη μοναδική λύση : $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{7}{4}, -\frac{7}{4}, \frac{3}{4}\right)$

2ο παράδειγμα με τον κανόνα του *Cramer*, (1/6)

Για το σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 1 \\ x + \lambda y - z = 1 \\ -x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

Έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2ο παράδειγμα με τον κανόνα του *Cramer*, (2/6)

Έτσι:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2+1) - 1(\lambda-1) - 1(1+\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2+1) - 1(\lambda+1) - 1(1-\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1) - (\lambda-1) - 1(1+1) = (\lambda-1)(\lambda+1)$$

$$D_z = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1) - (1+1) + 1(1+\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)$$

2^{o} παράδειγμα με τον κανόνα του *Cramer*, (3/6)

Είναι: $$D = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0 \wedge \lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq -1$$

Οπότε:

- Για $\lambda \neq 0 \wedge \lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq -1$, έχουμε:

$$x = \frac{D_x}{\det(A)} = \frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)} = \frac{1}{\lambda}$$

και

$$y = \frac{D_y}{\det(A)} = \frac{1}{\lambda} \qquad z = \frac{D_z}{\det(A)} = \frac{1}{\lambda}$$

δηλαδή το σύστημα έχει τη μοναδική λύση (x, y, z) = $\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right)$

2^{o} παράδειγμα με τον κανόνα του *Cramer*, (4/6)

- Για λ = 0 , το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} \quad\;\; y - z = 1 \\ x \quad\;\; - z = 1 \\ -x + y \quad\;\; = 1 \end{cases}$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Gamma_1 + \Gamma_3 \to \Gamma_3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \Gamma_3 + (-1)\Gamma_2 \to \Gamma_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Συνεπώς το σύστημα είναι αδύνατο…

2ο παράδειγμα με τον κανόνα του *Cramer*, (5/6)

- Για λ = 1, το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} x & +y & -z & = & 1 \\ x & +y & -z & = & 1 \\ -x & +y & +z & = & 1 \end{cases}$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-1)\Gamma_1+\Gamma_2\to\Gamma_2 \\ \Gamma_1+\Gamma_3\to\Gamma_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \quad (1/2)\Gamma_2\to\Gamma_2 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \; \Gamma_1+(-1)\Gamma_2\to\Gamma_1 \sim \; \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Άρα, y = 1 και x = z, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής (z, 1, z), $z\in R$.

$2^{ο}$ παράδειγμα με τον κανόνα του *Cramer*, (6/6)

Για λ = – 1, το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} -x & +y & -z & = & 1 \\ x & -y & -z & = & 1 \\ -x & +y & -z & = & 1 \end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Gamma_2+\Gamma_1 \to \Gamma_2 \\ \Gamma_3-\Gamma_1 \to \Gamma_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Άρα, z = –1 και x = y, δηλαδή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής (y, y, –1), $y \in \mathrm{R}$

3^{o} παράδειγμα με τον κανόνα του *Cramer*, (1/3)

Θεωρούμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda x & +y & +z & = & 0 \\ x & +\lambda y & +z & = & 0 \\ x & +y & +\lambda z & = & 0 \end{cases}$$

Έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3ο παράδειγμα με τον κανόνα του *Cramer*, (2/3)

Οπότε: $$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 1) - (\lambda - 1) + (1 - \lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

.

Είναι, $D = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = -2$

- Για $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -2$, είναι $D \neq 0$ και επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική (0, 0, 0)

3^{o} παράδειγμα με τον κανόνα του *Cramer*, (3/3)

- Για λ = 1, το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} x & +y & +z & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow x+y+z=0$

και έχει άπειρες λύσεις της μορφής (–y–z, y, z), y, z ∈ R

- Για λ = –2, το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} -2x & +y & +z & = & 0 \\ x & -2y & +z & = & 0 \\ x & +y & -2z & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases}$

Άρα, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής (x, x, x), x ∈ R

Εύρεση του αντίστροφου πίνακα

Η εύρεση του αντίστροφου ενός $n \times n$ πίνακα A ισοδυναμεί με την εύρεση ενός πίνακα X τέτοιου, ώστε να είναι:

$$AX = I$$

Ισχύει ότι:

ο $n \times n$ πίνακας $A = [a_{ij}]$ έχει αντίστροφο (δηλ. είναι αντιστρέψιμος), αν και μόνο αν $\det(A) \neq 0$ και ο αντίστροφός του είναι ο πίνακας,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

όπου $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A(i \mid j)) = (-1)^{i+j} \det(A^{c}_{ij})$, είναι το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ij}

Εύρεση του αντίστροφου πίνακα

Ο πίνακας:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

λέγεται **προσαρτημένος** (*adjoint*) του A, συμβολικά adj$A$ (είναι ο ανάστροφος του πίνακα των αλγεβρικών συμπληρωμάτων / *cofactor matrix*).

Δηλαδή:

Αν $\det(A) \neq 0$, τότε $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\ \mathrm{adjA}$

Παράδειγμα εύρεσης αντίστροφου πίνακα, (1/8)

Να βρεθεί ο αντίστροφος του παρακάτω πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

i. Με τον τύπο υπολογισμού του αντιστρόφου

ii. Με χρήση γραμμοπράξεων

Παράδειγμα εύρεσης αντίστροφου πίνακα, (2/8)

Υπολογίζουμε πρώτα την ορίζουσα του A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\Sigma 2 \leftarrow \Sigma 2 - \Sigma 1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Παράδειγμα εύρεσης αντίστροφου πίνακα, (3/8)

Στη συνέχεια βρίσκουμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του πίνακα:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

Παράδειγμα εύρεσης αντίστροφου πίνακα, (4/8)

Επομένως:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα εύρεσης αντίστροφου πίνακα, (5/8)

Μέσω μετασχηματισμού του $[A \;\; I]$ με γραμμο-πράξεις στον πίνακα $[I \;\; A^{-1}]$ (αν αυτό είναι δυνατό).

Σχηματίζουμε τον πίνακα:
$$\left[A \;\; I\right]=\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Παράδειγμα εύρεσης αντίστροφου πίνακα, (6/8)

Έχουμε:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Gamma_2 - \Gamma_1 \to \Gamma_2 \\ \Gamma_3 - \Gamma_1 \to \Gamma_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Gamma_3 - \frac{1}{3}\Gamma_2 \to \Gamma_3 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right] \qquad -\Gamma_3 \to \Gamma_3 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{array}\right]$$

Παράδειγμα εύρεσης αντίστροφου πίνακα, (7/8)

Έχουμε:

$$\Gamma_1 - \Gamma_3 \to \Gamma_1 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{array}\right]$$

$$-\frac{1}{3}\Gamma_2 \to \Gamma_2 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{array}\right]$$

$$\Gamma_1 - 2\Gamma_2 \to \Gamma_1 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{array}\right]$$

Παράδειγμα εύρεσης αντίστροφου πίνακα, (8/8)

Επομένως:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix}$$

Εξαιτίας της υπολογιστικής του πολυπλοκότητας ο τύπος:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}A$$

δεν είναι βολικό να χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του αντίστροφου ή του προσαρτημένου πίνακα (για πίνακες μεγάλων διαστάσεων).