ΨΗΦΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΕ ΤΗ ΓΛΩΣΣΑ VHDL

Αναθεωρημένη Πρώτη Έκδοση

Σταύρος Σουραβλάς,
Λέκτορας,
Πανεπιστήμιο Μακεδονίας.

Μάνος Ρουμελιώτης,
Καθηγητής,
Πανεπιστήμιο Μακεδονίας.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ

Τίτλος πρωτοτύπου: Ψηφιακά Συστήματα-Μοντελοποίηση και Προσομοίωση με τη Γλώσσα VHDL, Σταύρος Σουραβλάς, Μάνος Ρουμελιώτης

Αποκλειστικότητα για την ελληνική γλώσσα:

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ

Κεντρικό: Φιλίππου 91, Τ.Κ. 54635, Τηλ. 2310 247887, 2310 213912, Fax 2310 210729
Αρμενοπούλου 23, Τ.Κ. 54635 Θεσσαλονίκη, Τηλ./Fax 2310 219184

***Internet*:**
e-mail: info@tziola.gr
http://www.tziola.gr

Κατάστημα Αθηνών:
Πεσμαζόγλου 5 (Πανεπιστημίου 39)
ΣΤΟΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ - Αρσάκειο Μέγαρο
Κατάστημα 18,105 64,
Τηλ./Fax 210 3211097

ISBN: 978-960-418-155-1

Στον Καθηγητή μας και Πρωτεργάτη της γλώσσας VHDL, J.R. Armstrong

Σταύρος Σουραβλάς, Μάνος Ρουμελιώτης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

1.1 ΨΗΦΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Στη σύγχρονη καθημερινή ζωή, ο όρος "ψηφιακή" βρίσκεται στο λεξιλόγιο εκατομμυρίων ανθρώπων, λόγω της ευρείας χρήσης της ψηφιακής τεχνολογίας: ψηφιακοί υπολογιστές, ψηφιακή τηλεφωνία, ψηφιακή μουσική, ψηφιακές φωτογραφικές μηχανές και ούτω καθεξής. Οι εφαρμογές των ψηφιακών συστημάτων καταλαμβάνουν μια τεράστια περιοχή των ανθρώπινων δραστηριοτήτων, από τις απλές καθημερινές εμπορικές, τραπεζικές και άλλες συναλλαγές, την πλοήγηση στο Διαδίκτυο, μέχρι την εξερεύνηση του διαστήματος.

Στην τεχνολογία, στην επιστήμη και γενικά σε όλους τους τομείς των ανθρώπινων δραστηριοτήτων, απαιτείται η διαχείριση, μέτρηση και καταγραφή διάφορων ποσοτήτων. Επομένως, έχει πολύ μεγάλη σημασία η σωστή και ακριβής αναπαράσταση των ποσοτήτων αυτών. Γενικά, η αριθμητική τιμή μιας ποσότητας αναπαρίσταται με δύο τρόπους: *αναλογικά (analog)* και *ψηφιακά (digital)*. Η βασική διαφορά μιας αναλογικής με μια ψηφιακή ποσότητα βρίσκεται στο γεγονός ότι μια αναλογική ποσότητα μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή εντός ενός συνεχούς εύρους τιμών (πχ η θερμοκρασία ενός δωματίου), ενώ η ψηφιακή ποσότητα περιλαμβάνει διακριτές τιμές (πχ ψηφιακό ρολόι). Ένα ψηφιακό σύστημα είναι ένα σύνολο από συσκευές, οι οποίες είναι σχεδιασμένες για να διαχειρίζονται τις διακριτές πληροφορίες του συστήματος. Το πιο διαδεδομένο ψηφιακό σύστημα είναι ο υπολογιστής. Οι πληροφορίες του συστήματος αναπαρίστανται με φυσικές ποσότητες που ονομάζονται *ψηφιακά σήματα (digital signals)*. Τα σήματα αυτά χρησιμοποιούν δύο διακριτές τιμές, και για το λόγο αυτό ονομάζονται *δυαδικά (binary)*. Τα *δυαδικά ψηφία (binary digits- bits)* είναι τα 0 και 1. Χρησιμοποιώντας διάφορες μεθόδους αναπαράστασης, μια ομάδα από δυαδικά ψηφία μπορεί να αναπαραστήσει άλλα σύμβολα, αριθμούς κ.λπ. Για παράδειγμα, μια οκτάδα από bits (1 byte) μπορεί με ένα σύνολο 256 διαφορετικών διατάξεων να αναπαραστήσει τους ακέραιους αριθμούς από 0 έως και 255.

Ένα όλο και αυξανόμενο πλήθος εφαρμογών χρησιμοποιούν ψηφιακά συστήματα. Οι βασικοί λόγοι για τους οποίους η ψηφιακή τεχνολογία έχει επικρατήσει είναι:

1. Δυνατότητα προγραμματισμού: Οι λειτουργίες ενός ψηφιακού συστήματος ελέγχονται από αποθηκευμένα σύνολα εντολών, τα οποία καλούνται πρόγραμμα. Καθώς η τεχνολογία εξελίσσεται, ο προγραμματισμός ψηφιακών συστημάτων γίνεται όλο και πιο απλουστευμένη διαδικασία.

2. Οικονομία: Ο αριθμός των τρανζίστορ που μπορούν να ενσωματωθούν σε ένα ψηφιακό σύστημα ολοένα και μεγαλώνει, με αποτέλεσμα τη δυνατότητα εκτέλεσης πιο πολύπλοκων και χρονοβόρων διαδικασιών με μικρό κόστος.

3. Ταχύτητα: Τα σύγχρονα ψηφιακά συστήματα έχουν τη δυνατότητα να εκτελούν εκατομμύρια πράξεις ανά δευτερόλεπτο.

4. Αξιοπιστία: Η ανάπτυξη κωδίκων ανίχνευσης και διόρθωσης σφαλμάτων εξασφαλίζει την αξιοπιστία ενός ψηφιακού συστήματος.

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει εισαγωγή στα συστήματα αρίθμησης και τις βασικέςαριθμητικές λειτουργίες αυτών, με έμφαση στο δυαδικό σύστημα. Στη συνέχεια περιγράφονται τεχνικές αναπαράστασης δεδομένων (αριθμοί και σύμβολα) με χρήση δυαδικών ψηφίων. Τα παραπάνω αποτελούν βασικές γνώσεις για την κατανόηση του περιεχομένου των επόμενων κεφαλαίων.

1.2 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

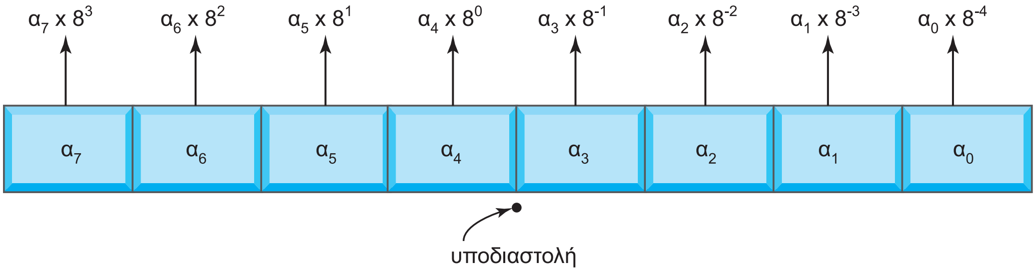
Ένα σύστημα αρίθμησης (number system) με *βάση* r, είναι ένα σύστημα που χρησιμοποιεί διακριτά σύμβολα για r ψηφία. Ο αριθμός r ονομάζεται βάση του συστήματος. Για να δηλωθεί η βάση ενός αριθμού, ο αριθμός γράφεται μέσα σε παρένθεση και εκτός της παρένθεσης αναγράφεται ο αριθμός βάση. Για παράδειγμα $(32)_{10}$, $(765)_8$ και ούτω καθεξής. Οι αριθμοί αναπαρίστανται από μια σειρά ψηφίων. Για να υπολογιστεί η ποσότητα που αυτή η σειρά αντιπροσωπεύει, θα πρέπει κάθε ψηφίο να πολλαπλασιαστεί με μια ακέραια δύναμη του r και στη συνέχεια να προστεθούν όλα τα επιμέρους γινόμενα. Το πιο κοινό σύστημα αρίθμησης είναι το δεκαδικό. Τα 10 ψηφία του δεκαδικού συστήματος είναι τα εξής: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Αν θέλουμε να αναπαραστήσουμε μια ποσότητα αποτελούμενη από 5 εκατοντάδες, 6 δεκάδες, 2 μονάδες και 3 δέκατα με το δεκαδικό σύστημα, γράφουμε την σειρά συμβόλων 562.3. Η σειρά αυτή αντιπροσωπεύει την ποσότητα: 5 x 10^2 + 6 x 10^1 + 2 x 10^0 + 3 x 10^{-1}.

Το *δυαδικό σύστημα* (binary system) έχει ως βάση του το 2, επομένως χρησιμοποιεί δύο ψηφία: 0 και 1. Κάθε συντελεστής a_i ενός δυαδικού αριθμού πολλαπλασιάζεται με 2^i. Για παράδειγμα, η δυαδική ποσότητα 11001100 αναπαριστά τον αριθμό: 1 x 2^7 + 1 x 2^6 + 0 x 2^5 + 0 x 2^4 + 1 x 2^3 + 1 x 2^2 + 0 x 2^1 + 0 x 2^0 = 128 + 64 + 8 + 4 = $(204)_{10}$.

Εκτός από το δυαδικό σύστημα, δύο ακόμη συστήματα αρίθμησης είναι πολύ σημαντικά στους ψηφιακούς υπολογιστές: το οκταδικό (octal) και το δεκαεξαδικό (hexadecimal) . Ο λόγος είναι ότι μπορούν να παρέχουν έναν πολύ αποτελεσματικό τρόπο αναπαράστασης δυαδικών αριθμών με μεγάλο πλήθος ψηφίων, ενώ παράλληλα, η μετατροπή τους από και προς το δυαδικό σύστημα είναι μια πάρα πολύ απλή διαδικασία.

Το οκταδικό σύστημα χρησιμοποιεί ως βάση του το 8, επομένως υπάρχουν οκτώ διαθέσιμα ψηφία: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, και 7. Αυτό σημαίνει ότι κάθε ψηφίο ενός οκταδικού αριθμού μπορεί να λαμβάνει τιμή από 0-7. Η ποσότητα που



Σχήμα 1.1 Τρόπος υπολογισμού της ποσότητας που αντιπροσωπεύει ένα οκταδικό ψηφίο ανάλογα με τη θέση του στον αριθμό

αναπαριστά κάθε οκταδικό ψηφίο ανάλογα με τη θέση που βρίσκεται μέσα στον αριθμό, υπολογίζεται με τον τρόπο που δίνεται στο Σχήμα 1.1.

Για παράδειγμα, για να υπολογιστεί ο δεκαδικός αριθμός που αναπαρίσταται από την οκταδική ποσότητα 675.4, θα πρέπει να υπολογιστούν οι ποσότητες που αντιπροσωπεύει το κάθε ψηφίο και στη συνέχεια να αθροιστούν. Επομένως θα είναι: $(675.4)_8$= 6 x 8^2 + 7 x 8^1 + 5 x 8^0 + 4 x 8^{-1} = 384 + 56 + 5 + 0.5 = $(445.5)_{10}$. Άρα, $(675.4)_8 = (445.5)_{10}$.

Το δεκαεξαδικό σύστημα έχει ως βάση το 16. Αυτό σημαίνει ότι περιέχει 16 διαθέσιμα ψηφία, τα οποία είναι οι αριθμοί από 0 ως 9 και τα γράμματα A, B, C, D, E, και F. Τα γράμματα A-F αναπαριστούν τους αριθμούς από 10-15. Ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζεται μια δεκαεξαδική ποσότητα είναι αντίστοιχος με εκείνον που περιγράφηκε στο οκταδικό σύστημα. Επομένως, για να βρεθεί ο δεκαδικός αριθμός που αναπαριστά η δεκαεξαδική ποσότητα F2C7.8, υπολογίζεται η ποσότητα που αναπαριστά το κάθε δεκαεξαδικό ψηφίο και στη συνέχεια αθροίζονται αυτές οι ποσότητες. Είναι: $(F2C7.8)_{16}$= 15 x 16^3 + 2 x 16^2 + 12 x 16^1 + 7 x 16^0+ 8 x 16^{-1} = 61440 + 512 + 192 + 7 + 0,5 = $(62151.5)_{10}$. Ο Πίνακας 1.1 δείχνει τους πρώτους 16 αριθμούς για το δεκαδικό, δυαδικό, οκταδικό και δεκαεξαδικό σύστημα.

1.3 ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΒΑΣΗΣ ΑΡΙΘΜΟΥ

Στην παράγραφο αυτή θα περιγραφεί ο τρόπος με τον οποίο μετατρέπεται ένας δεκαδικός αριθμός στον αντίστοιχο δυαδικό, οκταδικό και δεκαεξαδικό αριθμό. Γενικά, η μετατροπή ενός αριθμού από δεκαδικό σύστημα σε ένα οποιοδήποτε σύστημα βάσης r υλοποιείται ακολουθώντας με τα εξής βήματα:

1. Ο αριθμός χωρίζεται σε ακέραιο και δεκαδικό μέρος.

2. Τα δύο τμήματα μετατρέπονται ξεχωριστά.

Πίνακας 1.1 Οι αριθμοί από 0 έως 15 στο δεκαδικό, δυαδικό, οκταδικό και δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης

Δεκαδικό	Δυαδικό	Οκταδικό	Δεκαεξαδικό
0	0000	00	0
1	0001	01	1
2	0010	02	2
3	0011	03	3
4	0100	04	4
5	0101	05	5
6	0110	06	6
7	0111	07	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

3. Τα δύο τμήματα ενώνονται για να σχηματίσουν τον αριθμό βάσης r.

Η μετατροπή του ακεραίου μέρους ενός δεκαδικού αριθμού στον αντίστοιχο αριθμό βάσης r βασίζεται σε ένα πλήθος διαδοχικών διαιρέσεων. Τα ψηφία που αποτελούν τον αριθμό βάσης r είναι το υπόλοιπο των διαδοχικών διαιρέσεων, όμως πρέπει να προσεχθεί ότι για να γραφτεί ο δεκαδικός αριθμός θα πρέπει να ακολουθηθεί η αντίστροφη σειρά από αυτήν με την οποία παράγονται τα υπόλοιπα. Οι διαιρέσεις σταματούν όταν το ακέραιο πηλίκο γίνει μηδέν. Παρακάτω δίνονται τρία παραδείγματα μετατροπής του αριθμού $(43)_{10}$ στον αντίστοιχο δυαδικό, οκταδικό, και δεκαεξαδικό αριθμό.

Ακέραιο πηλίκο	Υπόλοιπο	Συντελεστής
$43/2 = 21$	1	1
$21/2 = 10$	1	1
$10/2 = 5$	0	0
$5/2 = 2$	1	1
$2/2 = 1$	0	0
$1/2 = 0$	1	1

Όταν το υπόλοιπο είναι διαφορετικό του μηδενός, ο παραγόμενος συντελεστής είναι 1, διαφορετικά είναι 0. Για να γράψουμε τον αριθμό 43 σε δυαδική μορφή θα πρέπει οι συντελεστές να γραφούν με αντίστροφη σειρά από αυτήν που παράχθηκαν, άρα $(43)_{10} = (101011)_2$. Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να γίνει η μετατροπή από τα δεκαδικό στο οκταδικό και δεκαεξαδικό σύστημα, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα:

Ακέραιο πηλίκο	Υπόλοιπο	Συντελεστής
$42/8 = 5$	3	3
$5/8 = 0$	5	5

Επομένως, $(43)_{10} = (53)_8$.

Ακέραιο πηλίκο	Υπόλοιπο	Συντελεστής
$43/16 = 2$	B	B
$2/16 = 0$	2	2

Επομένως, $(43)_{10}$= (2B)$_{16}$.

Η μετατροπή του κλασματικού μέρους ενός δεκαδικού αριθμού στον αντίστοιχο βάσης r βασίζεται σε ένα πλήθος διαδοχικών πολλαπλασιασμών. Αρχικά πολλαπλασιάζεται ο κλασματικός αριθμός με την βάση. Το ακέραιο μέρος του γινομένου αποτελεί τον συντελεστή ενώ το κλασματικό μέρος του γινομένου πολλαπλασιάζεται εκ νέου με την βάση. Οι πολλαπλασιασμοί σταματούν όταν το κλασματικό μέρος γίνει μηδέν. Επειδή όμως δεν υπάρχει συνθήκη η οποία εξασφαλίζει ότι αυτό θα συμβεί μετά από ένα πλήθος πολλαπλασιασμών, η διαδικασία σταματάει αν επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια. Οι συντελεστές, σε αντίθεση με την μετατροπή του ακεραίου τμήματος ενός δεκαδικού αριθμού, γράφονται με την σειρά που παράγονται. Για παράδειγμα, για να μετατραπεί σε δυαδικό ο αριθμός $(0.6875)_{10}$ θα εκτελεστούν οι παρακάτω πολλαπλασιασμοί:

Γινόμενο	Ακέραιο μέρος	Κλασματικό μέρος	Συντελεστής
0.6875 $\times 2 = 1.3750$	1	0.3750	1
0.3750 $\times 2 = 0.7500$	0	0.7500	0
0.7500 $\times 2 = 1.5000$	1	0.5000	1
0.5000 $\times 2 = 1.000$	1	0.000	1

Επομένως, $(0.6875)_{10} = (0.1011)_2$.

Όπως περιγράφηκε στην αρχή της παραγράφου, για να μετατραπεί σε οποιοδήποτε σύστημα αρίθμησης r ένας δεκαδικός αριθμός, ο οποίος περιέχει ακέραιο και κλασματικό μέρος, θα πρέπει να μετατραπούν χωριστά το ακέραιο και το κλασματικό τμήμα και στην συνέχεια να ενωθούν. Για παράδειγμα, η μετατροπή του αριθμού 30.75 στο δυαδικό, οκταδικό και δεκαεξαδικό σύστημα θα δώσει τα ακόλουθα αποτελέσματα (η επιβεβαίωση αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη):

$(30.75)_{10} = (11110.11)_2$
$(30.75)_{10} = (36.6)_8$
$(30.75)_{10} = (1\text{E.C})_{16}$

1.4 ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΑΡΙΘΜΩΝ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΒΑΣΗ 2, 8, ΚΑΙ 16

Η μετατροπή των αριθμών ανάμεσα στα συστήματα με βάση 2, 8 και 16 παίζει σημαντικό ρόλο σε θέματα ψηφιακών συστημάτων. Το οκταδικό και το δεκαεξαδικό σύστημα μπορούν, λόγω της ευκολίας με την οποία γίνονται οι μετατροπές μεταξύ των συστημάτων, να χρησιμεύσουν ως μια πιο σύντομη αναπαράσταση μεγάλων δυαδικών αριθμών. Σε προγραμματιστικές εργασίες (για παράδειγμα όταν αναπτύσσεται ένα μοντέλο σε γλώσσα VHDL) είναι πιο βολικό, τα δυαδικά δεδομένα μεγάλου πλήθους bit να γράφονται σε μια πιο σύντομη μορφή. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται είτε το οκταδικό είτε το δεκαεξαδικό σύστημα για την αναπαράσταση. Ωστόσο, θα πρέπει να ξεκαθαριστεί ότι τα ψηφιακά συστήματα λειτουργούν μόνο δυαδικά. Οι οκταδικές και δεκαεξαδικές παραστάσεις χρησιμοποιούνται μόνο για λόγους ευκολίας.

Η ευκολία στη μετατροπή αριθμών μεταξύ των τριών συστημάτων βασίζεται στις ισότητες: $2^3 = 8$ και $2^4 = 16$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οκταδικό ψηφίο αντιστοιχεί σε τρία δυαδικά, ενώ κάθε δεκαεξαδικό αντιστοιχεί σε τέσσερα. Για να μετατραπεί ένας δυαδικός αριθμός σε οκταδικό, τα bits του χωρίζονται σε τριάδες από την υποδιαστολή προς τα αριστερά για το ακέραιο μέρος και από την υποδιαστολή προς τα δεξιά για το κλασματικό. Για παράδειγμα, για να μετατραπεί σε οκταδικό ο αριθμός 111000101.111001, οι ομάδες bit που θα δημιουργηθούν είναι τα εξής:
- Αριστερά της υποδιαστολής: 111 000 101
- Δεξιά της υποδιαστολής: 111 001.
Οι τριάδες αυτές αντιστοιχούν στους αριθμούς:
- Αριστερά της υποδιαστολής: 7 0 5,
- Δεξιά της υποδιαστολής: 7 1.

Τελικά ο αριθμός που προκύπτει είναι ο $(705.71)_8$.

Σε περίπτωση που το πλήθος των bits δεξιά ή αριστερά της υποδιαστολής (ή ταυτόχρονα δεξιά και αριστερά) δεν διαιρείται ακριβώς με το 3, θα πρέπει να προστεθούν μηδενικά. Αν το πλήθος των bits του ακέραιου τμήματος δεν διαιρεί το 3, τότε προστίθενται αριστερά του αριθμού (στις πιο σημαντικές θέσεις) όσα μηδενικά είναι απαραίτητα ώστε το νέο πλήθος bit που θα προκύψει να διαιρείται ακριβώς με το 3. Αν το πλήθος των bits του κλασματικού τμήματος δεν διαιρεί το 3, τότε προστίθενται στο δεξί τμήμα του αριθμού (στις λιγότερο σημαντικές θέσεις) όσα μηδενικά είναι απαραίτητα ώστε το νέο πλήθος bits που θα προκύψει να διαιρείται ακριβώς με το 3. Για παράδειγμα, για να μετατραπεί σε οκταδικό αριθμό ο δυαδικός 1111000101.11100111 θα πρέπει να προστεθούν δύο μηδενικά στο αριστερό (ακέραιο) τμήμα του αριθμού (επειδή το πλήθος bits του ακέραιου τμήματος είναι 10, επομένως με 2 bits ακόμη θα γίνουν 12) και ένα μηδενικό στο δεξί (κλασματικό) τμήμα του αριθμού (επειδή το πλήθος bits του κλασματικού τμήματος είναι 8, επομένως με 1 bit ακόμη θα γίνουν 9). Με τον τρόπο αυτό θα δημιουργηθούν οι εξής ομάδες:

- Αριστερά της υποδιαστολής: 001 111 000 101.
- Δεξιά της υποδιαστολής: 111 001 110.

Τελικά προκύπτει ότι: $(1111000101.11100111)_2 = (1705.716)_8$.

Η μετατροπή από το δυαδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα γίνεται με παρόμοιο τρόπο, όπως περιγράφηκε στη μετατροπή από το δυαδικό στο οκταδικό σύστημα. Η διαφορά είναι ότι τα bits του δυαδικού αριθμού ομαδοποιούνται σε τετράδες και αν το πλήθος των bits δεξιά ή αριστερά της υποδιαστολής δεν διαιρείται ακριβώς με το 4, τότε προστίθεται κατάλληλο πλήθος μηδενικών στις πιο σημαντικές θέσεις αν πρόκειται για το ακέραιο τμήμα και στις λιγότερο σημαντικές αν πρόκειται για το κλασματικό. Για παράδειγμα, η μετατροπή του αριθμού 111000010.1010100111 στον αντίστοιχο δεκαεξαδικό αριθμό απαιτεί την προσθήκη τριών bits αριστερά της υποδιαστολής και άλλων δύο δεξιά, ώστε και στις δύο πλευρές να υπάρχει πλήθος bits που διαιρεί ακριβώς το 4. Επομένως, ο αριθμός 111000010.1010100111 θα γραφεί διαφορετικά ως: 000111000010.101010011100. Η ομαδοποίηση των bits σε τετράδες γίνεται ως ακολούθως:

- Αριστερά της υποδιαστολής: 0001 1100 0010
- Δεξιά της υποδιαστολής:1010 1001 1100

Οι τετράδες αυτές αντιστοιχούν στους εξής αριθμούς:

- Αριστερά της υποδιαστολής: 1 C 2.
- Δεξιά της υποδιαστολής: A 9 C.

Τελικά προκύπτει ότι: $(111000010.1010100111)_2$=(1C2.A9C)$_{16}$.

Για να μετατραπεί ένας αριθμός από το οκταδικό ή το δεκαεξαδικό σύστημα στο δυαδικό, ακολουθείται η αντίστροφη διαδικασία από αυτή που περιγράφηκε για τη μετατροπή από το δυαδικό στο οκταδικό ή το δεκαεξαδικό. Ειδικότερα, ένας οκταδικός (δεκαεξαδικός) αριθμός μετατρέπεται στον αντίστοιχο δυαδικό αν κάθε ψηφίο του εκφραστεί με μια τριάδα (τετράδα) ψηφίων του δυαδικού συστήματος. Για παράδειγμα, για να μετατραπεί σε δυαδικό ο αριθμός $(705.71)_8$, κάθε ψηφίο γράφεται σε μια τριάδα από bits (βλέπε Πίνακα 1.1), δηλαδή 7=111, 0=000, 5=101, 7=111, 1=001. Άρα θα είναι: $(701.71)_8 = (111000101.111001)_2$. Ομοίως, για να μετατραπεί στον αντίστοιχο δυαδικό ο αριθμός $(\text{E}1.\text{A}9)_{16}$, κάθε ψηφίο θα γραφεί σε μια τετράδα από bits (βλέπε Πίνακα 1.1), δηλαδή E=1110, 1=0001, A=1010, 9=1001. Άρα θα είναι: $(\text{E}1.\text{A}9)_{16} = (11100001.10101001)_2$.

1.5 ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Συμπλήρωμα (*complement)* ενός αριθμού N είναι ένας άλλος αριθμός, ο οποίος συμπληρώνει τον N ως προς έναν αριθμό αναφοράς. Ο αριθμός αναφοράς μπορεί να είναι οποιοσδήποτε, αλλά στις αριθμητικές πράξεις που μας ενδιαφέρουν εδώ, ως αναφορά θα χρησιμοποιείται η βάση (r) και η βάση μείον ένα $(r-1)$ ενός συστήματος αρίθμησης.

1.5.1 ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΒΑΣΗ ΜΕΙΟΝ ΕΝΑ

Το συμπλήρωμα ως προς βάση μείον ένα ενός αριθμού N, ο οποίος περιέχει n ψηφία, σε ένα σύστημα αρίθμησης βάσης r, συμβολίζεται $\Sigma_{r-1}(N)$ και δίνεται από την σχέση $\Sigma_{r-1}(N) = (r^n - 1) - N$. Για έναν δεκαδικό αριθμό η βάση r είναι ίση με 10, επομένως το συμπλήρωμα ως προς βάση μείον ένα είναι $\Sigma_{r-1} = \Sigma_9 = (10^n - 1) - N$. Επειδή η ποσότητα $10^n - 1$ είναι ένας αριθμός αποτελούμενος από n σε πλήθος εννιάρια, είναι φανερό ότι για να υπολογίσουμε το συμπλήρωμα ως προς βάση μείον ένα ενός δεκαδικού αριθμού N, θα πρέπει να αφαιρέσουμε κάθε ψηφίο του από το 9. Ομοίως, για ένα οκταδικό αριθμό η ποσότητα $8^n - 1$ είναι ένας αριθμός αποτελούμενος από n εφτάρια και για ένα δεκαεξαδικό αριθμό, η ποσότητα $16^n - 1$ είναι ένας αριθμός αποτελούμενος από μια σειρά n σε πλήθος F. Επομένως, το συμπλήρωμα ως προς βάση μείον ένα ενός οκταδικού αριθμού προκύπτει αν αφαιρέσουμε όλα τα ψηφία του από 7, ενώ το συμπλήρωμα ως προς βάση μείον ενός δεκαεξαδικού αριθμού προκύπτει αν αφαιρέσουμε όλα τα ψηφία του από F.

Στο δυαδικό σύστημα, η ποσότητα $2^n - 1$ είναι ίση με ένα πλήθος n μονάδων. Για να υπολογιστεί το συμπλήρωμα ως προς 1 ενός δυαδικού αριθμού, θα πρέπει να αφαιρεθούν όλα τα ψηφία του από 1. Αυτό σημαίνει ότι οι μονάδες του αριθμού θα μετατραπούν σε μηδενικά και τα μηδενικά σε μονάδες. Παρακάτω ακολουθούν ορισμένα παραδείγματα υπολογισμών συμπληρωμάτων ως προς βάση μείον ένα σε διάφορα συστήματα για καλύτερη κατανόηση.

1. $\Sigma_9(672)_{10} = 999 - 672 = 327$.

2. $\Sigma_1(110110111)_2 = 001001000$ (αλλαγή μονάδων σε μηδενικά και μηδενικών σε μονάδες).

3. $\Sigma_7(76723)_8 = 77777 - 76723 = 01054$.

4. Σ_{15}(FD218)$_{16}$= FFFFF-FD218=02DE7.

1.5.2 ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΒΑΣΗ

Το συμπλήρωμα ως προς βάση ενός αριθμού N, ο οποίος περιέχει n ψηφία, σε ένα σύστημα αρίθμησης βάσης r, συμβολίζεται ως $\Sigma_r(N)$ και δίνεται από την σχέση $\Sigma_r(N) = r^n - N$, αν $N \neq 0$. Αν $N = 0$ τότε $\Sigma_r(N) = 0$. Είναι φανερό ότι το συμπλήρωμα ως προς βάση είναι κατά ένα μεγαλύτερο του συμπληρώματος ως προς βάση μείον 1. Το συμπλήρωμα ως προς βάση ενός δεκαδικού αριθμού είναι ίσο με $10^n - N$. Η ποσότητα 10^n είναι ένας αριθμός αποτελούμενος από μια μονάδα ακολουθούμενη από n μηδενικά. Επομένως η ποσότητα $10^n - N$ προκύπτει αν μείνουν ίδια τυχόν μηδενικά που βρίσκονται στο δεξί μέρος του αριθμού N και αφαιρεθεί το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο από 10 και τα υπόλοιπα από 9. Ομοίως, το συμπλήρωμα ως προς βάση ενός οκταδικού αριθμού είναι $8^n - N$. Η ποσότητα $8^n - N$ προκύπτει αν μείνουν ως έχουν τυχόν μηδενικά που βρίσκονται στο δεξί μέρος του αριθμού N και αφαιρεθεί το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο από 8 και τα υπόλοιπα από 7. Το συμπλήρωμα ως προς βάση ενός δεκαεξαδικού αριθμού είναι $16^n - N$. Η ποσότητα $16^n - N$ προκύπτει αν παραμείνουν ίδια τυχόν μηδενικά που βρίσκονται στο δεξί μέρος του αριθμού N και αφαιρεθεί το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο από 16 και τα υπόλοιπα από F (ή 15 σκεπτόμενοι στο δεκαδικό σύστημα). Το συμπλήρωμα ως προς βάση ενός δυαδικού αριθμού είναι $2^n - N$. Η ποσότητα 2^n είναι ένας αριθμός αποτελούμενος από μια μονάδα ακολουθούμενη από n μηδενικά. Με παρόμοιο τρόπο όπως στα υπόλοιπα συστήματα, η ποσότητα $2^n - N$ προκύπτει αν μείνουν ως έχουν τυχόν μηδενικά που βρίσκονται στο δεξί μέρος του αριθμού N και αφαιρεθεί το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο από 2 και τα υπόλοιπα από 1. Επειδή το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο ενός δυαδικού αριθμού είναι προφανώς μονάδα, η αφαίρεσή του από 2 θα το αφήσει ίδιο. Τα υπόλοιπα ψηφία θα αλλάξουν από 0 σε 1 και από 1 σε 0. Άρα ο κανόνας για την εύρεση του συμπληρώματος ως προς βάση ενός δυαδικού αριθμού μπορεί να γραφεί ως εξής: Τυχόν δεξιά μηδενικά παραμένουν μηδέν και η πρώτη μονάδα που θα βρεθεί στο δεξί μέρος του αριθμού παραμένει μονάδα. Όλα τα υπόλοιπα ψηφία αλλάζουν από 0 σε 1 και από 1 σε 0. Παρακάτω ακολουθούν ορισμένα παραδείγματα υπολογισμών συμπληρωμάτων ως προς βάση σε διάφορα συστήματα για καλύτερη κατανόηση.

1. $\Sigma_{10}(246700)_{10} = 753300$ (Τα δεξιά μηδενικά μένουν ως έχουν, το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο από δεξιά που είναι το 7 αφαιρείται από 10 και όλα τα υπόλοιπα από 9).

2. $\Sigma_{10}(5789)_{10} = 4211$ (Επειδή δεν υπάρχουν μηδενικά στο δεξί μέρος, το πρώτο δεξί ψηφίο που είναι 9 αφαιρείται από 10 και όλα τα υπόλοιπα από 9).

3. $\Sigma_8(67730)_8 = 10050$ (Το δεξιό μηδενικό παραμένει μηδέν, το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο από δεξιά που είναι το 3 αφαιρείται από 8 και όλα τα υπόλοιπα από 7).

4. $\Sigma_8(7231)_8 = 0547$ (Επειδή δεν υπάρχουν μηδενικά στο δεξί μέρος, το πρώτο δεξί ψηφίο που είναι 1 αφαιρείται από 8 και όλα τα υπόλοιπα από 7).

5. Σ_{16}(53FD00)$_{16}$=AC0300 (Τα δεξιά μηδενικά μένουν ως έχουν, το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο από δεξιά που είναι το D αφαιρείται από 16 και όλα τα υπόλοιπα από F).

6. Σ_{16}(53FB)$_{16}$=AC05 (Επειδή δεν υπάρχουν μηδενικά στο δεξί μέρος, το πρώτο δεξί ψηφίο που είναι 5 αφαιρείται από 16 και όλα τα υπόλοιπα από F).

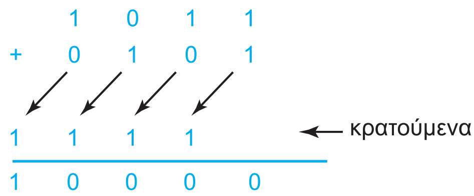
7. $\Sigma_2(111001100)_2 = 000110100$ (Τα δεξιά μηδενικά μένουν ως έχουν, η πρώτη μονάδα από δεξιά παραμένει μονάδα και όλα τα υπόλοιπα bits αλλάζουν από 0 σε 1 και από 1 σε 0).

8. $\Sigma_2(100101)_2 = 011011$ (Επειδή δεν υπάρχουν μηδενικά στο δεξί μέρος, η πρώτη μονάδα δεξιά παραμένει ως έχει και τα υπόλοιπα αλλάζουν από 0 σε 1 και από 1 σε 0).

Για να υπολογιστεί το συμπλήρωμα ενός αριθμού που περιέχει κλασματικό μέρος σε οποιαδήποτε βάση, αφαιρείται η υποδιαστολή, υπολογίζεται το συμπλήρωμα του ενιαίου αριθμού και τέλος προστίθεται η υποδιαστολή στην θέση της. Τέλος, αποδεικνύεται ότι το συμπλήρωμα του συμπληρώματος ενός αριθμού N είναι ο ίδιος ο αριθμός. Πράγματι, έστω ότι αναζητείται το συμπλήρωμα του συμπληρώματος ενός αριθμού N ως προς βάση μείον ένα. Είναι $\Sigma_{r-1}(N) = (r^n - N) - 1$. Το συμπλήρωμα του αριθμού $r^n - N - 1$ θα είναι $\Sigma_{r-1}(r^n - N - 1) = r^n - (r^n - N - 1) - 1 = N$. Ομοίως, έστω ότι αναζητείται το συμπλήρωμα του συμπληρώματος ενός αριθμού N ως προς βάση. Είναι $\Sigma_r(N) = (r^n - N)$. Το συμπλήρωμα του αριθμού $r^n - N$ θα είναι $\Sigma_r(r^n - N) = r^n - (r^n - N) = N$.

1.6 ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΑ ΔΥΑΔΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Οι αριθμητικές πράξεις σε αριθμούς μιας συγκεκριμένης βάσης r ακολουθούν τους κανόνες του δεκαδικού συστήματος, αλλά πρέπει σε κάθε περίπτωση να χρησιμοποιούνται τα διαθέσιμα ψηφία του κάθε συστήματος.



Σχήμα 1.2: Πρόσθεση δύο τετράμπιτων αριθμών

1.6.1 ΠΡΟΣΘΕΣΗ

Η δυαδική πρόσθεση περιλαμβάνει τέσσερις δυνατές περιπτώσεις όσον αφορά την πρόσθεση δύο bits:
1. 0+0=0
2. 0+1=1
3. 1+0=1
4. 1+1=0 και 1 κρατούμενο.

Έστω ότι προστίθενται οι αριθμοί $(1011)_2$ και $(0101)_2$. Στο Σχήμα 1.2 δίνεται ο τρόπος με τον οποίον εκτελείται βηματικά η συγκεκριμένη πρόσθεση. Η πρόσθεση εκτελείται σε τέσσερα βήματα, τα οποία είναι τα ακόλουθα:

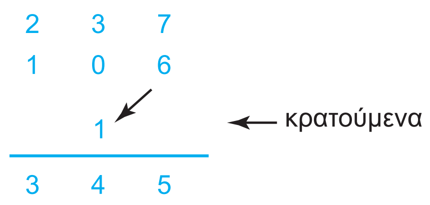
1. Ξεκινώντας από δεξιά, γίνεται η πρόσθεση 1+1. Το αποτέλεσμα είναι 0 και 1 κρατούμενο μεταφέρεται στην επόμενη θέση.

2. Στην συνέχεια εκτελείται η πράξη (0+1)+1(κρατούμενο προηγούμενου βήματος). Το αποτέλεσμα είναι 0 και 1 κρατούμενο μεταφέρεται στην επόμενη θέση.

3. Το τρίτο βήμα είναι ίδιο με το δεύτερο.

4. Το τέταρτο βήμα είναι παρόμοιο με τα 2 και 3. Το τελευταίο κρατούμενο που προκύπτει προστίθεται στο μπροστινό (αριστερό) τμήμα του αριθμού. Προφανώς, το άθροισμα δεν "χωράει" να παρασταθεί σε τέσσερα ψηφία αλλά σε πέντε.

Η οκταδική πρόσθεση ακολουθεί ακριβώς τους κανόνες της δεκαδικής. Όμως πρέπει να προσεχθεί ότι τα κρατούμενα είναι οκτάδες και όχι δεκάδες. Επομένως, αν προστεθούν οι αριθμοί $(7)_8$ και $(6)_8$, το αποτέλεσμα θα προκύψει με τον εξής συλλογισμό: "7+6=13, όπου το 13 περιέχει 1 οκτάδα και 5 μονάδες. Η οκτάδα μεταφέρεται ως κρατούμενο για το επόμενο βήμα και οι πέντε μονάδες γράφονται. Άρα $(7)_8 + (6)_8 = (15)_8$". Ως δεύτερο παράδειγμα, έστω η πρόσθεση των αριθμών $(237)_8$ και $(106)_8$. Στο Σχήμα 1.3 δίνεται ο τρόπος με τον οποίο



Σχήμα 1.3: Πρόσθεση δύο τριψήφιων οκταδικών αριθμών

εκτελείται βηματικά η συγκεκριμένη πρόσθεση. Σύμφωνα με το Σχήμα 1.3, η πρόσθεση γίνεται σε τρία βήματα ως ακολούθως:

1. Ξεκινώντας από δεξιά προστίθενται 7+6. Το αποτέλεσμα είναι 13. Στο 13 "χωράει" μια οκτάδα και πέντε μονάδες. Οι μονάδες γράφονται και η οκτάδα μεταφέρεται ως κρατούμενο στην επόμενη θέση.

2. Στο επόμενο βήμα προστίθενται 3+0+1(κρατούμενο προηγούμενου βήματος)=4

3. Τέλος 2+1=3.

Τελικά $(237)_8 + (106)_8 = (345)_8$. Για να επαληθευτεί η ορθότητα του αποτελέσματος, απλά μπορούν οι δύο προσθετέοι και το αποτέλεσμα να μετατραπούν στους αντίστοιχους δεκαδικούς και να γίνει η επαλήθευση. Είναι, $(237)_8$= 2 x 8^2 +3 x 8^1 + 7 x 8^0 =128 + 24+ 7=$(159)_{10}$. Επίσης, $(106)_8$= 1 x 8^2 +0 x 8^1 + 6 x 8^0 =64 + 0+ 6=$(70)_{10}$. Το τελικό αποτέλεσμα $(345)_8$= 3 x8^2 + 4 x8^1 + 5 x8^0=192 + 32+ 5=229. Πράγματι, ισχύει ότι $(159)_{10} + (70)_{10} = (229)_{10}$.

Η δεκαεξαδική πρόσθεση, εκτελείται όπως και η δεκαδική και οκταδική, όμως πρέπει να προσεχθεί ότι τα κρατούμενα είναι δεκαεξάδες. Άρα, αν προστεθούν οι αριθμοί $(9)_{16}$ και $(A)_{16}$, το αποτέλεσμα θα προκύψει με βάση τον εξής συλλογισμό: "9+10=19, όπου το 19 περιέχει 1 δεκαεξάδα και 3 μονάδες. Η δεκαεξάδα μεταφέρεται ως κρατούμενο στο επόμενο βήμα και οι τρεις μονάδες γράφονται. Άρα $(9)_{16}$+$(A)_{16} = (13)_{16}$". Παρακάτω παρατίθεται βηματικά ο τρόπος με τον οποίο θα υλοποιηθεί η πρόσθεση των δεκαεξαδικών ποσοτήτων: $(AFD3)_{16}$ και $(106A)_{16}$. Η εκτέλεση σε μορφή βημάτων της συγκεκριμένης πρόσθεσης δίνεται στο Σχήμα 1.4. Η πρόσθεση θα γίνει σε τέσσερα βήματα ως ακολούθως:

1. Ξεκινώντας από δεξιά προστίθενται 3+A. Το αποτέλεσμα είναι D= 13. Στο 13 δεν "χωράει" δεκαεξάδα άρα γράφεται όπως είναι.

2. Στο επόμενο βήμα είναι $D+6 = 19$, το οποίο αποτελείται από 1 δεκαεξάδα και 3 μονάδες. Άρα γράφεται 3 και μεταφέρεται στο επόμενο βήμα 1 δεκαεξάδα.

$$\begin{array}{cccc} A & F & D & 3 \\ 1 & 0 & 6 & A \\ 1 & 1 & & \\ \hline C & 0 & 3 & D \end{array}$$

Σχήμα 1.4 Πρόσθεση δύο τετραψήφιων δεκαεξαδικών αριθμών

3. Στο τρίτο βήμα προστίθενται F$+0+1$ (κρατούμενο προηγούμενου βήματος)=16. Στο 16 "χωράει" μια δεκαεξάδα και 0 μονάδες, άρα γράφεται 0 και μεταφέρεται μια μονάδα στο επόμενο βήμα.

4. Στο τελευταίο βήμα προστίθενται A$+1+1$(κρατούμενο προηγούμενου βήματος)=C. Στο C$=12$ δεν "χωράει" δεκαεξάδα άρα γράφεται ως έχει.

Τελικά $(AFD3)_{16}$ + $(106A)_{16}$ = $(C03D)_{16}$. Η επαλήθευση του αποτελέσματος μπορεί να γίνει με τον τρόπο που παρουσιάστηκε στην οκταδική πρόσθεση: οι δύο προσθετέοι και το αποτέλεσμα μετατρέπονται από το δεκαεξαδικό στο δεκαδικό σύστημα και ελέγχεται αν ισχύει η ισότητα.

1.6.2 ΑΦΑΙΡΕΣΗ

Η αφαίρεση δύο αριθμών βασίζεται στην έννοια του "δανεισμού" ενός κρατουμένου, όταν το ψηφίο του μειωτέου είναι μικρότερο από το αντίστοιχο του αφαιρετέου. Η διαδικασία αυτή όμως δεν είναι εύκολη με χρήση ψηφιακών συστημάτων, για το λόγο αυτό ακολουθείται η μέθοδος της χρήσης συμπληρωμάτων. Η αφαίρεση γίνεται με χρήση συμπληρωμάτων βάσης ή βάσης μείον ένα. Έστω ότι αφαιρείται ο αριθμός N από τον αριθμό M. Στις παρακάτω παραγράφους θα περιγραφεί η διαδικασία αφαίρεσης με χρήση συμπληρωμάτων βάσης ή βάσης μείον 1 και θα δειχτεί η ορθότητά τους.

Αφαίρεση με χρήση συμπληρώματος ως προς βάση

Η διαδικασία αφαίρεσης δύο αριθμών με χρήση συμπληρώματος βάσης ακολουθεί τα εξής βήματα:

1. Προστίθεται στον μειωτέο M το συμπλήρωμα του αφαιρετέου N δηλαδή $M + r^n - N$.

2. Αν $M \geq N$ τότε το άθροισμα θα περιέχει ένα κρατούμενο το οποίο αγνοείται. Το υπόλοιπο εκτός του κρατούμενου είναι το $M - N$.

3. Αν $M < N$ τότε το άθροισμα δεν έχει κρατούμενο και για να βρεθεί το αποτέλεσμα σε κανονική μορφή θα πρέπει να ληφθεί το συμπλήρωμα του

αθροίσματος και να προστεθεί το αρνητικό πρόσημο, δεδομένου ότι αν $M < N$ ο αριθμός είναι αρνητικός.

Η απόδειξη της ορθότητας των βημάτων αυτών γίνεται ως εξής: Σύμφωνα με το πρώτο βήμα, προστίθεται στον μειωτέο M το συμπλήρωμα του αφαιρετέου N δηλαδή $M + r^n - N$. Αν $M \geq N$, το άθροισμα περιέχει κρατούμενο έναν άσσο που αγνοείται. Στην πράξη όμως αυτό σημαίνει αφαίρεση του r^n από το άθροισμα, δηλαδή $M+r^n-N-r^n = M-N$. Αν $M < N$, τότε πρέπει να ληφθεί το συμπλήρωμα του αθροίσματος, δηλαδή $\Sigma_r(M+r^n-N) = r^n-(M+r^n-N) = -M + N = -(M - N)$ που είναι το σωστό αποτέλεσμα της αφαίρεσης όταν $M < N$. Παρακάτω, ακολουθούν παραδείγματα αφαίρεσης δύο αριθμών με χρήση του συμπληρώματος βάσης στο δεκαδικό, οκταδικό, δεκαεξαδικό, και δυαδικό σύστημα αρίθμησης.

Έστω ως παράδειγμα η αφαίρεση $(82732)_{10}-(3000)_{10}$ και $(3000)_{10}-(82732)_{10}$ με χρήση του συμπληρώματος ως προς 10. Για την πρώτη πράξη, ο αριθμός 3000 αρχικά θα πρέπει να γραφεί σε πενταψήφιο με την προσθήκη ενός μηδενικού αριστερά, δηλαδή 03000. Στη συνέχεια, προστίθεται στο 82732 το συμπλήρωμα με βάση 10 του 03000. Είναι $\Sigma_{10}(03000) = 97000$. Άρα $M+N = 82732 + 97000 = 179732$. Σύμφωνα με τα βήματα της αφαίρεσης που περιγράφηκαν παραπάνω, το σωστό αποτέλεσμα λαμβάνεται αν αφαιρεθεί από 179732 η ποσότητα $r^n = 10^5 = 100000$. Άρα θα είναι $M-N = 179732-100000 = 79732$. Για τη δεύτερη πράξη, ο αριθμός 3000 θα γραφεί ξανά σε πενταψήφιο με την προσθήκη ενός μηδενικού αριστερά, δηλαδή 03000. Στον αριθμό αυτό θα προστεθεί το συμπλήρωμα ως προς 10 του 82732. Είναι $\Sigma_{10}(82732) = 17268$. Άρα: $M + N = 03000 + 17268 = 20268$. Το σωστό αποτέλεσμα λαμβάνεται αν συμπληρωθεί το άθροισμα και προστεθεί το αρνητικό πρόσημο μπροστά. Είναι $\Sigma_{10}(20268) = 79732$. Άρα $M - N = -79732$.

Έστω δύο οκταδικοί αριθμοί των οποίων ζητείται το αποτέλεσμα της αφαίρεσης, με χρήση του συμπληρώματος ως προς βάση: $(671)_8 - (37)_8$ και $(37)_8 - (671)_8$. Για την πρώτη αφαίρεση, προστίθεται στον αριθμό 671 το συμπλήρωμα ως προς 8 του 037. Είναι $\Sigma_8(037) = 741$. Άρα:$M + N = 671 + 741 = 1632$. Αφαιρώντας 8^3, ή διαφορετικά αγνοώντας τον άσσο που προκύπτει αριστερά ως κρατούμενο, το αποτέλεσμα θα είναι: $M - N = (632)_8$. Για τη δεύτερη πράξη, προστίθεται στον αριθμό 037 το συμπλήρωμα ως προς 8 του 671 ως προς 8. Είναι $\Sigma 8(671) = 107$. Επομένως: $N + N = 037 + 107 = 146$. Για να βρεθεί το σωστό αποτέλεσμα, υπολογίζεται το συμπλήρωμα του 146 και τοποθετείται σε αυτό το αρνητικό πρόσημο. Τελικά $M - N = \Sigma_8(146) = -(632)_8$.

Ομοίως με το δεκαδικό και το οκταδικό, μπορεί να υλοποιηθεί η αφαίρεση δύο δεκαεξαδικών αριθμών με συμπλήρωμα βάσης. Έστω για παράδειγμα οι πράξεις 2F1-AB και AB-2F1. Για την πρώτη αφαίρεση, προστίθεται στον αριθμό 2F1 το συμπλήρωμα ως προς 16 του 0AB. Είναι Σ_{16}(0AB)=F55. Άρα: $M + N$=2F1+F55=1246. Αφαιρώντας 16^3, ή διαφορετικά αγνοώντας τον άσσο που προκύπτει αριστερά ως κρατούμενο, το αποτέλεσμα θα είναι $M - N = (246)_{16}$. Για τη δεύτερη αφαίρεση, θα προσθέσουμε στον αριθμό 0AB το συμπλήρωμα ως προς 16 του 2F1. Είναι Σ_{16}(2F1)=D0F. Άρα: $M + N$=0AB + D0F=DBA. Για να ληφθεί σωστά το αποτέλεσμα, υπολογίζεται το συμπλήρωμα του DBA και τοποθετείται σε αυτό το αρνητικό πρόσημο. Τελικά $M-N = \Sigma_{16}$(DBA)=-(246)$_{16}$.

Η δυαδική αφαίρεση είναι αυτή, η οποία προφανώς παρουσιάζει το μεγαλύτερο ενδιαφέρον στα ψηφιακά συστήματα. Έχοντας κατανοήσει τον τρόπο υλοποίησης της αφαίρεσης με χρήση συμπληρωμάτων βάσης στα άλλα συστήματα, είναι φανερό ότι η δυαδική αφαίρεση είναι μια διαδικασία, η οποία δεν παρουσιάζει σημαντικές δυσκολίες. Πρέπει να ξεκαθαριστεί ωστόσο, ότι τα παραδείγματα αυτής της παραγράφου δεν αναφέρονται σε προσημασμένους δυαδικούς αριθμούς, των οποίων ο τρόπος εκτέλεσης των αριθμητικών πράξεων θα παρουσιαστεί στην Παράγραφο 1.7. Έστω ότι ζητείται να γίνουν οι δυαδικές αφαιρέσεις 11011-101 και 101-11011 με χρήση του συμπληρώματος ως προς 2. Στην πρώτη περίπτωση, προστίθεται στον αριθμό 11011 το συμπλήρωμα βάσης του 00101. Είναι $\Sigma_2(00101) = 11011$. Άρα:$M + N = 11011 + 11011 = 110110$. Αφαιρώντας 2^5, ή διαφορετικά αγνοώντας τον άσσο που προκύπτει αριστερά ως κρατούμενο, το τελικό αποτέλεσμα είναι: $M - N = (10110)_2$. Στη δεύτερη αφαίρεση, προστίθεται στον αριθμό 00101 το συμπλήρωμα του 11011, ως προς 2. Είναι $\Sigma_2(11011) = 00101$. Συνεπώς $M + N = 00101 + 00101 = 01010$. Το σωστό αποτέλεσμα λαμβάνεται αν συμπληρωθεί ο αριθμός 01010 και τοποθετηθεί το αρνητικό πρόσημο. Τελικά $M - N = \Sigma_2(01010) = -(10110)_2$.

Αφαίρεση με χρήση συμπληρώματος ως προς βάση μείον ένα

Το συμπλήρωμα ως προς βάση μείον ένα είναι κατά ένα μικρότερο του συμπληρώματος ως προς βάση. Τα βήματα που ακολουθούνται για να υλοποιηθεί η αφαίρεση με χρήση συμπληρώματος ως προς βάση μείον 1 είναι τα ακόλουθα:

1. Προστίθεται στον μειωτέο M το συμπλήρωμα ως προς βάση μείον 1 του αφαιρετέου N δηλαδή $M + r^n - N - 1$.

2. Αν $M \geq N$ τότε το άθροισμα θα περιέχει ένα κρατούμενο το οποίο αγνοείται. Στο υπόλοιπο εκτός του κρατούμενου προστίθεται μια μονάδα για να ληφθεί το αποτέλεσμα $M - N$.

3. Αν $M < N$ τότε το άθροισμα δεν έχει κρατούμενο και για να ληφθεί το αποτέλεσμα σε κανονική μορφή θα πρέπει να υπολογιστεί το συμπλήρωμα ως προς βάση μείον ένα του αθροίσματος και να προστεθεί το αρνητικό πρόσημο, δεδομένου ότι αν $M < N$ ο αριθμός είναι αρνητικός.

Η απόδειξη της ορθότητας των βημάτων αυτών γίνεται ως εξής: Στο πρώτο βήμα, προσθέτουμε στον μειωτέο M το συμπλήρωμα του αφαιρετέου N ως προς βάση μείον ένα δηλαδή $M + r^n - N - 1$. Αν $M \geq N$ το άθροισμα περιέχει κρατούμενο έναν άσσο που αγνοείται. Στην πράξη όμως αυτό σημαίνει αφαίρεση του r^n από το άθροισμα, δηλαδή $M + r^n - N - 1 - r^n = M - N - 1$. Επιπλέον, πρέπει να προστεθεί μια μονάδα στο αποτέλεσμα οπότε θα είναι: $M - N - 1 + 1 = M - N$. Αν $M < N$ τότε πρέπει να υπολογιστεί το συμπλήρωμα του αθροίσματος, δηλαδή $\Sigma_{r-1}(M + r^n - N - 1)$=$r^n - 1 - (M + r^n - N - 1)$= $r^n - 1 - M - r^n + N + 1$=$-M + N$= $(M - N)$ που είναι το σωστό αποτέλεσμα της αφαίρεσης όταν $M < N$. Παρακάτω θα παρουσιαστεί ο τρόπος υλοποίησης των δυαδικών αφαιρέσεων 11011-101 και 101-11011, οι οποίες είχαν γίνει και στην προηγούμενη παράγραφο με χρήση του συμπληρώματος ως προς 2. Αφήνεται στον αναγνώστη ως άσκηση να υλοποιήσει τα παραδείγματα αφαιρέσεων, με χρήση του συμπληρώματος ως προς βάση μείον ένα, στο δεκαδικό, οκταδικό, και δεκαεξαδικό σύστημα, τα οποία παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο με χρήση του συμπληρώματος βάσης.

Έστω η αφαίρεση 11011-101. Σύμφωνα με τα βήματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω, στον αριθμό 11011 προστίθεται το συμπλήρωμα βάσης μείον ένα του 00101. Είναι $\Sigma_1(00101) = 11010$. Επομένως, η πορότητα $M + N$ θα είναι ίση με 11011 +11010 =110101. Αφαιρώντας 2^5, ή διαφορετικά αγνοώντας τη μονάδα που προκύπτει αριστερά ως κρατούμενο και προσθέτοντας ένα, το τελικό αποτέλεσμα είναι: $M - N = (10110)_2$. Στη δεύτερη αφαίρεση, προστίθεται στον αριθμό 00101 το συμπλήρωμα του 11011, ως προς 1. Είναι $\Sigma_1(11011) = 00100$. Συνεπώς: $M + N$= 00101 +00100=01001. Το σωστό αποτέλεσμα λαμβάνεται αν συμπληρωθεί ως προς βάση μείον ένα ο αριθμός 01001 και τοποθετηθεί το αρνητικό πρόσημο. Τελικά $M - N = \Sigma_1(01001) = -(10110)_2$.

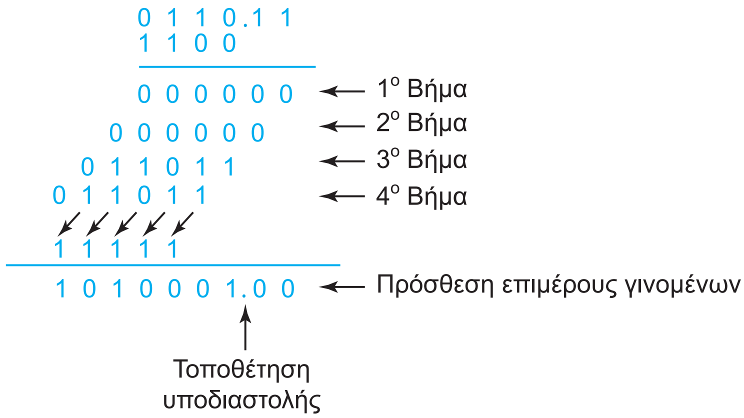
1.6.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Ο πολλαπλασιασμός ακολουθεί τους ίδιους κανόνες με το δεκαδικό σύστημα. Η πράξη του πολλαπλασιασμού στο τέλος ανάγεται σε πράξη πρόσθεσης των επιμέρους γινομένων. Για τον πολλαπλασιασμό μεταξύ δύο δυαδικών ψηφίων ισχύουν οι εξής τέσσερις περιπτώσεις:

1. 0 x 0=0
2. 0 x 1=0
3. 1 x 0=0
4. 1 x 1=1.

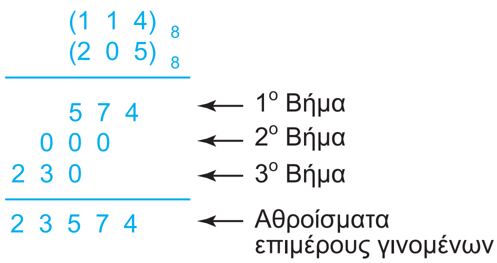
Έστω δύο δυαδικοί αριθμοί, 0110.11 και 1100, των οποίων ζητείται το γινόμενο. Ο πολλαπλασιασμός θα γίνει σύμφωνα με τους κανόνες του δεκαδικού συστήματος και βασιζόμενοι στις τέσσερις περιπτώσεις πολλαπλασιασμού μεταξύ 2 bits. Η εκτέλεση σε μορφή βημάτων του συγκεκριμένου πολλαπλασιασμού δίνεται στο Σχήμα 1.5.

Ο οκταδικός πολλαπλασιασμός ακολουθεί ακριβώς τους κανόνες του δεκα-



Σχήμα 1.5: Πολλαπλασιασμός δύο δυαδικών αριθμών

δικού. Όμως πρέπει να προσεχθεί ότι τα κρατούμενα είναι οκτάδες και όχι δεκάδες. Επομένως αν πολλαπλασιαστούν οι αριθμοί $(7)_8$ και $(6)_8$ το αποτέλεσμα θα προκύψει ως ακολούθως: 7 x 6=42, όπου το 42 περιέχει 5 οκτάδες και 2 μονάδες. Οι οκτάδες μεταφέρονται σαν κρατούμενα για το επόμενο βήμα και οι δύο μονάδες γράφονται. Άρα $(7)_8$x$(6)_8 = (52)_8$. Τα γινόμενα που θα προκύψουν προστίθενται σύμφωνα με τους κανόνες της οκταδικής πρόσθεσης. Για παράδειγμα, έστω ο πολλαπλασιασμός $(114)_8$ x $(205)_8$. Ο τρόπος υλοποίησης του δίνεται στο Σχήμα 1.6.



Σχήμα 1.6: Πολλαπλασιασμός δύο οκταδικών αριθμών

Παρόμοια με τον οκταδικό πολλαπλασιασμό υλοποιείται και ο δεκαεξαδικός, με τη διαφορά ότι τα κρατούμενα είναι δεκαεξάδες. Στο Σχήμα 1.7 δίνεται ο τρόπος υλοποίησης του δεκαεξαδικού πολλαπλασιασμού $(11F)_{16}$ x $(15B)_{16}$.

Για να γίνουν πιο κατανοητά τα αποτελέσματα της πράξης του Σχήματος 1.7, δίνεται λεκτικά ο τρόπος με τον οποίο λαμβάνεται το πρώτο επιμέρους άθροισμα (πρώτο βήμα). Ο πολλαπλασιασμός F x B δίνει αποτέλεσμα $(165)_{10}$ (F=15, B=11), το οποίο αναλύεται σε 10 δεκαεξάδες και μια πεντάδα. Επομένως, η πεντάδα γράφεται και οι 10 δεκαεξάδες μεταφέρονται ως κρατούμενο στον επόμενο πολλαπλασιασμό. Ο πολλαπλασιασμός B x 1 δίνει αποτέλεσμα $(11)_{10}$.

```
      1 1 F
      1 5 B
  -----------
      C 5 5      ← 1ο Βήμα
    5 9 B        ← 2ο Βήμα
  1 1 F          ← 3ο Βήμα
  -----------
  1 8 5 0 5      ← Αθροίσματα
                   επιμέρους γινομένων
```

Σχήμα 1.7: Πολλαπλασιασμός δύο δεκαεξαδικών αριθμών

Στο αποτέλεσμα αυτό προστίθεται το A (όπου A=10), ως κρατούμενο του προηγούμενου πολλαπλασιασμού. Η πρόσθεση A + B δίνει αποτέλεσμα $(21)_{10}$, το οποίο αναλύεται σε μια δεκαεξάδα και μια πεντάδα. Όμοια με το προηγούμενο βήμα, η πεντάδα γράφεται και η δεκαεξάδα μεταφέρονται ως κρατούμενο στον επόμενο πολλαπλασιασμό. Ο πολλαπλασιασμός B x 1 δίνει αποτέλεσμα $(11)_{10}$. Στο αποτέλεσμα αυτό προστίθεται η μονάδα, ως κρατούμενο του προηγούμενου πολλαπλασιασμού. Η πρόσθεση B+1 δίνει αποτέλεσμα C, το οποίο γράφεται ως έχει. Οι υπόλοιποι πολλαπλασιασμοί εκτελούνται ομοίως και στο τέλος προστίθενται τα επιμέρους αθροίσματα.

1.6.4 ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Η διαίρεση περιλαμβάνει μια σειρά πολλαπλασιασμών και αφαιρέσεων. Η δυαδική διαίρεση ακολουθεί τους κανόνες της δεκαδικής. Για να γίνει περισσότερο κατανοητός ο τρόπος υλοποίησης της διαίρεσης, έστω δύο δυαδικοί αριθμοί, 1101110 και 11, των οποίων ζητείται το πηλίκο. Η διαίρεση δίνεται στο Σχήμα 1.8.

```
          ↓ ↓ ↓ ↓
  1 1 0 1 1 0    | 1 1
 -1 1            |---------
 -----           | 1 0 0 1 0
  0 0 0          |
    0 0 1        |
   -  0 0        |
   ------
      0 0 1
     -  1 1
     ------
        0 0 0
       -  0 0
       ------
            0
```

Σχήμα 1.8: Διαίρεση δύο δυαδικών αριθμών

Επειδή τα bits του διαιρέτη είναι 2, κατεβάζουμε τα δύο πρώτα bits του διαιρετέου. Στη συνέχεια γίνεται ο έλεγχος αν το πηλίκο της διαίρεσης των 2 bits του διαιρετέου με το διαιρέτη δίνει πηλίκο πάνω από 1. Αν ναι, γράφεται 1 στο πηλίκο, διαφορετικά 0. Το γινόμενο το οποίο θα αφαιρεθεί από τα 2 bit του διαιρετέου, προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του πηλίκου με τον διαιρέτη. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται κατεβάζοντας το επόμενο bits του διαιρετέου και επαναλαμβάνοντας μέχρι να ολοκληρωθούν όλα τα bits.

Με παρόμοιο τρόπο με αυτόν που περιγράφηκε παραπάνω, μπορεί να υλοποιηθεί η διαίρεση μεταξύ οκταδικών (ή δεκαεξαδικών) αριθμών. Ένα παράδειγμα οκταδικής διαίρεσης δίνεται στο Σχήμα 1.9. Οι αριθμοί των οποίων το πηλίκο αναζητείται είναι οι $(220)_8$ και $(14)_8$.

$$
\begin{array}{rrr|l}
 & 2 & 2 & 0 \quad & 1\ 4 \\ \cline{5-5}
- & 1 & 4 & & 1\ 4 \\ \cline{2-3}
 & & 6 & 0 & \\
 & - & 6 & 0 & \\ \cline{2-4}
 & & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Σχήμα 1.9: Διαίρεση δύο οκταδικών αριθμών

Αρχικά διαιρείται το $(22)_8$ με $(14)_8$. Το αποτέλεσμα είναι 1 και το υπόλοιπο είναι 6. Στην συνέχεια, κατεβάζοντας το 0, προκύπτει στο διαιρετέο ο αριθμός $(60)_8$. Το $(14)_8$ στο $(60)_8$ χωράει 4 φορές. Ο πολλαπλασιασμός όμως $(14)_8$ x $(4)_8$ δίνει αποτέλεσμα $(60)_8$. Άρα δεν υπάρχει υπόλοιπο και οι δύο αριθμοί διαιρούνται ακριβώς. Πράγματι $(220)_8 = (144)_{10}$ και $(14)_8 = (12)_{10}$. Η διαίρεσή τους δίνει αποτέλεσμα $(14)_8 = (12)_{10}$.

1.7 ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟΙ ΔΥΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Στις προηγούμενες παραγράφους παρουσιάστηκε ο τρόπος αποθήκευσης σε δυαδική μορφή των θετικών αριθμών, καθώς και ο τρόπος που εκτελούνται οι πράξεις μεταξύ τους. Το ερώτημα, το οποίο προκύπτει είναι: "πως αναπαρίστανται οι αρνητικοί αριθμοί σε έναν υπολογιστή και πως ξεχωρίζουν από τους θετικούς;" Λόγω του περιορισμού ότι η πληροφορία σε έναν υπολογιστή βρίσκεται σε δυαδική μορφή (0 ή 1) είναι λογικό η αναπαράσταση του πρόσημου ενός αριθμού να γίνεται με χρήση μιας μονάδας ή μηδενικού στο αριστερό τμήμα του αριθμού. Η σύμβαση που γίνεται είναι ότι οι θετικοί αριθμοί έχουν ως αριστερότερο bit το 0 και οι αρνητικοί το 1. Για να αναπαρασταθεί ένας θετικός δεκαδικός αριθμός σε δυαδική μορφή, πρέπει να γίνει η μετατροπή βάσης με τον τρόπο που περιγράφηκε στην Παράγραφο 1.3 και στη συνέχεια να προστεθεί ένα μηδενικό στην πιο σημαντική θέση (αριστερά), το οποίο θα δηλώνει ότι ο αριθμός είναι θετικός. Οι αρνητικοί αριθμοί έχουν τρεις διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης:

1. Απεικόνιση προσημασμένου μέτρου, όπου ο αριθμός αφού μετατραπεί σε δυαδικό, γράφεται με μια μονάδα αριστερά, η οποία αναπαριστά το αρνητικό πρόσημο.

2. Απεικόνιση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 1, όπου ο αριθμός γράφεται σε μορφή συμπληρώματος ως προς 1.

3. Απεικόνιση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2, όπου ο αριθμός γράφεται σε μορφή συμπληρώματος ως προς 2.

Για παράδειγμα, ο αριθμός -20 μπορεί να γραφεί στο δυαδικό σύστημα με τους ακόλουθους τρόπους:
1. Με απεικόνιση προσημασμένου μέτρου: 1 10100
2. Με απεικόνιση προσημασμένου Σ_1: 1 01011
3. Με απεικόνιση προσημασμένου Σ_2: 1 01100.

Θα πρέπει να τονιστεί στο σημείο αυτό, ότι αν σε ένα ψηφιακό σύστημα είναι διαθέσιμα n bits για την αναπαράσταση ενός αριθμού, τότε είναι διαθέσιμα $n-1$ bit για το μέτρο του αριθμού και 1 bit για το πρόσημο. Είναι προφανές ότι για την αναπαράσταση του αριθμού $(+20)_{10}$ ή $(-20)_{10}$, δηλαδή με προσημασμένη μορφή, απαιτούνται τουλάχιστον 6 bits.

Η απεικόνιση προσημασμένου μέτρου δεν εξυπηρετεί την αριθμητική του υπολογιστή. Για παράδειγμα η πρόσθεση $(+20)_{10} + (-20)_{10}$ που πρέπει να δίνει 0, αν γίνει με δυαδικούς προσημασμένου μέτρου θα δώσει: $(010100)_2 + (110100)_2 = (1001000)_2$ που δεν ισούται με μηδέν. Επίσης, η απεικόνιση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 1 δεν χρησιμοποιείται γιατί δημιουργεί δύο παραστάσεις του μηδέν. Ο αριθμός $(00000000)_2 = +(0)_{10}$. Όμως $\Sigma_1(00000000) = (11111111)$. Άρα, οι ποσότητες $(00000000)_2$ και $(11111111)_2$ αναπαριστούν το 0. Αντίθετα, η απεικόνιση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2 αναπαριστά τον αριθμό 0 μόνο με ένα τρόπο, δεδομένου ότι $\Sigma_2(00000000) = (00000000) = (0)_{10}$. Για τον λόγο αυτό στις πράξεις μεταξύ προσημασμένων αριθμών χρησιμοποιείται η απεικόνιση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς βάση. Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζονται οι αριθμητικές πράξεις μεταξύ προσημασμένων αριθμών.

1.7.1 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Το άθροισμα δύο προσημασμένων αριθμών, όπου οι αρνητικοί είναι σε μορφή συμπληρώματος ως προς 2, προκύπτει από την πρόσθεση των δύο αυτών αριθμών, συμπεριλαμβανομένου και του bit πρόσημου. Αν υπάρχει κρατούμενο, αυτό αγνοείται. Το άθροισμα που προκύπτει είναι σε κανονική μορφή εφόσον είναι θετικό και σε μορφή συμπληρώματος ως προς 2 αν είναι αρνητικό. Παρακάτω ακολουθούν ορισμένα παραδείγματα προσθέσεων μεταξύ προσημασμένων αριθμών.

(α) $(+19)_{10} + (+13)_{10}$: Οι δύο αριθμοί είναι θετικοί. Η παράστασή τους με 8 bits, όπου το πρώτο bit είναι το πρόσημο θα γίνει ως ακολούθως: $(+19)_{10} = (00010011)_2$, $(+13)_{10} = (00001101)_2$. Το άθροισμά των δύο αριθμών θα είναι: $(00010011) + (00001101) = (00100000)_2 = (+32)_{10}$.

(β) $(+19)_{10} + (-13)_{10}$: Ο αριθμός -13 είναι αρνητικός. Η παράστασή του θα γίνει σε μορφή συμπληρώματος ως προς 2 του +13. Το +19 μένει ως έχει. Επομένως: $(+19)_{10} = (00010011)_2$, $(-13)_{10} = (11110011)_2$. Το άθροισμά θα είναι $(00010011) + (11110011) = (\mathbf{1}00000110)_2 = (+6)_{10}$. Η μονάδα στην πιο σημαντική θέση, η οποία φαίνεται με σκούρα γράμματα, είναι τελικό κρατούμενο και αγνοείται. Το υπόλοιπο $(00000110)_2 = (+6)_{10}$ είναι το αποτέλεσμα της πράξης.

(γ) $(-19)_{10} + (+13)_{10}$: Οι αριθμός -19 είναι αρνητικός. Η παράστασή του θα γίνει σε μορφή συμπληρώματος ως προς 2 του +19, δηλαδή $(-19)_{10} = (11101101)_2$. Το +13 είναι: $(00001101)_2$. Επομένως, το άθροισμά θα είναι: $(11101101) + (00001101) = (11111010)_2$. Επειδή το αποτέλεσμα είναι αρνητικό, βρίσκεται σε μορφή συμπληρώματος ως προς 2. Για να μετατραπεί σε πιο γνώριμη μορφή λαμβάνεται το συμπλήρωμά του ως προς 2, το οποίο αναπαριστά τον αντίστοιχο θετικό αριθμό. Είναι $\Sigma_2(11111010)_2 = (00000110)_2 = (6)_{10}$. Άρα, το αποτέλεσμα της πράξης που προέκυψε σε μορφή συμπληρώματος ως προς 2 είναι το δεκαδικό -6.

(δ) $(-19)_{10} + (-13)_{10}$: Οι δύο αριθμοί είναι αρνητικοί. Η παράστασή τους θα γίνει σε μορφή συμπληρώματος βάσης :$(-19)_{10} = (11101101)_2, (-13)_{10} = (11110011)_2$. Το άθροισμά είναι $(11101101) + (11110011) = (\mathbf{1}11100000)_2$. Η μονάδα στην πιο σημαντική θέση, η οποία φαίνεται με σκούρα γράμματα, είναι τελικό κρατούμενο και αγνοείται. Επειδή το αποτέλεσμα είναι αρνητικό, βρίσκεται σε μορφή συμπληρώματος ως προς 2. Για να μετατραπεί σε πιο γνώριμη μορφή, λαμβάνεται το συμπλήρωμά του ως προς 2, το οποίο αναπαριστά τον αντίστοιχο θετικό αριθμό. Είναι $\Sigma_2(11100000) = (00100000) = 32_{10}$. Άρα, το αποτέλεσμα της πράξης που προέκυψε σε μορφή συμπληρώματος ως προς 2 είναι το δεκαδικό -32.

1.7.2 ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Η αφαίρεση προσημασμένων αριθμών γίνεται λαμβάνοντας το συμπλήρωμα ως προς 2 του αφαιρετέου (συμπεριλαμβανομένου και του bit πρόσημου) και προσθέτοντας το στο μειωτέο (συμπεριλαμβανομένου και του bit πρόσημου). Τυχόν κρατούμενο αγνοείται. Τα παραδείγματα (β) και (δ) της προηγούμενης παραγράφου, δείχνουν τον τρόπο με τον οποίο υλοποιείται η αφαίρεση δύο δυαδικών αριθμών.

1.7.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού προσημασμένων αριθμών, υπάρχουν δύο περιπτώσεις, οι οποίες παρουσιάζουν ενδιαφέρον. Αρχικά, θεωρήστε την περίπτωση όπου υπάρχει ένας αρνητικός πολλαπλασιαστής και ένας αρνητικός πολλαπλασιαστέος. Η λύση είναι η κατασκευή των αναπαραστάσεων του συμπληρώματος βάσης, δεδομένου ότι η συμπλήρωση των δύο όρων θα αφήσει αναλλοίωτο το πρόσημο του γινομένου τους. Επομένως, ο πολλαπλασιασμός δύο αρνητικών αριθμών ανάγεται σε πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων θετικών αναπαραστάσεων τους, η οποία προκύπτει από το συμπλήρωμα βάσης. Στην περίπτωση που υπάρχει θετικός πολλαπλασιαστής και αρνητικός πολλαπλασιαστέος, θα πρέπει το πρόσημο του πολλαπλασιαστέου να επεκτείνεται προς τα αριστερά, στο μέγιστο δυνατό μήκος επέκτασης του γινομένου αθροισμάτων που θα προκύψει. Για παράδειγμα, θεωρήστε τον πολλαπλασιασμό των ποσοτήτων -12 και 4. Η διαδικασία επέκτασης ως προς το πρόσημο του αρνητικού πολλαπλασιαστέου δίνεται στο Σχήμα 1.10. Το bit που χρησιμοποιείται για την επέκταση, βρίσκεται μέσα σε κύκλο.

```
        1 0 1 0 0   (– 1 2)
          0 1 0 0    ( 4 )
      ------------------------
        0 0 0 0 0
      0 0 0 0 0
  1 1 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0
-----------------------
1 1 0 1 0 0 0 0
```

Σχήμα 1.10: Επέκταση πρόσημου ενός αρνητικού πολλαπλασιαστέου

1.8 ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΙΝΗΤΗΣ ΥΠΟΔΙΑΣΤΟΛΗΣ

Στις προηγούμενες παραγράφους περιγράφηκε ο τρόπος αναπαράστασης και οι αριθμητικές πράξεις μεταξύ αριθμών *σταθερής υποδιαστολής* (fixed point), όπου η θέση της υποδιαστολής είναι προκαθορισμένη. Το πρόβλημα με τους αριθμούς σταθερής υποδιαστολής είναι το σχετικά μικρό εύρος τιμών, το οποίο μπορούν να αναπαραστήσουν. Για παράδειγμα, ένας προσημασμένος αριθμός των 32 bits δεν μπορεί να αναπαραστήσει ποσότητα μεγαλύτερη από $2^{31} - 1$.

Για το λόγο αυτό, απαιτείται να βρεθεί ένας βολικός τρόπος αναπαράστασης μεγαλύτερων αριθμών (όπως αντίστοιχα και πολύ μικρών κλασματικών). Για να υλοποιηθεί αυτό, ο υπολογιστής θα πρέπει να αναπαριστά τους αριθμούς αλλά και να κάνει πράξεις με αυτούς με ένα τρόπο, ώστε η θέση της υποδιαστολής να είναι μη προκαθορισμένη αλλά προσαρμόσιμη στις υπολογιστικές ανάγκες. Επομένως, η θέση της υποδιαστολής θα πρέπει να είναι μετακινούμενη. Για το λόγο αυτό, οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται *αριθμοί κινητής υποδιαστολής (floating point numbers).* Στην παράγραφο αυτή θα περιγραφεί το πρότυπο αναπαράστασης αριθμών κινητής υποδιαστολής της IEEE (IEEE 754), το οποίο έχει επικρατήσει.

1.8.1 ΜΟΡΦΗ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΙΝΗΤΗΣ ΥΠΟΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΚΑΤΑ ΤΑ ΠΡΟΤΥΠΑ ΤΗΣ IEEE

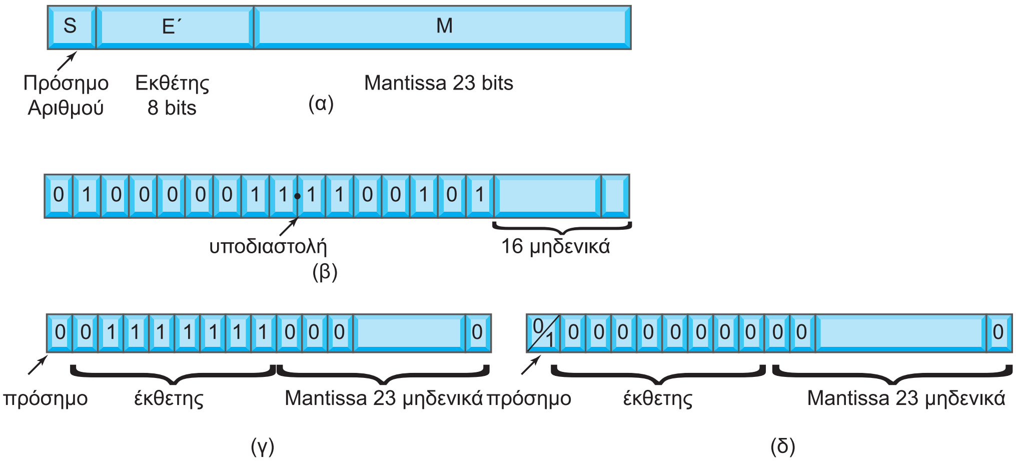
Ένας αριθμός κινητής υποδιαστολής περιλαμβάνει δύο τμήματα: Το πρώτο τμήμα καθορίζει τη θέση της υποδιαστολής και ονομάζεται *εκθέτης*. Το δεύτερο τμήμα περιλαμβάνει το κλασματικό τμήμα του αριθμού, το οποίο ονομάζεται *mantissa*. Η IEEE έχει καθορίσει ένα πρότυπο αναπαράστασης για αριθμούς κινητής υποδιαστολής τόσο των 32, όσο και των 64ων bits. Η αναπαράσταση των 32 bits απεικονίζεται στο Σχήμα 1.11(α).

Το πρόσημο του αριθμού αναπαρίσταται από το πρώτο bit (πεδίο S). Αν ο αριθμός είναι θετικός, τότε $S = 0$, διαφορετικά, αν ο αριθμός είναι αρνητικός, τότε $S = 1$. Η επόμενη οκτάδα bits αναπαριστά τον εκθέτη E. Στην πραγματικότητα, στο πεδίο του εκθέτη αποθηκεύεται αντί για τον προσημασμένο εκθέτη E, ένας μη προσημασμένος εκθέτης E', τέτοιος ώστε $E = E' - 127$. Η μορφή αυτή ονομάζεται υπέρβαση-127 (excess-127). Ο εκθέτης E' βρίσκεται στην περιοχή τιμών 0-255. Η αναπαράσταση των 32 bits ονομάζεται *αναπαράσταση απλής ακρίβειας* (single precision). Η γενική έκφραση της τιμής που αναπαριστά ένας αριθμός κινητής υποδιαστολής απλής ακρίβειας είναι $\pm 1.M$ x $2^{E'-127}$. Το πλέον σημαντικό bit της mantissa είναι πάντα 1. Το bit αυτό δεν αποθηκεύεται αλλά θεωρείται ότι βρίσκεται αριστερά της υποδιαστολής. Αυτό σημαίνει ότι τα 23 bits του πεδίου της mantissa αναπαριστούν το κλασματικό μέρος της mantissa, δηλαδή τα bits δεξιά της υποδιαστολής.

Στο Σχήμα 1.11(β) δίνεται ο τρόπος αναπαράστασης του αριθμού $(28.625)_{10}$, σύμφωνα με το πρότυπο της IEEE. Η διαδικασία εύρεσης του αριθμού είναι η εξής:

1. Καθορίζεται η τιμή του πρόσημου. Ο αριθμός είναι θετικός, άρα το αριστερότερο bit είναι ίσο με 0.

2. Αναπαρίσταται ο αριθμός σε μη προσημασμένη μορφή. Το αποτέλεσμα είναι 11100.101.



Σχήμα 1.11: (α) Πρότυπο αναπαράστασης αριθμού κινητής υποδιαστολής 32 bits της IEEE, (β) Αναπαράσταση του αριθμού 28.625 στο πρότυπο της IEEE, (γ) Αναπαράσταση του αριθμού 1 στο πρότυπο της IEEE, (δ) Αναπαράσταση του αριθμού 0 στο πρότυπο της IEEE

3. Η υποδιαστολή μετακινείται αριστερά, αφήνοντας μόνο μια μονάδα αριστερά της. Επομένως ο αριθμός γράφεται: 1.1100101. Επειδή η υποδιαστολή μετακινήθηκε 4 bits αριστερά, μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή του εκθέτη, η οποία είναι ίση με 4. Επομένως ισχύει ότι $11100.101 = 1.1100101$ x 2^4.

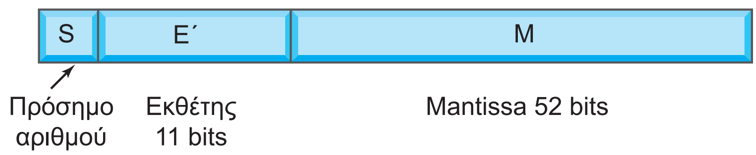
4. Το πρώτο bit δεν αποθηκεύεται. Τα υπόλοιπα bits αποτελούν το κλασματικό τμήμα του πεδίου M, το οποίο συμπληρώνεται με μηδενικά μέχρι τα 23 bit, δηλαδή: 11001010000000000000000.

5. Ο εκθέτης είναι $E = 4$. Επομένως, η τιμή του E' θα είναι 131, ώστε να είναι $E = 131 - 127 = 4$. Άρα στο πεδίο του εκθέτη θα γραφεί 10000011.

Με βάση τα παραπάνω βήματα, για να γραφεί ο αριθμός $(1)_{10}$ σύμφωνα με το πρότυπο της IEEE, θα πρέπει να γραφεί ο αριθμός σε μη προσημασμένη μορφή, δηλαδή 1.00. Επειδή το πρώτο bit δεν αποθηκεύεται, το κλασματικό τμήμα του πεδίου M θα συμπληρωθεί με 23 μηδενικά. Επιπλέον, η τιμή του εκθέτη είναι $E = 0$, άρα E'=127. Άρα η τιμή του εκθέτη θα είναι: 01111111. Η αναπαράσταση του αριθμού 1 σύμφωνα με τα πρότυπα της IEEE (υπέρβαση -127) δίνεται στο Σχήμα 1.11 (γ). Αν θελήσουμε να αναπαραστήσουμε το 0 ακολουθώντας τα βήματα που περιγράφηκαν παραπάνω, τότε προκύπτει πρόβλημα, με δεδομένο ότι το 1 και το 0 έχουν την ίδια αναπαράσταση. Για το λόγο αυτό, η τιμή του 0 έχει καθοριστεί να αναπαρίσταται με τις τιμές $E' = 0$ και $M = 0$, ενώ η τιμή του πρόσημου μπορεί να είναι 0 ή 1. Η αναπαράσταση του μηδενός δίνεται στο Σχήμα 1.11(δ).

Ορισμένες ακόμη ειδικές αναπαραστάσεις του προτύπου της IEEE αφορούν την περίπτωση που η τιμή του $E' = 255$ (όλα τα bits να είναι μονάδες). Αν $E' = 255$ και $M \neq 0$, τότε η αναπαριστώμενη τιμή είναι μη-αριθμός (Not a Number-NaN). Ένας μη αριθμός, είναι το αποτέλεσμα μιας άκυρης πράξης (πχ ρίζα αρνητικού αριθμού). Αν $M = 0$ και $E' = 255$, αναπαρίσταται η διαίρεση ενός αριθμού με το 0, το αποτέλεσμα της οποίας είναι η τιμή του άπειρου (∞). Είναι φανερό ότι οι ακραίες τιμές του εκθέτη (0 ή 255) χρησιμοποιούνται για αναπαράσταση ειδικών τιμών. Επομένως, το εύρος του εκθέτη E' για τις υπόλοιπες (πλην των ακραίων) τιμές, είναι μεταξύ του 1 και του 254. Αυτό σημαίνει ότι ο πραγματικός εκθέτης λαμβάνει τιμές μεταξύ -126 και 127.

Για να επιτευχθεί ακόμη μεγαλύτερη ακρίβεια αλλά και εύρος στους αριθμούς κινητής υποδιαστολής, η IEEE καθόρισε και ένα πρότυπο αναπαράστασης *διπλής ακρίβειας* (double precision). διπλής ακρίβειας double precision, η οποία απεικονίζεται στο Σχήμα 1.12. Η μορφή διπλής ακρίβειας είναι 64μπιτη, ο εκθέτης είναι 11 bits, σε μορφή υπέρβασης-1023. Το εύρος του E' είναι από 1 ως 2046 και οι τιμές 0 και 2047 έχουν τον ειδικό ρόλο που περιγράφηκε νωρίτερα. Ο πραγματικός εκθέτης, όμοια με τη μορφή απλής ακρίβειας, υπολογίζεται ότι βρίσκεται στο εύρος τιμών -1022 ως 1023. Το κλασματικό μέρος έχει εύρος 52 bits και 1 bit χρησιμοποιείται για το πρόσημο του αριθμού. Ένας αριθμός κινητής υποδιαστολής διπλής ακρίβειας μπορεί να αναπαραστήσει αριθμούς στο εύρος τιμών που ορίζει η ποσότητα: $\pm 1.M$ x $2^{E'-1023}$.

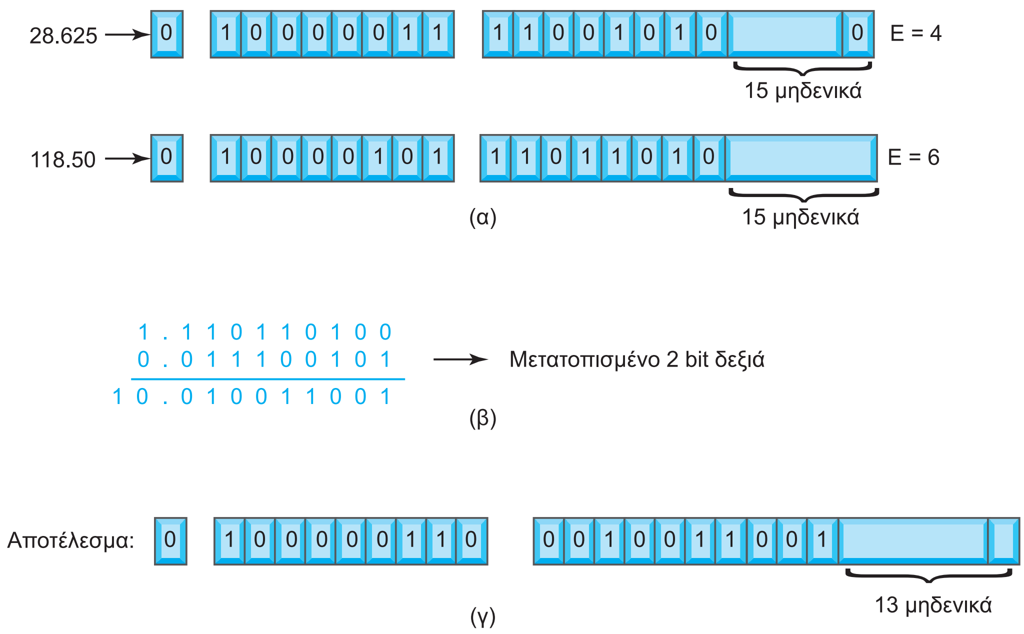


Σχήμα 1.12: Πρότυπο αναπαράστασης αριθμού κινητής υποδιαστολής 64 bits της IEEE

1.8.2 ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΚΙΝΗΤΗΣ ΥΠΟΔΙΑΣΤΟΛΗΣ

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστεί ο τρόπος με τον οποίο γίνονται οι πράξεις μεταξύ αριθμών κινητής υποδιαστολής. Έστω ότι το σύστημα χρησιμοποιεί αριθμούς κινητής υποδιαστολής απλής ακρίβειας. Η διαδικασία της πρόσθεσης δύο αριθμών κινητής υποδιαστολής περιλαμβάνει γενικά τα ακόλουθα βήματα:

1. Το κλασματικό μέρος του αριθμού με το μικρότερο εκθέτη μετατοπίζεται δεξιά τόσες θέσεις, όση είναι η διαφορά των εκθετών, ώστε οι δύο αριθμοί



Σχήμα 1.13: Πρόσθεση των αριθμών 28.625 και 118.5 σύμφωνα με τα πρότυπα της IEEE

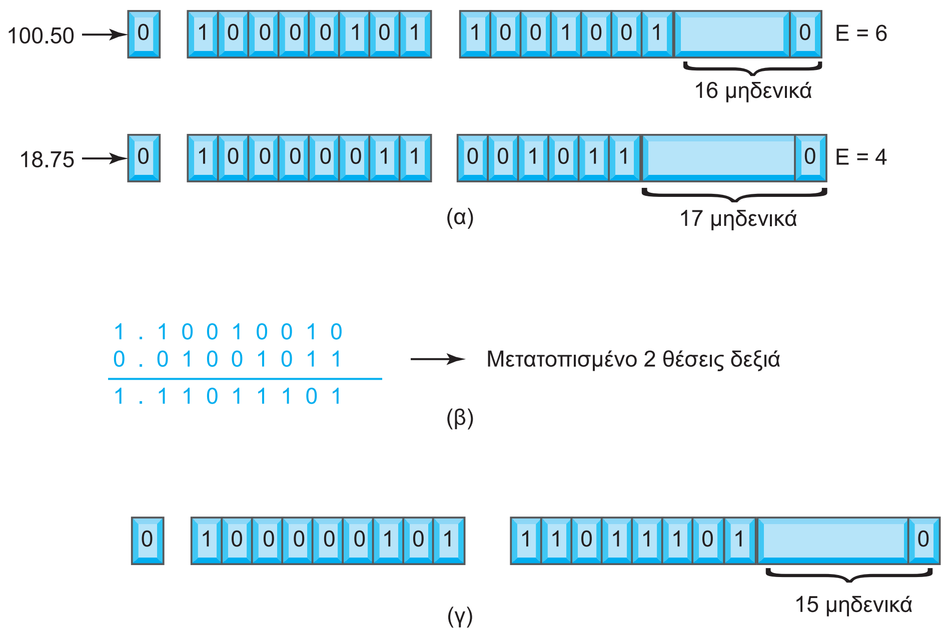
να έχουν τον ίδιο εκθέτη.

2. Προστίθενται τα δύο κλασματικά μέρη.

3. Κανονικοποιείται το αποτέλεσμα αν χρειάζεται.

Έστω ότι θέλουμε να προσθέσουμε τους αριθμούς $(28.625)_{10}$ και $(118.50)_{10}$ χρησιμοποιώντας το πρότυπο απλής ακρίβειας της IEEE. Η αναπαράσταση των αριθμών σύμφωνα με το πρότυπο, δίνεται στο Σχήμα 1.13(α). Ο εκθέτης του αριθμού 28.625 είναι 4, ενώ του 118.5 είναι 6. Σύμφωνα με το βήμα 1, θα πρέπει το κλασματικό μέρος του αριθμού 28.625 να μετακινηθεί δεξιά 2 θέσεις. Στη συνέχεια τα δύο κλασματικά μέρη προστίθενται, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.13 (β). Το αποτέλεσμα είναι μη κανονικοποιημένο επειδή αριστερά από την υποδιαστολή δεν υπάρχει αποκλειστικά μία μονάδα. Για να γίνει η κανονικοποίηση, το άθροισμα μετατοπίζεται μια θέση δεξιά, επομένως συμπεριλαμβάνει τη μονάδα που έχει προκύψει ως τελικό κρατούμενο (αριστερότερη μονάδα). Επιπλέον, ο εκθέτης αυξάνεται κατά μια μονάδα, δηλαδή λαμβάνει την τιμή 7 (επομένως. $E' = 134$). Το τελικό αποτέλεσμα δίνεται στο Σχήμα 1.13 (γ).

Σε περίπτωση που το αποτέλεσμα της πρόσθεσης των κλασματικών μερών δώσει μονάδα στο πιο σημαντικό bit, το αποτέλεσμα είναι κανονικοποιημένο.



Σχήμα 1.14: Πρόσθεση των αριθμών 100.5 και 18.75 σύμφωνα με τα πρότυπα της IEEE

Ως παράδειγμα, θεωρήστε την πρόσθεση των αριθμών $(100.5)_{10}$ και $(18.75)_{10}$. Η αναπαράσταση τους δίνεται στο Σχήμα 1.14(α). Επειδή η διαφορά των εκθετών είναι 2, το κλασματικό μέρος του αριθμού 18.75 θα μετατοπιστεί δύο θέσεις δεξιά. Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης των κλασματικών μερών δίνεται στο Σχήμα 1.14(β). Επειδή το πιο σημαντικό bit του κλασματικού μέρους είναι μονάδα δεν χρειάζεται κανονικοποίηση. Το bit αυτό δεν αποθηκεύεται και η τιμή του εκθέτη E παραμένει 6 $(E' = 133)$. Το τελικό αποτέλεσμα δίνεται στο Σχήμα 1.14 (γ).

Παρακάτω, θα περιγραφούν βηματικά και οι υπόλοιπες αριθμητικές πράξεις μεταξύ αριθμών κινητής υποδιαστολής. Αφήνεται στον αναγνώστη ως άσκηση να εφαρμόσει τα βήματα για να αφαιρέσει, πολλαπλασιάσει και διαιρέσει τους αριθμούς του προηγούμενου παραδείγματος (βλέπε Άσκηση 22). Τα βήματα υλοποίησης της αφαίρεσης ανάμεσα σε δύο αριθμούς κινητής υποδιαστολής είναι παρόμοια με εκείνα που περιγράφηκαν παραπάνω για την πρόσθεση, με εξαίρεση ότι στο δεύτερο βήμα αφαιρούνται μεταξύ τους τα δύο κλασματικά μέρη. Ο κανόνας υλοποίησης του πολλαπλασιασμού ακολουθεί τα εξής βήματα:

1. Προστίθενται οι δύο εκθέτες και αφαιρείται το 127.
2. Πολλαπλασιάζονται τα κλασματικά μέρη και καθορίζεται το πρόσημο του γινομένου που προκύπτει.
3. Κανονικοποιείται το αποτέλεσμα αν χρειαστεί.

Τα αντίστοιχα βήματα για την υλοποίηση της διαίρεσης είναι τα εξής:

1. Αφαιρούνται οι δύο εκθέτες και προστίθεται το 127.

2. Διαιρούνται τα κλασματικά μέρη και καθορίζεται το πρόσημο του γινομένου που προκύπτει.

3. Κανονικοποιείται το αποτέλεσμα αν χρειαστεί.

1.9 ΔΥΑΔΙΚΟΙ ΚΩΔΙΚΕΣ

Κάθε στοιχείο δυαδικής πληροφορίας μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα δυαδικό κώδικα. Οι κώδικες στην πραγματικότητα αναπαριστούν έναν τύπο κωδικοποιημένης πληροφορίας. Όταν μια ομάδα 2^n διακριτών στοιχείων (πχ αριθμοί ή γράμματα) πρέπει να αναπαρασταθούν με κάποιον κώδικα, αυτός απαιτείται να περιλαμβάνει τουλάχιστον $\log_2(2^n) = n$ bits, γιατί το πλήθος των bit που πρέπει να μπουν σε σειρά για να δημιουργήσουν 2^n συνδυασμούς, είναι n. Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστούν 5 κώδικες: (1) οι κώδικες BCD και excess-3, (2) ο κώδικας ισοτιμίας, (3) ο κώδικας Gray, και (4) ο αλφαριθμητικός κώδικας ASCII.

1.9.1 ΟΙ ΚΩΔΙΚΕΣ BCD ΚΑΙ EXCESS-3

Ο κώδικας BCD (Binary-Coded-Decimal- δυαδικά-κωδικοποιημένο-δεκαδικό) αντιστοιχεί ένα δεκαδικό ψηφίο με το δυαδικό του ισοδύναμο. Ο κώδικας excess-3 (υπέρβαση-3) προκύπτει από τον κώδικα BCD, προσθέτοντας σε κάθε ψηφίο του κώδικα BCD τον αριθμό 3.

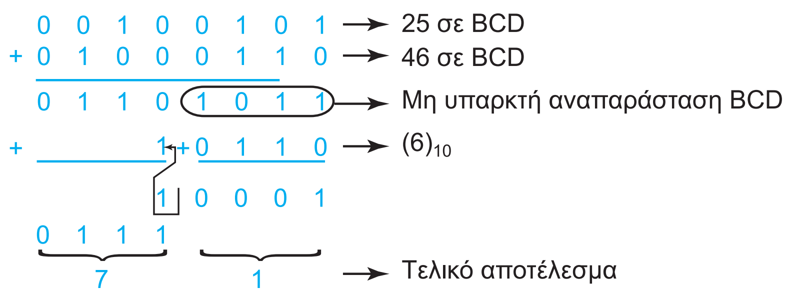
Στον Πίνακα 1.2 δίνονται τα ψηφία του δεκαδικού συστήματος και οι αντίστοιχες τιμές τους σε κώδικα BCD και excess-3. Είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσει κανείς τη διαφορά μεταξύ της μετατροπής ενός δεκαδικού αριθμού σε δυαδικό και της αναπαράστασης του σε κώδικα BCD. Για παράδειγμα, ο δεκαδικός αριθμός 49 αν μετατραπεί σε δυαδικό θα γραφεί 110001. Όμως, η αναπαράσταση του $(49)_{10}$ σε κώδικα BCD είναι 01001001. Η αναπαράσταση αυτή προκύπτει από τον Πίνακα 1.2 αν ληφθούν χωριστά οι τιμές των δεκαδικών ψηφίων 4 και 9 και έπειτα ενωθούν σε ένα byte.

Ο κώδικας BCD πρέπει να προσεχθεί όταν χρησιμοποιείται σε αριθμητικές πράξεις. Π.χ. θεωρείστε την πρόσθεση $(25)_{10} + (46)_{10}$, όπου οι αριθμοί αναπαρίστανται σε κώδικα BCD. Επομένως, 25=0010 0101 και 46=0100 0110. Το άθροισμά τους θα δώσει 0110 1011. Η πρώτη τετράδα bits αντιστοιχεί στο ψηφίο $(6)_{10}$ και η δεύτερη στον αριθμό $(11)_{10}$, ο οποίος δεν έχει αντίστοιχο στον κώδικα BCD. Η λύση στο πρόβλημα δίνεται προσθέτοντας $(6)_{10}$ στο τμήμα, το οποίο δεν έχει αντίστοιχη τιμή στον κώδικα BCD. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να

Πίνακας 1.2: Οι κώδικες BCD και excess-3

Δεκαδικό ψηφίο	BCD	excess-3
0	0000	0011
1	0001	0100
2	0010	0101
3	0011	0110
4	0100	0111
5	0101	1000
6	0110	1001
7	0111	1010
8	1000	1011
9	1001	1100

δημιουργηθεί ένα κρατούμενο, το οποίο με τη σειρά του προστίθεται στην τετράδα που βρίσκεται αριστερά. Στο παράδειγμα, η πρόσθεση 1011+0110 θα δώσει αποτέλεσμα $0001 = (1)_{10}$ και 1 κρατούμενο. Το κρατούμενο προστίθεται στην τετράδα 0110 που βρίσκεται αριστερά, δίνοντας αποτέλεσμα 0111=$(7)_{10}$. Το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει ενώνοντας τις δεκαδικές τιμές των δύο νέων τετράδων και είναι $(71)_{10}$. Τα παραπάνω φαίνονται στο Σχήμα 1.15.



Σχήμα 1.15: Λύση του προβλήματος μη υπαρκτών παραστάσεων BCD κατά την πρόσθεση 2 αριθμών.

1.9.2 ΟΙ ΚΩΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΤΤΗΣ ΚΑΙ ΑΡΤΙΑΣ ΙΣΟΤΙΜΙΑΣ

Οι κώδικες σφαλμάτων χρησιμοποιούνται για την ανίχνευση σφαλμάτων κατά τη μετάδοση δυαδικής πληροφορίας. Ειδικότερα, το bit ισοτιμίας είναι ένα πρόσθετο bit που μπαίνει σε ένα δυαδικό μήνυμα ώστε να μετατρέψει το πλήθος των άσσων του μηνύματος σε άρτιο ή περιττό. Όταν η ανίχνευση λαθών γίνεται κατά άρτια ισοτιμία, μια μονάδα προστίθεται σε ένα μήνυμα με περιττό πλήθος μονάδων, ώστε το πλήθος να μετατραπεί σε άρτιο. Αντίστοιχα, όταν η ανίχνευση λαθών γίνεται κατά περιττή ισοτιμία, μια μονάδα προστίθεται σε ένα μήνυμα με άρτιο πλήθος μονάδων, ώστε το πλήθος να μετατραπεί σε περιττό. Ο Πίνακας 1.3 δίνει 8 μηνύματα των bits και την αντίστοιχη τιμή του bit ισοτιμίας, όταν εφαρμόζεται έλεγχος περιττής και άρτιας ισοτιμίας.

Πίνακας 1.3: Περιττή και άρτια ισοτιμία

Δυαδικό μήνυμα	bit περιττής ισοτιμίας	bit άρτιας ισοτιμίας
000	1	0
001	0	1
010	0	1
011	1	0
100	0	1
101	1	0
110	1	0
111	0	1

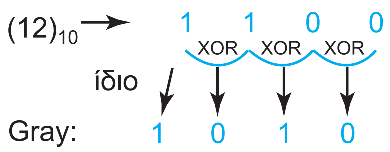
1.9.3 Ο ΚΩΔΙΚΑΣ GRAY

Ο κώδικας Gray παρέχει ένα βολικό τρόπο αναπαράστασης αριθμών, με τέτοιο τρόπο ώστε κατά τη μετάβαση μεταξύ δύο διαδοχικών αριθμών να αλλάζει μόνο 1 bit. Αυτό μπορεί να είναι χρήσιμο σε περίπτωση όπου χρησιμοποιείται μια ακολουθία αριθμών. Αν χρησιμοποιηθεί η δυαδική αναπαράσταση αριθμών, είναι πολύ πιθανό λόγω καθυστέρησης στην αλλαγή ενός bit να εμφανιστεί σφάλμα. Για παράδειγμα, η μετάβαση από το $(5)_{10}$ στο $(6)_{10}$ προϋποθέτει την αλλαγή 2 bits στο δυαδικό σύστημα, δηλαδή $101 \rightarrow 110$. Η καθυστέρηση στην αλλαγή του τελευταίου bit μπορεί να προκαλέσει μια ενδιάμεση τιμή 111, η οποία ισούται με $(7)_{10}$. Η παραγωγή του κώδικα Gray είναι μια πολύ εύκολη διαδικασία, η οποία βηματικά περιγράφεται ως ακολούθως:

1. Γράφουμε τον δεκαδικό αριθμό στη δυαδική του μορφή.

2. Το αριστερότερο (πιο σημαντικό bit) μένει ίδιο και τα bits μιας οποιασδήποτε άλλης θέσης n προκύπτουν από το λογικό ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΟ Ή του bit αυτού, με το bit που βρίσκεται στην αμέσως πιο σημαντική θέση $n + 1$.

Για τη συνάρτηση ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΟ Ή, μπορείτε να ανατρέξετε στο Κεφάλαιο 2. Ωστόσο, στο σημείο αυτό σημειώνεται ότι το ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΟ Ή δυο bits είναι 0 αν αυτά είναι ίδια μεταξύ τους και 1 αν είναι διαφορετικά. Το σύμβολο της πράξης ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΟ Ή είναι το $\oplus$. Στο Σχήμα 1.16 παρουσιάζεται η διαδικασία αναπαράστασης του αριθμού $(12)_{10}$ σε κώδικα Gray. Ο αριθμός $(12)_{10} = (1100)_2$. Η αριστερότερη μονάδα μένει ίδια. Το επόμενο bit θα είναι το ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΟ Ή του ιδίου με το πιο σημαντικό, δηλαδή $1 \oplus 1 = 0$. Το τρίτο bit από αριστερά θα είναι το ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΟ Ή του ιδίου με το δεύτερο (στην αρχική δυαδική του τιμή, όχι σε αυτή που υπολογίστηκε με το ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΟ Ή), άρα $1 \oplus 0 = 1$. Τέλος, το δεξιότερο bit υπολογίζεται από το ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΟ Ή του ιδίου με το αμέσως αριστερότερο, δηλαδή $0 \oplus 0 = 0$.



Σχήμα 1.16: Μετατροπή του αριθμού $(12)_{10}$ σε κώδικα Gray

.

Ο Πίνακας 1.4 παρουσιάζει την αναπαράσταση των πρώτων 16 αριθμών του δεκαδικού συστήματος σε κώδικα Gray. Παρατηρείστε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών αριθμών αλλάζει πάντα 1 bit. Το μοντέλο ενός μετρητή Gray σε γλώσσα VHDL δίνεται στο Κεφάλαιο 9.

Πίνακας 1.4: Κώδικας Gray

Δυαδική τιμή	Κώδικας Gray
00	0000
01	0001
02	0011
03	0010
04	0110
05	0111
06	0101
07	0100
08	1100
09	1101
10	1111
11	1110
12	1010
13	1011
14	1001
15	1000

1.9.4 Ο ΚΩΔΙΚΑΣ ASCII

Οι περισσότερες εφαρμογές απαιτούν την χρήση όχι μόνο αριθμών αλλά και δεδομένων που αποτελούνται από γράμματα και σύμβολα. Επομένως, θα πρέπει να υπάρχει ένας δυαδικός κώδικας για το αλφάβητο αλλά και για όλους τους υπόλοιπους χαρακτήρες. Ο πρότυπος (standard) κώδικας για τους αλφαριθμητικούς χαρακτήρες είναι ο ASCII (American Standard Code for Information Interchange). Ο ASCII χρησιμοποιεί 7 bits για να κωδικοποιήσει $2^7 = 128$ διαφορετικούς χαρακτήρες. Στον Σχήμα 1.17 δίνονται οι χαρακτήρες του πίνακα ASCII.

Τα αλφαριθμητικά που εισάγονται από το πληκτρολόγιο, εισάγονται με μορφή ASCII χαρακτήρων. Ο κάθε χαρακτήρας αποθηκεύεται σε 1 byte. Για παράδειγμα, η λέξη cat μπορεί να αναπαρασταθεί με ASCII bytes ως ακολούθως: Σύμφωνα με το Σχήμα 1.17, το c είναι ο χαρακτήρας με αριθμό $(99)_{10}$ ή διαφορετικά, $(63)_{16}$. Το δυαδικό ισοδύναμο των αριθμών αυτών είναι $(01100011)_2$. Όμοια, το a είναι ο χαρακτήρας με αριθμό $(99)_{10}$ ή διαφορετικά $(61)_{16}$. Η αντίστοιχη δυαδική τιμή για τους αριθμούς αυτούς είναι $(01100001)_2$. Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει ότι ο χαρακτήρας t γράφεται με μια οκτάδα bits ως: $(01110100)_2$. Τελικά η λέξη cat σε κώδικα ASCII γράφεται: 01100011 01100001 01110100.

1.10 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Γράψτε τους πρώτους 16 αριθμούς με βάση αρίθμησης το 12.

2. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος και ο μικρότερος μη προσημασμένος αριθμός που μπορεί να παρασταθεί με 8 bits;

3. Μετατρέψτε σε δεκαδικούς τους αριθμούς: 1011001.11, 1001001, .1001.

4. Μετατρέψτε τους αριθμούς από την δοσμένη βάση σε δεκαδικούς: $(1211)_3$, $(4322)_5$, $(7811)_9$.

5. Μετατρέψτε τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς σε δυαδικούς, οκταδικούς και δεκαεξαδικούς: 7112.32, 185.195

6. Να βρεθεί η τιμή της βάσης r αν $(211)_r = (152)_8$

7. Με δεδομένο ότι $3^2 = 9$, να φτιάξετε μια διαδικασία μετατροπής από σύστημα με βάση το 3 σε σύστημα με βάση 9. Χρησιμοποιήστε την διαδικασία αυτή για να μετατρέψετε τον αριθμό $(1202001)_3$ στον αντίστοιχο αριθμό βάσης 9.

Dec	Hex	Abbr	CTRL	Dec	Hex	CHR	Dec	Hex	CHR	Dec	Hex	CHR
0	0	NUL	^@	32	20	SP	64	40	@	96	60	`
1	1	SOH	^A	33	21	!	65	41	A	97	61	a
2	2	STX	^B	34	22	"	66	42	B	98	62	b
3	3	ETX	^C	35	23	#	67	43	C	99	63	c
4	4	EOT	^D	36	24	$	68	44	D	100	64	d
5	5	ENQ	^E	37	25	%	69	45	E	101	65	e
6	6	ACK	^F	38	26	&	70	46	F	102	66	f
7	7	BEL	^G	39	27	'	71	47	G	103	67	g
8	8	BS	^H	40	28	(	72	48	H	104	68	h
9	9	HT	^I	41	29	)	73	49	I	105	69	i
10	0A	LF	^J	42	2A	*	74	4A	J	106	6A	j
11	0B	VT	^K	43	2B	+	75	4B	K	107	6B	k
12	0C	FF	^L	44	2C	,	76	4C	L	108	6C	l
13	0D	CR	^M	45	2D	-	77	4D	M	109	6D	m
14	0E	SO	^N	46	2E	.	78	4E	N	110	6E	n
15	0F	SI	^O	47	2F	/	79	4F	O	111	6F	o
16	10	DLE	^P	48	30	0	80	50	P	112	70	p
17	11	DC1	^Q	49	31	1	81	51	Q	113	71	q
18	12	DC2	^R	50	32	2	82	52	R	114	72	r
19	13	DC3	^S	51	33	3	83	53	S	115	73	s
20	14	DC4	^T	52	34	4	84	54	T	116	74	t
21	15	NAK	^U	53	35	5	85	55	U	117	75	u
22	16	SYN	^V	54	36	6	86	56	V	118	76	v
23	17	ETB	^W	55	37	7	87	57	W	119	77	w
24	18	CAN	^X	56	38	8	88	58	X	120	78	x
25	19	EM	^Y	57	39	9	89	59	Y	121	79	y
26	1A	SUB	^Z	58	3A	:	90	5A	Z	122	7A	z
27	1B	ESC		59	3B	;	91	5B	[	123	7B	{
28	1C	FS		60	3C	<	92	5C	\	124	7C	|
29	1D	GS		61	3D	=	93	5D	]	125	7D	}
30	1E	RS		62	3E	>	94	5E	^	126	7E	~
31	1F	US		63	3F	?	95	5F	_	127	7F	DEL

Σχήμα 1.17: Ο κώδικας ASCII

.

8. Φτιάξτε μια διαδικασία μετατροπής από σύστημα με βάση το 9 σε σύστημα με βάση το 3 και χρησιμοποιήστε την για να κάνετε την μετατροπή του

αριθμού $(623)_9$ στον αντίστοιχο με βάση 3.

9. Να υπολογίσετε τα συμπληρώματα ως προς βάση των παρακάτω αριθμών: $(1001.11)_2$, $(671.8)_9$, $(543)_6$

10. Προσθέστε και πολλαπλασιάστε τους παρακάτω αριθμούς χωρίς να τους μετατρέψετε σε δεκαδικούς:

    (α) $(362)_8 + (715)_8$,
    (β) $(15F)_{16}$+$(87E)_{16}$,
    (γ) $(110101)_2 + (010101)_2$.

11. Να εκτελέσετε τις παρακάτω αφαιρέσεις χρησιμοποιώντας συμπλήρωμα ως προς βάση και ως προς βάση μείον 1:

    (α) $(5230)_{10} - (12222)_{10}$,
    (β) $(7754)_8 - (462)_8$,
    (γ) $(3FFD)_{16}$-$(122FF)_{16}$.

12. Να εκτελέσετε τις παρακάτω διαιρέσεις:

    (α) $(441)_2 : (21)_2$,
    (β) $(121)_{16} : (11)_{16}$,
    (γ) $(111111)_2 : (1001)_2$.

13. Δημιουργήστε έναν κανόνα για να βρίσκετε το συμπλήρωμα με βάση το 2 ενός αριθμού του τριαδικού συστήματος, χωρίς να αφαιρείτε όλα τα ψηφία από 2. Να βρείτε το $\Sigma_2(1012201)_3$.

14. Εκτελέστε τις αριθμητικές πράξεις (-54)+(-17), (-35)-(-12), (54)+(-19), (100)-(57). Οι αριθμοί στις παρενθέσεις είναι δεκαδικοί και πρέπει να μετατραπούν σε δυαδικούς και να παρασταθούν σε 8μπιτο προσημασμένο αριθμό.

15. Οι δυαδικοί παρακάτω είναι προσημασμένοι και είναι σε μορφή συμπληρώματος ως προς 2 αν είναι αρνητικοί. Να γίνουν οι πράξεις:

    (α) 101011 + 101000,
    (β) 101011 - 101000,
    (γ) 011011 - 000011,
    (δ) 011011 - 100011

16. Να γίνουν οι πράξεις:

    (α) (-128)+(4080),

(β) (-4032)+(128),

(γ) (-16383)+(4092),

(δ) (-32767)+(8192)

αφού οι δεκαδικοί αριθμοί μετατραπούν στο δυαδικό σύστημα.

17. Να κατασκευάσετε μια απλή διαδικασία μετατροπής αριθμών από το τετραδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα και αντίστροφα. Με βάση την διαδικασία, να κάνετε τις μετατροπές: $(322103)_4 = ()_{16}$ και (F982)$_{16}$=( )$_4$.

18. Να βρεθούν πέντε αριθμοί $x_1 - x_5$ για τους οποίους ισχύει: $\Sigma_{r-1}(x_1) = \Sigma_{r-1}(x_2) = \Sigma_{r-1}(x_3) = \Sigma_{r-1}(x_4) = \Sigma_{r-1}(x_5) = 1110$. Να δοθεί η αντίστοιχη τιμή των αριθμών στο δεκαδικό σύστημα.

19. Δίνονται 2 αριθμοί N_1 και N_2, όπου $N_2 = \Sigma r - 1(N_1)$ ή $N_2 = \Sigma r(N_1)$. Να βρεθεί πότε μπορεί να είναι $N_1 = N_2$ στα συστήματα από το δυαδικό ως το πενταδικό. Πόσοι είναι οι συνδυασμοί των N_1 και N_2 συνολικά;

20. Να βρεθούν ο μικρότερος και ο μεγαλύτερος προσημασμένος αριθμός που μπορούν να αναπαρασταθούν σε μορφή συμπληρώματος βάσης αν έχετε στη διάθεση σας 16 bits.

21. Να εκτελεστεί η πρόσθεση, η αφαίρεση, ο πολλαπλασιασμός, και η διαίρεση μεταξύ των αριθμών 2^4 x 0.25 και 2^7 x 0.0625 με βάση τους κανόνες των αριθμητικών πράξεων για αριθμούς κινητής υποδιαστολής που ορίστηκαν στην Παράγραφο 1.8.2. Να κανονικοποιηθεί το αποτέλεσμα, όπου χρειαστεί.

22. Να εκτελεστεί η αφαίρεση, ο πολλαπλασιασμός, και η διαίρεση μεταξύ των αριθμών 100.5 και 18.75 με βάση τους κανόνες των αριθμητικών πράξεων για αριθμούς κινητής υποδιαστολής που ορίστηκαν στην Παράγραφο 1.8.2. Να κανονικοποιηθεί το αποτέλεσμα, όπου χρειαστεί.

23. Να επαναλάβετε την Άσκηση 23 για τους αριθμούς 118.5 και 28.625.

24. Να γράψετε με ASCII bytes την φράση: "VHDL - PROGRAMMING LANGUAGE". Σημειώνεται ότι τα κενά είναι χαρακτήρες και ότι οι κεφαλαίοι χαρακτήρες είναι διαφορετικοί από τους πεζούς.