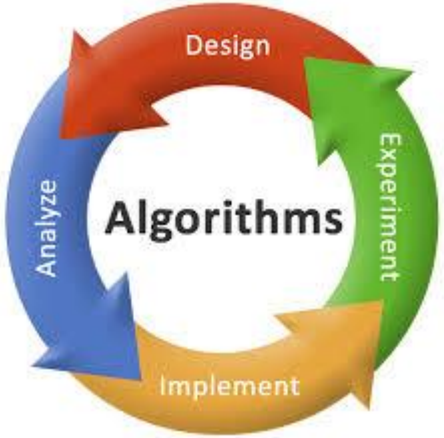


# Γραμμική Άλγεβρα
# (*Linear Algebra*)

**ΑΓΓΕΛΟΣ ΣΙΦΑΛΕΡΑΣ**

**Καθηγητής**

$2^{η}$ Διάλεξη (Θεωρία)

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

CMOR Lab

**Computational Methodologies and Operations Research**

# Παραδείγματα υπολογισμού του μέτρου ενός δ/τος

Έστω το διάνυσμα: $v = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

Να βρεθεί το μέτρο του δ/τος $v$.

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {v_i}^2} = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-5)^2} = 5{,}9161$$

# Εισαγωγή στους πίνακες

- Σύμβολα $\sum$ & $\prod$

π.χ., το άθροισμα όλων των στοιχείων ενός $2\times 3$ πίνακα A μπορεί να γραφτεί ως:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}$$

π.χ., το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου ενός $n\times n$ πίνακα $A = [a_{ij}]$ μπορεί να γραφτεί ως:

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

- Δύο χρήσιμοι τύποι είναι οι:

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

# Πράξεις με πίνακες

- <u>Πρόσθεση πινάκων</u>

*Άθροισμα* (*sum*) των $m \times n$ πινάκων $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ λέγεται ο $m \times n$ πίνακας $\Gamma = [c_{ij}]$ του οποίου κάθε στοιχείο $c_{ij}$ είναι το άθροισμα των αντιστοίχων στοιχείων των $A$ και $B$, δηλαδή:

$$A + B = \Gamma \Leftrightarrow \forall\ (i,j),\ a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$$

<u>Παράδειγμα</u>:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & x & 2 \\ z+3 & 5 & y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5-x & -2 \\ -3 & 4+x & 3-y \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Τότε:

$$A + B = \begin{bmatrix} -3+2 & x+(5-x) & 2-2 \\ (z+3)-3 & 5+(4+x) & y+(3-y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ z & 9+x & 3 \end{bmatrix}$$

A + C ? B + C ?

# Πράξεις με πίνακες

- Στο σύνολο $M_{m,n}(\mathrm{R})$ ορίζεται η **πρόσθεση πινάκων**, η οποία έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Προσεταιριστική, $\forall A, B, \Gamma \in M_{m,n},\ (A + B) + \Gamma = A + (B + \Gamma)$
2. Αντιμεταθετική, $\forall A, B \in M_{m,n},\ A + B = B + A$
3. Ουδέτερο στοιχείο, $\forall A \in M_{m,n},\ A + \mathrm{O}_{m,n} = \mathrm{O}_{m,n} + A = A$
4. Αντίθετος πίνακα, $\forall A \in M_{m,n},\ A + (-A) = (-A) + A = \mathrm{O}_{m,n}$

- Ισχύει ότι:

$$\forall A, B \in M_{m,n},\ (A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$$

# Πράξεις με πίνακες

- *ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Πρόσθεσης Πινάκων*

*Δεδομένα Εισόδου:* $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{kl}]$ , $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, p$ και $l = 1, \ldots, s$

*Βήμα* 1$^{ο}$: Έλεγχος αν οι πίνακες $A$ και $B$ είναι του ιδίου μεγέθους. Αν όχι, Τέλος (η πρόσθεση πινάκων δεν ορίζεται)

*Βήμα* 2$^{ο}$: Υπολογισμός του αθροίσματος $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall(i, j)$

*Αποτελέσματα Εξόδου:* $A+B$

***<u>Ψευδοκώδικας</u>***

**Συνάρτηση** *ΆθροισμαΠινάκων*($A$, $B$)

    **Για** $i = 1$ **μέχρι** $m$ **και** $j = 1$ **μέχρι** $n$

        $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

# *NumPy Array Broadcasting*

https://docs.scipy.org/doc/numpy-1.13.0/user/basics.broadcasting.html

https://www.tensorflow.org/xla/broadcasting

http://deeplearning.net/software/theano/tutorial/broadcasting.html

“Broadcasting is a mechanism which allows tensors with different numbers of dimensions to be added or multiplied together by (virtually) replicating the smaller tensor along the dimensions that it is lacking.

Broadcasting is the mechanism by which a scalar may be added to a matrix, a vector to a matrix or a scalar to a vector.”

# *NumPy Array Broadcasting* (παραδείγματα)

**# broadcast scalar to one-dimensional array**

```
# broadcast scalar to
# one-dimensional array
from numpy import array
# define array
a = array([1, 2, 3])
print(a)
# define scalar
b = 2
print(b)
# broadcast
c = a + b
print(c)
```

```
[1 2 3]
2
[3 4 5]
```

**# broadcast scalar to two-dimensional array**

```
# broadcast scalar to
# two-dimensional array
from numpy import array
# define array
A = array([
[1, 2, 3],
[1, 2, 3]])
print(A)
# define scalar
b = 2
print(b)
# broadcast
C = A + b
print(C)
```

```
[[1 2 3]
 [1 2 3]]
2
[[3 4 5]
 [3 4 5]]
```

**# broadcast one-dimensional array to two-dimensional array**

```
# broadcast one-dimensional array
# to two-dimensional array
from numpy import array
# define two-dimensional array
A = array([
[1, 2, 3],
[1, 2, 3]])
print(A)
# define one-dimensional array
b = array([1, 2, 3])
print(b)
# broadcast
C = A + b
print(C)
```

```
[[1 2 3]
 [1 2 3]]
[1 2 3]
[[2 4 6]
 [2 4 6]]
```

# Πράξεις με πίνακες

- Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα

*Γινόμενο* του αριθμού $\lambda$ με τον $m \times n$ πίνακα $A = [a_{ij}]$ λέγεται ο $m \times n$ πίνακας $\Gamma = [c_{ij}]$ του οποίου κάθε στοιχείο $c_{ij}$ είναι το γινόμενο του αντίστοιχου στοιχείου του $A$ με τον $\lambda$, δηλαδή:

$$\lambda A = \Gamma \Leftrightarrow \forall\, (i,j),\ \lambda a_{ij} = c_{ij}$$

Ισχύουν οι ιδιότητες:

$$\forall \lambda \in \mathrm{R},\ \forall A, B \in M_{m,n},\ \ \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$

$$\forall \lambda, \mu \in \mathrm{R},\ \forall A \in M_{m,n},\ \ (\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$$

$$\forall \lambda, \mu \in \mathrm{R},\ \forall A \in M_{m,n},\ \ \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$$

$$\forall A \in M_{m,n},\ \ 1A = A$$

Το γινόμενο αριθμού με πίνακα ονομάζεται **βαθμωτό γινόμενο** (*scalar product*). Ισχύει ότι:

$$\forall \lambda \in \mathrm{R},\ \forall A \in M_{m,n},\ \ (\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$$

# Πράξεις με πίνακες

<u>Παράδειγμα</u>:

Έστω:

$$A=\begin{bmatrix} -3 & x & 2 \\ z+3 & 5 & y \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 5-x & -2 \\ -3 & 4+x & 3-y \end{bmatrix}$$

τότε:

$$2B = \begin{bmatrix} 2\cdot 2 & 2(5-x) & 2\cdot(-2) \\ 2\cdot(-3) & 2\cdot(4+x) & 2\cdot(3-y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10-2x & -4 \\ -6 & 8+2x & 6-2y \end{bmatrix}$$

και:

$$A + 2B = \begin{bmatrix} -3 & x & 2 \\ z+3 & 5 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 10-2x & -4 \\ -6 & 8+2x & 6-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10-x & -2 \\ z-3 & 13+2x & 6-y \end{bmatrix}$$

# Πολλαπλασιασμός πινάκων

*Γινόμενο* του $m \times n$ πίνακα $A = [a_{ij}]$ με τον $n \times s$ πίνακα $B = [b_{jk}]$ λέγεται ο $m \times s$ πίνακας $C = [c_{ij}]$ του οποίου **κάθε στοιχείο $c_{ij}$ είναι το εσωτερικό γινόμενο της $i$-γραμμής του $A$ και της $j$-στήλης του $B$**, ή με άλλα λόγια, το άθροισμα των γινομένων των $n$ στοιχείων της $i$-γραμμής του $A$ με τα αντίστοιχα $n$ στοιχεία της $j$-στήλης του $B$, δηλ.:

$$AB = \begin{bmatrix} A_{(1)} \cdot B^{(1)} & A_{(1)} \cdot B^{(2)} & \cdots & A_{(1)} \cdot B^{(s)} \\ A_{(2)} \cdot B^{(1)} & A_{(2)} \cdot B^{(2)} & \cdots & A_{(2)} \cdot B^{(s)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{(m)} \cdot B^{(1)} & A_{(m)} \cdot B^{(2)} & \cdots & A_{(m)} \cdot B^{(s)} \end{bmatrix} = C$$

Έτσι:

$$AB = C \Leftrightarrow \forall\ (i,j),\ c_{ij} = (a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in}) \cdot (b_{1j}\ b_{2j}\ \ldots\ b_{nj})^{\mathrm{T}} = A_{(i)} \cdot B^{(j)}$$

$$\Leftrightarrow \forall\ (i,j),\ c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

$$\Leftrightarrow \forall\ (i,j),\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

# Παραδείγματα πολλαπλασιασμού πινάκων

Έστω: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Να βρεθεί το γινόμενο A B

τότε: $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \left[ (2)(1) + (3)(2) + (-4)(3) \right] = [-4] = -4$

# Παραδείγματα πολλαπλασιασμού πινάκων

Έστω: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Να βρεθεί το γινόμενο A B

τότε: $AB = \left[ \left(2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-4) \cdot 3\right) \quad \left(2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + (-4) \cdot 6\right) \right] = \begin{bmatrix} -4 & -1 \end{bmatrix}$

# Παραδείγματα πολλαπλασιασμού πινάκων

Έστω: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$

Να βρεθεί το γινόμενο A B

τότε: $AB = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{bmatrix}$

# Παραδείγματα πολλαπλασιασμού πινάκων

Έστω: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Να βρεθεί το γινόμενο A B

τότε: $AB = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

…το γινόμενο B A ?

# Παραδείγματα πολλαπλασιασμού πινάκων

Έστω: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Να βρεθούν τα γινόμενα A B και B A

τότε: $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $BA = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

Ισχύει ότι: $AB \neq BA$

και επίσης: $AB = \mathrm{O} \nRightarrow A = \mathrm{O}$ ή $B = \mathrm{O}$.

# Παραδείγματα πολλαπλασιασμού πινάκων

Έστω: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ και $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Να βρεθούν τα γινόμενα A B και A C

τότε: $AB = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ και $AC = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

Παρά το γεγονός ότι $A \neq O$, ισχύει ότι: $AB = AC \not\Rightarrow B = C$

# Αναπαράσταση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων

Ισότητα πινάκων

Πολλαπλασιασμός πινάκων

} δυνατότητα βολικής αναπαράστασης ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων

π.χ.

$$\begin{cases} 3x+3y-z+4w-2t=14 \\ x-y+7z-w=-2 \\ 5x+y+13z+2w-2t=10 \\ 2x+4y-8z+5w-2t=16 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 7 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 13 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -8 & 5 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ t \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 14 \\ -2 \\ 10 \\ 16 \end{bmatrix}}_{B}$$

A X = B

# Αναπαράσταση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων

Γενικά ένα γραμμικό σύστημα $m \times n$ μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

που με τη βοήθεια των πινάκων γράφεται

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Τότε το γραμμικό σύστημα γράφεται σύντομα σαν εξίσωση πινάκων:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

# Αναπαράσταση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων

Αν οι σταθεροί όροι ενός γραμμικού συστήματος είναι όλοι ίσοι με το μηδέν, τότε το σύστημα θα ονομάζεται **ομογενές** και ισχύει:

$$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{O}$$

Σε ένα γραμμικό σύστημα $m \times n$, ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, συμπληρωμένος με τη στήλη των σταθερών όρων, δηλαδή ο $m \times (n+1)$ πίνακας:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

λέγεται **επαυξημένος πίνακας** του συστήματος και παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση του συστήματος.

# Ιδιότητες πολλαπλασιασμού πινάκων

Στο σύνολο $M_n$ των $n{\times}n$ πινάκων ορίζεται πάντοτε ο πολλαπλασιασμός πινάκων και ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- Προσεταιριστική, $\forall A, B, \Gamma \in M_n,\ (AB)\Gamma = A(B\Gamma)$
- Ουδέτερο στοιχείο, $\forall A \in M_n,\ AI_n = I_nA = A$
- Αντιμεταθετική, **δεν ισχύει**

Αν για τους πίνακες $A$, $B$ είναι $AB = BA$ τότε λέμε ότι αυτοί *αντιμετατίθενται*.

# Ιδιότητες πολλαπλασιασμού πινάκων

- Αντίστροφο στοιχείο, **δεν έχουν όλοι οι τετραγωνικοί πίνακες αντίστροφο**

Αν υπάρχει ο αντίστροφος $A^{-1}$ του $A \in M_n$ μπορούμε να γράφουμε

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Επίσης, αν $A$, $B$ είναι αντιστρέψιμοι πίνακες τότε,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

- ✓ Αν $A$ είναι ένας $m{\times}n$ πίνακας, τότε ο $X$ είναι ένας **δεξιός αντίστροφος** του $A$ αν ο $X$ είναι ένας $n{\times}m$ πίνακας που ικανοποιεί την: $AX = I_m$
- ✓ Ανάλογα, αν ο $Y$ είναι ένας $n{\times}m$ πίνακας τότε ο $Y$ είναι ένας **αριστερός αντίστροφος** του $A$ αν: $YA = I_n$
- ✓ Αν ο $A$ είναι $n{\times}n$ πίνακας αντιστρέψιμος, τότε $X = Y = A^{-1}$.

# Ιδιότητες πολλαπλασιασμού πινάκων

και αν $A, B, \Gamma \in M_n$ και ο $\Gamma$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας, τότε:

$$\text{(i)} \quad A\Gamma = B\Gamma \Rightarrow A = B \quad \text{και} \quad \Gamma A = \Gamma B \Rightarrow A = B$$

$$(ii) \quad A\Gamma = B \Rightarrow A = B\Gamma^{-1} \quad \text{και} \quad \Gamma A = B \Rightarrow A = \Gamma^{-1}B$$

- Επιμεριστική, $A(B + \Gamma) = AB + A\Gamma$ και $(B + \Gamma)A = BA + \Gamma A$

# Παράδειγμα με πολλαπλασιασμό πινάκων

Να γίνει ο εξής πολλαπλασιασμός:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\left(4\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=$$

$$=4\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=4\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & -4\\ 4 & 8\end{bmatrix}$$

Προσπαθούμε πάντα να αξιοποιούμε τις ιδιότητες ώστε να απλοποιούμε τις πράξεις και να έχουμε ταχύτερους υπολογισμούς!