Γραμμική Άλγεβρα
(*Linear Algebra*)

ΑΓΓΕΛΟΣ ΣΙΦΑΛΕΡΑΣ

Καθηγητής

12η Διάλεξη (Θεωρία)

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

CMOR Lab
Computational Methodologies and Operations Research

4ο παράδειγμα, (1/7)

Άσκηση.
Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα: $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

Λύση.
Είναι: $$A-\lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 5 \\ -2 & -4-\lambda \end{bmatrix}$$

οπότε: $$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(-4 - \lambda) - 5(-2) = \lambda^2 + \lambda - 2$$

Έτσι προκύπτουν οι δυο ιδιοτιμές (ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου):

$$\lambda = 1 \qquad \& \qquad \lambda = -2$$

4ο παράδειγμα, (2/7)

Λύση (συνέχεια).

Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ = 1, λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση ιδιοτιμών:

$$(A-\lambda I)x=\left(\begin{bmatrix}3 & 5\\ -2 & -4\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\acute{\eta}\qquad \begin{bmatrix}2 & 5\\ -2 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\qquad \acute{\eta}\qquad \begin{cases}2x_1+5x_2=0\\ -2x_1-5x_2=0\end{cases}$$

Άρα, η λύση του συστήματος είναι ($-5/2\ x_2$, x_2), οπότε το ιδιοδιάνυσμα για λ = 1, ισούται με:

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5/2\ x_2\\ x_2\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}-5/2\\ 1\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}-2.5\\ 1\end{bmatrix}$$

4ο παράδειγμα, (3/7)

<u>Λύση (συνέχεια)</u>.

Αντίστοιχα, για λ = –2, έχουμε:

$$(A-\lambda I)x = \left(\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} - (-2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\acute{\eta} \quad \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \acute{\eta} \quad \begin{cases} 5x_1 + 5x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Άρα, η λύση του συστήματος είναι $(-x_2, x_2)$, οπότε το ιδιοδιάνυσμα για λ = –2, ισούται με:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4ο παράδειγμα, (4/7)

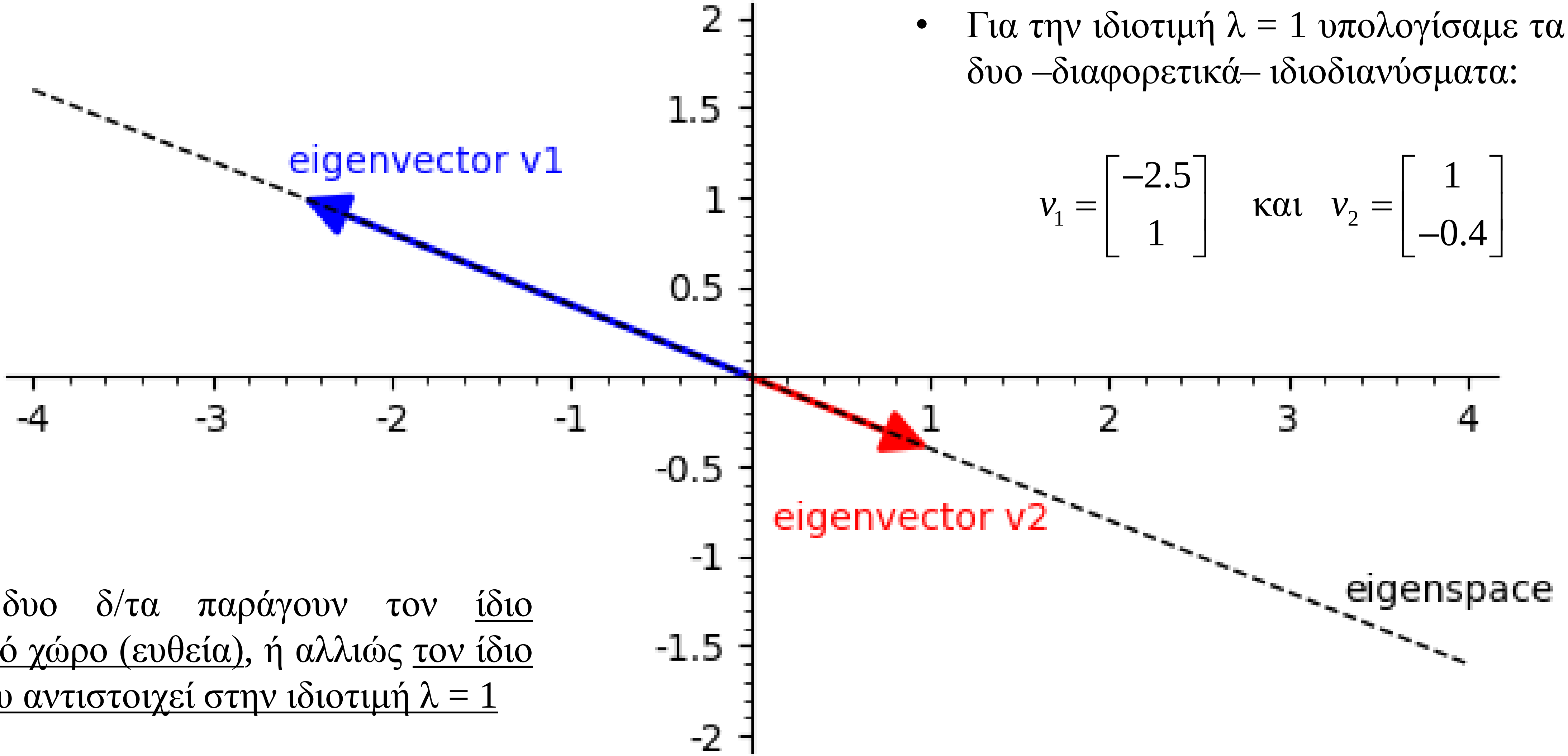
- Κατά την επίλυση των προηγουμένων συστημάτων, ακόμη και να είχαμε επιλέξει διαφορετική ελεύθερη μεταβλητή και να προκύπτανε διαφορετικά ιδιοδιανύσματα, δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα…

- Τα ιδιοδιανύσματα δεν είναι μοναδικά, αποτελούν απλά διαφορετικές βάσεις του ιδίου όμως ιδιοχώρου.

Στην περίπτωση της ιδιοτιμής λ = 1, θα μπορούσαμε να λύσουμε την αντίστοιχη εξίσωση ιδιοτιμών με διαφορετικό τρόπο και έτσι να βρούμε ένα εναλλακτικό ιδιοδιάνυσμα:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 0 \\ -2x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -\frac{2}{5}x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.4 \end{bmatrix}$$

4ο παράδειγμα, (5/7)



- Για την ιδιοτιμή λ = 1 υπολογίσαμε τα δυο –διαφορετικά– ιδιοδιανύσματα:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2.5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.4 \end{bmatrix}$$

- Αυτά τα δυο δ/τα παράγουν τον <u>ίδιο διανυσματικό χώρο (ευθεία)</u>, ή αλλιώς <u>τον ίδιο ιδιοχώρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ = 1</u>

4ο παράδειγμα, (6/7)

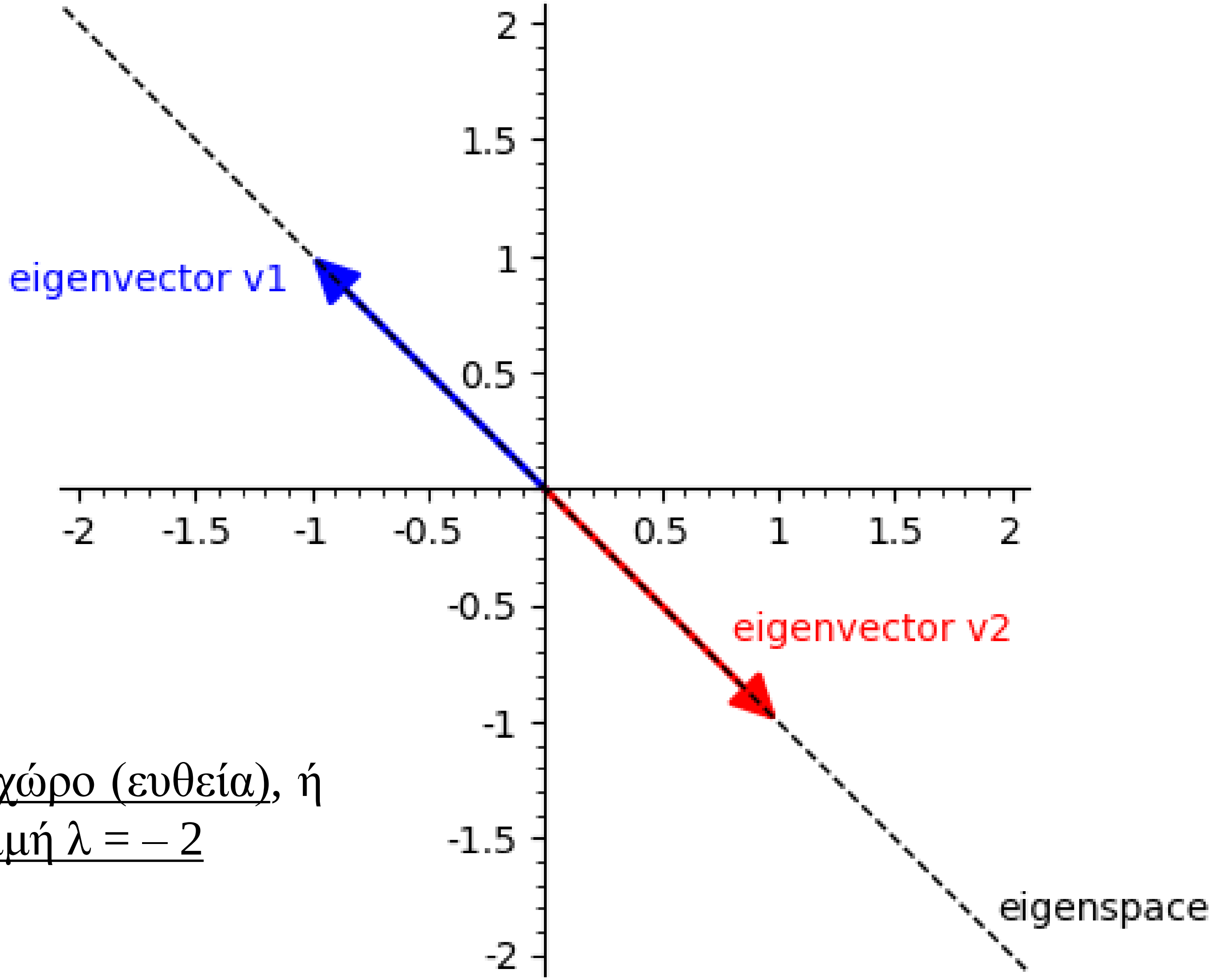
Στην περίπτωση της άλλης ιδιοτιμής λ = – 2, θα μπορούσαμε να λύσουμε την αντίστοιχη εξίσωση ιδιοτιμών με διαφορετικό τρόπο και έτσι να βρούμε ένα εναλλακτικό ιδιοδιάνυσμα:

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4ο παράδειγμα, (7/7)

- Για την ιδιοτιμή λ = – 2 υπολογίσαμε τα δυο –διαφορετικά– ιδιοδιανύσματα:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



- Αυτά τα δυο δ/τα παράγουν τον <u>ίδιο διανυσματικό χώρο (ευθεία)</u>, ή αλλιώς <u>τον ίδιο ιδιοχώρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ = – 2</u>

Ορίζουσα πίνακα & ιδιοτιμές

```
A1 = matrix(ZZ, 3, 3, [1, 3, 3, -3, -5, -3, 3, 3, 1])
show(A1)
print( 'Determinant = ', det(A1) )
print( 'Eigenvalues = ', A1.eigenvalues() )
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

```
Determinant =  4
Eigenvalues =  [1, -2, -2]
```

```
A2 = matrix(ZZ, 3, 3, [2, 4, 3, -4, -6, -3, 3, 3, 1])
show(A2)
print( 'Determinant = ', det(A2) )
print( 'Eigenvalues = ', A2.eigenvalues() )
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

```
Determinant =  4
Eigenvalues =  [1, -2, -2]
```

- Ισχύει: $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$
- Άρα, δυο πίνακες με τις ίδιες ιδιοτιμές έχουν και την ίδια ορίζουσα. <u>Το αντίθετο όμως δεν ισχύει γενικά…</u>

```
B1 = matrix(ZZ, 2, 2, [2, 1, 4, -1])
show(B1)
print( 'Determinant = ', det(B1) )
print( 'Eigenvalues = ', B1.eigenvalues() )
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Determinant =  -6
Eigenvalues =  [3, -2]
```

```
B2 = matrix(ZZ, 2, 2, [4, 2, -1, -2])
show(B2)
print( 'Determinant = ', det(B2) )
print( 'Eigenvalues = ', B2.eigenvalues() )
```

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

```
Determinant =  -6
Eigenvalues =  [-1.645751311064591?, 3.645751311064591?]
```

Διαγωνιοποίηση πίνακα

- Δύο $n \times n$ πίνακες A και B είναι όμοιοι, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος, ώστε:

$$B = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PBP^{-1}$$

- Αν δυο πίνακες είναι όμοιοι, τότε έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Πράγματι, αν $B = P^{-1}AP$, τότε: $B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P = P^{-1}(AP - \lambda P) = P^{-1}(A - \lambda I)P$

οπότε: $\det(B - \lambda I) = \det[P^{-1}(A - \lambda I)P] = \det(P^{-1})\cdot\det(A - \lambda I)\cdot\det(P)$

και επειδή: $\det(P^{-1})\cdot\det(P) = \det(P^{-1}P) = \det(I) = 1$

έχουμε τελικά: $\det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$

Συνεπώς οι όμοιοι πίνακες A, B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και επομένως τις ίδιες ιδιοτιμές (με τις ίδιες πολλαπλότητες).

Παράδειγμα διαγωνιοποίησης πίνακα, (1/4)

Παράδειγμα 4.2.3 Έστω ο πίνακας: $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

θα υπολογίσουμε έναν διαγώνιο πίνακα, όμοιο του A.

Για τον προσδιορισμό των ιδιοτιμών του A βρίσκουμε τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης:

$$\det(A-\lambda I)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(-1-\lambda)-4=0 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda-6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1=3 \\ \lambda_2=-2 \end{cases}$$

όπου λ_1 και λ_2 οι ιδιοτιμές του πίνακα.

Παράδειγμα διαγωνιοποίησης πίνακα, (2/4)

1) Για $\lambda_1 = 3$:

$$(A-3I)\boldsymbol{x} = \mathbf{O} \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 = x_1 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

που είναι το πρώτο ιδιοδιάνυσμα.

Παράδειγμα διαγωνιοποίησης πίνακα, (3/4)

1) Για $\lambda_2 = -2$:

$$(A+2I)\boldsymbol{x} = \mathbf{O} \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & |0 \\ 4 & 1 & |0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 1 & |0 \\ 0 & 0 & |0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow x_2 = -4x_1,\ x_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \boldsymbol{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

που είναι το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα.

Παράδειγμα διαγωνιοποίησης πίνακα, (4/4)

Ισχύει ότι:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{P}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{P}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{D}}$$

Όπου:

P = πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A, και

D = διαγώνιος πίνακας με στοιχεία της διαγωνίου τις ιδιοτιμές του A.

Άρα:

$$AP = PD \Leftrightarrow (AP)P^{-1} = (PD)P^{-1} \Leftrightarrow A\left(PP^{-1}\right) = PDP^{-1}$$

$$\Leftrightarrow AI = PDP^{-1} \Leftrightarrow A = PDP^{-1} \Leftrightarrow D = P^{-1}AP$$

Δηλαδή ο πίνακας A είναι όμοιος με τον διαγώνιο πίνακα D.

Διαγωνιοποίηση πίνακα

Ορισμός 4.2.1 Ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος, αν υπάρχει διαγώνιος πίνακας D και αντιστρέψιμος πίνακας P, έτσι ώστε

$$P^{-1}AP = D \qquad \text{ή} \qquad A = PDP^{-1}$$

Το γινόμενο $P^{-1}AP$ λέγεται και **μετασχηματισμός ομοιότητας** του A.

- Γενικά ένας μετασχηματισμός ομοιότητας δεν είναι ίδιος με έναν μετασχηματισμό γραμμο-ισοδυναμίας.
- Αν ο A είναι γραμμο-ισοδύναμος με τον B, τότε $B = EA$ για κάποιον αντιστρέψιμο πίνακα E.
- Οι γραμμο-πράξεις σε έναν πίνακα συνήθως αλλάζουν τις ιδιοτιμές του.

Θεώρημα διαγωνιοποίησης

Ορισμός 4.2.2 Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται ότι είναι διαγωνιοποιήσιμος αν είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα.

Θεώρημα 4.2.1 (Θεώρημα διαγωνιοποίησης) Ένας $n\times n$ πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος, αν και μόνον αν ο A έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

- Στην πραγματικότητα, $A = P^{-1}DP$, με D έναν διαγώνιο πίνακα, ανν οι στήλες του P είναι n γραμμικώς ανεξάρτητα δ/τα του A. Σε αυτή την περίπτωση, τα διαγώνια στοιχεία του D είναι οι ιδιοτιμές, αντίστοιχα, του A που αντιστοιχούν στα ιδιοδιανύσματα στον P.

- Με άλλα λόγια, ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος, αν και μόνον αν υπάρχουν αρκετά ιδιοδιανύσματα προκειμένου να σχηματίζουν μια βάση του R^n. Μια τέτοια βάση λέγεται **βάση ιδιοδιανυσμάτων** του R^n.

Παράδειγμα διαγωνιοποίησης πίνακα, (1/5)

Να ελέγξετε αν ο παρακάτω πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος και να υπολογίσετε τον όμοιο του, διαγώνιο πίνακα.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε αρχικά τις ιδιοτιμές του A. Η χαρακτηριστική εξίσωσή του είναι:

$$\det\left(A-\lambda I\right)=0 \quad \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \ldots \Leftrightarrow -\lambda^3-3\lambda^2+4=0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+2)^2=0$$

Άρα, οι ιδιοτιμές είναι: $\lambda = 1$ και $\lambda = -2$.

(αν είχαμε διαφορετικές ιδιοτιμές <u>τότε</u> θα είχαμε σίγουρα και γραμμικώς ανεξάρτητα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Οπότε, πρέπει να το ελέγξουμε…)

Παράδειγμα διαγωνιοποίησης πίνακα, (2/5)

Βρίσκουμε στη συνέχεια τρία γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A. Αν αυτό δεν είναι δυνατό, τότε ο A δεν διαγωνιοποιείται.

1) Για $\lambda = 1$: $(A - I)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{O}$ $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα διαγωνιοποίησης πίνακα, (3/5)

Βρίσκουμε στη συνέχεια τρία γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A. <u>Αν αυτό δεν είναι δυνατό, τότε ο A δεν διαγωνιοποιείται.</u>

2) Για $\lambda = -2$: $(A + 2I)\,\mathbf{x} = \mathbf{O}$ $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \{x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\ x_2, x_3 \in \mathrm{R}$$

Άρα:

$$\mathbf{x} = x_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 \quad, x_2, x_3 \in \mathrm{R}, \text{ με } \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα διαγωνιοποίησης πίνακα, (4/5)

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι τα τρία ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, και $\boldsymbol{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αφού:

$$\det([\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3]) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 = -1 \neq 0$$

Συνεπώς, ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος και μένει να κατασκευάσουμε τους πίνακες P και D. Ο πίνακας P έχει στήλες τα τρία ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, και $\boldsymbol{v}_3$

$$P = [\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και ο πίνακας D είναι ο διαγώνιος πίνακας με στοιχεία της διαγωνίου του, τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -2$ (πολλαπλότητας 2)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα διαγωνιοποίησης πίνακα, (5/5)

Υπολογίζουμε τον αντίστροφο του πίνακα P, βρίσκοντας:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

και καταλήγουμε στη σχέση διαγωνιοποίησης του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα διαγωνιοποίησης πίνακα, (1/3)

Να ελέγξετε αν ο παρακάτω πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος και να υπολογίσετε τον όμοιο του, διαγώνιο πίνακα.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε αρχικά τις ιδιοτιμές του A. Η χαρακτηριστική εξίσωσή του είναι:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 3 \\ -4 & -6-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \quad \ldots \Leftrightarrow -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 = 0$$

Άρα, οι ιδιοτιμές είναι: $\lambda = 1$ και $\lambda = -2$.

Παράδειγμα διαγωνιοποίησης πίνακα, (2/3)

Βρίσκουμε στη συνέχεια τρία γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του Α. <u>Αν αυτό δεν είναι δυνατό τότε ο Α δεν διαγωνιοποιείται.</u>

1) Για $\lambda = 1$: $(A - I)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{O}$ $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -4 & -7 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ -4x_1 - 7x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα διαγωνιοποίησης πίνακα, (3/3)

Βρίσκουμε στη συνέχεια τρία γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του Α. Αν αυτό δεν είναι δυνατό τότε ο Α δεν διαγωνιοποιείται.

2) Για $\lambda = -2$: $(A + 2I)\,\mathbf{x} = \mathbf{O}$ $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -4 & -4 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, επειδή δεν υπάρχουν άλλες ιδιοτιμές και κάθε άλλο ιδιοδιάνυσμα του A είναι ένα βαθμωτό πολλαπλάσιο του $\mathbf{v}_1$ είτε του $\mathbf{v}_2$, ο 3×3 πίνακας A δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος, αφού δεν έχει τρία γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Παράδειγμα διαγωνιοποίησης πίνακα, (1/3)

Να εξετασθεί αν διαγωνοποιείται ο n × n πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα διαγωνιοποίησης πίνακα, (2/3)

Ο A είναι κάτω τριγωνικός άρα τα διαγώνια στοιχεία του είναι οι ιδιοτιμές του.

Το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι:

$$P_A(\lambda) = (a - \lambda)\,(a - \lambda)\,\ldots\,(a - \lambda) = (a - \lambda)^n\,,$$

οπότε:

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (a - \lambda)^n \Leftrightarrow (a - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = a$$

Επομένως, η μοναδικη ιδιοτιμή του A είναι $\lambda = a$ με πολλαπλότητα n.

Παράδειγμα διαγωνιοποίησης πίνακα, (3/3)

Για λ = a από το σύστημα εύρεσης των ιδιοδιανυσμάτων προκύπτει ότι:

$$\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0 \\ 1x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0 \\ 1x_1 + 1x_2 + \ldots + 0x_n = 0 \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ 1x_1 + 1x_2 + \ldots + 0x_n = 0 \end{cases}$$

Από αυτό το σύστημα προκύπτει:

$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$, οπότε ο ιδιοχώρος αυτής της ιδιοτιμής είναι ($x_n = k$)

$(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (0, 0, \ldots, 0, k)$, $k \in R$. Άρα, ο n×n πίνακας δεν διαγωνιοποιείται.

Δυνάμεις τετραγωνικού πίνακα

Η διαγωνιοποίηση ενός τετραγωνικού πίνακα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αποδοτικούς υπολογισμούς των δυνάμεων του πίνακα. Είναι:

$$
\begin{aligned}
A = PDP^{-1} \Rightarrow A^2 = AA = \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right) \\
= PD\left(P^{-1}P\right)DP^{-1} \\
= PD \cdot I \cdot DP^{-1} \\
= PD^2 P^{-1}
\end{aligned}
$$

Γενικεύοντας, παίρνουμε: $$A^k = PD^k P^{-1}, \quad \forall k \geq 1$$

το οποίο μπορούμε να δείξουμε εύκολα με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

Δυνάμεις τετραγωνικού πίνακα

Ο υπολογισμός των δυνάμεων του A ανάγεται στον υπολογισμό των δυνάμεων ενός διαγώνιου πίνακα D, για τον οποίο αποδεικνύεται εύκολα ότι:

$$D^k = \left[\operatorname{diag}\left(d_1, d_2, \ldots, d_n\right)\right]^k = \operatorname{diag}\left(d_1^k, d_2^k, \ldots, d_n^k\right)$$

δηλ.

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα υπολογισμού δύναμης τετραγωνικού πίνακα

Έστω ο πίνακας: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

για τον οποίο ήδη υπολογίσαμε σε προηγούμενο παράδειγμα ότι: $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ και $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Μετασχηματίζουμε τον A: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = PDP^{-1}$

όπου: $P^{-1} = \dfrac{1}{-5}\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{bmatrix}$

Παράδειγμα υπολογισμού δύναμης τετραγωνικού πίνακα

οπότε:

$$A^k = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (4/5)3^k & (1/5)3^k \\ (1/5)(-2)^k & (-1/5)(-2)^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/5\left(4 \cdot 3^k + (-2)^k\right) & 1/5\left(3^k - (-2)^k\right) \\ 1/5\left(4 - 3^k - 4(-2)^k\right) & 1/5\left(3^k + 4(-2)^k\right) \end{bmatrix}$$

Θεώρημα *Cayley-Hamilton*

Εάν $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα A, τότε ισχύει:

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0$$

(πολυωνυμικός πίνακας του *A* ή πολυώνυμο του πίνακα *A*)

Με τη χρήση του θεωρήματος μπορούμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα, εάν $a_0 \neq 0$.

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_0 I = -A^n - a_{n-1}A^{n-1} - \cdots - a_1 A \Leftrightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a_0}(-A^{n-1} - a_{n-1}A^{n-2} - \cdots - a_1 I)$$

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12$.

Αφού $a_0 = -12 \neq 0$, τότε από το θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε:

$$A^3 - 7A^2 + 16A - 12I = 0 \Leftrightarrow$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{12}(-A^2 + 7A - 16I) \Leftrightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Ορθογώνια διαγωνοποιήσιμοι πίνακες

Ένας $n \times n$ πίνακας A ονομάζεται ορθογώνια ή ορθομοναδιαία ή ορθοκανονικά διαγωνοποιήσιμος, εάν υπάρχει διαγώνιος $n \times n$ πίνακας D ο οποίος είναι ορθογώνια όμοιος με τον A, δηλαδή υπάρχει ορθογώνιος $n \times n$ πίνακας Q έτσι ώστε:

$$D = Q^T A Q$$

Για τους $n \times n$ συμμετρικούς πίνακες ισχύουν τα ακόλουθα:

- Όλες οι ιδιοτιμές τους είναι πραγματικές.
- Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους ορθογώνια.
- Έχουν n ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα.
- Κάθε συμμετρικός πίνακας είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος και αντίστροφα, κάθε ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος πίνακας είναι συμμετρικός (Φασματικό θεώρημα).

Παράδειγμα

- Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Βρείτε τις ιδιοτιμές του και έναν ορθογώνιο πίνακα P έτσι ώστε ο $P^T AP$ να είναι διαγώνιος πίνακας.

Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^2(\lambda - 6)\,.$$

Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα για τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 6$.

Παράδειγμα

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0$ έχουμε:

$$(A-\lambda_1 I)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 4y + 2z = 0 \Leftrightarrow x = -2y - z \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

άρα $(x, y, z)^T = y(-2,1,0)^T + z(-1,0,1)^T$, άρα τα ιδιοδιανύσματα της $\lambda_1 = 0$ είναι $\{(-2,1,0)^T, (-1,0,1)^T\}$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 6$ έχουμε:

$$(A-\lambda_2 I)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5x + 2y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ x + 2y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 2y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ x = -2y + 5z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12y - 24z = 0 \\ -6y + 12z = 0 \\ x = -2y + 5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2z \\ y = 2z \\ x = z \end{cases}$$

άρα $(x, y, z)^T = z(1,2,1)^T$, άρα το ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_2 = 6$ είναι $\{(1,2,1)^T\}$.

Παράδειγμα

Θα ορθοκανονικοποιήσουμε τη βάση $\{\eta_1 = (-2,1,0)^T, \eta_2 = (-1,0,1)^T, \eta_3 = (1,2,1)^T\}$ κατά *Gram-Schmidt*.

Θέτουμε $\xi_1 = \eta_1 = (-2,1,0)^T$.

Έχουμε $\xi_2 = \eta_2 - \frac{\eta_2 \cdot \xi_1}{\xi_1 \cdot \xi_1} \xi_1 = (-1,0,1)^T - \frac{2}{5}(-2,1,0)^T = \left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 1\right)^T$.

Τέλος, έχουμε $\xi_3 = \eta_3 - \frac{\eta_3 \cdot \xi_1}{\xi_1 \cdot \xi_1} \xi_1 - \frac{\eta_3 \cdot \xi_2}{\xi_2 \cdot \xi_2} \xi_2 = (1,2,1)^T - \frac{0}{5}(-2,1,0)^T - \frac{0}{\frac{6}{5}}\left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 1\right)^T = (1,2,1)^T$.

Άρα η ορθοκανονική βάση αποτελείται από τα διανύσματα:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\xi_1 = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6/5}}\xi_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{30}}{30} \\ -\frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{\sqrt{30}}{6} \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\xi_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

Ο πίνακας $P = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{30}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$ είναι ορθογώνιος.

Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι ο πίνακας $P^T AP$ είναι διαγώνιος και ισούται με τον

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Τετραγωνικές μορφές

Μια τετραγωνική μορφή δύο μεταβλητών x και y είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού της μορφής:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Το πολυώνυμο μπορεί να εκφραστεί με τη χρήση πινάκων:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = z^T A z$$

όπου $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ και $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ ένας συμμετρικός πίνακας.

Παραδείγματα τετραγωνικών μορφών δύο μεταβλητών

- $2x^2 + 6xy - 7y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

- $4x^2 - 5y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

- $2xy = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Τετραγωνικές μορφές περισσότερων μεταβλητών

Οι τετραγωνικές μορφές ορίζονται και για περισσότερες από δύο μεταβλητές.

Εάν $z = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ και $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ είναι ένας συμμετρικός $n \times n$ πίνακας, τότε ορίζεται η

τετραγωνική μορφή σε n μεταβλητές:

$$z^T A z = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij}x_i x_j$$

Παραδείγματα

- Δίνεται η τετραγωνική μορφή: $q(x,y,z) = 3x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 8xz - 6yz$

Μπορούμε να τη μετατρέψουμε στη μορφή $z^T Az$ ως εξής:

$$q(x,y,z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- Δίνεται ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή υπολογίζεται ως:

$$q(x,y,z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 5x^2 + 8y^2 + 2z^2 - 6xy + 2yz$$

Θετικά/Αρνητικά ορισμένες τετραγωνικές μορφές

Ένας συμμετρικός πίνακας A (και η αντίστοιχή του τετραγωνική μορφή $x^T A x$ θα λέγεται:

- Θετικά ορισμένος, εάν $x^T A x > 0$ για κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα x
- Θετικά ημιορισμένος, εάν $x^T A x \geq 0$ για κάθε διάνυσμα x
- Αρνητικά ορισμένος, εάν $x^T A x < 0$ για κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα x
- Αρνητικά ημιορισμένος, εάν $x^T A x \leq 0$ για κάθε διάνυσμα x
- Αόριστος, εάν το $x^T A x$ παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές

Θεώρημα:

Ένας συμμετρικός πίνακας A είναι:

- Θετικά ορισμένος, εάν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές.
- Θετικά ημιορισμένος, εάν όλες οι ιδιοτιμές του είναι μεγαλύτερες ή ίσες από το μηδέν.
- Αρνητικά ορισμένος, εάν όλες οι ιδιοτιμές του είναι αρνητικές.
- Αρνητικά ημιορισμένος, εάν όλες οι ιδιοτιμές του είναι μικρότερες ή ίσες από το μηδέν.
- Αόριστος, εάν έχει θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές.

Παράδειγμα

Υπολογίστε εάν ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος.

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του A: $\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$ και άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda_{1,2} = 1$ και $\lambda_3 = 4$.

Οι ιδιοτιμές του A είναι θετικές, άρα ο A είναι θετικά ορισμένος.

Πράγματι, για κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ έχουμε

$$x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 = (x_1+x_2)^2 + (x_2+x_3)^2 + (x_1+x_3)^2 > 0$$

Θετικά/Αρνητικά ορισμένες τετραγωνικές μορφές

Θεώρημα:
Ένας συμμετρικός πίνακας A είναι θετικά ορισμένος εάν όλες οι ηγετικές κύριες ελάσσονες έχουν θετική τιμή.

Παράδειγμα:

Υπολογίστε εάν ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος.

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες των κύριων υποπινάκων του A:

$$\det[2] = 2, \det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{bmatrix} = 1$$

Όλες οι ορίζουσες είναι θετικές, άρα ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος.

Κανονικές μορφές

Έστω μια τετραγωνική μορφή $x^T Ax$, όπου A είναι ένας συμμετρικός πίνακας. Εάν P είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα μιας ορθοκανονικής βάσης που αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα του A, τότε εάν ορίσουμε $x = Py$ έχουμε:

$$x^T Ax = (Py)^T A(Py) = y^T P^T APy = y^T (P^T AP)y = y^T Dy = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A που αντιστοιχούν στις στήλες του πίνακα P, και

$$D = P^T AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Η μορφή αυτή ονομάζεται κανονική ή διαγώνια μορφή της αρχικής τετραγωνικής μορφής.

Παράδειγμα

Έστω η τετραγωνική μορφή $5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$.

Γράφουμε την τετραγωνική μορφή χρησιμοποιώντας πίνακες: $x^T A x = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$: $\det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 8) = 0.$

Άρα οι δύο ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda = 2$ και $\lambda = 8$ και άρα η διαγώνια μορφή της αρχικής τετραγωνικής μορφής είναι:

$$y^T D y = [y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 2y_1^2 + 8y_2^2.$$

Παράδειγμα (2)

Έστω η τετραγωνική μορφή $x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$

Γράφουμε την τετραγωνική μορφή χρησιμοποιώντας πίνακες: $x^TAx = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$: $\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0.$

Άρα οι τρεις ιδιοτιμές του πίνακα είναι λ =0, λ =3 και λ =-3 και άρα η διαγώνια μορφή της αρχικής τετραγωνικής μορφής είναι:

$$y^TDy = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = -3y_2^2 + 3y_3^2.$$