Γραμμική Άλγεβρα
(*Linear Algebra*)

ΑΓΓΕΛΟΣ ΣΙΦΑΛΕΡΑΣ

Καθηγητής

9η Διάλεξη (Θεωρία)

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

CMOR Lab
Computational Methodologies and Operations Research

Γραμμική εξάρτηση – ανεξαρτησία διανυσμάτων

- Ένας μη μηδενικός δ. χ. έχει πολλά σύνολα διανυσμάτων που τον παράγουν. Μεταξύ αυτών των συνόλων ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν αυτά που αποτελούνται από γραμμικώς ανεξάρτητα δ/τα.

- Το σύνολο $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ λέμε ότι είναι μια **βάση** (*basis*) του δ. χ. V, όταν τα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$:

  ✓ παράγουν τον χώρο V (δηλ. $V = < \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k >$)   και

  ✓ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα δ/τα του V.

Γραμμική εξάρτηση – ανεξαρτησία διανυσμάτων

Θεώρημα 2.2.1 Αν $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ είναι μια βάση του δ. χ. V, τότε κάθε δ/μα $\boldsymbol{u}\in V$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των δ/των της βάσης αυτής του V.

Απόδειξη: Έστω ότι $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ είναι μια βάση του δ. χ. V. Τότε αν $\boldsymbol{u}\in V$, θα υπάρχουν $\lambda_i\in \mathrm{R}$, $i = 1, \ldots, k$, τέτοιοι, ώστε:

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{v}_k$$

και αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν και $\mu_i\in \mathrm{R}$, $i = 1, \ldots, k$, τέτοιοι, ώστε:

$$\boldsymbol{u} = \mu_1\boldsymbol{v}_1 + \mu_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \mu_k\boldsymbol{v}_k$$

τότε θα έχουμε:

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{v}_k = \mu_1\boldsymbol{v}_1 + \mu_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \mu_k\boldsymbol{v}_k \Leftrightarrow (\lambda_1-\mu_1)\boldsymbol{v}_1 + (\lambda_2-\mu_2)\boldsymbol{v}_2 + \ldots + (\lambda_k-\mu_k)\boldsymbol{v}_k = \mathbf{O} \Leftrightarrow (\lambda_1-\mu_1) = (\lambda_2-\mu_2) = \ldots = (\lambda_k-\mu_k) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \ldots, \lambda_k = \mu_k$$

Γραμμική εξάρτηση – ανεξαρτησία διανυσμάτων

Θεώρημα 2.2.2 Αν $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ είναι μια βάση του δ. χ. V τότε:

- Περισσότερα από k διανύσματα του V είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
- Αν $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ είναι μια άλλη βάση του V, τότε $k = m$.
- Οποιαδήποτε k το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του V αποτελούν βάση του.

Το πλήθος των διανυσμάτων μιας οποιασδήποτε βάσης του δ. χ. V λέγεται **διάσταση** (*dimension*) του V, συμβολικά $\dim(V)$. Η διάσταση του $\{\mathbf{O}\}$ είναι 0.

Θεώρημα 2.2.3 Έστω V_0 ένας δ. υπ. του δ. χ. V.

Τότε: $\dim(V_0) < \dim(V)$, αν και μόνον αν $V_0 \neq V$

Γραμμική εξάρτηση – ανεξαρτησία διανυσμάτων

Τα δ/τα: $\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

αποτελούν την **κανονική βάση** του του χώρου R^n.

Συνεπώς: $\dim(\mathrm{R}^n) = n$

Ν.δ.ο. οι παρακάτω έξι πίνακες αποτελούν μια βάση του δ.χ. $M_{2,3}$ των 2×3 πινάκων.

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, E_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}, E_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}, E_4=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}, E_5=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}, E_6=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Για έναν τυχαίο 2×3 πίνακα έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\d&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&b&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&e&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&c\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&f\end{bmatrix}$$

$$= aE_1 + dE_2 + bE_3 + eE_4 + cE_5 + fE_6$$

δηλ.

$$M_{2,3} = < E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 >$$

και

$$\lambda_1E_1 + \lambda_2E_2 + \lambda_3E_3 + \lambda_4E_4 + \lambda_5E_5 + \lambda_6E_6 = \mathrm{O} \Rightarrow \begin{bmatrix}\lambda_1&\lambda_3&\lambda_5\\\lambda_2&\lambda_4&\lambda_6\end{bmatrix} = O$$

$$\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6) = (0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Γραμμική εξάρτηση – ανεξαρτησία διανυσμάτων

Θεώρημα 2.2.4
Αν ο πίνακας A είναι γραμμό-ισοδύναμος με τον B, τότε ισχύει: $row(A) = row(B)$.

Πόρισμα 2.2.1
Το σύνολο των μη μηδενικών γραμμών του rref πίνακα του A ($:= A_r$) είναι μια βάση του $row(A)$ και επομένως:

$$\dim(row(A)) = \operatorname{rank}(A)$$

Πόρισμα 2.2.2 $\operatorname{rank}(A) = \dim(col(A)) = \dim(row(A))$.

Πόρισμα 2.2.3 Αν A και B είναι γραμμό-ισοδύναμοι πίνακες τότε:

$$\dim(col(A)) = \dim(col(B))$$

Θεώρημα 2.2.5
Το σύνολο των στηλών-οδηγών ενός πίνακα A είναι μια βάση του $col(A)$.

Γραμμική εξάρτηση – ανεξαρτησία διανυσμάτων

Έστω τα δ/τα του χώρου R^4: $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix}$

Σχηματίζοντας τον πίνακα $A = [\boldsymbol{v}_1 \;\; \boldsymbol{v}_2 \;\; \boldsymbol{v}_3]$ των δ/των και μέσω του SageMath, βρίσκουμε:

```
A = matrix(QQ, 4, 3, [1, 3, 1, 2, -1, -5, -3, 2, 8, 4, 1, -7])
```

```
show(A.rref())
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ποια συμπεράσματα βγαίνουν?

Γραμμική εξάρτηση – ανεξαρτησία διανυσμάτων

1) Τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ και $\boldsymbol{v}_3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα γιατί ο A_r έχει δύο μη μηδενικές γραμμές (οπότε και $\text{rank}(A) = 2$).

2) Οι στήλες-οδηγοί του A_r είναι η 1^{η} και η 2^{η} (εκεί εμφανίζονται τα μοναδιαία $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$) άρα και οι στήλες-οδηγοί του A είναι οι 1^{η} και 2^{η}, οπότε τα διανύσματα $A^{(1)} = \boldsymbol{v}_1$ και $A^{(2)} = \boldsymbol{v}_2$ είναι όχι μόνο γραμμικώς ανεξάρτητα, αλλά αποτελούν και μια βάση του $col(\mathrm{A}) = < \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 >$.

3) $\dim(< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 >) = 2$.

Λυμένα παραδείγματα (1/9)

<u>Παράδειγμα</u>.
Να προσδιορίσετε αν το σύνολο δ/των { [1, 1, 3], [2, –1, 3], [0, 1, 1], [4, 4, 3] }είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

<u>Απάντηση</u>.
Αφού ο αριθμός των δ/των που περιλαμβάνονται στο σύνολο είναι μεγαλύτερος (τέσσερα) από τη διάσταση των δ/των που ανήκουν στο σύνολο (τρία), τότε τα δ/τα είναι γραμμικώς εξαρτημένα…

Λυμένα παραδείγματα (2/9)

Παράδειγμα.
Να προσδιορίσετε αν το σύνολο δ/των { [1, 2, –1, 6], [3, 8, 9, 10], [2, –1, 2, –2] } είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Απάντηση.
Αρχικά κατασκευάζουμε τον πίνακα: $V = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

Έπειτα, τον μετασχηματίζουμε σε κλιμακωτή μορφή:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Αφού ο νέος πίνακας έχει βαθμό = 3, όσα και τα δ/τα του δοθέντος συνόλου, τότε το σύνολο δ/των είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Λυμένα παραδείγματα (3/9)

<u>Παράδειγμα</u>.
Να προσδιορίσετε αν το σύνολο δ/των { [3, 2, 1, –4, 1], [2, 3, 0, –1, –1], [1, –6, 3, –8, 7] } είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

<u>Απάντηση</u>.
Αρχικά κατασκευάζουμε τον πίνακα:

$$V=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -6 & 3 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

Έπειτα, τον μετασχηματίζουμε σε κλιμακωτή μορφή:

$$V=\left.\begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & -4/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2/5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

Αφού ο νέος πίνακας έχει βαθμό = 2, μικρότερο από τον αριθμό των δ/των του δοθέντος συνόλου, τότε το σύνολο των δ/των είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Λυμένα παραδείγματα (4/9)

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$$

```
A1 = matrix(QQ, 3, 5, [3, 2, 1, -4, 1, 2, 3, 0, -1, -1, 1, -6, 3, -8, 7])

print "Ο πίνακας A1 είναι:"
show(A1)

A1_rref = A1.rref()
print "Η ανηγμένη γραμμο-κλιμακωτή μορφή του A1 είναι:"
show(A1_rref)
```

Ο πίνακας A1 είναι:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -6 & 3 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

Η ανηγμένη γραμμο-κλιμακωτή μορφή του A1 είναι:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
print "Ο ανάστροφος του A1 είναι:"
A2 = A1.transpose()
show(A2)

A2_rref = A2.rref()
print "Η ανηγμένη γραμμο-κλιμακωτή μορφή του A2 είναι:"
show(A2_rref)
```

Ο ανάστροφος του A1 είναι:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -6 \\ 1 & 0 & 3 \\ -4 & -1 & -8 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Η ανηγμένη γραμμο-κλιμακωτή μορφή του A2 είναι:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Λυμένα παραδείγματα (5/9)

Παράδειγμα.
Να προσδιορίσετε αν το δ/μα $[6, 10, -2]^T$ αποτελεί γραμμικό συνδυασμό των δ/των $[1, 3, 2]^T$, $[2, 8, -1]^T$ και $[-1, 9, 2]^T$.

Απάντηση.
Θα αποτελεί γραμμικό συνδυασμό, αν και μόνο αν, υπάρχουν αριθμοί λ_1, λ_2 και λ_3, ώστε να ισχύει:

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Μετά από πράξεις, προκύπτει ένα συμβιβαστό σύστημα τριών εξισώσεων, το οποίο λύνοντας το, παίρνουμε ότι: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ και $\lambda_3 = -1$.

…πότε αυτά τα λ_i είναι μοναδικά?

Λυμένα παραδείγματα (6/9)

<u>Παράδειγμα</u>.
Να εντοπίσετε ένα μέγιστο υποσύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων δ/των από το παρακάτω σύνολο δ/των:

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}4\\6\\8\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

<u>Απάντηση</u>.
Πρώτα κατασκευάζουμε τον πίνακα:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 0 & 6 & 1 & 1\\ 3 & 6 & -1 & 8 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

και μετά τον μετασχηματίζουμε σε κλιμακωτή μορφή:

$$U=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Η $1^{η}$, $3^{η}$ και $6^{η}$ στήλη του U περιέχουν τους οδηγούς κάθε μη μηδενικής γραμμής. Οπότε, οι $1^{η}$, $3^{η}$ και $6^{η}$ στήλες του A συνιστούν ένα μέγιστο υποσύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων δ/των, από το αρχικό σύνολο δ/των.

Λυμένα παραδείγματα (7/9)

Άσκηση.

Να εξετάσετε αν τα δ/τα $x_1 = [1, 2, 3]^T$, $x_2 = [-1, 1, 2]^T$, $x_3 = [-1, 7, 12]^T$ του δ.χ. R^3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Λύση.

Έστω $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$. Είναι:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ 2\lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_3 \\ 7\lambda_3 \\ 12\lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 12\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Λυμένα παραδείγματα (8/9)

Αν μετατρέψουμε τον πίνακα του προηγούμενου συστήματος σε ανοιγμένη κλιμακωτή μορφή, παίρνουμε:

$$\text{rref} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Άρα, $\lambda_1 = -2\lambda_3$, $\lambda_2 = -3\lambda_3$, $\lambda_3 \in R$.

Οπότε, τα x_1, x_2, x_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένα,

Λυμένα παραδείγματα (9/9)

<u>Άσκηση</u>.
Έστω V ο υποχώρος του R^3 ο οποίος αντιστοιχεί στο σύνολο των λύσεων της εξίσωσης 2x – 3y + 5z = 0, x, y, z $\in$ R. Να βρείτε ένα σύνολο δ/των που τον παράγουν.

<u>Λύση.</u>
Έστω v = [x y z]^T $\in$ V, τότε x = 3/2y – 5/2z. Οπότε, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}y - \frac{5}{2}z \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{5}{2}z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v = yv_1 + zv_2$$

Όπου: $v_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, δηλαδή: V = <v_1, v_2>

$1^{\text{ο}}$ επαναληπτικό παράδειγμα (1/5)

<u>Άσκηση</u>.

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Να βρείτε βάσεις για τον γραμμοχώρο (*row(A)*), στηλοχώρο (*col(A)*), και μηδενοχώρο (*null(A)*), του παραπάνω πίνακα.

<u>Λύση.</u>

Αν μετατρέψουμε τον παραπάνω πίνακα σε ανοιγμένη κλιμακωτή μορφή, παίρνουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Επόμένως, μια βάση του *row(A)* είναι τα δ/τα: $v_1 = [1\ 0\ 2\ 0\ -1]^T$, $v_2 = [0\ 1\ 3\ 0\ 2]^T$, $v_3 = [0\ 0\ 0\ 1\ 3]^T$, η οποία αποτελεί την κανονική βάση αυτού του χώρου.

1ο επαναληπτικό παράδειγμα (2/5)

Για μια βάση του *col(A)* βασιζόμαστε στο γεγονός ότι το σύνολο των στηλών-οδηγών ενός πίνακα A είναι μια βάση αυτού του χώρου.

Έτσι, επειδή στον rref(A) οι στήλες-οδηγοί του A είναι οι στήλες 1, 2 και 4, μια βάση του *col(A)* αποτελούν τα δ/τα:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1ο επαναληπτικό παράδειγμα (3/5)

Για να βρούμε μια βάση του *null(A)* πρέπει αρχικά να περιγράψουμε το σύνολο των λύσεων του συστήματος:

$$Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Από τον *rref* που βρήκαμε προηγουμένως, παίρνουμε τη λύση:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 + x_5 \\ x_2 = -3x_3 - 2x_5 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = -3x_5 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

$1^{ο}$ επαναληπτικό παράδειγμα (4/5)

Συνεπώς έχουμε:

$$x=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2x_3+x_5\\ -3x_3-2x_5\\ x_3\\ -3x_5\\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2x_3\\ -3x_3\\ x_3\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_5\\ -2x_5\\ 0\\ -3x_5\\ x_5\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix} -2\\ -3\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix} 1\\ -2\\ 0\\ -3\\ 1\end{bmatrix}=x_3w_1+x_5w_2,\quad x_3,x_5\in\mathbb{R}$$

όπου:

$$w_1=\begin{bmatrix} -2\\ -3\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\ \text{και}\ \ w_2=\begin{bmatrix} 1\\ -2\\ 0\\ -3\\ 1\end{bmatrix}$$

άρα *null(A)* = $<w_1, w_2>$

1^{o} επαναληπτικό παράδειγμα (5/5)

Τα δ/τα w_1 και w_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αφού υπάρχει στον πίνακα $[w_1\ w_2]$ μια 2x2 μη μηδενική υπό-ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Επομένως, το σύνολο $\{w_1\ w_2\}$ αποτελεί μια βάση του *null(A)*.