Γραμμική Άλγεβρα
(*Linear Algebra*)

ΑΓΓΕΛΟΣ ΣΙΦΑΛΕΡΑΣ

Καθηγητής

10^{η} Διάλεξη (Θεωρία)

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

CMOR Lab

Computational Methodologies and Operations Research

Συμπεράσματα

- <u>Θεώρημα</u>. Οι διαστάσεις του γραμμο-χώρου και του στηλο-χώρου ενός πίνακα A είναι ίδιες.

- <u>Θεώρημα</u>. Για οποιονδήποτε πίνακα A με n στήλες, ισχύει ότι: βαθμός(A) + διάσταση(μηδενοχώρου) = n.

2^o επαναληπτικό παράδειγμα (1/5)

Να βρεθεί για ποιες τιμές της παραμέτρου a ∈ R, το σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

i. Έχει ακριβώς μια λύση και να δοθεί η λύση αυτή,

ii. Είναι αδύνατο,

iii. Έχει άπειρες λύσεις και να δοθεί η παραμετρική οικογένεια των λύσεων αυτών.

2ο επαναληπτικό παράδειγμα (2/5)

Λύση.

Οι απαντήσεις των ερωτημάτων σχετίζονται με τους βαθμούς του αρχικού πίνακα των συντελεστών και του επαυξημένου πίνακα του συστήματος:

$$\left(A \mid b\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma 3\to\Gamma 3-a\Gamma 1]{\Gamma 2\to\Gamma 2-\Gamma 1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma 3\to\Gamma 2+\Gamma 3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 & (a+1)^2(1-a) \end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 0 & -(a+2)(a-1) & (a+1)^2(1-a) \end{array}\right)=\mathrm{B}$$

Πότε έχει ακριβώς μια λύση ένα σύστημα…?

2ο επαναληπτικό παράδειγμα (3/5)

Για να έχει το σύστημα κάποια λύση, πρέπει *rank(A | b) = rank(A) = 3*, το οποίο συμβαίνει όταν a ≠ – 2 και a ≠ 1. Για αυτές τις τιμές του a, η λύση υπολογίζεται με τη μέθοδο της αντικατάστασης:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + a x_3 &= a^2 \\ (a-1)x_2 + (1-a)x_3 &= a - a^2 \\ (-a^2 - a + 2)x_3 &= (a+1)^2(1-a) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{-(a+1)}{a+2} \\ x_2 &= \frac{1}{a+2} \\ x_3 &= \frac{(a+1)^2(1-a)}{-(a-1)(a+2)} = \frac{(a+1)^2}{a+2} \end{aligned}$$

Άρα, για a ≠ – 2 και a ≠ 1, η μοναδική λύση του συστήματος είναι:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \dfrac{-(a+1)}{a+2} & \dfrac{1}{a+2} & \dfrac{(a+1)^2}{a+2} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

2ο επαναληπτικό παράδειγμα (4/5)

ii) Για a = – 2 ο πίνακας B είναι:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Επομένως, το σύστημα είναι αδύνατο.

2^o επαναληπτικό παράδειγμα (5/5)

ii) Για a = 1 ο πίνακας B είναι: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Συνεπώς, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 - x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2 \in R$

Ιδιότητες διανυσματικών χώρων

- Αν V_1 και V_2 είναι δύο δ. υπ. του R^n μπορούμε να τους συνδυάσουμε ώστε να πάρουμε νέους υπόχωρους. Η **τομή** $V_1 \cap V_2$ και το **άθροισμα** V_1+V_2 ορίζονται ως

$$V_1 \cap V_2 = \{\boldsymbol{u} \in \mathrm{R}^n : \boldsymbol{u} \in V_1 \text{ και } \boldsymbol{u} \in V_2\}$$

και

$$V_1+V_2 = \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} : \boldsymbol{u} \in V_1 \text{ και } \boldsymbol{v} \in V_2\}$$

και αποδεικνύεται εύκολα ότι:

- Αν V_1 και V_2 είναι δ. υπ. του $\mathrm{R}^{\boldsymbol{n}}$, τότε $V_1 \cap V_2$ και V_1+V_2 είναι δ.υπ. του $\mathrm{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Θεώρημα 2.2.6 Αν V_1 και V_2 είναι δύο δ. υπ. ενός δ. χ. V, τότε:

$$\dim(V_1+V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

Ταύτιση διανυσματικών χώρων

- Για να εξετάσουμε αν δύο διανυσματικοί χώροι ταυτίζονται, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μοναδικότητα της κανονικής βάσης του row(A).

- Αυτό γίνεται κατασκευάζοντας πρώτα τους πίνακες των οποίων οι γραμμο-χώροι είναι οι υπό εξέταση χώροι. Στη συνέχεια συγκρίνουμε τις κανονικές βάσεις που αντιστοιχούν σ’ αυτούς τους πίνακες και αν είναι ίδιες, τότε οι χώροι είναι ίδιοι.

Παράδειγμα ταύτισης διανυσματικών χώρων, (1/3)

Παράδειγμα 2.2.2 Έστω οι υπόχωροι του R^4 :

$$V_1 = \{[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T : x_1 + x_2 + x_3 = x_4\}$$

και:

$$V_2 = < \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 >$$

όπου:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>Θ.δ.ο. $V_1 = V_2$</u>

Παράδειγμα ταύτισης διανυσματικών χώρων, (2/3)

- Κατασκευάζουμε αρχικά τον πίνακα, του οποίου οι γραμμές είναι τα δ/τα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ και $\boldsymbol{v}_3$

- Στη συνέχεια βρίσκουμε τον πίνακα *rref* του *A*. Είναι:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
A = matrix(QQ, 3, 4, [-1, 1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, 1])

print "Ο πίνακας A είναι:"; show(A)

print "Η ανηγμένη γραμμο-κλιμακωτή μορφή του A είναι:"; show(A.rref())
```

Ο πίνακας A είναι:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Η ανηγμένη γραμμο-κλιμακωτή μορφή του A είναι:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα ταύτισης διανυσματικών χώρων, (3/3)

Επομένως η κανονική βάση του V_2 είναι: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Από την άλλη μεριά, επειδή $x_4 = x_1 + x_2 + x_3$, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

δηλ. τα δ/τα: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ παράγουν τον V_1 <u>και</u> επειδή είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αποτελούν μια βάση του. Άρα οι δύο χώροι έχουν κοινή βάση, οπότε ταυτίζονται.

Εφαρμογή στα γραμμικά συστήματα

Ήδη ξέρουμε ότι, *το σύστημα* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *είναι συμβιβαστό, αν και μόνον αν* $rank(A) = rank([A \;\; \mathbf{b}])$.

Θεώρημα 2.3.1 Το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ είναι συμβιβαστό, αν και μόνον αν $\mathbf{b} \in col(A)$.

Είναι:
$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = x_1 A^{(1)} + \ \ldots \ + x_n A^{(n)}$$

αν $\mathbf{x}$ είναι μια λύση του $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, τότε:
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow x_1 A^{(1)} + \ldots + x_n A^{(n)} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{b} \in col(A)$$

Εφαρμογή στα γραμμικά συστήματα

Θεώρημα 2.3.2 Έστω ότι το σύστημα $A\mathbf{x} = \boldsymbol{b}$ είναι συμβιβαστό. Τότε το $A\mathbf{x} = \boldsymbol{b}$ έχει μοναδική λύση, αν και μόνον αν το αντίστοιχο ομογενές $A\mathbf{x} = \mathbf{O}$ έχει μόνον τη μηδενική λύση.

Αλλαγή βάσης

- Έχουμε δει ότι, αν $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ είναι μια βάση του δ. χ. V, τότε κάθε δ/μα $\boldsymbol{u} \in V$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των δ/των της βάσης αυτής του V:

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n$$

και ότι

- Η διατεταγμένη n-άδα $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ λέγεται n-άδα των συντεταγμένων του δ/τος $\boldsymbol{u}$ ως προς την n-άδα $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ των δ/των της βάσης του V.

- Ο $n \times 1$ πίνακας (δ/μα στήλη) που αντιστοιχεί στη διατεταγμένη n-άδα $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ του R^n λέγεται **πίνακας** ή **δ/μα συντεταγμένων** του $\boldsymbol{u}$ ως προς τη βάση S και συμβολίζεται με $[\boldsymbol{u}]_S$:

$$[\boldsymbol{u}]_S = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

Αλλαγή βάσης

- Έτσι σε κάθε δ/μα $\boldsymbol{u} \in V$ αντιστοιχεί μοναδικό δ/μα $[\boldsymbol{u}]_S$ του R^n. Από την άλλη μεριά, σε κάθε διατεταγμένη n-άδα $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in R^n$ αντιστοιχεί το δ/μα $\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n$ του V. Δηλαδή η βάση S επιφέρει μια 1–1 συνάρτηση του V επί του R^n.

- Επιπλέον αποδεικνύεται ότι:

$$[\boldsymbol{u}]_S + [\boldsymbol{v}]_S = [\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}]_S, \ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$$

$$\lambda [\boldsymbol{u}]_S = [\lambda \boldsymbol{u}]_S, \ \forall \lambda \in R, \ \forall \boldsymbol{u} \in V$$

Έτσι η παραπάνω 1–1 αντιστοιχία μεταξύ των V και R^n «διατηρεί» τη διανυσματική πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι οι V και R^n είναι **ισόμορφοι**.

Παράδειγμα αλλαγής βάσης

- Έστω η κανονική βάση του R^n, $\mathscr{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, δηλ. $[\boldsymbol{u}]_{\mathscr{E}} = \boldsymbol{u}$ και επίσης τα δ/τα του R^2: $\boldsymbol{v}_1 = [1\ \ 2]^T$ και $\boldsymbol{v}_2 = [3\ \ 1]^T$.

- Επειδή είναι: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

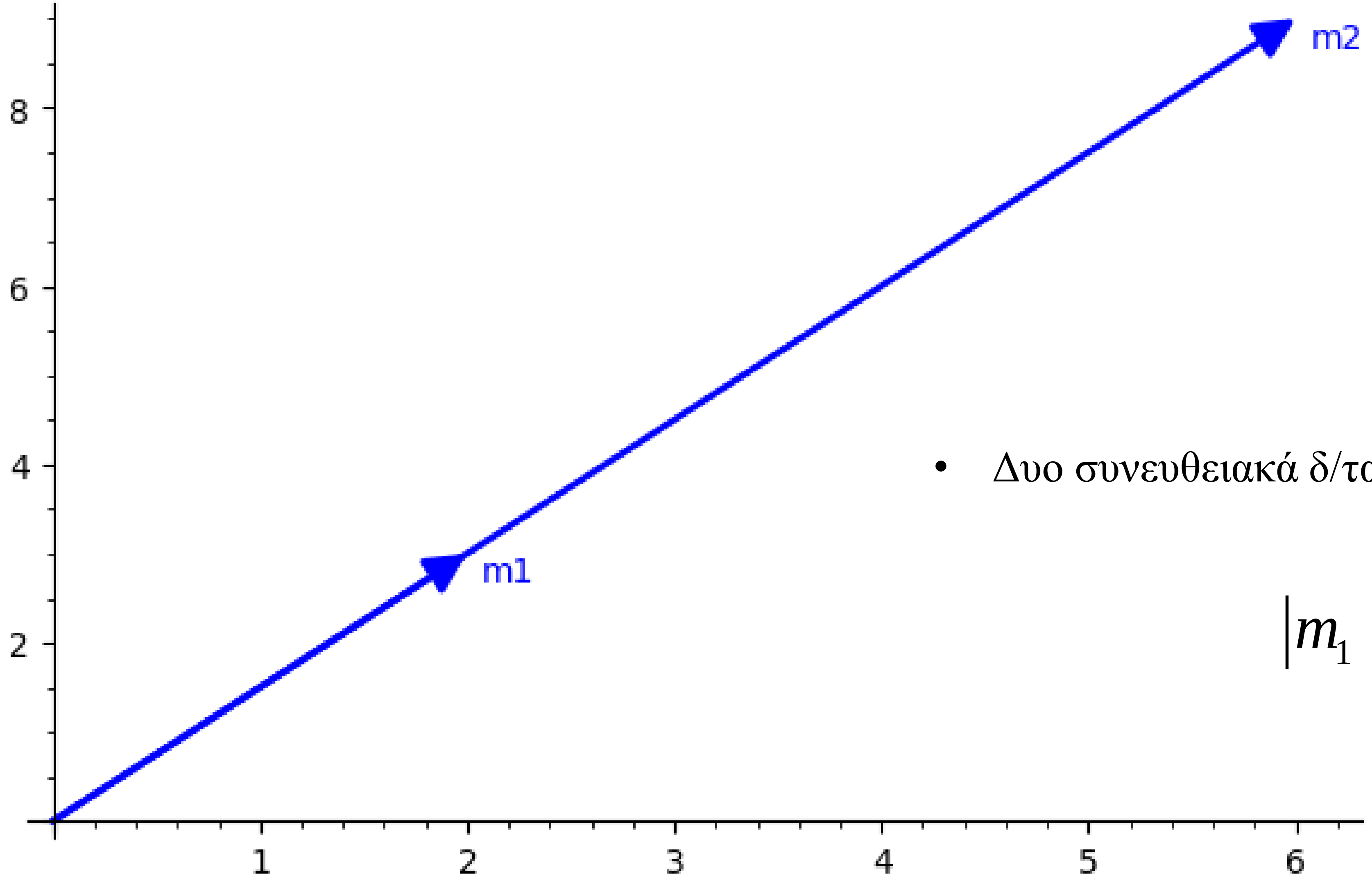
τα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα δ/τα του R^2 και επειδή $\dim(R^2) = 2$, το σύνολο $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ είναι μια βάση του.

- Έστω ότι το δ/μα $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix}$ είναι ένα άλλο δ/μα του R^2

Τότε μπορούμε να γράψουμε: $\boldsymbol{u} = \underbrace{11\boldsymbol{e}_1 + 7\boldsymbol{e}_2} = \underbrace{2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2}$

οπότε: $[\boldsymbol{u}]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix}$ και $[\boldsymbol{u}]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Γεωμετρική ερμηνεία αλλαγής βάσης στον R^2 (1/3)

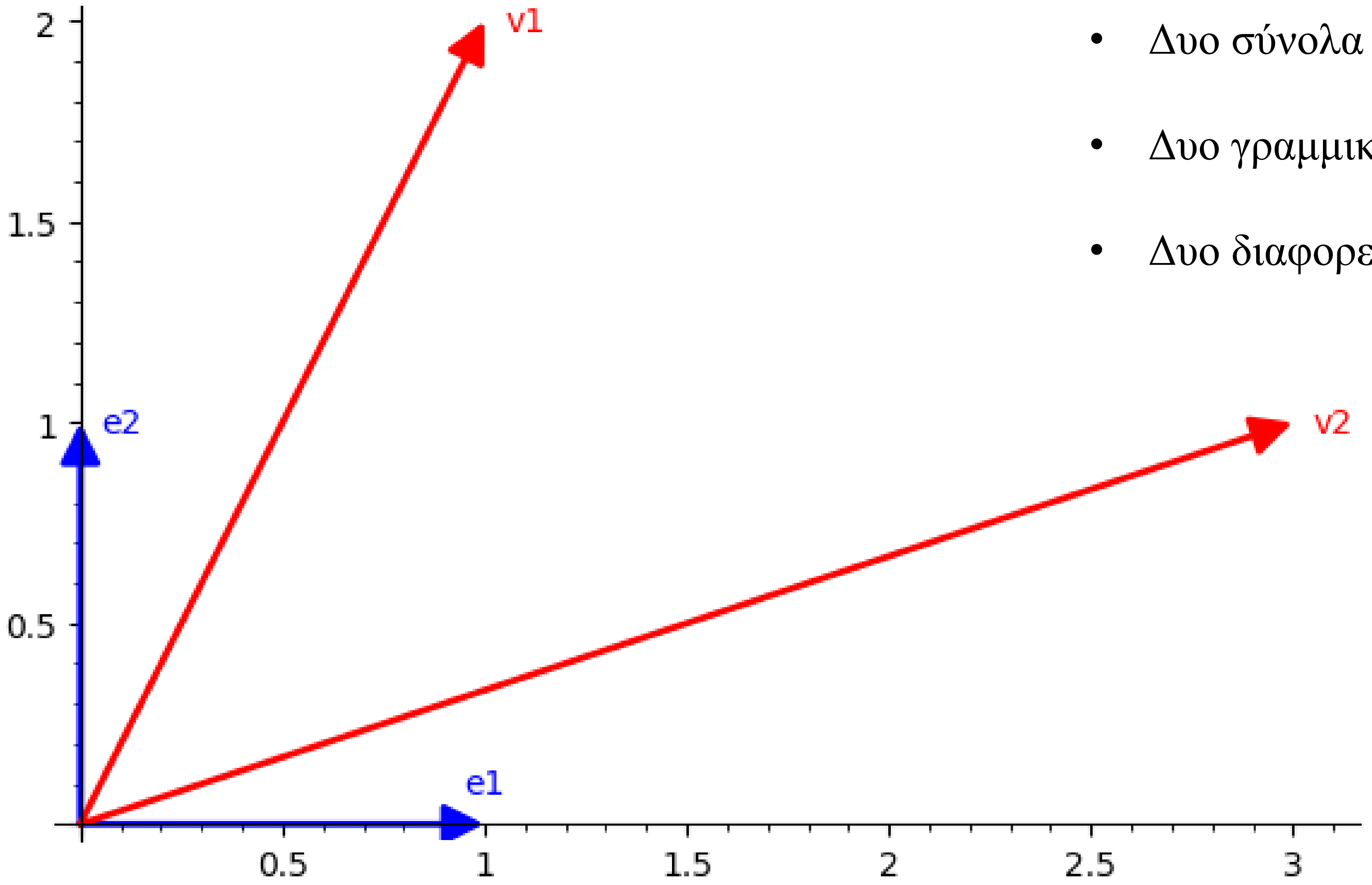


- Δυο συνευθειακά δ/τα ($\boldsymbol{m}_1$ $\boldsymbol{m}_2$) είναι γραμμικώς εξαρτημένα

$$\begin{vmatrix} m_1 & m_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

(ιδιότητες οριζουσών)

Γεωμετρική ερμηνεία αλλαγής βάσης στον R^2 (2/3)



- Δυο σύνολα μη συνευθειακών δ/των $(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2)$ $(\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2)$

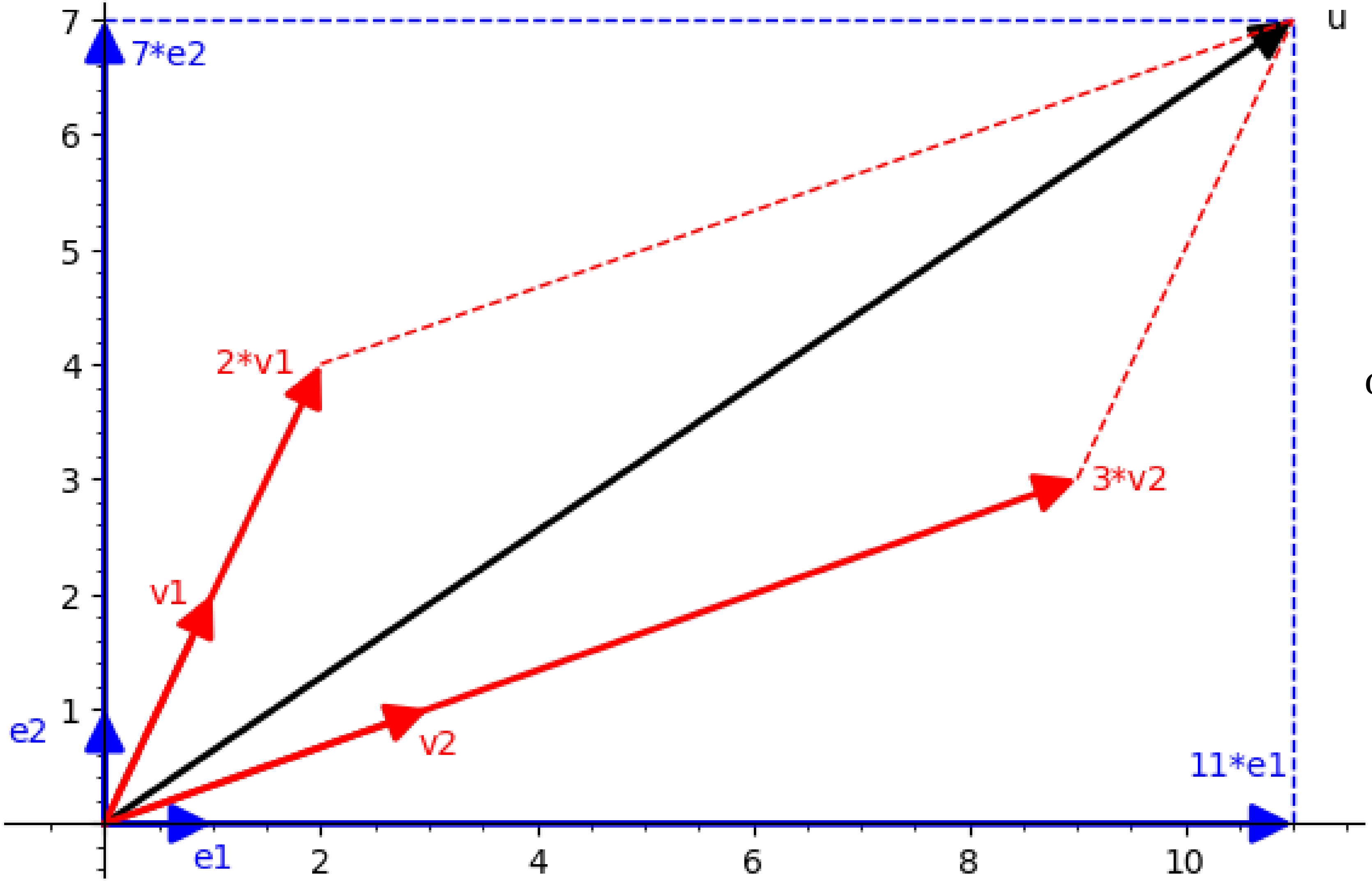
ή

- Δυο γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα δ/των

ή

- Δυο διαφορετικές βάσεις του R^2

Γεωμετρική ερμηνεία αλλαγής βάσης στον R^2 (3/3)



Αναπαράσταση του ιδίου (***u***) δ/τος ως προς δυο διαφορετικές βάσεις του R^2

Εύρεση συντεταγμένων δ/τος, (1/2)

Έστω τα δ/τα του R^3 :

$$\boldsymbol{v}_1 = [2 \;\; 1 \;\; 0]^T, \;\; \boldsymbol{v}_2 = [-3 \;\; -3 \;\; 1]^T, \boldsymbol{v}_3 = [-2 \;\; 1 \;\; -1]^T$$

(τα οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητα γιατί rank($[v_1 \; v_2 \; v_3]$)= 3). Οπότε το σύνολο $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ είναι μια βάση του R^3.

Πως θα βρούμε τις συντεταγμένες του δ/τος $\boldsymbol{u} = [4 \;\; 13 \;\; -6]^T$ ως προς τη βάση S?

Εύρεση συντεταγμένων δ/τος, (2/2)

Πρέπει να βρούμε τους αριθμούς λ_1, λ_2 και λ_3 τέτοιους, ώστε: $\boldsymbol{u} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \lambda_3\boldsymbol{v}_3$

δηλ. να λύσουμε το σύστημα: $[\boldsymbol{v}_1 \ \ \boldsymbol{v}_2 \ \ \boldsymbol{v}_3][\lambda_1 \ \ \lambda_2 \ \ \lambda_3]^T = \boldsymbol{u} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \\ -6 \end{bmatrix}$

Έτσι έχουμε $\boldsymbol{u} = 3\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, οπότε: $[\boldsymbol{u}]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

Πίνακας μετάβασης μεταξύ βάσεων

Θεώρημα 2.4.2 Αν $\mathscr{R}$, S είναι δύο βάσεις ενός δ. χ. V, τότε:

- υπάρχει μοναδικός αντιστρέψιμος πίνακας M, ο οποίος λέγεται **πίνακας μετάβασης** από τη βάση $\mathscr{R}$ στη βάση S, με την ιδιότητα:

$$M[\boldsymbol{v}]_{\mathscr{R}} = [\boldsymbol{v}]_S\,,\quad \forall \boldsymbol{v} \in V$$

και αν $\mathscr{R} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, τότε:

- $M = [\,[\boldsymbol{v}_1]_S \ \ [\boldsymbol{v}_2]_S \ \ \ldots \ \ [\boldsymbol{v}_n]_S\,]$.

Πίνακας μετάβασης μεταξύ βάσεων

Θεώρημα 2.4.3 Αν με $\mathscr{R} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ και $S = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$, δύο βάσεις του R^n, σχηματίσουμε τον $n\times 2n$ πίνακα:

$$[S \;\; R] \equiv [\boldsymbol{u}_1 \;\; \boldsymbol{u}_2 \;\; \ldots \;\; \boldsymbol{u}_n \;\; \boldsymbol{v}_1 \;\; \boldsymbol{v}_2 \;\; \ldots \;\; \boldsymbol{v}_n]$$

και με γραμμο-πράξεις καταλήξουμε ότι:

$$[S \;\; R] \sim [I_n \;\; M]$$

τότε ο πίνακας M είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathscr{R}$ στη βάση S.

Θεώρημα 2.4.4 Αν M είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathscr{R}$ στη βάση S τότε ο M^{-1} είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση S στη βάση $\mathscr{R}$.

Παράδειγμα με πίνακα μετάβασης μεταξύ βάσεων

- Έστω οι τριάδες διανυσμάτων ($\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$), ($\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$), όπου:

$$\boldsymbol{v}_1 = [2\ \ 3\ \ -1]^T,\ \ \boldsymbol{v}_2 = [2\ \ 1\ \ 2]^T,\ \ \boldsymbol{v}_3 = [4\ \ 3\ \ 1]^T$$

και

$$\boldsymbol{u}_1 = [1\ \ 1\ \ 1]^T,\ \ \ \boldsymbol{u}_2 = [0\ \ 1\ \ 1]^T,\ \ \ \boldsymbol{u}_3 = [0\ \ 0\ \ 1]^T$$

Ισχύει ότι:

```
rank([v1 v2 v3]) = 3
rank([u1 u2 u3]) = 3
```

οπότε τα σύνολα $\mathscr{R} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$, $S = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ αποτελούν δύο βάσεις του R^3.

Παράδειγμα με πίνακα μετάβασης μεταξύ βάσεων

Έπειτα, σχηματίζουμε τον πίνακα:

$$[S\ \ R] = [\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2\ \ \boldsymbol{u}_3\ \ \boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2\ \ \boldsymbol{v}_3]$$

και βρίσκουμε τον γραμμο-ισοδύναμό του:

```
>> rref([u1 u2 u3 v1 v2 v3])
ans =
     1     0     0     2     2     4
     0     1     0     1    -1    -1
     0     0     1    -4     1    -2
```

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \end{bmatrix}\right.$$

πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathscr{R}$ στη βάση S

Παράδειγμα με πίνακα μετάβασης μεταξύ βάσεων

Έστω ότι μας δίνεται το δ/μα **v** με αναπαράσταση: $[\boldsymbol{v}]_{\mathscr{R}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ άρα: $v = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ -5 \end{bmatrix}$

(οπότε και η αναπαράσταση του <u>ιδίου</u> δ/τος **v** ως προς την κανονική βάση είναι: $[v]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ -5 \end{bmatrix} = 10\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 13\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$)

τότε προκύπτει ότι: $[\boldsymbol{v}]_S = \mathrm{M}\,[\boldsymbol{v}]_{\mathscr{R}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ -18 \end{bmatrix}$ ή $\boldsymbol{v} = 10\boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2 - 18\boldsymbol{u}_3$

$$[v]_S = 10\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 18\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Επίσης από τον παραπάνω πίνακα M συμπεραίνουμε ότι:

$[\boldsymbol{v}_1]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$, $[\boldsymbol{v}_2]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[\boldsymbol{v}_3]_S = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ή $\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - 4\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{v}_3 = 4\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 - 2\boldsymbol{u}_3$