Γραμμική Άλγεβρα
(*Linear Algebra*)

ΑΓΓΕΛΟΣ ΣΙΦΑΛΕΡΑΣ

Καθηγητής

8η Διάλεξη (Θεωρία)

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

CMOR Lab
Computational Methodologies and Operations Research

Πίνακας μετάθεσης σε τριγωνική παραγοντοποίηση

Αν A είναι ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας, τότε υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας μετάθεσης P τέτοιος, ώστε:

- Ο πίνακας $B = PA$ να ικανοποιεί τη σχέση: $$\prod_{k=1}^{n} \det(B[1\,2 \ldots k \mid 1\,2 \ldots k]) \neq 0$$

- $PA = LU$

  όπου L είναι n-τριγωνικός κάτω πίνακας, U είναι n-τριγωνικός άνω πίνακας, $\det(L) = 1$ και $\det(U) \neq 0$.

Πίνακας μετάθεσης σε τριγωνική παραγοντοποίηση

- Ο $n \times n$ πίνακας P είναι ένας **πίνακας μετάθεσης**, αν σε κάθε γραμμή και στήλη ένα μόνο στοιχείο είναι 1 και όλα τα άλλα στοιχεία είναι 0.

- Οι γραμμές (στήλες) του P είναι μια μετάθεση των γραμμών (στηλών) του μοναδιαίου πίνακα I_n .

- π.χ., ο ακόλουθος είναι ένας 3×3 πίνακας μετάθεσης:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Πίνακας μετάθεσης σε τριγωνική παραγοντοποίηση

- Έστω επιπλέον και ο πίνακας:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- Τότε το γινόμενο PA είναι ο πίνακας:

$$PA=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

- Ενώ το γινόμενο AP είναι ο πίνακας

$$AP=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Πίνακας μετάθεσης σε τριγωνική παραγοντοποίηση

<u>Ιδιότητες πίνακα μετάθεσης:</u>

- $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$ και ο P^{T} είναι πίνακας μετάθεσης.
- Αν P_1, P_2 είναι πίνακες μετάθεσης, ο $P_1 P_2$ είναι πίνακας μετάθεσης.

Παράδειγμα με πίνακα μετάθεσης, (1/2)

Να βρεθεί ο αντίστροφος του διπλανού πίνακα με τη μέθοδο της LU παραγοντοποίησης: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

<u>Ερώτηση</u>: Παραγοντοποιείται απευθείας σε LU μορφή?

<u>Απάντηση</u>: Όχι, γιατί η ηγετική ελάσσονα ορίζουσα 2ης τάξεως $|A_2|$ ισούται με 0…

<u>Λύση στο πρόβλημα</u>: Εναλλαγή των γραμμών 2 και 3 του πίνακα Α, ώστε ο πίνακας PA που προκύπτει να έχει μια τριγωνική παραγοντοποίηση.

Παράδειγμα με πίνακα μετάθεσης, (2/2)

Άρα: $PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 4 & 8 & -1 \end{bmatrix}$

Οπότε, μετά μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνικούς πίνακες: $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & -25 \end{bmatrix}$

Οπότε:

$$PA = LU \Rightarrow A = P^{-1}LU \Rightarrow A^{-1} = (P^{-1}LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1}(P^{-1})^{-1} \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}P.$$

Έτσι για τον A^{-1}, αρκεί να βρούμε τους αντίστροφους των πινάκων L, U που είναι πρακτικά προτιμότερο γιατί είναι τριγωνικοί κάτω και άνω πίνακες, αντίστοιχα.

Διανυσματικοί χώροι

Ένα σύνολο V στο οποίο έχουν οριστεί οι πράξεις + (διανυσματική πρόσθεση) και · (βαθμωτός πολλαπλασιασμός), λέγεται **πραγματικός διανυσματικός** (ή **γραμμικός**) **χώρος** (*vector space*), όταν:

i) ως προς την + ισχύουν οι ιδιότητες:

1. $\forall\ \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in V,\ (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w})$
2. $\forall\ \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V,\ \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$
3. $\exists\ \mathbf{O} \in V : \forall\ \boldsymbol{u} \in V,\ \boldsymbol{u} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$
4. $\forall\ \boldsymbol{u} \in V, \exists\ (-\boldsymbol{u}) \in V : \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \mathbf{O}$

ii) ως προς την · ισχύουν οι ιδιότητες:

1. $\forall\ \lambda \in \mathrm{R},\ \forall\ \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V,\ \lambda \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}) = \lambda \cdot \boldsymbol{v} + \lambda \cdot \boldsymbol{u}$
2. $\forall\ \lambda, \mu \in \mathrm{R},\ \forall\ \boldsymbol{u} \in V,\ (\lambda + \mu) \cdot \boldsymbol{u} = \lambda \cdot \boldsymbol{u} + \mu \cdot \boldsymbol{u}$
3. $\forall\ \lambda, \mu \in \mathrm{R},\ \forall\ \boldsymbol{u} \in V,\ \lambda \cdot (\mu \cdot \boldsymbol{u}) = (\lambda\mu) \cdot \boldsymbol{u}$
4. $\forall\ \boldsymbol{u} \in V,\ 1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

Διανυσματικοί χώροι

- Τα στοιχεία του V λέγονται **διανύσματα** και για την αναπαράστασή τους θα χρησιμοποιούμε συνήθως γράμματα του λατινικού αλφάβητου, ενώ για τα στοιχεία του R (δηλ. τους **συντελεστές**) θα χρησιμοποιούμε γράμματα του ελληνικού αλφάβητου.

- Ο όρος διάνυσμα εδώ έχει ευρύτερη σημασία. Διάνυσμα μπορούμε να θεωρούμε και έναν πίνακα, γιατί το σύνολο $M_{m,n}$ των $m \times n$ πινάκων αποτελεί ένα διανυσματικό χώρο (αφού, ισχύουν οι ιδιότητες (i.1 – i.4) ως προς την πρόσθεση πινάκων και οι ιδιότητες (ii.1 – ii.4) ως προς τον πολλαπλασιασμό αριθμού με πίνακα.

- Γενικότερα, ορίζονται διανυσματικοί χώροι με συντελεστές από το σύνολο των μιγαδικών αριθμών C ή ακόμα γενικότερα, από ένα σώμα F (εμείς με τον όρο διανυσματικός χώρος (δ. χ.) θα εννοούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο).

Ιδιότητες διανυσματικών χώρων

Με βάση τις ιδιότητες ορισμού του δ. χ., αποδεικνύεται ότι σε κάθε δ. χ. ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

$$\forall\, \lambda \in \mathrm{R},\ \ \lambda\mathbf{O} = \mathbf{O}$$

$$\forall\, \boldsymbol{u} \in V,\ 0\boldsymbol{u} = \mathbf{O}$$

$$\forall\, \lambda \in \mathrm{R},\ \ \forall\, \boldsymbol{u} \in V,\ \ \lambda\boldsymbol{u} = \mathbf{O}\ \Rightarrow\ (\lambda = 0\ \ \text{ή}\ \ \boldsymbol{u} = \mathbf{O})$$

$$\forall\, \lambda \in \mathrm{R},\ \ \forall\, \boldsymbol{u} \in V,\ \ (-\lambda)\boldsymbol{u} = \lambda(-\boldsymbol{u}) = -(\lambda\boldsymbol{u})$$

$$\forall\, \lambda \in \mathrm{R}^{*},\ \ \forall\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V,\ \ \lambda\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{u}\ \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$$

$$\forall\, \lambda, \mu \in \mathrm{R},\ \ \forall\, \boldsymbol{u} \in V^{*},\ \ \lambda\boldsymbol{u} = \mu\boldsymbol{u}\ \ \Rightarrow \lambda = \mu.$$

Διανυσματικοί υπόχωροι

- Ένα υποσύνολο V_0 ενός δ. χ. V είναι **διανυσματικός υπόχωρος** (δ. υπ.) του V, αν το V_0 είναι ένας δ. χ. ως προς τις πράξεις του V όταν αυτές περιοριστούν στο V_0.

- Έτσι, αποδεικνύεται ότι το υποσύνολο V_0 ενός δ. χ. V είναι ένας δ. υπ. του V, αν και μόνον αν:

$$\forall\ \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V_0,\ \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \in V_0$$

$$\forall\ \lambda \in \mathrm{R},\quad \forall\ \boldsymbol{u} \in V_0,\ \lambda \boldsymbol{u} \in V_0$$

- ή γενικότερα ένα υποσύνολο V_0 ενός δ. χ. V είναι ένας δ. υπ. του V, αν και μόνον αν:

$$\forall\ \lambda, \mu \in \mathrm{R},\ \forall\ \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V_0,\ \lambda \boldsymbol{v} + \mu \boldsymbol{u} \in V_0$$

Διανυσματικοί υπόχωροι

- Έστω τώρα V ένας δ. χ. και $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$. Το δ/μα:

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{v}_k\,, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathrm{R}$$

  λέγεται **γραμμικός συνδυασμός** (*linear combination*) των $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

- Αν επιπλέον είναι $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 1$, τότε το παραπάνω διάνυσμα λέγεται **ομοπαραλληλικός συνδυασμός** (*affine combination*) των $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

- Για τους γραμμικούς συνδυασμούς διανυσμάτων ισχύει ότι, αν V είναι ένας δ. χ. τότε το σύνολο:

$$V_k = \{\, \boldsymbol{v}\in V\colon \boldsymbol{v} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{v}_k\,, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathrm{R}\,, \quad \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V\}$$

  συμβολικά, $<\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k>$ ή $span\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$, είναι ένας δ. υπ. του V.

Διανυσματικοί υπόχωροι

- Ο χώρος $< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k >$ λέγεται ότι είναι **ο υπόχωρος του V που παράγεται** από τα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$. Επίσης θα λέμε ότι τα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ **παράγουν τον υπόχωρο** V_k του V.

- Άρα, για ν.δ.ο. $\boldsymbol{v} \in < \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k >$, αρκεί ν.δ.ο. υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathrm{R}$, τέτοιοι, ώστε $\boldsymbol{v} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{v}_k$.

- Προφανώς, το $\mathbf{O} \in < \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k >$ (είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$) όπως επίσης και τα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in < \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k >$ (π.χ., είναι $\boldsymbol{v}_1 = 1\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + \ldots + 0\boldsymbol{v}_k$).

Διανυσματικοί χώροι και υπόχωροι

Αν θεωρήσουμε το σύνολο των διατεταγμένων n-άδων πραγματικών αριθμών:

$$\mathrm{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathrm{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

και ορίσουμε σ' αυτό τις πράξεις:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)\ ,\ \lambda \in \mathrm{R}$$

τότε το σύνολο αυτό είναι ένας δ. χ. με μηδενικό στοιχείο το $\mathbf{O} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Επίσης, το δ/μα $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ με συντεταγμένες $x_1, x_2, \ldots, x_n$, μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε (ταυτίσουμε) με το **σημείο** $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ με συντεταγμένες $x_1, x_2, \ldots, x_n$, του **χώρου** R^n.

Η αρχή Ο είναι το μηδενικό δ/μα $\mathbf{O} = (0, 0, \ldots, 0)$ και ταυτίζουμε το σημείο $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ με το δ/μα (θέσης) που αρχίζει από την αρχή και τελειώνει στο σημείο $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Διανυσματικοί χώροι και υπόχωροι

- Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε και τη **γωνία** θ μεταξύ των διανυσμάτων $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ κατά τον συνήθη τρόπο, χρησιμοποιώντας το «επίπεδο» στον R^n που περιέχει αυτά τα διανύσματα.

- Αν τώρα έχουμε τα σημεία $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $N(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ τότε ταυτίζουμε το *προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα* $\overrightarrow{MN}$ (αρχή το M, τέλος το N) με το διάνυσμα $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n)$.

Διανυσματικοί χώροι και υπόχωροι

- Αν $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ είναι δ/τα του R^n, τότε το **εσωτερικό γινόμενο** των $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ ορίζεται ως ο αριθμός:

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

- **Η (Ευκλείδεια) νόρμα** ή **μέτρο (μήκος)** του $\boldsymbol{x}$, συμβολικά $\|\boldsymbol{x}\|$, ορίζεται ως ο μη αρνητικός αριθμός:

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

- Η **(Ευκλείδεια) απόσταση** μεταξύ των $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$, συμβολικά $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, ορίζεται ως ο μη αρνητικός αριθμός:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

- Με τον όρο **Ευκλείδειος *n*-χώρος**, εννοούμε τον R^n εμπλουτισμένο με τους ορισμούς του εσωτερικού γινομένου και της απόστασης.

- Στον χώρο αυτό ορίζουμε τη γωνία θ μεταξύ των δ/των $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ από την ισότητα:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}$$

- Αν έχουμε δύο δ/τα $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ κάθετα μεταξύ τους, τότε ισχύει ότι $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0$.

1ο παράδειγμα με διανυσματικό υπόχωρο

Να ελέγξετε εάν το σύνολο: $V_0 = \{\boldsymbol{v} \in \mathrm{R}^4 : \boldsymbol{v} = [0 \;\; \alpha \;\; \beta \;\; 0]^{\mathrm{T}} \,,\;\; \alpha, \beta \in \mathrm{R}\}$ αποτελεί δ. χ.

Για να διαπιστώσουμε ότι είναι διανυσματικός χώρος, επειδή $V_0 \subseteq \mathrm{R}^4$, αρκεί να δούμε αν είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του δ. χ. R^4.

Εξετάζουμε αν: $\forall\, \lambda, \mu \in \mathrm{R},\;\; \forall\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V_0,\;\; \lambda \boldsymbol{v} + \mu \boldsymbol{u} \in V_0$

Θεωρούμε δύο τυχαία δ/τα: $\boldsymbol{v} = [0 \;\; \alpha \;\; \beta \;\; 0]^{\mathrm{T}}$ και $\boldsymbol{u} = [0 \;\; \gamma \;\; \delta \;\; 0]^{\mathrm{T}}$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \lambda \boldsymbol{v} + \mu \boldsymbol{u} &= \\ \lambda[0 \;\; \alpha \;\; \beta \;\; 0]^{\mathrm{T}} + \mu[0 \;\; \gamma \;\; \delta \;\; 0]^{\mathrm{T}} &= \\ [0 \;\; \lambda\alpha+\mu\gamma \;\; \lambda\beta+\mu\delta \;\; 0]^{\mathrm{T}} &= \\ [0 \;\; \rho \;\; \sigma \;\; 0]^{\mathrm{T}} &, \quad \rho, \sigma \in \mathrm{R} \end{aligned}$$

2^o παράδειγμα με διανυσματικό υπόχωρο

Ποιόν υποχώρο παράγει το ακόλουθο δ/μα του R^2: $\boldsymbol{v}_1 = [1 \;\; 1]^T$?

Για τον υπόχωρο που παράγει, έχουμε:

$$< \boldsymbol{v}_1 > = \{\boldsymbol{v} \in V: \boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1, \;\; \lambda_1 \in \mathrm{R}\}$$

Είναι όμως: $\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 = [\lambda_1 \;\; \lambda_1]^T = [x \;\; y]^T \Rightarrow x = \lambda_1, \;\; y = \lambda_1$

Με απαλοιφή του λ_1 από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει η εξίσωση:

$$x - y = 0$$

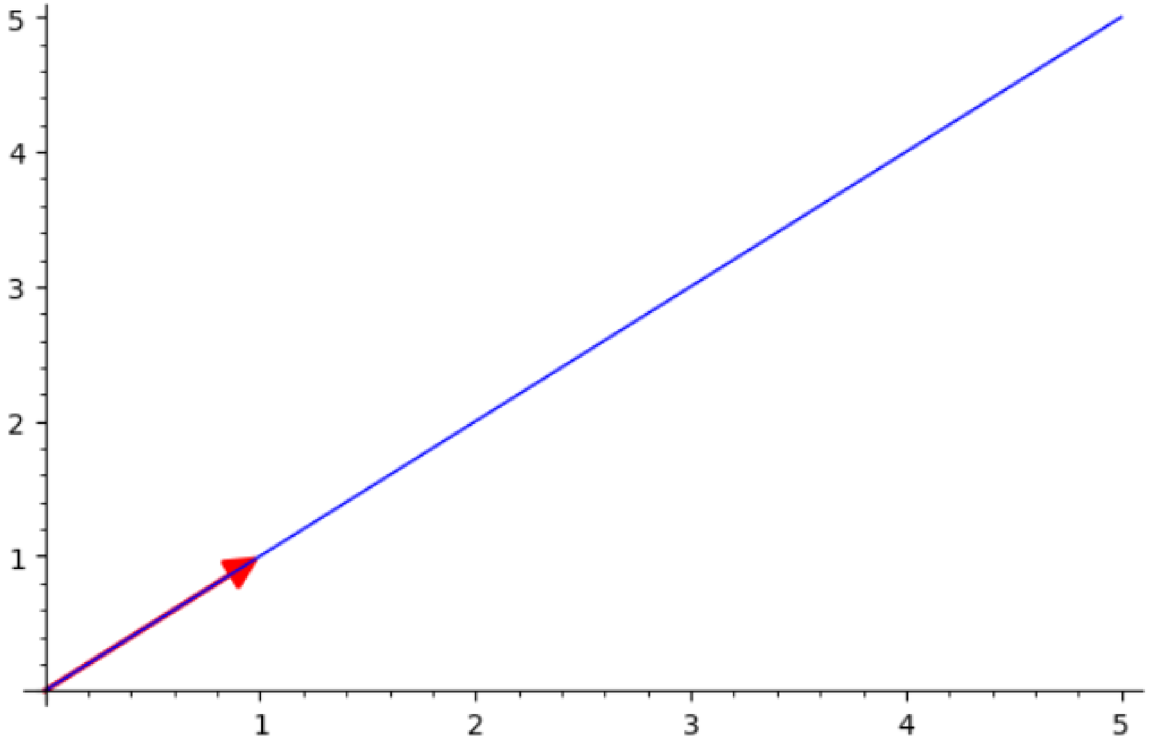
δηλ. $< \boldsymbol{v}_1 > = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2: x - y = 0\}$

ή με άλλα λόγια, ο υπόχωρος του R^2 που παράγεται από το παραπάνω διάνυσμα είναι η ευθεία με εξίσωση $x - y = 0$.

2ο παράδειγμα με διανυσματικό υπόχωρο

In [38]:
```
p1 = line([(0,0), (5,5)])
p2 = arrow2d((0,0), (1,1), color='red')
p1 + p2
```

Out[38]:



- Ο υποχώρος του R^2 που παράγεται από ένα δ/μα $\boldsymbol{v}_1$ είναι το σύνολο όλων των πολλαπλάσιων του $\boldsymbol{v}_1$.

- Άρα, ο υποχώρος του R^2 που παράγεται από το δ/μα $\boldsymbol{v}_1 = [1, 1]^T$ είναι η ευθεία γραμμή η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει την κατεύθυνση [1, 1].

3^o παράδειγμα με διανυσματικό υπόχωρο

Ποιόν υποχώρο παράγουν τα ακόλουθα δ/τα του R^3 $\boldsymbol{v}_1 = [1\ 0\ 1]^T$ και $\boldsymbol{v}_2 = [-1\ 2\ 1]^T$?

Για τον υπόχωρο που παράγουν, έχουμε:

$$< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 > = \{\boldsymbol{v} \in V: \boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2\ ,\ \lambda_1, \lambda_2 \in R\}$$

Είναι όμως:

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 = [\lambda_1 - \lambda_2\ \ 2\lambda_2\ \ \lambda_1 + \lambda_2]^T = [x\ \ y\ \ z]^T \Rightarrow x = \lambda_1 - \lambda_2,\ \ y = 2\lambda_2,\ \ z = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Απαλείφοντας τα λ_1 και λ_2 από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει η εξίσωση:

$$x + y - z = 0$$

δηλ. $< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 > = \{(x, y, z) \in R^3: x + y - z = 0\}$

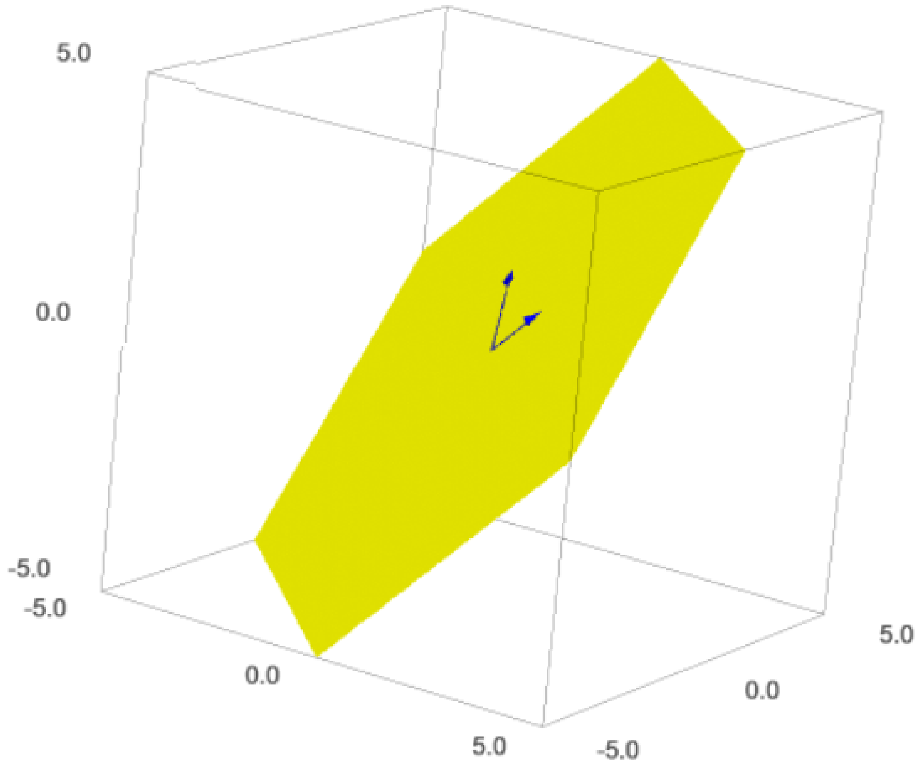
ή με άλλα λόγια, ο υπόχωρος του R^3 που παράγεται από τα παραπάνω διανύσματα είναι το επίπεδο με εξίσωση $x + y - z = 0$.

3^o παράδειγμα με διανυσματικό υπόχωρο

In [36]:
```
var('x,y,z')

p1 = implicit_plot3d(x+y-z==0, (x,-5,5), (y,-5,5), (z,-5,5), color='yellow')
p2 = arrow3d((0,0,0), ( 1, 0, 1), 2, color='blue')
p3 = arrow3d((0,0,0), (-1, 2, 1), 2, color='blue')
p1 + p2 + p3
```

Out[36]:



- Δυο τρισδιάστατα δ/τα $\boldsymbol{v}_1$ και $\boldsymbol{v}_2$ -τα οποία δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία- παράγουν το επίπεδο το οποίο τα περιέχει.

- Άρα, ο υποχώρος του R^3 που παράγεται από τα δ/τα $\boldsymbol{v}_1 = [1\ 0\ 1]^T$ και $\boldsymbol{v}_2 = [-1\ 2\ 1]^T$ είναι το παραπάνω επίπεδο.

4ο παράδειγμα με διανυσματικό υπόχωρο

Να δείξετε ότι τα ακόλουθα δ/τα παράγουν το δ. χ. R^n: $\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

Πράγματι, αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε δ/μα $\boldsymbol{x}$ του R^n, έχουμε:

$$\boldsymbol{x} = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^T = [x_1\ 0\ \ldots\ 0]^T + [0\ x_2\ \ldots\ 0]^T + \ldots + [0\ 0\ \ldots\ x_n]^T =$$
$$x_1[1\ 0\ \ldots\ 0]^T + x_2[0\ 1\ \ldots\ 0]^T + \ldots + x_n[0\ 0\ \ldots\ 1]^T$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

Επομένως: $\quad R^n = <\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n>$

Διανυσματικοί χώροι και υπόχωροι

<u>Θεώρημα</u>. Αν A είναι ένας $m{\times}n$ πίνακας τότε το σύνολο Ν των λύσεων του ομογενούς συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{O}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος.

Πράγματι αν $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{N}$, τότε επειδή $A\boldsymbol{u} = \mathbf{O}$ και $A\boldsymbol{v} = \mathbf{O}$, είναι:

$$A(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) = \lambda A\mathbf{u} + \mu A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{O} + \mu\mathbf{O} = \mathbf{O}$$

άρα $\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v} \in \mathrm{N}$.

Ο παραπάνω δ.χ. Ν, λέγεται **μηδενικός χώρος** ή **μηδενο-χώρος** (*null space*) του πίνακα A, συμβολικά $null(A)$, και είναι ένας από τους τρεις διανυσματικούς χώρους που συσχετίζονται με έναν πίνακα.

Διανυσματικοί χώροι και υπόχωροι

- Ο δεύτερος χώρος που συσχετίζεται με τον πίνακα A είναι ο **γραμμο-χώρος** (*row space*) του A, συμβολικά *row*(A), ο οποίος ορίζεται ως ο χώρος που παράγεται από τα δ/τα που αντιστοιχούν στις γραμμές του A, δηλ.

$$row(A) = < A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(m)} >$$

- Ο τρίτος χώρος είναι ο **στηλο-χώρος** (*column space*) του A, συμβολικά *col*(A), ο οποίος ορίζεται ως ο χώρος που παράγεται από τα δ/τα που αντιστοιχούν στις στήλες του A, δηλ.

$$col(A) = < A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)} >$$

Γραμμική εξάρτηση – ανεξαρτησία διανυσμάτων

Η γραμμική εξάρτηση σε ένα δ. χ. V ορίζεται ως εξής:

- Τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, …, $\boldsymbol{v}_k$ ($k > 1$) ενός δ. χ. V λέμε ότι είναι **γραμμικώς εξαρτημένα** (*linearly dependent*), όταν ένα τουλάχιστον απ' αυτά ανήκει στον διανυσματικό υπόχωρο που παράγουν τα υπόλοιπα.

- Τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, …, $\boldsymbol{v}_k$ ενός δ. χ. V που δεν είναι γραμμικώς εξαρτημένα, λέμε ότι είναι **γραμμικώς ανεξάρτητα** (*linearly independent*).

Γραμμική εξάρτηση – ανεξαρτησία διανυσμάτων

Πρόταση 2.2.1
Τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ ενός δ. χ. V είναι γραμμικώς εξαρτημένα, αν και μόνον αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in$ R, τέτοιοι, ώστε να είναι:

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{v}_k = \mathbf{O} \quad \text{και} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \neq (0, 0, \ldots, 0)$$

Πρόταση 2.2.2
Τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ ενός δ. χ. V είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αν και μόνον αν:

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{v}_k = \mathbf{O} \;\Rightarrow\; (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) = (0, 0, \ldots, 0)$$

Γραμμική εξάρτηση – ανεξαρτησία διανυσμάτων

Είναι τα ακόλουθα δ/τα γραμμικώς ανεξάρτητα δ/τα του χώρου R^n ?

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Πράγματι, αν θεωρήσουμε την ισότητα $\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{e}_k = \mathbf{O}$

έχουμε ισοδύναμα:

$\lambda_1[1\ 0\ \ldots\ 0]^T + \lambda_2[0\ 1\ \ldots\ 0]^T + \ldots + \lambda_k[0\ 0\ \ldots\ 1]^T = [0\ 0\ \ldots\ 0]^T$
$\Leftrightarrow [\lambda_1\ 0\ \ldots\ 0]^T + [0\ \lambda_2\ \ldots\ 0]^T + \ldots + [0\ 0\ \ldots\ \lambda_n]^T = [0\ 0\ \ldots\ 0]^T$
$\Leftrightarrow [\lambda_1\ \lambda_2\ \ldots\ \lambda_n]^T = [0\ 0\ \ldots\ 0]^T$.

Γραμμική εξάρτηση – ανεξαρτησία διανυσμάτων

Ιδιότητες γραμμικής εξάρτησης-ανεξαρτησίας:

- Αν m διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ ενός δ. χ. V είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε και τα k ($k > m$) διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ είναι επίσης γραμμικώς εξαρτημένα.

- Αν m διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ ενός δ. χ. V είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε και οποιαδήποτε από αυτά είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα.

- Αν τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ενώ τα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{u}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε: $\boldsymbol{u} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle$

Γραμμική εξάρτηση – ανεξαρτησία διανυσμάτων

Αν $V = \mathrm{R}^n$ και A είναι ο πίνακας των διανυσμάτων:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{bmatrix}, \ldots, \boldsymbol{v}_k = \begin{bmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \\ \vdots \\ v_{nk} \end{bmatrix}$$

δηλ. $A = [\boldsymbol{v}_1 \;\; \boldsymbol{v}_2 \;\; \ldots \;\; \boldsymbol{v}_k] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1k} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nk} \end{bmatrix}$

τότε: $x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + x_k\boldsymbol{v}_k = A\boldsymbol{x}, \;\; \boldsymbol{x} = [x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_k]^{\mathrm{T}}$

οπότε τα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα όταν: $A\boldsymbol{x} = \mathbf{O} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} = \mathbf{O}$

Γραμμική εξάρτηση – ανεξαρτησία διανυσμάτων

Άρα:

- Τα δ/τα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, …, $\boldsymbol{v}_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αν και μόνον αν η εξίσωση (σύστημα) $A\mathbf{x} = \mathbf{O}$ έχει μόνο τη μηδενική λύση $\boldsymbol{x} = \mathbf{O}$.

ή

- Οι στήλες του πίνακα A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, αν και μόνον αν το ομογενές σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{O}$ έχει μόνο τη μηδενική λύση.

Γραμμική εξάρτηση – ανεξαρτησία διανυσμάτων

Αποδεικνύεται ότι:

- Τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, …, $\boldsymbol{v}_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, αν και μόνον αν rank(A) = $r < k$, οπότε υπάρχουν ακριβώς r διανύσματα από τα παραπάνω τα οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, ενώ καθένα από τα υπόλοιπα ($k - r$) διανύσματα μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός αυτών των r διανυσμάτων.

- Αν rank(A) = k, τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

- Αν $k > n$, τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, …, $\boldsymbol{v}_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Ή αλλιώς:

- Τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, …, $\boldsymbol{v}_n$ του R^n είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αν και μόνον αν

$$\det([\boldsymbol{v}_1 \ \ \boldsymbol{v}_2 \ \ \dots \ \ \boldsymbol{v}_n]) \neq 0$$

Γραμμική εξάρτηση – ανεξαρτησία διανυσμάτων

Είναι τα ακόλουθα δ/τα γραμμικώς εξαρτημένα στο χώρο R^4 ?

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Πράγματι, εδώ είναι $k = 3$, $n = 4$ και $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

Οπότε, μέσω *SageMath*:

```
A = matrix(ZZ, 4, 3, [1, 3, 1, 2, -1, -5, -3, 2, 8, 4, 1, -7])
show(A)
print "rank(A) = ", rank(A)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

```
rank(A) =  2
```

βρίσκουμε ότι $\text{rank}(A) = 2 < 3$, άρα είναι γραμμικώς εξαρτημένα δ/τα στο χώρο R^4 .

Γραμμική εξάρτηση – ανεξαρτησία διανυσμάτων

Επειδή: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

- Τα δ/τα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

- Οπότε, πως μπορούμε να γράψουμε το $\boldsymbol{v}_3$ ως γραμμικό συνδυασμό τους?

$$\boldsymbol{v}_3 = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 \Leftrightarrow [1\ \ -5\ \ 8\ \ -7]^T = [\lambda_1\ \ 2\lambda_1\ \ -3\lambda_1\ \ 4\lambda_1]^T + [3\lambda_2\ \ -\lambda_2\ \ 2\lambda_2\ \ \lambda_2]^T$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = -5 \\ -3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 8 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Οπότε: $\boldsymbol{v}_3 = -2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$