Γραμμική Άλγεβρα
(*Linear Algebra*)

ΑΓΓΕΛΟΣ ΣΙΦΑΛΕΡΑΣ

Καθηγητής

3η Διάλεξη (Θεωρία)

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

CMOR Lab

Computational Methodologies
and Operations Research

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού πινάκων

Αν $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ είναι $n \times n$ άνω (κάτω) τριγωνικοί πίνακες και $f(x)$ είναι πολυώνυμο, τότε ο πίνακας:

- $A + B$ είναι άνω (κάτω) τριγωνικός, με διαγώνιο $(a_{11}+b_{11}, a_{22}+b_{22}, \ldots, a_{nn}+b_{nn})$
- λA είναι άνω (κάτω) τριγωνικός, με διαγώνιο $(\lambda a_{11}, \lambda a_{22}, \ldots, \lambda a_{nn})$
- AB είναι άνω (κάτω) τριγωνικός, με διαγώνιο $(a_{11}b_{11}, a_{22}b_{22}, \ldots, a_{nn}b_{nn})$
- $f(A)$ είναι άνω (κάτω) τριγωνικός, με διαγώνιο $(f(a_{11}), f(a_{22}), \ldots, f(a_{nn}))$

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού πινάκων

Αντίστοιχα με τον πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών, ορίζουμε τη μηδενική δύναμη ενός τετραγωνικού πίνακα ως τον μοναδιαίο πίνακα του αντίστοιχου μεγέθους, δηλ. αν A ένας $n \times n$ πίνακας, τότε:

$$A^0 = I_n$$

Παρόμοια, ορίζονται και οι θετικές δυνάμεις του A: $$A^n = \underbrace{AA \cdots A}_{n \text{ φορές}}$$

Επίσης, ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων. Για μη αρνητικούς ακεραίους s και t, ισχύει:

$$A^s A^t = A^{s+t} \quad \text{και} \quad (A^s)^t = A^{st}$$

π.χ., αν: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

να βρείτε τον A^2.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Δυνάμεις πίνακα

Επειδή στον πολλαπλασιασμό τετραγωνικών πινάκων δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, δεν ισχύουν διάφορες ταυτότητες από την άλγεβρα στο σώμα των πραγματικών αριθμών.

π.χ. $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

Πράγματι, είναι:

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) = (A+B)A + (A+B)B \\ &= A^2 + BA + AB + B^2 \\ &\neq A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2\end{aligned}$$

$1^{ο}$ παράδειγμα με δυνάμεις πίνακα, (1/4)

Έστω ο πίνακας: $A=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

ν.δ.ο.

i. $A^2 = 4A - 3I_2$

ii. $A^n = \frac{3^n - 1}{2}A + \frac{3 - 3^n}{2}I_2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

1ο παράδειγμα με δυνάμεις πίνακα, (2/4)

Για το (i) έχουμε:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16-3 & -12 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -12 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$4A - 3I_2 = 4\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -12 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

1ο παράδειγμα με δυνάμεις πίνακα, (3/4)

Για το (ii) <u>χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής</u>. Έστω $P(n)$ το κατηγόρημα:

$$A^n = \frac{3^n - 1}{2} A + \frac{3 - 3^n}{2} I_2$$

- θ.δ.ο. <u>για $n = 1$</u>: $A^1 = \frac{3^1 - 1}{2} A + \frac{3 - 3^1}{2} I_2 \Leftrightarrow A = A + 0I_2 \Leftrightarrow A = A$

Άρα η πρόταση είναι αληθής, (η πρόταση $P(1)$ ισχύει για $n = 1$).

- Έστω, ότι ισχύει η πρόταση $P(k)$ <u>για $n = k$</u>:

$$A^k = \frac{3^k - 1}{2} A + \frac{3 - 3^k}{2} I_2$$

- θ.δ.ο. ισχύει <u>για $n = k + 1$</u>

1ο παράδειγμα με δυνάμεις πίνακα, (4/4)

$$A^{k+1} = A^k A = \left(\frac{3^k - 1}{2} A + \frac{3 - 3^k}{2} I_2 \right) A$$

$$= \frac{3^k - 1}{2} A^2 + \frac{3 - 3^k}{2} I_2 A$$

$$= \frac{3^k - 1}{2} \left(4A - 3I_2 \right) + \frac{3 - 3^k}{2} A \qquad \text{από το (i)}$$

$$= \frac{4\left(3^k - 1\right)}{2} A - \frac{3^{k+1} - 3}{2} I_2 + \frac{3 - 3^k}{2} A$$

$$= \frac{4\left(3^k - 1\right) + 3 - 3^k}{2} A - \frac{3^{k+1} - 3}{2} I_2$$

$$= \frac{3 \cdot 3^k - 1}{2} A + \frac{3 - 3^{k+1}}{2} I_2$$

$$= \frac{3^{k+1} - 1}{2} A + \frac{3 - 3^{k+1}}{2} I_2$$

Άρα η $P(k + 1)$ είναι αληθής (η πρόταση ισχύει για $n = k + 1$).
Επομένως, $P(n)$ αληθής για κάθε $n \geq 1$, δηλ. δείξαμε και το (ii).

2^{o} παράδειγμα με δυνάμεις πίνακα, (1/4)

Αν για τον $n \times n$ πίνακα Α ισχύει: $A^2 + A + I = 0$

Όπου I και 0 ο $n \times n$ μοναδιαίος και μηδενικός πίνακας αντίστοιχα, ν.δ.ο.:

i) Ο Α είναι αντιστρέψιμος και: $A^{-1} = A^2$

$ii)$ $A^{62} + A^{37} + I = 0$

$iii)$ $A^{95} + \left(A^{-1}\right)^{95} = -I$

2ο παράδειγμα με δυνάμεις πίνακα, (2/4)

Επειδή: $A^2 + A + I = 0$

$$
\begin{aligned}
i) \quad A^3 - I &= (A - I)(A^2 + A + I) \\
&= (A - I)0 \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

ή $\quad A^3 = I \Leftrightarrow AA^2 = I$

Οπότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του είναι ο A^2

$$A^{-1} = A^2$$

2ο παράδειγμα με δυνάμεις πίνακα, (3/4)

ii)

$$A^{62} + A^{37} + I = \left(A^3\right)^{20} A^2 + \left(A^3\right)^{12} A + I$$

$$= I^{20} A^2 + I^{12} A + I$$

$$= A^2 + A + I$$

$$= 0$$

2ο παράδειγμα με δυνάμεις πίνακα, (4/4)

iii)

$$
\begin{aligned}
A^{95} + \left(A^{-1}\right)^{95} &= A^{95} + \left(A^{2}\right)^{95} \\
&= A^{95}\left(I + A^{95}\right) \\
&= \left(A^{3}\right)^{31} A^{2}\left(I + I^{31}A^{2}\right) \\
&= I^{31}A^{2}\left(I + A^{2}\right) \\
&= A^{2}\left(I + A^{2}\right) \\
&= A^{2} + A^{4} \\
&= A^{2} + A^{3}A \\
&= A^{2} + IA \\
&= A^{2} + A \\
&= -I
\end{aligned}
$$

Γινόμενο *Kronecker*

Αν A είναι ένας $m \times n$ πίνακας και B ένας $p \times q$ πίνακας τότε ο $mp \times nq$ πίνακας

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

λέγεται **τανυστικό γινόμενο** (*tensor product*) ή **ευθύ γινόμενο** (*direct product*) ή **γινόμενο *Kronecker*** (*Kronecker product*).

Γινόμενο *Kronecker*

Έστω π.χ. $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$

τότε: $A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} & a_{12} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \\ a_{21} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} & a_{22} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{12}b_{13} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{11}b_{23} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & a_{22}b_{13} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{21}b_{23} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} \end{bmatrix}$$

Γινόμενο *Kronecker*

Επίσης:

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} b_{11}A & b_{12}A & b_{13}A \\ b_{21}A & b_{22}A & b_{23}A \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & b_{12}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & b_{13}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ b_{21}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & b_{22}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & b_{23}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} & b_{11}a_{12} & b_{12}a_{11} & b_{12}a_{12} & b_{13}a_{11} & b_{13}a_{12} \\ b_{11}a_{21} & b_{11}a_{22} & b_{12}a_{21} & b_{12}a_{22} & b_{13}a_{21} & b_{13}a_{22} \\ b_{21}a_{11} & b_{21}a_{12} & b_{22}a_{11} & b_{22}a_{12} & b_{23}a_{11} & b_{23}a_{12} \\ b_{21}a_{21} & b_{21}a_{22} & b_{22}a_{22} & b_{22}a_{22} & b_{23}a_{21} & b_{23}a_{22} \end{bmatrix}$$

Άρα, γενικά: $A \otimes B \neq B \otimes A.$

Ιδιότητες γινομένου *Kronecker*

- Αν $A \in M_{m,n}$, $B \in M_{p,q}$ και $\lambda \in \mathrm{R}$, τότε:

$$\lambda(A \otimes B) = (\lambda A) \otimes B = A \otimes (\lambda B)$$

- Αν $A, B \in M_{m,n}$ και $\Gamma \in M_{p,q}$, τότε:

$$(A + B) \otimes \Gamma = A \otimes \Gamma + B \otimes \Gamma$$

$$\Gamma \otimes (A + B) = \Gamma \otimes A + \Gamma \otimes B$$

- Αν $A \in M_{m,n}$ και $B \in M_{p,q}$, τότε:

$$(A \otimes B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} \otimes B^{\mathrm{T}}$$

- Αν $A \in M_{m,n}$, $B \in M_{p,q}$ και $\Gamma \in M_{s,t}$ τότε:

$$(A \otimes B) \otimes \Gamma = A \otimes (B \otimes \Gamma)$$

Ιδιότητες γινομένου *Kronecker*

- Αν $I_m \in M_m$ και $I_n \in M_n$ είναι μοναδιαίοι πίνακες, τότε:

$$I_m \otimes I_n = I_{mn}$$

- Αν A, B, Γ και Δ είναι πίνακες τέτοιοι, ώστε να ορίζονται τα γινόμενα $A\Gamma$ και $B\Delta$, τότε:

$$(A \otimes B)(\Gamma \otimes \Delta) = A\Gamma \otimes B\Delta$$

- Αν $A \in M_m$ και $B \in M_n$ είναι αντιστρέψιμοι πίνακες τότε ο $A \otimes B$ είναι αντιστρέψιμος και

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

Η n^{η} δύναμη *Kronecker* ενός $m \times n$ πίνακα A είναι το γινόμενο *Kronecker*

$$A \otimes A \otimes \ldots \otimes A$$

και συμβολίζεται με $A^{[n]}$ ή $A^{\otimes n}$

Παραδείγματα με γινόμενο *Kronecker*

Έστω: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Να βρεθούν τα γινόμενα:

i. $A \otimes B$

ii. $B \otimes A$

Παραδείγματα με γινόμενο *Kronecker*

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & a_{13}B \\ a_{21}B & a_{22}B & a_{23}B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot\begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} & -1\cdot\begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} & 4\cdot\begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ -3\cdot\begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} & 2\cdot\begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} & -5\cdot\begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 4 & 10 & 12 & -4 & -2 & -5 & -6 & 16 & 8 & 20 & 24 \\ 2 & 6 & 2 & 4 & -1 & -3 & -1 & -2 & 4 & 12 & 4 & 8 \\ -12 & -6 & -15 & -18 & 8 & 4 & 10 & 12 & -20 & -10 & -25 & -30 \\ -3 & -9 & -3 & -6 & 2 & 6 & 2 & 4 & -5 & -15 & -5 & -10 \end{bmatrix}$$

Παραδείγματα με γινόμενο *Kronecker*

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} b_{11}A & b_{12}A & b_{13}A & b_{14}A \\ b_{21}A & b_{22}A & b_{23}A & b_{24}A \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -5 \end{bmatrix} & 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -5 \end{bmatrix} & 5 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -5 \end{bmatrix} & 6 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -5 \end{bmatrix} \\ 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -5 \end{bmatrix} & 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -5 \end{bmatrix} & 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -5 \end{bmatrix} & 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -5 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -4 & 16 & 4 & -2 & 8 & 10 & -5 & 20 & 12 & -6 & 24 \\ -12 & 8 & -20 & -6 & 4 & -10 & -15 & 10 & -25 & -18 & 12 & -30 \\ 2 & -1 & 4 & 6 & -3 & 12 & 2 & -1 & 4 & 4 & -2 & 8 \\ -3 & 2 & -5 & -9 & 6 & -15 & -3 & 2 & -5 & -6 & 4 & -10 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογές γινομένου *Kronecker*

- Signal processing,
- Image processing,
- Semidefinite programming,
- Quantum computing.

Charles F.Van Loan (2000), "The ubiquitous Kronecker product", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 123(1-2), 85–100.
(URL: http://dx.doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00393-9)

Ευθύ άθροισμα πινάκων

Αν τώρα $A_1, A_2, \ldots, A_s$ είναι τετραγωνικοί πίνακες διαστάσεων $n_1, n_2, \ldots, n_s$ αντίστοιχα, τότε ο $(n_1 + n_2 + \ldots + n_s)$ – τετραγωνικός πίνακας

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & O & \\ & & \ddots & & \\ & O & & \ddots & \\ & & & & A_s \end{bmatrix}$$

λέγεται **ευθύ άθροισμα** (*direct sum*) των $A_1, A_2, \ldots, A_s$ και συμβολίζεται με:

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_s \quad \text{ή} \quad \sum_{i=1}^{s} \oplus A_i \quad \text{ή} \quad diag(A_1, A_2, \ldots, A_s)$$

Ευθύ άθροισμα πινάκων

Έστω π.χ. $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

Να βρεθεί το ευθύ άθροισμα A ⊕ B

$$A\oplus B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Ευθύ άθροισμα πινάκων

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- Αν A, B, Γ, και $\Delta \in M_n$, τότε

$$(A \oplus B)(\Gamma \oplus \Delta) = A\Gamma \oplus B\Delta$$

- Αν $A \in M_n$, $B \in M_p$, και $\Gamma \in M_q$, τότε

$$(B \oplus \Gamma) \otimes A = (B \otimes A) \oplus (\Gamma \otimes A)$$

ενώ γενικά,

$$A \otimes (B \oplus \Gamma) \neq (A \otimes B) \oplus (A \otimes \Gamma)$$

και

$$A \oplus B \neq B \oplus A$$

Ευθύ άθροισμα πινάκων

Πειραματικός έλεγχος με χρήση *Matlab*:

```
>> A=rand(2); B=rand(3);  C=rand(4);
```

$$(B \oplus \Gamma) \otimes A = (B \otimes A) \oplus (\Gamma \otimes A)$$

```
>> isequal( kron( blkdiag(B,C), A) , blkdiag( kron(B,A), kron(C,A) ) )

ans =  1
```

$$A \otimes (B \oplus \Gamma) \neq (A \otimes B) \oplus (A \otimes \Gamma)$$

```
>> isequal( kron( A, blkdiag(B,C) ) , blkdiag( kron(A,B), kron(B,C) ) )

ans =  0
```

Παραδείγματα με ευθύ άθροισμα πινάκων

Έστω: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -5 \\ 7 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ και $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Να βρεθούν τα αθροίσματα:

i. $A \oplus C$

ii. $C \oplus A$

Παραδείγματα με ευθύ άθροισμα πινάκων

$$A \oplus C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C \oplus A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Γινόμενο *Hadamard*

Τέλος, αν $A = [a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}]$ είναι $m \times n$ πίνακες, τότε το ***Hadamard*** ή, **στοιχείο προς στοιχείο, γινόμενο** των A και B (*entrywise* ή και *Schur product*) λέγεται ο $m \times n$ πίνακας $\varGamma = [c_{ij}]$ με

$$c_{ij} = a_{ij} b_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

και συμβολίζεται με $A \cdot B$. Αν $A, B, \varGamma \in M_{m,n}$, τότε ισχύουν ότι:

- $A \cdot B = B \cdot A$
- $A \cdot (B \cdot \varGamma) = (A \cdot B) \cdot \varGamma$
- $A \cdot (B + \varGamma) = A \cdot B + A \cdot \varGamma$ και $(B + \varGamma) \cdot A = B \cdot A + \varGamma \cdot A$

Γινόμενο *Hadamard*

Έστω π.χ.: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

Να βρεθεί το γινόμενο $A \cdot B$

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

<u>Εφαρμογές</u>: Lossy compression algorithms such as JPEG, (the decoding step involves an entry-for-entry product, i.e., Hadamard product).

- Zhang, F. (Ed.). (2006). *The Schur complement and its applications* (Vol. 4). Springer Science & Business Media.
- Neudecker, H., Liu, S., & Polasek, W. (1995). “The Hadamard product and some of its applications in statistics”. *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, 26(4), 365-373.

Παραδείγματα με γινόμενο *Hadamard*

Έστω: $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -5 \\ 7 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ και $E = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & -2 \\ 6 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

Να βρεθεί το γινόμενο *Hadamard* D·E:

$$D \cdot E = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 12 \\ 3 & 10 & 10 \\ 42 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Στοιχειώδεις πίνακες και εφαρμογές

Στοιχειώδεις γραμμο-πράξεις (ή απλά **γραμμο-πράξεις)** ενός πίνακα A ονομάζονται κάποιες απλές -αλλά πολύ χρήσιμες- μετατροπές στις γραμμές:

- Εναλλαγή των γραμμών i και j, ή

$$\Gamma 1_{(i),(j)}: A_{(i)} \leftrightarrow A_{(j)}$$

- Πολλαπλασιασμός της γραμμής i με <u>μη μηδενικό</u> αριθμό r, ή

$$\Gamma 2_{r(i)}: rA_{(i)} \to A_{(i)} \quad (r \neq 0)$$

- Πρόσθεση στα στοιχεία της i γραμμής, των στοιχείων της j γραμμής πολλαπλασιασμένων με τον αριθμό r, ή

$$\Gamma 3_{(i)+r(j)}: A_{(i)} + rA_{(j)} \to A_{(i)} \qquad (i \neq j)$$

Στοιχειώδεις πίνακες και εφαρμογές

Όταν έχουμε δύο πίνακες A, B που ο ένας προκύπτει από τον άλλο με εφαρμογή πεπερασμένου πλήθους γραμμο-πράξεων, τότε οι πίνακες αυτοί λέμε ότι είναι **γραμμο-ισοδύναμοι**, ή $A \sim B$.

Προφανώς ισχύουν:

- $A \sim A$
- Αν $A \sim B$ τότε $B \sim A$
- Αν $A \sim B$ και $B \sim \Gamma$ τότε $A \sim \Gamma$.

Γενικά, η γραμμο-ισοδυναμία είναι μια *σχέση ισοδυναμίας*.

Στοιχειώδεις πίνακες και εφαρμογές

Έστω τώρα ότι, με $\Gamma(A)$ συμβολίζουμε το αποτέλεσμα της εφαρμογής μιας γραμμο-πράξης Γ σε έναν πίνακα A. Ο πίνακας E που προκύπτει εφαρμόζοντας τη Γ στον μοναδιαίο πίνακα:

$$E = \Gamma(I)$$

λέγεται **στοιχειώδης γραμμο-πίνακας** που αντιστοιχεί στη γραμμο-πράξη Γ.

Ειδικότερα, αντίστοιχοι των τριών παραπάνω στοιχειωδών γραμμο-πράξεων πίνακες, είναι οι **στοιχειώδεις γραμμο-πίνακες** $E_{(i),(j)}$, $E_{r(i)}$, $E_{(i)+r(j)}$ όπου:

- $E_{(i),(j)}$ = ο πίνακας που προκύπτει από την εναλλαγή των i και j γραμμών του I_m
- $E_{r(i)}$ = ο πίνακας που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό της i γραμμής του I_m με τον αριθμό $r \neq 0$
- $E_{(i)+r(j)}$ = ο πίνακας που προκύπτει από την πρόσθεση στην i γραμμή του I_m, της j γραμμής του πολλαπλασιασμένης με τον αριθμό r

Στοιχειώδεις πίνακες και εφαρμογές

Να υπολογίσετε τους 3-τετραγωνικούς στοιχειώδεις γραμμο-πίνακες, οι οποίοι αντιστοιχούν στις εξής γραμμο-πράξεις:

- $\Gamma 1_{(2),(3)}$

$$E_{(2),(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- $\Gamma 2_{-6(2)}$

$$E_{-6(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\Gamma 3_{(3)-2(1)}$

$$E_{(3)-2(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Στοιχειώδεις πίνακες και εφαρμογές

- Επίσης, αν A είναι ένας 4×3 πίνακας παρατηρούμε ότι:

$$E_{(3)-2(1)}A = E_{(3)-2(1)}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ A_{(3)} \\ A_{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ A_{(3)} - 2A_{(1)} \\ A_{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} - 2a_{11} & a_{32} - 2a_{12} & a_{33} - 2a_{13} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

- Δηλαδή, ο από αριστερά πολλαπλασιασμός του πίνακα A με τον $E_{(3)-2(1)}$ έχει ως αποτέλεσμα την γραμμο-πράξη $\Gamma 3_{(3)-2(1)}$ στον A.

Στοιχειώδεις πίνακες και εφαρμογές

Αποδεικνύεται ότι αν Γ είναι μια γραμμο-πράξη και E ο αντίστοιχος m-τετραγωνικός στοιχειώδης γραμμο-πίνακας, (δηλ. $E = \Gamma(I_m)$), τότε για κάθε $m\times n$ πίνακα A είναι

$$\Gamma(A) = EA.$$

Δηλαδή, το αποτέλεσμα της γραμμο-πράξης στον πίνακα A μπορεί να προκύψει πολλαπλασιάζοντας τον A (από αριστερά) με τον αντίστοιχο στοιχειώδη γραμμο-πίνακα E. Για έναν $m\times n$ πίνακα A έχουμε ότι:

- $E_{(i),(j)}A$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από την εναλλαγή των i και j γραμμών του A
- $E_{r(i)}A$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό της i γραμμής του A με τον αριθμό $r \neq 0$
- $E_{(i)+r(j)}A$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από την πρόσθεση της j γραμμής του A, πολλαπλασιασμένης με τον r, στην i γραμμή του A

Στοιχειώδεις πίνακες και εφαρμογές

Εύκολα μπορεί να δειχτεί ότι οι τρεις στοιχειώδεις γραμμο-πίνακες είναι αντιστρέψιμοι και ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- $(E_{(i),(j)})^{-1} := E^{-1}_{(i),(j)} = E_{(i),(j)}$

(διότι, $E_{(i),(j)} \cdot E_{(i),(j)} = I_n$)

- $(E_{r(i)})^{-1} := E^{-1}_{r(i)} = E_{1/r\,(i)}$

(διότι, $E_{r(i)} \cdot E_{1/r\,(i)} = I_n$)

- $(E_{(i)+r(j)})^{-1} := E^{-1}_{(i)+r(j)} = E_{(i)-r(j)}$

(διότι, $E_{(i)+r(j)} \cdot E_{(i)-r(j)} = I_n$)

Στοιχειώδεις πίνακες και εφαρμογές

Να υπολογίσετε τους ακόλουθους πίνακες:

$$E_{(2),(3)}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{-6(2)}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{(3)-2(1)}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Στοιχειώδεις πίνακες και εφαρμογές

Αν A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας τότε, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- ο A είναι αντιστρέψιμος
- ο A είναι γραμμο-ισοδύναμος με τον I
- ο A είναι γινόμενο στοιχειωδών γραμμο-πινάκων

όπως επίσης και ότι:

- Ο πίνακας B είναι γραμμο-ισοδύναμος με τον A, αν και μόνον αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας G τέτοιος, ώστε να είναι $B = GA$.

Στοιχειώδεις πίνακες και εφαρμογές

Αντίστοιχα, οι **στοιχειώδεις στηλο-πράξεις** ή απλά **στηλο-πράξεις** ορίζονται, αν στους ορισμούς των γραμμο-πράξεων η λέξη «γραμμή» αντικατασταθεί με τη λέξη «στήλη»:

- Εναλλαγή των στηλών i και j, ή

$$\Sigma 1^{(i),(j)}: A^{(i)} \leftrightarrow A^{(j)}$$

- Πολλαπλασιασμός της στήλης i με <u>μη μηδενικό</u> αριθμό r, ή

$$\Sigma 2^{r(i)}: rA^{(i)} \to A^{(i)} \quad (r \neq 0)$$

- Πρόσθεση στα στοιχεία της i στήλης, των στοιχείων της j στήλης πολλαπλασιασμένων με τον αριθμό r, ή

$$\Sigma 3^{(i)+r(j)}: A^{(i)} + rA^{(j)} \to A^{(i)} \qquad (i \neq j)$$

Στοιχειώδεις πίνακες και εφαρμογές

Αν τώρα με $\Sigma(A)$ συμβολίσουμε το αποτέλεσμα της εφαρμογής μιας στηλο-πράξης Σ σε έναν πίνακα A, ο πίνακας F που προκύπτει εφαρμόζοντας τη Σ στον μοναδιαίο πίνακα:

$$F = \Sigma(I)$$

λέγεται **στοιχειώδης στηλο-πίνακας** που αντιστοιχεί στη στηλο-πράξη Σ.

Ειδικότερα, οι αντίστοιχοι των τριών παραπάνω στοιχειωδών στηλο-πράξεων πίνακες, είναι οι **στοιχειώδεις στηλο-πίνακες** $F^{(i),(j)}$, $F^{r(i)}$, $F^{(i)+r(j)}$ όπου:

- $F^{(i),(j)}$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από την εναλλαγή των i και j στηλών του I_m
- $F^{r(i)}$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό της i στήλης του I_m με τον αριθμό $r \neq 0$
- $F^{(i)+r(j)}$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από την πρόσθεση στην i στήλη του I_m, της j στήλης του πολλαπλασιασμένης με τον αριθμό r

Στοιχειώδεις πίνακες και εφαρμογές

Επειδή τώρα οι στήλες του A είναι οι γραμμές του A^{T} και αντίστροφα, <u>η εφαρμογή μιας στηλο-πράξης Σ στον A έχει το ίδιο αποτέλεσμα με την εφαρμογή της αντίστοιχης γραμμο-πράξης Γ στον A^{T} ακολουθούμενη με αναστροφή</u> (λήψη ανάστροφου), δηλαδή:

$$\Sigma(A) = [\Gamma(A^{\mathrm{T}})]^{\mathrm{T}}$$

Έτσι:

$$F = \Sigma(I) = [\Gamma(I^{\mathrm{T}})]^{\mathrm{T}} = [\Gamma(I)]^{\mathrm{T}} = E^{\mathrm{T}} \longrightarrow$$

ή αλλιώς ο F είναι ο ανάστροφος του E

Επίσης:

$$\Sigma(A) = [\Gamma(A^{\mathrm{T}})]^{\mathrm{T}} = [EA^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}} = AF$$

Οπότε, για κάθε πίνακα A: $\Sigma(A) = AF$

Δηλαδή, το αποτέλεσμα της στηλο-πράξης στον πίνακα A μπορεί να προκύψει πολλαπλασιάζοντας τον A από δεξιά με τον αντίστοιχο στοιχειώδη στηλο-πίνακα F.

Στοιχειώδεις πίνακες και εφαρμογές

Για έναν $m{\times}n$ πίνακα A, ισχύει ότι:

- $AF^{(i),(j)}$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από την εναλλαγή των i και j στηλών του A
- $AF^{r(i)}$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό της i στήλης του A με τον αριθμό $r \neq 0$
- $AF^{(i)+r(j)}$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από την πρόσθεση της j στήλης του A, πολλαπλασιασμένης με τον r, στην i στήλη του A

Επίσης μπορεί να δειχτεί ότι οι τρεις στοιχειώδεις στηλο-πίνακες είναι αντιστρέψιμοι:

- $(F^{(i),(j)})^{-1} = F^{(i),(j)}$
- $(F^{r(i)})^{-1} = F^{1/r(i)}$
- $(F^{(i)+r(j)})^{-1} = F^{(i)-r(j)}$

Στοιχειώδεις πίνακες και εφαρμογές

- Όταν έχουμε δύο πίνακες A, B που ο ένας προκύπτει από τον άλλο με εφαρμογή πεπερασμένου πλήθους στηλο-πράξεων, τότε οι πίνακες αυτοί λέμε ότι είναι **στηλο-ισοδύναμοι**, και αποδεικνύεται ότι ο πίνακας B είναι στηλο-ισοδύναμος με τον A, αν και μόνον αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας Q τέτοιος, ώστε να είναι $B = AQ$.

- Γενικότερα τώρα, ένας πίνακας B λέμε ότι είναι **ισοδύναμος** με τον A, αν ο B προκύπτει από τον A μετά από μια πεπερασμένη ακολουθία γραμμο- και στηλο-πράξεων, ή ισοδύναμα, αν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες P και Q τέτοιοι, ώστε να είναι $B = PAQ$.

- Όπως με την γραμμο-ισοδυναμία (και την στηλο-ισοδυναμία) η ισοδυναμία πινάκων είναι μια σχέση ισοδυναμίας.