Γραμμική Άλγεβρα
(*Linear Algebra*)

ΑΓΓΕΛΟΣ ΣΙΦΑΛΕΡΑΣ

Καθηγητής

11η Διάλεξη (Θεωρία)

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

CMOR Lab

Computational Methodologies and Operations Research

Ορθοκανονικότητα

Έστω ότι έχουμε τα μη μηδενικά δ/τα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ του R^m. Λέμε ότι αυτά είναι:

- **ορθογώνια**, αν $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = 0$ για $i \neq j$ και

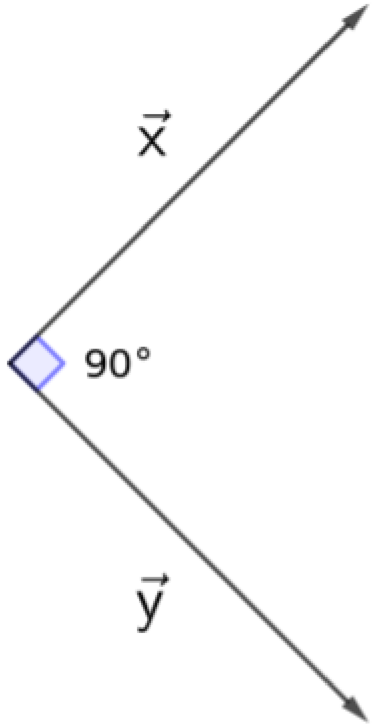
- **ορθοκανονικά**, αν επιπλέον είναι $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = 1$ ή $\|\boldsymbol{v}_i\| = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Είναι ορθογώνια ή/και ορθοκανονικά τα παρακάτω δ/τα του R^4 ?

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Είναι μόνο ορθογώνια, όχι όμως και ορθοκανονικά…

Γεωμετρική ερμηνεία ορθογωνίων δ/των



$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}|\cos(90^\circ) = 0$$

Ορθοκανονικότητα

- Γενικά, δοθέντος ενός δ/τος v μπορούμε να το κανονικοποιήσουμε σε μοναδιαίο δ/μα ***u*** με τον τύπο:

$$u = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$$

- Το χαρακτηριστικότερο παράδειγμα ορθοκανονικών δ/των είναι αυτό των δ/των $\{\boldsymbol{e}_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ της κανονικής βάσης του R^n.

Ορθοκανονικότητα

<u>Ιδιότητα</u>.
Αν τα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, … , $\boldsymbol{v}_n$ είναι ορθογώνια δ/τα, τότε είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

<u>Απόδειξη</u>.
Πράγματι για κάθε i με $1 \leq i \leq n$, είναι:

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{O}$$

$$\Rightarrow (\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \lambda_i\boldsymbol{v}_i + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{v}_n)\cdot\boldsymbol{v}_\mathrm{i} = \mathbf{O}\cdot\boldsymbol{v}_\mathrm{i}$$

$$\Rightarrow \lambda_1\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_\mathrm{i} + \lambda_2\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_\mathrm{i} + \ldots + \lambda_i\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{v}_n\cdot\boldsymbol{v}_i = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 0 + \lambda_2 0 + \ldots + \lambda_i\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i + \ldots + \lambda_n 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_i \left\|v_i\right\|^2 = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$$

Ορθοκανονικότητα

- Αν $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ είναι μια βάση του R^n και $\boldsymbol{v} \in \mathrm{R}^n$ έτσι, ώστε: $\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \dots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n$

τότε για $1 \leq i \leq n$,

$$\lambda_i = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_i}{\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i} \text{, αν η βάση είναι ορθογώνια}$$

$$\lambda_i = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_i \text{, αν η βάση είναι ορθοκανονική}$$

Απόδειξη.

Υποθέτοντας ότι η βάση είναι ορθογώνια, για $1 \leq i \leq n$, έχουμε:

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \dots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n \Rightarrow \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_i = (\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \dots + \lambda_i \boldsymbol{v}_i + \dots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n) \cdot \boldsymbol{v}_i$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_i = \lambda_1 (\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_i) + \dots + \lambda_i (\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i) + \dots + \lambda_n (\boldsymbol{v}_n \cdot \boldsymbol{v}_i) \Rightarrow \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_i = \lambda_1 0 + \dots + \lambda_i (\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i) + \dots + \lambda_n 0$$

$$\Rightarrow \lambda_i (\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_i \Rightarrow \lambda_i = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_i}{\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i}$$

Αν η βάση είναι ορθοκανονική, τότε $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = 1$, οπότε $\lambda_i = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_i$

Ορθοκανονικότητα

- Αν A είναι ένας $m \times n$ πίνακας του οποίου οι στήλες είναι τα ορθοκανονικά δ/τα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, δηλ.

$$A = [\boldsymbol{v}_1 \;\; \boldsymbol{v}_2 \;\; \ldots \;\; \boldsymbol{v}_n]$$

τότε

$$A^{\mathrm{T}}A = \mathrm{I}_n$$

γιατί το i-j στοιχείο του $A^{\mathrm{T}}A$ είναι

$$\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = \begin{cases} 0, & \text{αν } i \neq j \\ 1, & \text{αν } i = j \end{cases}$$

- Αν τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ είναι ορθογώνια, τότε προφανώς ο πίνακας $A^{\mathrm{T}}A$ είναι ένας $n \times n$ διαγώνιος πίνακας.

Ορθοκανονικότητα

- Ο πίνακας A λέγεται **ορθογώνιος** αν είναι τετραγωνικός και $A^T = A^{-1}$. Δηλ. *ένας ορθογώνιος πίνακας έχει ορθοκανονικές στήλες.*

- **Θεώρημα 3.3.1**
  Αν A τετραγωνικός πίνακας, τότε:

  ο A ορθογώνιος $\Leftrightarrow A^{\mathrm{T}} = A^{-1} \Leftrightarrow AA^{\mathrm{T}} = I \Leftrightarrow$ οι στήλες του A είναι ορθοκανονικές.

Ορθοκανονικότητα

Θεώρημα 3.3.2
Αν A είναι n-τετραγωνικός πίνακας, τότε:

- A ορθογώνιος $\Leftrightarrow A\boldsymbol{u}\cdot A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$, $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{R}^n$

  (δηλ. ο A αφήνει αναλλοίωτο το εσωτερικό γινόμενο)

- A ορθογώνιος $\Leftrightarrow$ $\|A\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{v}\|$, $\forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{R}^n$

  (δηλ. ο A αφήνει αναλλοίωτο το μέτρο).

Θεώρημα 3.3.3 Αν A_1 και A_2 είναι $n\times n$ ορθογώνιοι πίνακες, τότε το γινόμενό τους A_1A_2 είναι ορθογώνιος πίνακας.

Ορθοκανονικότητα

- Αν $A = [\boldsymbol{v}_1 \;\; \boldsymbol{v}_2 \;\; \dots \;\; \boldsymbol{v}_n]$, τότε αν οι στήλες του A είναι ορθογώνιες, η λύση του συστήματος $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ δίνεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{x}_i = \frac{\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i}$$

  και αν είναι ορθοκανονικές από:

$$x_i = \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{b}$$

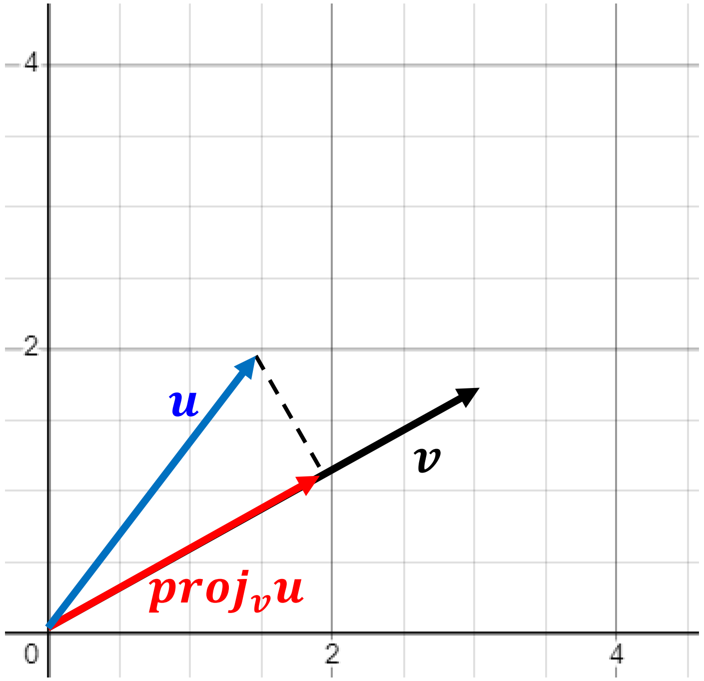
- Η επίλυση του συστήματος $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ είναι ακόμα πιο εύκολη αν ο πίνακας A είναι ορθογώνιος, γιατί τότε $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$.

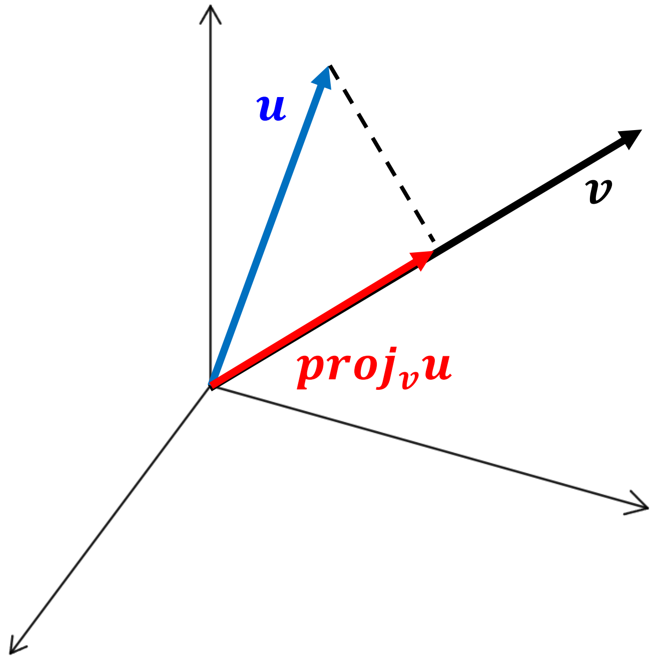
Προβολές

Έστω τα διανύσματα $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{R}^n$.

Η προβολή του $\boldsymbol{u}$ πάνω στο $\boldsymbol{v}$ είναι το διάνυσμα που δίνεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{proj_v u} = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} \boldsymbol{v}$$





Παραδείγματα

- Να βρεθεί η προβολή του διανύσματος $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ πάνω στο διάνυσμα $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Έχουμε

$$\boldsymbol{proj_v u} = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} \boldsymbol{v} = \frac{2+0+3}{4+4+1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{5}{9} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/9 \\ 10/9 \\ 5/9 \end{bmatrix}$$

- Να βρεθεί η προβολή του διανύσματος $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ πάνω στο διάνυσμα $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Έχουμε

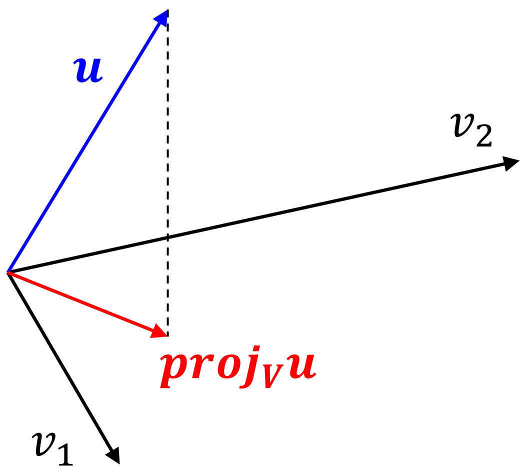
$$\boldsymbol{proj_v u} = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} \boldsymbol{v} = \frac{-8-2}{16+4} \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{-10}{20} \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{u} \text{ (γιατι;)}$$

Προβολή διανύσματος σε υπόχωρο

Έστω $\boldsymbol{u} \in \mathrm{R}^n$ και $V = span\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ όπου τα $v_1, v_2, \cdots, v_k$ είναι **ορθογώνια**.

Η προβολή του $\boldsymbol{u}$ στον δ.χ. V δίνεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{proj_V u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v_i}}{\boldsymbol{v_i} \cdot \boldsymbol{v_i}} \boldsymbol{v_i} = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v_1}}{\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_1}} \boldsymbol{v_1} + \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v_2}}{\boldsymbol{v_2} \cdot \boldsymbol{v_2}} \boldsymbol{v_2} + \cdots + \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v_k}}{\boldsymbol{v_k} \cdot \boldsymbol{v_k}} \boldsymbol{v_k}$$



Παράδειγμα

Να βρεθεί η προβολή του διανύσματος $u = (-1,0,3)^T$ στον διανυσματικό υπόχωρο του R^3:

$$V = span\{(1,0,0)^T, (0,-1,1)^T\}.$$

Ελέγχουμε πρώτα εάν τα $v_1 = (1,0,0)^T$, $v_2 = (0,-1,1)^T$ είναι ορθόγώνια. Πράγματι, έχουμε:

$$v_1 \cdot v_2 = 0.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο, έχουμε:

$$\boldsymbol{proj_V u} = \frac{\boldsymbol{u \cdot v_1}}{\boldsymbol{v_1 \cdot v_1}}\boldsymbol{v_1} + \frac{\boldsymbol{u \cdot v_2}}{\boldsymbol{v_2 \cdot v_2}}\boldsymbol{v_2} =$$

$$\frac{-1}{1}(1,0,0)^T + \frac{3}{1+1}(0,-1,1)^T = (-1,-3/2,3/2)^T$$

Μέθοδος ορθοκανονικοποίησης *Gram-Schmidt*

Θεώρημα 3.3.4

Αν τα δ/τα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ είναι μια βάση του δ/κού χώρου V, τότε τα δ/τα: $\boldsymbol{w}_1 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{u}_1\|}\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{w}_2 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{u}_2\|}\boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{u}_n\|}\boldsymbol{u}_n$

όπου:

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1}\boldsymbol{u}_1$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1}\boldsymbol{u}_1 - \frac{\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2}{\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2}\boldsymbol{u}_2$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{v}_n - \frac{\boldsymbol{v}_n \cdot \boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1}\boldsymbol{u}_1 - \frac{\boldsymbol{v}_n \cdot \boldsymbol{u}_2}{\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2}\boldsymbol{u}_2 \cdots - \frac{\boldsymbol{v}_n \cdot \boldsymbol{u}_{n-1}}{\boldsymbol{u}_{n-1} \cdot \boldsymbol{u}_{n-1}}\boldsymbol{u}_{n-1}$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του *V*.

Παράδειγμα 3.3.1

Έστω: $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ τρία δ/τα του R^4.

Μπορούμε να δούμε ότι τα δ/τα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε είναι μια βάση ενός δ/κού υπόχωρου V του R^4 που παράγουν.

Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο *Gram-Schmidt* για την καινούργια (ορθοκανονική) βάση $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\}$.

Μέθοδος ορθοκανονικοποίησης *Gram-Schmidt*

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1 \Rightarrow \boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_1\|}\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1}\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{3}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3/4\\1/4\\1/4\\1/4\end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{w}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_2\|}\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-3\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{\boldsymbol{v}_3\cdot\boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1}\boldsymbol{u}_1 - \frac{\boldsymbol{v}_3\cdot\boldsymbol{u}_2}{\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_2}\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{2}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix}-3/4\\1/4\\1/4\\1/4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-2/3\\1/3\\1/3\end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{w}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_3\|}\boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}0\\-2\\1\\1\end{bmatrix}$$

Μέθοδος ορθοκανονικοποίησης *Gram-Schmidt*

όπου χρησιμοποιήσαμε τα εσωτερικά γινόμενα:

$$\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$$

$$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 9/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 = 3/4$$

$$\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1 = v_3 \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$$

$$\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0 \cdot (-3/4) + 0 \cdot (1/4) + 1 \cdot (1/4) + 1 \cdot (1/4) = 1/2$$

QR παραγοντοποίηση

Θεώρημα 3.3.6.

Αν A είναι ένας πίνακας, τότε υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας Q και ένας άνω τριγωνικός πίνακας R τέτοιοι, ώστε να είναι:

$$A = QR$$

Δεδομένου ότι το γινόμενο ορθογώνιων πινάκων είναι ορθογώνιος πίνακας, αν μπορέσουμε να βρούμε ορθογώνιους πίνακες $Q_1, \ldots, Q_k$, τέτοιους, ώστε:

$$Q_k \ldots Q_1 A = R, \text{ με } R \text{ άνω τριγωνικό πίνακα}$$

τότε:

$$A = Q_1^{\mathrm{T}} \ldots Q_k^{\mathrm{T}} R = QR$$

όπου ο πίνακας: $$Q = Q_1^{\mathrm{T}} \ldots Q_k^{\mathrm{T}}$$

είναι ορθογώνιος (είναι $Q_i^{\mathrm{T}} = Q_i^{-1}$).

Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα

- Ενδιαφερόμαστε για τις λύσεις της εξίσωσης $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$, όχι μόνο για το δ/μα-λύση $\mathbf{x}$ αλλά και για την παράμετρο λ.

- Γενικά προκύπτει ότι, για δεδομένο $n \times n$ πίνακα A, υπάρχουν λύσεις μόνον αν το λ παίρνει τιμές από ένα σύνολο με πληθικό αριθμό n που εξαρτάται από τον πίνακα A.

- Αν A είναι ένας $n \times n$ πίνακας τότε ένα μη μηδενικό δ/μα $\mathbf{x}$ λέγεται **ιδιοδιάνυσμα** (*eigenvector*) του A αν $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ για κάποιον αριθμό λ.

- Το λ λέγεται **ιδιοτιμή** (*eigenvalue*) του A που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}$ και η παραπάνω εξίσωση λέγεται **εξίσωση ιδιοτιμών**.

Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα

- Για να βρούμε τις μη τετριμμένες (μηδενικές) λύσεις της εξίσωσης ιδιοτιμών γράφουμε:

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{I}\mathbf{x} \Leftrightarrow \left(A - \lambda I\right)\mathbf{x} = \mathbf{O}$$

- Αν ο πίνακας $A - \lambda I$ είναι αντιστρέψιμος τότε η παραπάνω σχέση έχει μοναδική λύση την $\mathbf{x} = \mathbf{O}$, ενώ αν δεν είναι αντιστρέψιμος τότε θα έχει και μη μηδενικές λύσεις στην ιδιοτιμή λ.

- Δηλαδή η παραπάνω σχέση έχει μη μηδενικές λύσεις, αν και μόνον αν: $\det(A - \lambda I) := |A - \lambda I| = 0$

- Το σύνολο των λύσεων της είναι ο μηδενοχώρος του πίνακα $A - \lambda I$, $null(A - \lambda I)$. Έτσι αυτό το σύνολο αποτελεί έναν υπόχωρο του R^n και λέγεται **ιδιοχώρος** (*eigenspace*) του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Ο ιδιοχώρος συνίσταται στο μηδενικό δ/μα και σε όλα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ.

Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα

- Η ανάλυση ιδιαζουσών τιμών ή απλά ιδιοανάλυση (*Eigenvalue Decomposition* ή απλά *Eigendecomposition*) παίζει σημαντικό ρόλο σε διάφορες μεθόδους στην μηχανική μάθηση, όπως για παράδειγμα στην μέθοδο της Ανάλυσης Κύριων Συνιστωσών (*Principal Component Analysis* ή απλά *PCA*). Η ιδιοανάλυση χρησιμοποιείται στον υπολογισμό των κυρίων συνιστωσών ενός πίνακα στην μέθοδο PCA με στόχο την μείωση της διάστασης των δεδομένων στην μηχανική μάθηση.

- Η ιδιοανάλυση ενός πίνακα αποτελεί έναν μετασχηματισμό ενός τετραγωνικού πίνακα σε ένα σύνολο ιδιοδιανυσμάτων και ιδιοτιμών.

- Δεν μπορούν να μετασχηματιστούν όλοι οι τετραγωνικοί πίνακες σε ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές. Ο μετασχηματισμός κάποιων τετραγωνικών πινάκων απαιτεί μιγαδικούς αριθμούς.

- Η ιδιοανάλυση μας βοηθάει να αναλύουμε ορισμένες ιδιότητες ενός πίνακα, όπως αντίστοιχα η παραγοντοποίηση ενός ακεραίου αριθμού σε πρώτους παράγοντες μας βοηθάει να κατανοήσουμε την συμπεριφορά εκείνου του ακεραίου αριθμού.

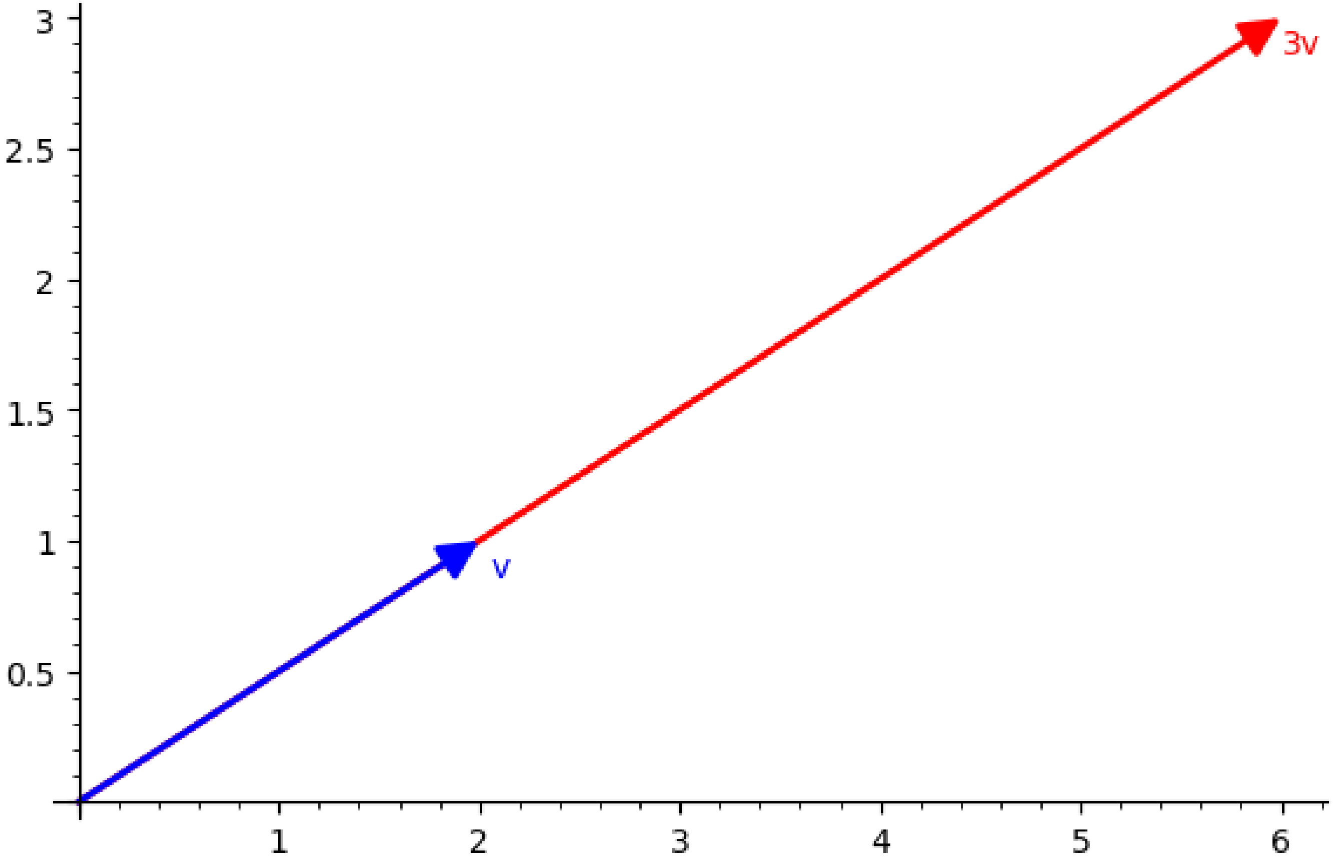
Γεωμετρική ερμηνεία

- Γεωμετρικά, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, σημαίνει ότι με τη δράση του πίνακα A (μετασχηματισμός) τα ιδιοδιανύσματα υπόκεινται σε αλλαγές μόνο ως προς το μέτρο τους ή το πρόσημό τους —η διεύθυνση του $A\mathbf{x}$ είναι ίδια με αυτή του $\mathbf{x}$. Η ιδιοτιμή λ είναι απλά η ποσότητα της «επιμήκυνσης» ή της «σμίκρυνσης» που συνεπάγεται στο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}$ όταν αυτό μετασχηματίζεται από τον πίνακα A.

- Ένας πίνακας Α ο οποίος έχει μόνο θετικές ιδιοτιμές ονομάζεται επίσης και θετικά ορισμένος (*positive definite*) πίνακας, ενώ αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι αρνητικές τότε ονομάζεται και αρνητικά ορισμένος (*negative definite*) πίνακας.

Γεωμετρική ερμηνεία

π.χ, αν: $A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ και $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$ τότε, $A\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=3\boldsymbol{v}$



Παράδειγμα εύρεσης βάσης ιδιοχώρου, (1/3)

Έστω ο πίνακας: $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ ο οποίος έχει μια ιδιοτιμή του ίση με $\lambda = 2$.

Θα βρούμε μια βάση του αντίστοιχου ιδιοχώρου.

Παράδειγμα εύρεσης βάσης ιδιοχώρου, (2/3)

Αρχικά, σχηματίζουμε τον πίνακα: $A-2I=\begin{bmatrix}4 & -1 & 6\\ 2 & 1 & 6\\ 2 & -1 & 8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 6\\ 2 & -1 & 6\\ 2 & -1 & 6\end{bmatrix}$

και επιλύουμε το ομογενές σύστημα: $(A-2I)x=O\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2 & -1 & 6\\ 2 & -1 & 6\\ 2 & -1 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

με τον επαυξημένο πίνακα: $\left[\begin{array}{ccc:c}2 & -1 & 6 & 0\\ 2 & -1 & 6 & 0\\ 2 & -1 & 6 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc:c}2 & -1 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

Ο επαυξημένος πίνακας αντιστοιχεί στην εξίσωση $2x_1 - x_2 + 6\,x_3 = 0$.

Παράδειγμα εύρεσης βάσης ιδιοχώρου, (3/3)

- Πρόκειται για μια επιβεβαίωση ότι η τιμή $\lambda = 2$ είναι όντως μια ιδιοτιμή του A, αφού για αυτή την τιμή η εξίσωση (το σύστημα) $(A - 2I)\boldsymbol{x} = \mathbf{O}$ έχει ελεύθερους αγνώστους, δηλ. το ομογενές σύστημα έχει άπειρες (μη μηδενικές) λύσεις.

- Η γενική μορφή των λύσεων είναι: $$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2, x_3 \in \mathrm{R}$$

- Τα δ/τα λοιπόν: $$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και } \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

παράγουν τον ιδιοχώρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 2$ και επειδή, όπως εύκολα μπορούμε να δούμε, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αποτελούν μια βάση του.

Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα

- Η εξίσωση $\det(A-\lambda I) \coloneqq |A-\lambda I| = 0$ λέγεται **χαρακτηριστική εξίσωση**.

- Η $\det(A-\lambda I)$ λέγεται **χαρακτηριστική ορίζουσα**.

- Το πολυώνυμο του λ που προκύπτει, αν κάνουμε το ανάπτυγμά της, ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πίνακα A. Αυτό θα είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n και προκύπτει ότι:

$$P(\lambda) = |A-\lambda I| = (\lambda_1-\lambda)^{v_1}(\lambda_2-\lambda)^{v_2}\cdots(\lambda_\rho-\lambda)^{v_\rho}$$

όπου, λ_1, λ_2, …, λ_ρ είναι οι διαφορετικές ρίζες του και v_1, v_2, …, v_ρ οι αντίστοιχες πολλαπλότητές τους, με $v_1 + v_2 + \ldots + v_\rho = n$.

Ιδιότητες ιδιοτιμών

- Αν οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές μεταξύ τους τότε, τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα ενός $n \times n$ πίνακα A είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

- Οι ιδιοτιμές ενός τριγωνικού πίνακα είναι τα διαγώνια στοιχεία του.

- *Αν* A και B είναι όμοιοι πίνακες, είναι δηλαδή $B = P^{-1}AP$, τότε A και B έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

- Οι ιδιοτιμές και οι συνιστώσες των ιδιοδιανυσμάτων ενός συμμετρικού πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί και τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.

- *Αν* A είναι ένας $n \times n$ πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, τότε:

  - $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$

  - $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$

Λύση του προβλήματος ιδιοτιμών

Έστω ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Η χαρακτηριστική του εξίσωση είναι:

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Λύση του προβλήματος ιδιοτιμών

$$\Leftrightarrow (5-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 5-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \ldots \quad \Leftrightarrow \quad (5-\lambda)^4 - 10(5-\lambda)^2 + 9 = 0$$

η οποία δίνει, $(5-\lambda) = \pm 1, \pm 3$. Έτσι, οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι:

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 6,\ \lambda_4 = 8$$

Λύση του προβλήματος ιδιοτιμών

Για να βρούμε ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί, π.χ., στην ιδιοτιμή λ_2, πρέπει να λύσουμε την εξίσωση:

$$(A-4I)\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{O} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} 5-4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5-4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5-4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή το ισοδύναμο προς αυτή ομογενές σύστημα $\begin{cases} u+2v+x=0 \\ 2u+v+y=0 \\ u+x+2y=0 \\ v+2x+y=0 \end{cases}$

του οποίου οι λύσεις, μετά από πράξεις, προκύπτουν ότι είναι, $u=-y,\ v=y,\ x=-y,\ y\in\mathrm{R}$

Λύση του προβλήματος ιδιοτιμών

Επομένως τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_2 είναι βαθμωτά πολλαπλάσια του:

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

, ή κανονικοποιώντας, του μοναδιαίου διανύσματος: $\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

Για τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις υπόλοιπες ιδιοτιμές βρίσκουμε, με παρόμοιο τρόπο, ότι αυτά είναι βαθμωτά πολλαπλάσια των:

$$\lambda_1 = 2, \qquad \boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\lambda_3 = 6, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\lambda_4 = 8, \qquad \boldsymbol{v}_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Το καθένα απ’ αυτά αποτελεί και μια βάση του αντίστοιχου ιδιοχώρου του πίνακα A.

Παράδειγμα επαλήθευσης με *SageMath*, (1/2)

Έστω πάλι ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

για τον οποίο βρήκαμε στο προηγούμενο παράδειγμα ότι, οι ιδιοτιμές του είναι οι:

$$\lambda_1 = 2,\ \ \lambda_2 = 4,\ \ \lambda_3 = 6,\ \ \lambda_4 = 8$$

Μπορούμε να επαληθεύσουμε τις ιδιότητες που συνδέουν την ορίζουσα και το ίχνος ενός τετραγωνικού πίνακα με τις ιδιοτιμές του.

Παράδειγμα επαλήθευσης με *SageMath*, (2/2)

```
A = matrix(QQ, 4, 4, [5, 2, 1, 0, 2, 5, 0, 1, 1, 0, 5, 2, 0, 1, 2, 5])
show(A)
print( 'Determinant = ', det(A) )
print( 'Trace = ', A.trace() )
```

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

```
Determinant =  384
Trace =  20
```

Επίσης, έχουμε ότι: $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = (2)(4)(6)(8) = 384 = \det(A)$

και

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20 = \mathrm{tr}(A)$$

Λύση του προβλήματος ιδιοτιμών

- Αυτή η μέθοδος είναι επαρκής για 3×3 και μερικές φορές για 4×4 εξισώσεις πινάκων, σε μεγαλύτερα προβλήματα ο μετασχηματισμός της χαρακτηριστικής ορίζουσας σε πολυωνυμική μορφή είναι υπολογιστικά αναποτελεσματικός.

- Δυστυχώς, στη γενική περίπτωση, δεν μπορούμε να βρούμε τις ιδιοτιμές ενός πίνακα ανάγοντας τον σε τριγωνική μορφή με απαλοιφή *Gauss* γιατί, οι γραμμο-πράξεις μεταβάλλουν τις ιδιοτιμές.

- Υπάρχουν βασικά δύο διαφορετικές προσεγγίσεις του προβλήματος:

    - Βρίσκουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση χωρίς υπολογισμό οριζουσών ή

    - Μετασχηματίζουμε τον πίνακα σε διαγώνιο έτσι ώστε τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του να είναι οι ιδιοτιμές του.

$1^{ο}$ παράδειγμα

Άσκηση.
Ν.δ.ο. ένας πίνακας είναι μη αντιστρέψιμος (*singular*), αν.ν. έχει μια μηδενική ιδιοτιμή.

Λύση.
Ένας πίνακας Α έχει μηδενική ιδιοτιμή $\Leftrightarrow$ $\det(A - 0I) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow$ ο Α είναι μη αντιστρέψιμος.

$2^{ο}$ παράδειγμα

<u>Άσκηση</u>.
Ν.δ.ο. ένας πίνακας και ο ανάστροφος του έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

<u>Λύση</u>.
Έστω λ μια ιδιοτιμή του πίνακα Α, τότε:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det((A^T)^T - \lambda I^T) = \det(A^T - \lambda I)^T = \det(A^T - \lambda I)$$

Οπότε, η λ αποτελεί ιδιοτιμή και του αναστρόφου πίνακα A^T .

$3^{ο}$ παράδειγμα

<u>Άσκηση</u>.
Ν.δ.ο. αν $\boldsymbol{x}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ ενός αντιστρέψιμου πίνακα τότε, το $\boldsymbol{x}$ είναι και ιδιοδιάνυσμα του A^{-1} το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\frac{1}{\lambda}$.

<u>Λύση</u>.
Προφανώς ισχύει και ότι $\lambda \neq 0$ (σύμφωνα με το $1^{ο}$ παράδειγμα..)

Ισχύει ότι: $Ax = \lambda x \quad \Rightarrow \quad A^{-1}(Ax) = (A^{-1})\lambda x \quad \Rightarrow \quad x = \lambda\,(A^{-1}x) \quad \Rightarrow \quad A^{-1}x = (1 / \lambda)x$

Εφαρμογές

- *PageRank Algorithm – The Mathematics of Google Search*

  Bryan, K., & Leise, T. (2006). The $25,000,000,000 eigenvector: The linear algebra behind Google. *SIAM Review*, 48(3), 569-581.