Γραμμική Άλγεβρα
(*Linear Algebra*)

ΑΓΓΕΛΟΣ ΣΙΦΑΛΕΡΑΣ

Καθηγητής

$5^η$ Διάλεξη (Θεωρία)

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

CMOR Lab

Computational Methodologies and Operations Research

Ίχνος ενός *n*-τετραγωνικού πίνακα

- **Ίχνος** (*trace*) ενός $n \times n$ πίνακα A λέμε το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του, δηλαδή τον αριθμό:

$$tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

<u>Ιδιότητες</u>:

- $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^T)$

- Αν A είναι ένας $n \times m$ πίνακας και B ένας $m \times n$ πίνακας, τότε $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

Ορίζουσα πίνακα

Ορίζουσα (*determinant*) του 2×2 πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

συμβολικά,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad |A|, \quad \text{ή} \quad \det(A)$$

λέμε τον αριθμό, $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, δηλ.

$$\det(A) := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

και επειδή αντιστοιχεί σε 2×2 πίνακα λέμε ότι είναι μια ορίζουσα 2^{ης} τάξης.

Παραδείγματα ορίζουσας πίνακα

Έστω: $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

Να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα Α

$$|A| = 3(-2) - (-1)2 = -6 + 2 = -4$$

Ορίζουσα πίνακα

Μπορούμε να ορίσουμε επαγωγικά ορίζουσα για κάθε $n \times n$ πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

με τη βοήθεια των οριζουσών n – 1 τάξης. Συγκεκριμένα, ορίζουσα του A λέμε τον αριθμό:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i\,|\,j)) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}^{c})$$

όπου $A(i\,|\,j) :=$ A_{ij}^{c} είναι ένας $(n - 1) \times (n - 1)$ ελάσσονας πίνακας που προκύπτει από τον πίνακα A διαγράφοντας την i γραμμή και την j στήλη. Το άθροισμα στον παραπάνω τύπο υπολογίζεται *για οποιαδήποτε τιμή του* i και συχνά αναφέρεται ως το *ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς τα στοιχεία της* i *γραμμής*.

Ορίζουσα πίνακα

- Η ορίζουσα $M_{ij} := \left| A_{ij}^{c} \right|$ λέγεται **ελάσσων ορίζουσα** του στοιχείου a_{ij}

- Το γινόμενο $A_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$ λέγεται **αλγεβρικό συμπλήρωμα** του στοιχείου a_{ij}

- Έτσι, έχουμε: $\det(A) = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$

Ορίζουσα πίνακα

Αποδεικνύεται ότι για οποιαδήποτε γραμμή i ή στήλη j ενός $n \times n$ πίνακα A ισχύει:

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

(ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς τα στοιχεία της i γραμμής)

και

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

(ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς τα στοιχεία της j στήλης).

Παραδείγματα ορίζουσας πίνακα

Να βρεθούν τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων της 2ης στήλης της ορίζουσας του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα.

Παραδείγματα ορίζουσας πίνακα

Είναι:

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(-2-6) = 8$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1+3 = 4$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -(2-2) = 0$$

Άρα:

$$\det(A) = 2A_{12} + 0A_{22} + 1A_{32} = 2\cdot 8 + 0\cdot 4 + 1\cdot 0 = 16$$

Παραδείγματα ορίζουσας πίνακα

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του ακόλουθου πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Παραδείγματα ορίζουσας πίνακα

Έστω ότι, υπολογίζουμε την ορίζουσα χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της 1ης γραμμής

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot\left\{4\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 6\cdot\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$- 2\cdot\left\{2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 6\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$+ 3\cdot\left\{2\cdot\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\right\}$$

$$- 4\left\{2\cdot\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 6\cdot\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \ldots = 1\cdot 0 - 2\cdot 0 + 3\cdot(-25) - 4\cdot(-50) = 125$$

Παρατηρήσεις

- Είναι βολικό για τον υπολογισμό μιας ορίζουσας να χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα ως προς τη γραμμή ή τη στήλη που έχει τα περισσότερα μηδενικά.

- Ο υπολογισμός μιας $n \times n$ ορίζουσας απαιτεί τον υπολογισμό n οριζουσών διαστάσεων $(n-1) \times (n-1)$, κ.ο.κ. Ο πλήρης υπολογισμός μιας τέτοιας ορίζουσας θα απαιτήσει $n!$ τουλάχιστον πολλαπλασιασμούς. Για τον λόγο αυτό, στην πράξη, όταν το n είναι μεγαλύτερο από 4 ή 5, προσπαθούμε να αποφύγουμε τον αριθμητικό υπολογισμό των οριζουσών με την εύρεση του αναπτύγματός τους.

Ορίζουσα πίνακα 3×3 – Κανόνας *Sarrus*

Η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα Α μπορεί να υπολογιστεί εύκολα με τον εξής μνημονικό κανόνα:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Αντιγράφουμε τις πρώτες δυο στήλες, αμέσως μετά την ορίζουσα & εκτελούμε τους εξής υπολογισμούς:

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| & & & \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} & \\ - & - & - & & \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Ορίζουσα πίνακα 3×3 – Κανόνας *Sarrus*

Η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα Α ορίζεται ως εξής:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - (a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31}) + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Ιδιότητες ορίζουσας πίνακα

- Η ορίζουσα του μοναδιαίου πίνακα I_n είναι 1: $\det(I_n) = 1$

- Η ορίζουσα ενός πίνακα του οποίου τα στοιχεία μιας γραμμής είναι όλα μηδέν, είναι 0.

- Η ορίζουσα ενός τριγωνικού άνω, ή κάτω, ή διαγώνιου πίνακα, είναι το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του:

$$A = [a_{ij}],\ n\times n \text{ τριγωνικός άνω / κάτω} \Rightarrow \det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- $\det(E_{(i),(j)}) = -1$, $\det(F^{(i),(j)}) = -1$

- $\det(E_{r(i)}) = r$, $\det(F^{r(i)}) = r$

- $\det(E_{(i)+r(j)}) = 1$, $\det(F^{(i)+r(j)}) = 1$

Ιδιότητες ορίζουσας πίνακα

- Αν A, B είναι $n \times n$ πίνακες, τότε:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA).$$

- Για έναν $n \times n$ πίνακα A και τον ανάστροφό του A^{T}, ισχύει:

$$\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A)$$

Επομένως, *μια ορίζουσα μπορεί να αναπτυχθεί και ως προς τα στοιχεία μιας οποιασδήποτε στήλης*.

Ιδιότητες ορίζουσας πίνακα

Αν ο πίνακας B προκύπτει από τον $n \times n$ πίνακα A με εναλλαγή δύο γραμμών (στηλών) του A, τότε ισχύει $\det(B) = -\det(A)$. Δηλαδή,

$$\det(E_{(i),(j)}A) = -\det(A)$$

$$\det(AF^{(i),(j)}) = -\det(A)$$

Άρα, η εναλλαγή δυο γραμμών ενός πίνακα (1ο είδος γραμμοπράξης) πολλαπλασιάζει την ορίζουσα με −1.

Από την παραπάνω ιδιότητα προκύπτει ότι, *αν τα στοιχεία δύο γραμμών* (*στηλών*) *ενός* $n \times n$ *πίνακα* A *είναι ίσα, τότε* $\det(A) = 0$.

Ιδιότητες ορίζουσας πίνακα

Αν ο πίνακας B προκύπτει από τον $n \times n$ πίνακα A με πολλαπλασιασμό των στοιχείων μιας γραμμής (στήλης) του με έναν αριθμό $r \neq 0$, τότε ισχύει $\det(B) = r \cdot \det(A)$. Δηλαδή:

$$\det(E_{r(i)}A) = r \cdot \det(A)$$

$$\det(AF^{r(i)}) = r \cdot \det(A)$$

Άρα, ο πολλαπλασιασμός μιας γραμμής του Α με έναν αριθμό c (2ο είδος γραμμοπράξης), πολλαπλασιάζει την ορίζουσα επίσης με c.

Από την παραπάνω ιδιότητα προκύπτει ότι, *αν τα στοιχεία δύο γραμμών (στηλών) ενός* $n \times n$ *πίνακα* A *είναι ανάλογα, τότε* $\det(A) = 0$.

Να βρεθεί η ορίζουσα του ακόλουθου πίνακα:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix}$$

Είναι $|A| = 0$, αφού $\Gamma_2 = 3\Gamma_1$

Ιδιότητες ορίζουσας πίνακα

Αν ο πίνακας B προκύπτει από τον $n \times n$ πίνακα A με πρόσθεση των στοιχείων μιας γραμμής (στήλης), πολλαπλασιασμένων με τον ίδιο αριθμό, στα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης γραμμής (στήλης), τότε ισχύει $\det(B) = \det(A)$. Δηλ.

$$\det(E_{(i)+r(j)}A) = \det(A)$$

$$\det(AF^{(i)+r(j)}) = \det(A)$$

Άρα, μια αντικατάσταση γραμμής (3ο είδος γραμμοπράξης) του πίνακα A δεν μεταβάλλει την ορίζουσα det(A).

Ιδιότητες ορίζουσας πίνακα

- Αν A είναι $n \times n$ πίνακας της μορφής: $A = I_m \oplus B$

  όπου B είναι τετραγωνικός πίνακας, τότε: $\det(A) = \det(B)$

- Αν A είναι ένας $n \times n$ πίνακας, τότε:

$$\det(I_n \otimes A) = (\det(A))^n$$

  και

$$\det(A \otimes I_n) = (\det(A))^n$$

- Αν A είναι $m\times m$ και B $n \times n$ πίνακας, τότε: $\det(A \otimes B) = (\det(A))^n (\det(B))^m$

Παράδειγμα των ιδιοτήτων ορίζουσας πίνακα

Να υπολογίσετε την 3×3 ορίζουσα (ορίζουσα *Vandermonde*):

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών, έχουμε:

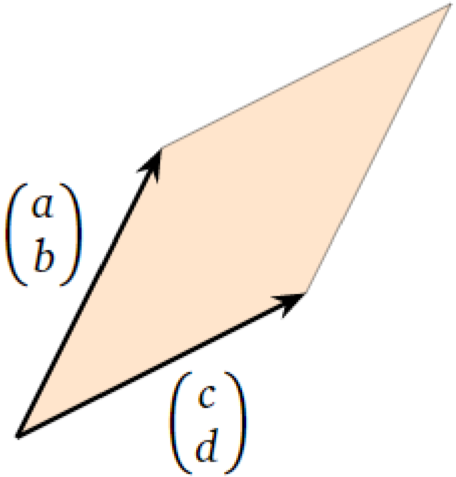
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \underset{\mathrm{A}^{(3)'} = \mathrm{A}^{(3)} - \mathrm{A}^{(1)}}{\overset{\mathrm{A}^{(2)'} = \mathrm{A}^{(2)} - \mathrm{A}^{(1)}}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} 1 & c-a \\ b+a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Εφαρμογές ορίζουσας στην αναλυτική γεωμετρία

Οι ορίζουσες έχουν μια γεωμετρική ερμηνεία βάσει του όγκου / εμβαδού ενός παραλληλεπιπέδου / παραλληλογράμμου.

- Υπολογισμός εμβαδού παραλληλογράμμου (στον R^2)

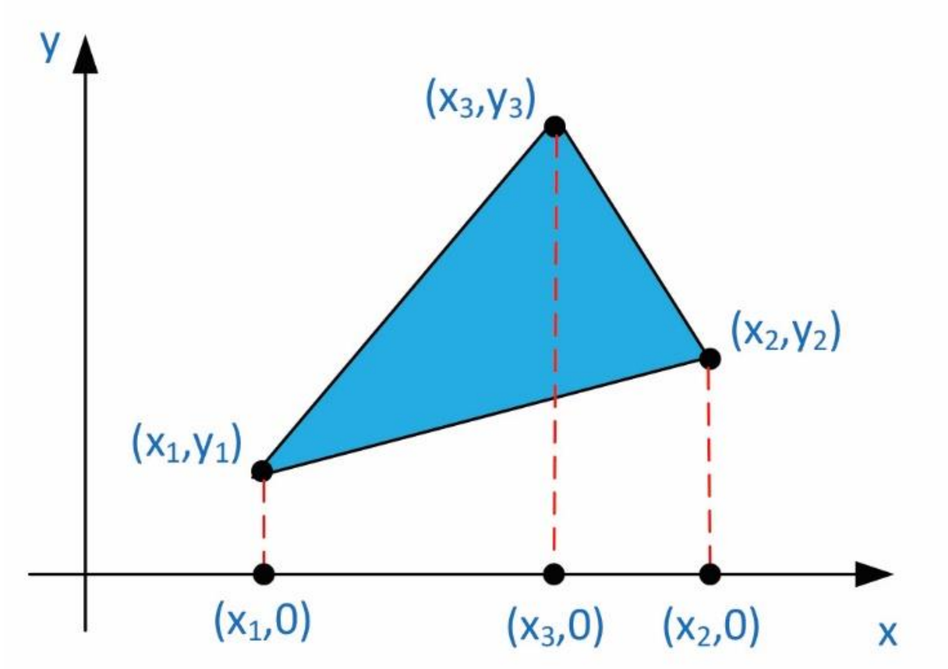


Εμβαδό = $\left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = |ad - bc|$

<u>Γεωμετρική ερμηνεία</u>: Η ορίζουσα (απόλυτη τιμή) ενός 2×2 πίνακα δίνει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που δημιουργείται χρησιμοποιώντας τα διανύσματα γραμμές του πίνακα ως τις δύο μη παράλληλες πλευρές.

Εφαρμογές ορίζουσας στην αναλυτική γεωμετρία

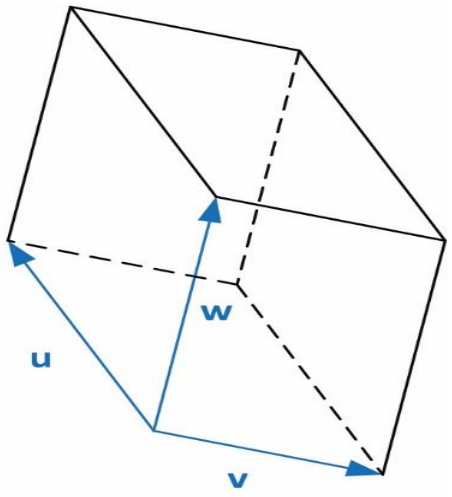
- Το εμβαδόν τριγώνου με κορυφές τα σημεία (x_1, y_1), (x_2, y_2) και (x_3, y_3) του Καρτεσιανού επιπέδου δίνεται από τον τύπο:



$$E = \frac{1}{2}\left|\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}\right)\right|$$

Εφαρμογές ορίζουσας στην αναλυτική γεωμετρία

- Ο όγκος ενός παραλληλεπιπέδου:



με μη παράλληλες ακμές τα διανύσματα: $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}$ και $\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{bmatrix}$

δίνεται από τον τύπο: $V=\left|\det(A)\right|$ όπου A = [**u v w**].

<u>Γεωμετρική ερμηνεία:</u> Η ορίζουσα (απόλυτη τιμή) ενός 3×3 πίνακα δίνει τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που δημιουργείται χρησιμοποιώντας τα διανύσματα στήλες του πίνακα ως τις τρεις μη παράλληλες ακμές.