# Γραμμική Άλγεβρα
# (*Linear Algebra*)

**ΑΓΓΕΛΟΣ ΣΙΦΑΛΕΡΑΣ**

**Καθηγητής**

4η Διάλεξη (Θεωρία)

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής

CMOR Lab

**Computational Methodologies and Operations Research**

# Κλιμακωτός πίνακας

- Μια από τις εφαρμογές των γραμμο-πράξεων είναι η μετατροπή ενός πίνακα σε κλιμακωτό πίνακα.

- Ένας $m \times n$ πίνακας λέγεται **κατά γραμμές κλιμακωτός** (*row echelon matrix*), ή απλά, **κλιμακωτός** πίνακας (*echelon matrix*), αν ισχύουν συγχρόνως τα παρακάτω:

  i. Οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πριν από τις μηδενικές.

  ii. Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής, που το λέμε *στοιχείο-οδηγό* της (*leading element*), είναι δεξιά του στοιχείου-οδηγού τής αμέσως προηγούμενης μη μηδενικής γραμμής (αν υπάρχει).

- Αν ένας πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή, τότε τα στοιχεία-οδηγοί λέγονται και *στοιχεία περιστροφής* ή *πιλότοι* (*pivot element*).

# Παραδείγματα κλιμακωτού πίνακα

Κλιμακωτοί πίνακες με τα στοιχεία-οδηγούς να είναι σημειωμένα σε αγκύλες:

$$\left\{\begin{array}{l}
\begin{bmatrix} \langle 3\rangle & 2 & 2 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \langle 1\rangle & 3 & 4 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle 5\rangle & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} \langle 1\rangle & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \langle 1\rangle \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} 0 & \langle 1\rangle & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \langle 1\rangle & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \langle 1\rangle & 2 \end{bmatrix}
\end{array}\right.$$

# Ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας

- Ένας κλιμακωτός πίνακας $A$ λέγεται ότι είναι **(κατά γραμμές) ανηγμένος κλιμακωτός** ή **rref** (***r**educed **r**ow **e**chelon **f**orm*) πίνακας, αν έχει τις επιπλέον δύο ιδιότητες:

  i. Κάθε στοιχείο-οδηγός είναι 1.

  ii. Κάθε στήλη που περιέχει σαν στοιχείο-οδηγό το 1, καλούμενη *στήλη-οδηγός* (*leading column*), είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\boldsymbol{e}_i$, για κάποιο $i$.

- Είναι κανένας από τους προηγούμενους τρεις πίνακες rref…?

  ✓ Μόνον ο τρίτος!

# Παραδείγματα ανηγμένου κλιμακωτού πίνακα

Ποιος/οί πίνακας/ες είναι rref…?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Απαλοιφή *Gauss*

***Βήμα 1ο***. Βρες την πρώτη στήλη με μη μηδενικό στοιχείο. Έστω ότι είναι η $j_1$.

***Βήμα 2ο***. Κάνε εναλλαγή των γραμμών έτσι ώστε να υπάρχει ένα μη μηδενικό στοιχείο στην πρώτη γραμμή της $j_1$ στήλης, δηλ. έτσι ώστε: $a_{1j_1} \neq 0$

***Βήμα 3ο***. Χρησιμοποίησε το $a_{1j_1}$ ως στοιχείο-οδηγό για να μηδενίσεις τα στοιχεία κάτω από το $a_{1j_1}$, δηλ. για κάθε $i > 1$, εφάρμοσε τη γραμμο-πράξη:

$$\Gamma 3_{(i)+r(1)}: A_{(i)} + rA_{(1)} \to A_{(i)}, \text{ με } \quad r = -a_{ij_1} / a_{1j_1}$$

***Βήμα 4ο***. Επανέλαβε τα *Βήματα* 1, 2 και 3 στον υποπίνακα που σχηματίζεται από όλες τις γραμμές εκτός της πρώτης.

***Βήμα 5ο***. Επανέλαβε την παραπάνω διαδικασία μέχρι να προκύψει πίνακας σε κλιμακωτή μορφή.

# Απαλοιφή *Gauss-Jordan*

Έστω ότι ο $A = [a_{ij}]$ είναι κλιμακωτός με στοιχεία οδηγούς τα: $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r}$

***Βήμα 1<sup></sup>***

***Βήμα 1ο***. Πολλαπλασίασε την τελευταία μη μηδενική γραμμή $A_{(r)}$ με $1/a_{1j_1}$ έτσι ώστε το στοιχείο-οδηγός να γίνει 1.

***Βήμα 2ο***. Χρησιμοποίησε το στοιχείο-οδηγό $a_{rj_r} = 1$ για να μηδενίσεις τα στοιχεία πάνω από το στοιχείο-οδηγό, δηλ. για $i = r - 1, r - 2, \ldots, 1$, εφάρμοσε τη γραμμο-πράξη:

$$\Gamma 3_{(i)+s(r)}: A_{(i)} + sA_{(r)} \to A_{(i)}, \text{ με } s = -a_{ir_i}$$

***Βήμα 3ο***. Επανέλαβε τα Βήματα 1 και 2 για τις γραμμές $A_{(r-1)}, A_{(r-2)}, \ldots, A_{(2)}$.

***Βήμα 4ο***. Πολλαπλασίασε την $A_{(1)}$ με $1/a_{rj_r}$

# Παραδείγματα απαλοιφής *Gauss-Jordan*

Να μετατραπούν οι ακόλουθοι πίνακες σε μορφή ανηγμένων κλιμακωτών πινάκων:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow rref(A)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow rref(B)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/9 & 0 \\ 0 & 1 & 2/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -6 & 3 & -8 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow rref(C)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2/5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$