

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

Δρ. Χάρης Κουζινόπουλος

Εθνικό Κέντρο Έρευνας και Τεχνολογικής Ανάπτυξης

Πανεπιστήμιο Μακεδονίας

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης



CMOR
Computational Methodologies
& Operations Research

Ψευδοκώδικας – [28]

Βρόχος *repeat ...until...*

Παράδειγμα.

$s \leftarrow 0$

$x \leftarrow 1$

repeat

$s \leftarrow s+x$

$x \leftarrow x+1$

until $x > 5$

Επαναλήψεις	s	x	$x > 5$
Αρχή	0	1	-
1	1	2	Ψ
2	3	3	Ψ
3	6	4	Ψ
4	10	5	Ψ
5	15	6	Α

Ψευδοκώδικας – [29]

Παράδειγμα. Να αναπτυχτεί αλγόριθμος, ο οποίος να ελέγχει αν ένας αριθμός $n \geq 2$ είναι πρώτος ή όχι.

Ψευδοκώδικας – [29]

Παράδειγμα. Να αναπτυχτεί αλγόριθμος, ο οποίος να ελέγχει αν ένας αριθμός $n \geq 2$ είναι πρώτος ή όχι.

```
Λύση.      ans ← 1
           j ← 1
           repeat
               j ← j + 1
           until mod(n, j) = 0
           if  $2 \leq j < n$ 
               ans ← 0
```

Άσκηση. Γράψτε τον ψευδοκώδικα με χρήση βρόχου **while**.

Ψευδοκώδικας – [31]

Εντολή σταματήματος stop : Αν βρίσκεται μέσα σε άλλη εντολή σταματά την εκτέλεσή της ή τον αλγόριθμο.

Παράδειγμα.

Υπολογισμός
ΜΚΔ (απλός).

Αλγόριθμος : gcd1

Είσοδος : a, b

Έξοδος : x

1	x ← a
2	if b < a
3	x ← b
4	while x >= 1
5	if mod(a,x)=0 and mod(b,x)=0
6	stop
7	x ← x-1

Πρόβλημα για το σπίτι – [6]

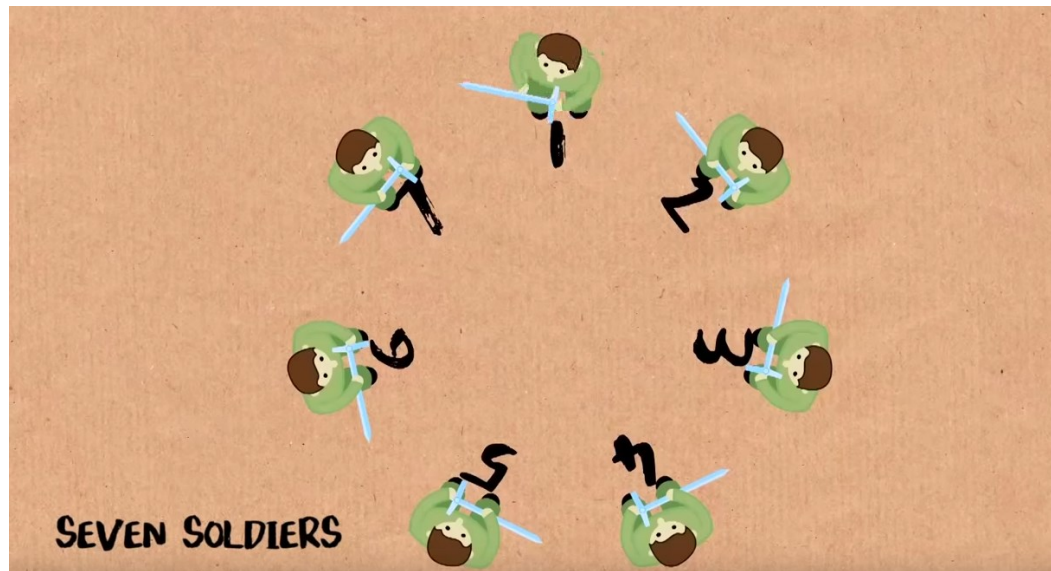
Έστω μια λίστα L με n στοιχεία. Ένα στοιχείο της λίστας L είναι πλειοψηφία αν εμφανίζεται περισσότερες από $n/2$ φορές.

Σχεδιάστε έναν αλγόριθμο ο οποίος θα βρίσκει μια πλειοψηφία αν υπάρχει, ενώ σε αντίθετη περίπτωση να επιστρέφει το μήνυμα «Δεν υπάρχει τέτοιο στοιχείο».

Quiz – [7]

Ο ιστορικός Flavius Josephus αφηγήθηκε την ιστορία του, όπου η μικρή ομάδα στρατιωτών του (41 άντρες) περικυκλώθηκαν από τον αντίπαλο ρωμαϊκό στρατό και επέλεξαν να αυτοκτονήσουν παρά να παραδοθούν. Προς επίτευξη αυτού του σκοπού, σχημάτισαν κύκλο και θανάτωναν κάθε 3^ο άντρα.

Η διαδικασία αυτή επαναλήφθηκε μέχρι που έμειναν ο Josephus και ένας ακόμα στρατιώτης, οι οποίοι αποφάσισαν και να παραδοθούν.



Quiz – [7]

Σύμφωνα με τα παραπάνω το πρόβλημα του Φλάβιου περιγράφεται ως εξής:

Αν n θετικοί ακέραιοι αριθμοί $(1, \dots, n)$ διατάσσονται σε έναν κύκλο και αφαιρούμε κάθε φορά τον m -οστό αριθμό ($m < n$) από τον κύκλο, ποια είναι η ακολουθία των αριθμών που θα εξαχθεί?

Π.χ. Έστω 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 με $n=10$ και $m=4$. Η ακολουθία που θα εξαχθεί θα είναι

4, 8, 2, 7, 3, 10, 9, 1, 6, 5

Να σχεδιάσετε αλγόριθμο σε μορφή ψευδοκώδικα ο οποίος θα δέχεται ως είσοδο τα n και m και θα επιστρέφει την ακολουθία των αριθμών που θα εξαχθεί.

Εύρεση μέσου όρου πίνακα (1)

Αλγόριθμος : Mean_Value

Είσοδος : P, N

Έξοδος : MO

```
1  READ(N)
2  X=0
3  for I ← 1 to N
4      PRINT(P(I))
5      X←X + P(I)
6  MO ← X/N
7  PRINT(MO)
```

Θα δείξουμε την εκτέλεση του αλγόριθμου βήμα προς βήμα χρησιμοποιώντας έναν πίνακα εισόδου P τεσσάρων (4) στοιχείων.

P	1	2	3	4
P[I]	14	5	166	40

Εύρεση μέσου όρου πίνακα (2)

Σε κάθε στιγμή της εκτέλεσης του αλγόριθμου η κίτρινη μπάρα μας δείχνει την εντολή που μόλις εκτελέστηκε.

Αλγόριθμος : Mean_Value

Είσοδος : P, N

Έξοδος : MO

1	READ(N)
2	X=0
3	for I \leftarrow 1 to N
4	PRINT(P(I))
5	X \leftarrow X + P(I)
6	MO \leftarrow X/N
7	PRINT(MO)

Εύρεση μέσου όρου πίνακα (3)

Με κόκκινο χρώμα φαίνονται οι τιμές των μεταβλητών που άλλαξαν τιμή στο τρέχον βήμα.

N	X	I	P[I]	MO
4	14	2	5	?

Με μπλε χρώμα φαίνονται τα δεδομένα εισόδου

P	1	2	3	4
P[I]	14	5	166	40

Το κίτρινο χρώμα μας δείχνει το στοιχείο του πίνακα που εξετάζουμε στο τρέχον βήμα του βρόγχου

ΟΘΟΝΗ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ	
Δώστε τιμή για το N: 4	
14	

Εύρεση μέσου όρου πίνακα (4)

Αλγόριθμος : Mean_Value

Είσοδος : P, N

Έξοδος : MO

```
1  READ(N)
2  X=0
3  for I ← 1 to N
4      PRINT(P(I))
5      X←X + P(I)
6  MO ← X/N
7  PRINT(MO)
```

N	X	I	P[I]	MO
?	?	?	?	?

P	1	2	3	4
P[I]	14	5	166	40

ΟΘΟΝΗ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ

Εύρεση μέσου όρου πίνακα (5)

Αλγόριθμος : Mean_Value

Είσοδος : P, N

Έξοδος : MO

1	READ(N)
2	X=0
3	for I ← 1 to N
4	PRINT (P(I))
5	X ← X + P(I)
6	MO ← X/N
7	PRINT (MO)

N	X	I	P[I]	MO
4	?	?	?	?

P	1	2	3	4
P[I]	14	5	166	40

ΟΘΟΝΗ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ

Δώστε τιμή για το N: 4

Εύρεση μέσου όρου πίνακα (6)

Αλγόριθμος : Mean_Value

Είσοδος : P, N

Έξοδος : MO

1 **READ(N)**

2 **X=0**

3 **for** I \leftarrow 1 **to** N

4 **PRINT**(P(I))

5 $X \leftarrow X + P(I)$

6 $MO \leftarrow X/N$

7 **PRINT**(MO)

N	X	I	P[I]	MO
4	0	?	?	?

P	1	2	3	4
P[I]	14	5	166	40

ΟΘΟΝΗ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ

Δώστε τιμή για το N: 4

Εύρεση μέσου όρου πίνακα (7)

Αλγόριθμος : Mean_Value

Είσοδος : P, N

Έξοδος : MO

1	READ(N)
2	X=0
3	for I ← 1 to N
4	PRINT(P(I))
5	X←X + P(I)
6	MO ← X/N
7	PRINT(MO)

N	X	I	P[I]	MO
4	0	1	14	?

P	1	2	3	4
P[I]	14	5	166	40

ΟΘΟΝΗ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ

Δώστε τιμή για το N: 4

Εύρεση μέσου όρου πίνακα (8)

Αλγόριθμος : Mean_Value

Είσοδος : P, N

Έξοδος : MO

1	READ(N)
2	X=0
3	for I \leftarrow 1 to N
4	PRINT(P(I))
5	X \leftarrow X + P(I)
6	MO \leftarrow X/N
7	PRINT(MO)

N	X	I	P[I]	MO
4	0	1	14	?

P	1	2	3	4
P[I]	14	5	166	40

ΟΘΟΝΗ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ

Δώστε τιμή για το N: 4

14

Εύρεση μέσου όρου πίνακα (9)

Αλγόριθμος : Mean_Value

Είσοδος : P, N

Έξοδος : MO

1	READ(N)
2	X=0
3	for I ← 1 to N
4	PRINT(P(I))
5	X ← X + P(I)
6	MO ← X/N
7	PRINT(MO)

N	X	I	P[I]	MO
4	14	1	14	?

P	1	2	3	4
P[I]	14	5	166	40

ΟΘΟΝΗ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ

Δώστε τιμή για το N: 4

14

Εύρεση μέσου όρου πίνακα (10)

Αλγόριθμος : Mean_Value

Είσοδος : P, N

Έξοδος : MO

1	READ(N)
2	X=0
3	for I ← 1 to N
4	PRINT(P(I))
5	X←X + P(I)
6	MO ← X/N
7	PRINT(MO)

N	X	I	P[I]	MO
4	14	2	5	?

P	1	2	3	4
P[I]	14	5	166	40

ΟΘΟΝΗ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ

Δώστε τιμή για το N: 4

14

Εύρεση μέσου όρου πίνακα (11)

Αλγόριθμος : Mean_Value

Είσοδος : P, N

Έξοδος : MO

1	READ(N)
2	X=0
3	for I \leftarrow 1 to N
4	PRINT(P(I))
5	X \leftarrow X + P(I)
6	MO \leftarrow X/N
7	PRINT(MO)

N	X	I	P[I]	MO
4	14	2	5	?

P	1	2	3	4
P[I]	14	5	166	40

ΟΘΟΝΗ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ

Δώστε τιμή για το N: 4

14

5

Εύρεση μέσου όρου πίνακα (12)

Αλγόριθμος : Mean_Value

Είσοδος : P, N

Έξοδος : MO

1	READ(N)
2	X=0
3	for I ← 1 to N
4	PRINT(P(I))
5	X ← X + P(I)
6	MO ← X/N
7	PRINT(MO)

N	X	I	P[I]	MO
4	19	2	5	?

P	1	2	3	4
P[I]	14	5	166	40

ΟΘΟΝΗ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ

Δώστε τιμή για το N: 4

14

5

Εύρεση μέσου όρου πίνακα (13)

Αλγόριθμος : Mean_Value

Είσοδος : P, N

Έξοδος : MO

1	READ(N)
2	$X=0$
3	for $I \leftarrow 1$ to N
4	PRINT (P(I))
5	$X \leftarrow X + P(I)$
6	$MO \leftarrow X/N$
7	PRINT (MO)

N	X	I	P[I]	MO
4	19	3	166	?

P	1	2	3	4
P[I]	14	5	166	40

ΟΘΟΝΗ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ

Δώστε τιμή για το N: 4

14

5

Εύρεση μέσου όρου πίνακα (14)

Αλγόριθμος : Mean_Value

Είσοδος : P, N

Έξοδος : MO

1	READ(N)
2	X=0
3	for I \leftarrow 1 to N
4	PRINT(P(I))
5	X \leftarrow X + P(I)
6	MO \leftarrow X/N
7	PRINT(MO)

N	X	I	P[I]	MO
4	19	3	166	?

P	1	2	3	4
P[I]	14	5	166	40

ΟΘΟΝΗ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ

Δώστε τιμή για το N: 4

14

5

166

Εύρεση μέσου όρου πίνακα (15)

Αλγόριθμος : Mean_Value

Είσοδος : P, N

Έξοδος : MO

1	READ(N)
2	X=0
3	for I ← 1 to N
4	PRINT(P(I))
5	X←X + P(I)
6	MO ← X/N
7	PRINT(MO)

N	X	I	P[I]	MO
4	185	3	166	?

P	1	2	3	4
P[I]	14	5	166	40

ΟΘΟΝΗ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ

Δώστε τιμή για το N: 4

14

5

166

Εύρεση μέσου όρου πίνακα (16)

Αλγόριθμος : Mean_Value

Είσοδος : P, N

Έξοδος : MO

1	READ(N)
2	X=0
3	for I ← 1 to N
4	PRINT(P(I))
5	X←X + P(I)
6	MO ← X/N
7	PRINT(MO)

N	X	I	P[I]	MO
4	185	4	40	?

P	1	2	3	4
P[I]	14	5	166	40

ΟΘΟΝΗ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ

Δώστε τιμή για το N: 4

14

5

166

Εύρεση μέσου όρου πίνακα (17)

Αλγόριθμος : Mean_Value

Είσοδος : P, N

Έξοδος : MO

1	READ(N)
2	X=0
3	for I \leftarrow 1 to N
4	PRINT(P(I))
5	X \leftarrow X + P(I)
6	MO \leftarrow X/N
7	PRINT(MO)

N	X	I	P[I]	MO
4	185	4	40	?

P	1	2	3	4
P[I]	14	5	166	40

ΟΘΟΝΗ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ

Δώστε τιμή για το N: 4

14

5

166

40

Εύρεση μέσου όρου πίνακα (18)

Αλγόριθμος : Mean_Value

Είσοδος : P, N

Έξοδος : MO

1	READ(N)
2	X=0
3	for I ← 1 to N
4	PRINT (P(I))
5	X ← X + P(I)
6	MO ← X/N
7	PRINT (MO)

N	X	I	P[I]	MO
4	225	4	40	?

P	1	2	3	4
P[I]	14	5	166	40

ΟΘΟΝΗ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ

Δώστε τιμή για το N: 4

14

5

166

40

Εύρεση μέσου όρου πίνακα (19)

Αλγόριθμος : Mean_Value

Είσοδος : P, N

Έξοδος : MO

1	READ(N)
2	$X=0$
3	for $I \leftarrow 1$ to N
4	PRINT ($P(I)$)
5	$X \leftarrow X + P(I)$
6	$MO \leftarrow X/N$
7	PRINT (MO)

N	X	I	P[I]	MO
4	225	5	?	?

P	1	2	3	4
P[I]	14	5	166	40

ΟΘΟΝΗ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ

Δώστε τιμή για το N: 4

14

5

166

40

Εύρεση μέσου όρου πίνακα (20)

Αλγόριθμος : Mean_Value

Είσοδος : P, N

Έξοδος : MO

1	READ(N)
2	X=0
3	for I ← 1 to N
4	PRINT(P(I))
5	X←X + P(I)
6	MO ← X/N
7	PRINT(MO)

N	X	I	P[I]	MO
4	225	5	?	63,75

P	1	2	3	4
P[I]	14	5	166	40

ΟΘΟΝΗ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ

Δώστε τιμή για το N: 4

14

5

166

40

Εύρεση μέσου όρου πίνακα (21)

Αλγόριθμος : Mean_Value

Είσοδος : P, N

Έξοδος : MO

```
1  READ(N)
2  X=0
3  for I ← 1 to N
4      PRINT(P(I))
5      X←X + P(I)
6  MO ← X/N
7  PRINT(MO)
```

N	X	I	P[I]	MO
4	225	5	?	63,75

P	1	2	3	4
P[I]	14	5	166	40

ΟΘΟΝΗ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ

Δώστε τιμή για το N: 4

14

5

166

40

63,75

Γενική παράσταση φυσικού αριθμού n

$$\begin{aligned} & (\alpha_k \alpha_{k-1} \alpha_{k-2} \dots \alpha_1 \alpha_0)_b \\ n = & \alpha_k b^k + \alpha_{k-1} b^{k-1} + \dots + \alpha_1 b^1 + \alpha_0 b^0 \\ & 0 \leq a_j < b \end{aligned}$$

- b : *βάση της παράστασης*
- a_j : *ψηφία της παράστασης*

Σχήμα Horner

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + a_{k-2} b^{k-2} + \dots + a_1 b^1 + a_0 b^0 = a_0 + b(a_1 + b(a_2 + \dots + b(a_{k-1} + b a_k) \dots))$$

Υπολογισμός με διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς από οποιαδήποτε βάση σε δεκαδικό σύστημα

Αλγόριθμος:

$$b_0 = a_k$$

for $j=1, \dots, k$

$$b_j = a_{k-j} + b_{j-1} * b$$

Αριθμητικά Συστήματα – [1]

Χρειαζόμαστε λίγες γνώσεις συστημάτων αρίθμησης και μετατροπές από ένα σύστημα σε άλλο

Αναπαράσταση δυαδικών αριθμών

$(b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2$, $b_i = 0 \text{ ή } 1, i = 0, 1, \dots, m, b_m = 1$
π.χ. $(10)_2$, $(1011)_2$, $(11101)_2$

Αναπαράσταση δεκαδικών αριθμών

$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_{10}$, $a_i = 0, \dots, 9, i = 0, 1, \dots, n$ και $a_n \neq 0$
π.χ. $(2)_{10}$, $(11)_{10}$, $(29)_{10}$

Αριθμητικά Συστήματα – [2]

Μετατροπή στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

Παράδειγμα. Να μετατραπεί αριθμός από σύστημα αρίθμησης με βάση $k < 10$ στο δεκαδικό σύστημα

Λύση. Η τιμή αριθμού στο δεκαδικό σύστημα δίνεται από τη σχέση

$$(b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_k = b_m k^m + b_{m-1} k^{m-1} + \dots + b_1 k^1 + b_0$$

Άρα χρησιμοποιούμε Σχήμα Horner με $r = k$

Από το δυαδικό στο δεκαδικό είναι $r = 2$.

Αριθμητικά Συστήματα – [3]

Μετατροπή από δεκαδικό σε δυαδικό. Να γραφεί αλγόριθμος, μετατροπής θετικού ακέραιου αριθμού από το δεκαδικό στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.

Λύση:
$$a = (a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0)_2 = a_m 2^m + a_{m-1} 2^{m-1} + \dots + a_1 2 + a_0$$
$$= (\dots ((a_m 2 + a_{m-1}) 2 + a_{m-2}) 2 + \dots + a_1) 2 + a_0$$

Πηλίκο
διαίρεσης $a / 2$

Υπόλοιπο διαίρεσης $a / 2$

Συμπέρασμα: Διαιρώντας διαδοχικά το a δια 2 και υπολογίζοντας κάθε φορά το υπόλοιπο, τα δυφία υπολογίζονται με τη σειρά a_0, a_1, \dots, a_m .

Αριθμητικά Συστήματα – [4]

Μετατροπή από δεκαδικό σε δυαδικό.

$$a = (a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0)_2 = a_m 2^m + a_{m-1} 2^{m-1} + \dots + a_1 2 + a_0$$
$$= (\dots ((a_m 2 + a_{m-1}) 2 + a_{m-2}) 2 + \dots + a_1) 2 + a_0$$

Αλγόριθμος: dek2dyad	
Είσοδος: a	
Έξοδος: x	
1	i ← 1
2	while a ≥ 1
3	x(i) ← mod(a,2)
4	a ← div(a,2)
5	i ← i+1

a=29, i=1,
x(1) ← 1, a ← 14, i ← 2
x(2) ← 0, a ← 7, i ← 3
x(3) ← 1, a ← 3, i ← 4
x(4) ← 1, a ← 1, i ← 5
x(5) ← 1, a ← 0, i ← 6

$$29 = (x(5) \dots x(1))_2 = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1)_2.$$

Πρόβλημα για το σπίτι – [8]

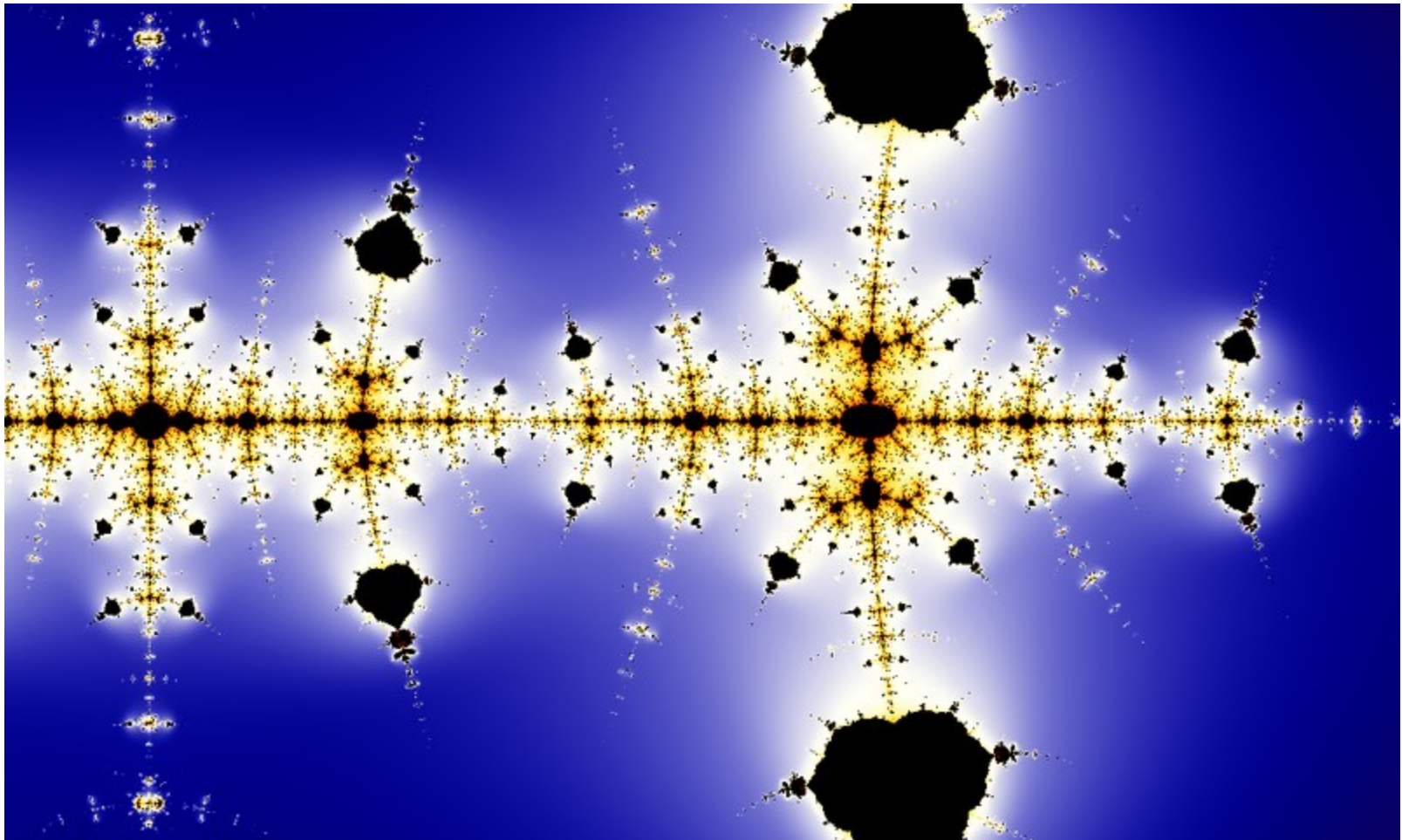
Αλγόριθμος : Home_8	
Είσοδος : N	
Έξοδος : N	
1	READ(N)
2	while $N \neq 1$
3	if $\text{mod}(N, 2) = 0$
4	$N \leftarrow N/2$
5	else
6	$N \leftarrow 3N + 1$

Ερώτημα! Τερματίζει ο παραπάνω αλγόριθμος για οποιαδήποτε θετική τιμή του N, δηλ. το ($N=1$)?

Η εικασία του Collatz



Πρόβλημα για το σπίτι – [8]



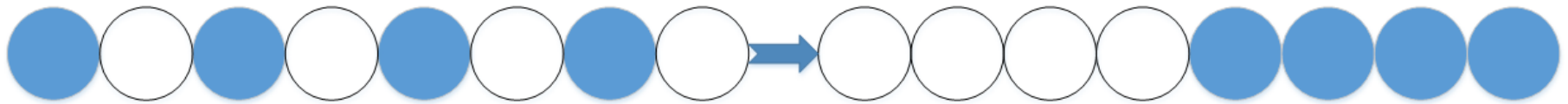
Φράκταλ της απεικόνισης Κόλατζ σε μια γειτονιά του πραγματικού άξονα

Quiz – [9]

Έστω μια γραμμική διάταξη με $2N$ δίσκους δύο χρωμάτων. Δηλαδή, υπάρχουν N μπλε δίσκοι και N λευκοί δίσκοι. Αρχικά, είναι τοποθετημένοι εναλλάξ, μπλε, λευκός, μπλε, λευκός, ...

Πρέπει να μεταφερθούν όλοι οι μπλε δίσκοι στα δεξιά και όλοι οι λευκοί στα αριστερά.

Η μόνη κίνηση που επιτρέπεται είναι η εναλλαγή δυο γειτονικών δίσκων.



Να σχεδιαστεί ένας αλγόριθμος που να λύνει το πρόβλημα και να υπολογιστεί το ελάχιστο πλήθος κινήσεων (εναλλαγών) που απαιτείται.

Συγχώνευση διανυσμάτων – [1]

Λύση

Παράδειγμα. Δίνονται δυο ταξινομημένα κατά αύξουσα τάξη διανύσματα A και B με n και m στοιχεία αντίστοιχα. Να γραφεί αλγόριθμος ταξινόμησης του $C = [A\ B]$

Αλγόριθμος: merge1

Είσοδος: A, B, n, m

Έξοδος: C

```
1      C ← A
2      for i ← 1 to m
3          C ← insert(C, B(i))
```

AN $n > m$

Συγχώνευση διανυσμάτων – [2]

Έστω $A = [10 \ 14 \ 22 \ 36 \ 42 \ 56]$, $n=6$ και
 $B = [12 \ 18 \ 26 \ 40 \ 52]$, $m=5$.

Θέτουμε $C=A = [10 \ 14 \ 22 \ 36 \ 42 \ 56]$.

Επανάληψη 1^η ($i=1$).

$C \leftarrow \text{insert}(C, B(1)=12)$.

Νέο $C = [10 \ 12 \ 14 \ 22 \ 36 \ 42 \ 56]$.

Επανάληψη 2^η ($i=2$).

$C \leftarrow \text{insert}(C, B(2)=18)$.

Νέο $C = [10 \ 12 \ 14 \ 18 \ 22 \ 36 \ 42 \ 56]$.

Επανάληψη 3^η ($i=3$).

$C \leftarrow \text{insert}(C, B(3)=26)$.

Νέο $C = [10 \ 12 \ 14 \ 18 \ 22 \ 26 \ 36 \ 42 \ 56]$.

Συγχώνευση διανυσμάτων – [3]

Επανάληψη 4^η (i=4).

$C \leftarrow \text{insert}(C, B(4)=40).$

Νέο C = [10 12 14 18 22 26 36 40 42 56].

Επανάληψη 5^η (i=5).

$C \leftarrow \text{insert}(C, B(5)=52).$

Νέο C = [10 12 14 18 22 26 36 40 42 52 56].