Γραμμική Άλγεβρα (Linear Algebra)

ΑΓΓΕΛΟΣ ΣΙΦΑΛΕΡΑΣ Καθηγητής

4η Διάλεξη (Θεωρία)





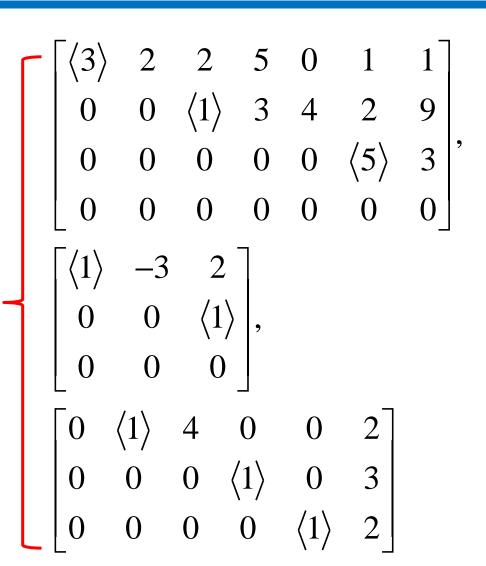


Κλιμακωτός πίνακας

- Μια από τις εφαρμογές των γραμμο-πράξεων είναι η μετατροπή ενός πίνακα σε κλιμακωτό πίνακα.
- Ένας m×n πίνακας λέγεται κατά γραμμές κλιμακωτός (row echelon matrix), ή απλά, κλιμακωτός πίνακας (echelon matrix), αν ισχύουν συγχρόνως τα παρακάτω:
 - Οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πριν από τις μηδενικές.
 - ii. Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής, που το λέμε στοιχείο-οδηγό της (leading element), είναι δεξιά του στοιχείου-οδηγού τής αμέσως προηγούμενης μη μηδενικής γραμμής (αν υπάρχει).
- Αν ένας πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή, τότε τα στοιχεία-οδηγοί λέγονται και στοιχεία περιστροφής ή πιλότοι (pivot element).

Παραδείγματα κλιμακωτού πίνακα

Κλιμακωτοί πίνακες με τα στοιχεία-οδηγούς να είναι σημειωμένα σε αγκύλες:

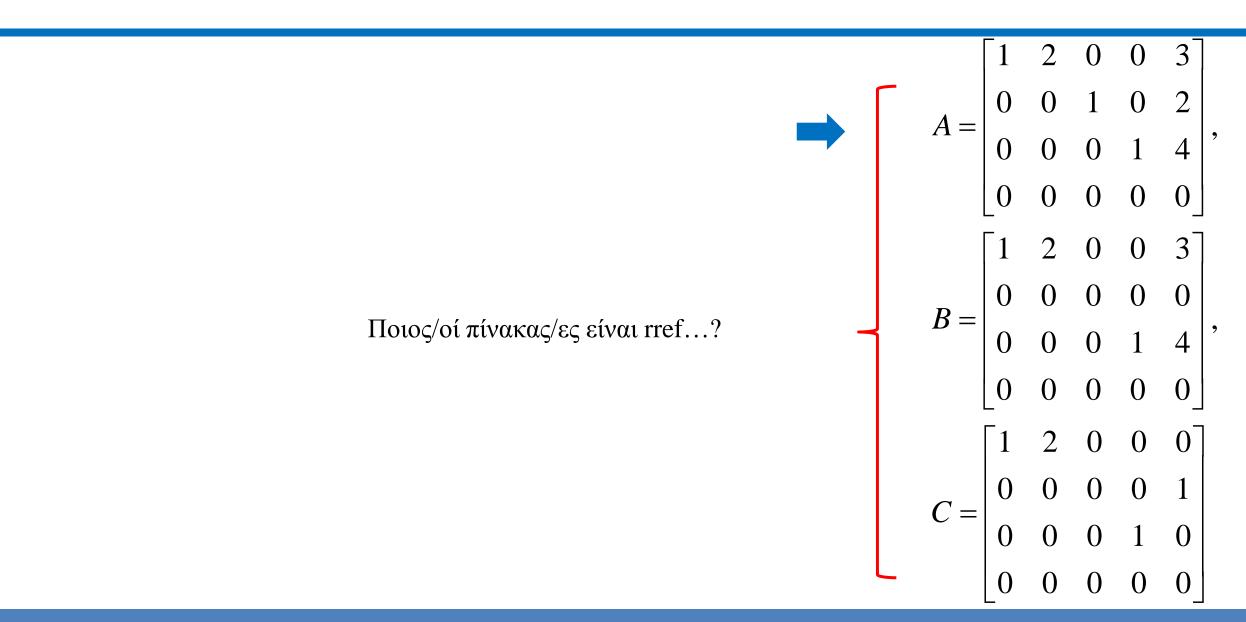


Ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας

- Ένας κλιμακωτός πίνακας Α λέγεται ότι είναι (κατά γραμμές) ανηγμένος κλιμακωτός ή rref (reduced row echelon form) πίνακας, αν έχει τις επιπλέον δύο ιδιότητες:
 - Κάθε στοιχείο-οδηγός είναι 1.
 - ii. Κάθε στήλη που περιέχει σαν στοιχείο-οδηγό το 1, καλούμενη στήλη-οδηγός (leading column), είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα e_i , για κάποιο i.

- Είναι κανένας από τους προηγούμενους τρεις πίνακες rref...?
 - ✓ Μόνον ο τρίτος!

Παραδείγματα ανηγμένου κλιμακωτού πίνακα



Απαλοιφή Gauss

Βήμα 1°. Βρες την πρώτη στήλη με μη μηδενικό στοιχείο. Έστω ότι είναι η j_1 .

<u>Βήμα 2ο</u>. Κάνε εναλλαγή των γραμμών έτσι ώστε να υπάρχει ένα μη μηδενικό στοιχείο στην πρώτη γραμμή της j_1 στήλης, δηλ. έτσι ώστε: $a_{1j_1} \neq 0$

<u>Βήμα 3ο.</u> Χρησιμοποίησε το a_{1j_1} ως στοιχείο-οδηγό για να μηδενίσεις τα στοιχεία κάτω από το a_{1j_1} , δηλ. για κάθε i>1, εφάρμοσε τη γραμμο-πράξη:

$$\Gamma 3_{(i)+r(1)}: A_{(i)} + rA_{(1)} \rightarrow A_{(i)}, \mu \epsilon \qquad r = -a_{ij_1}/a_{1j_1}$$

Βήμα 40. Επανέλαβε τα *Βήματα* 1, 2 και 3 στον υποπίνακα που σχηματίζεται από όλες τις γραμμές εκτός της πρώτης.

<u>Βήμα 5ο</u>. Επανέλαβε την παραπάνω διαδικασία μέχρι να προκύψει πίνακας σε κλιμακωτή μορφή.

Απαλοιφή Gauss-Jordan

Έστω ότι ο $A=[a_{ij}]$ είναι κλιμακωτός με στοιχεία οδηγούς τα: $a_{1j_1},a_{2j_2},\ldots,a_{rj_r}$

<u>Βήμα 1°</u>. Πολλαπλασίασε την τελευταία μη μηδενική γραμμή $A_{(r)}$ με $1/a_{1j_1}$ έτσι ώστε το στοιχείο-οδηγός να γίνει 1.

<u>Βήμα 2ο</u>. Χρησιμοποίησε το στοιχείο-οδηγό $a_{rj_r}=1$ για να μηδενίσεις τα στοιχεία πάνω από το στοιχείο-οδηγό, δηλ. για $i=r-1,\,r-2,\,\ldots,\,1$, εφάρμοσε τη γραμμο-πράξη:

$$\Gamma_{(i)+s(r)}: A_{(i)} + sA_{(r)} \to A_{(i)}, \mu\varepsilon \quad s = -a_{ir_i}$$

Βήμα 40. Πολλαπλασίασε την $A_{(1)}$ με $1/a_{rj_r}$

Παραδείγματα απαλοιφής Gauss-Jordan

Να μετατραπούν οι ακόλουθοι πίνακες σε μορφή ανηγμένων κλιμακωτών πινάκων:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad rref(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 8 \end{bmatrix} \qquad rref(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/9 & 0 \\ 0 & 1 & 2/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -6 & 3 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -6 & 3 & -8 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow rref(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2/5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$