Anfängerpraktikum der Fakultät für Physik,

Universität Göttingen

14
Wechselstromwiderstände

Praktikant:	Felix Kurtz
Versuchspartner:	Michael Lohmann
E-Mail:	felix.kurtz@stud.uni-goettingen.de
Betreuer:	Björn Klaas
Versuchsdatum:	08.09.2014

Eingegangen am:

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Bei diesem Versuch sollen neben ohmschen Widerständen induktive und kapazitive Widerstände und die damit verbundene Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung bei Wechselstrom untersucht werden.

2 Theorie

2.1 Wechselstrom

Bei dem heutzutage fast überall verwendeten *Wechselstrom* verhalten sich Spannung und Strom Sinus-förmig, sind jedoch um φ phasenverschoben:

$$U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)\,, \tag{1}$$

$$I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi)\,. \tag{2}$$

2.1.1 Effektivwerte

Als *Effektivwert* eines Wechselstroms bezeichnet man den Wert, bei dem bei Gleichstrom die gleiche Leistung abgegeben würde. Für eine Sinus-förmige Spannung der Amplitude U_0 ergibt sich somit

$$U_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot U_0\,. \tag{3}$$

Analoges gilt für den Strom. Vom Multimeter, welches Wechselstrom misst, wird der Effektivwert und nicht die Amplitude der Messgröße angezeigt.

2.1.2 Impedanz und Scheinwiderstand

Für die folgende Rechnung ist es nützlich, die komplexe Schreibweise $U(t) = U_0\, e^{i\omega t}$ und $I(t) = I_0\, e^{i(\omega t - \varphi)}$ zu verwenden. Als Impedanz bezeichnet man das Verhältnis

$$Z = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{U_0}{I_0} \cdot e^{i\varphi}\,. \tag{4}$$

Ihr Betrag ist der Scheinwiderstand $|Z| = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_{\mathrm{eff}}}{I_{\mathrm{eff}}}$.

2.2 Ohmscher Widerstand

Bei einem ohmschen Widerstand R gilt immer

$$U(t) = R \cdot I(t)\,. \tag{5}$$

Strom und Spannung sind also in Phase.

2.3 Kapazitiver Widerstand

Ein Kondensator mit der Kapazität C, an dem die Spannung U anliegt, trägt die Ladung $Q = C \cdot U$. Für eine Wechselspannung $U_0 \sin(\omega t)$ ergibt sich aus der zeitlichen Ableitung der Ladung $I = \dot{Q}$

$$I(t) = \omega C \cdot U_0 \cdot \cos(\omega t) = \omega C \cdot U_0 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) . \tag{6}$$

Man erkennt, dass der Strom der Spannung voraus eilt und die Phasenverschiebung $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ beträgt. Über die komplexe Schreibweise lässt sich der *Blindwiderstand*

$$X_C = \frac{U}{I} = \frac{U_0}{\omega C \cdot U_0} \, e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\frac{1}{\omega C} \tag{7}$$

definieren.

2.4 Induktiver Widerstand

Fließt durch eine Spule mit der Induktivität L ein zeitlich veränderlicher Strom, induziert dieser eine Induktionsspannung $U_{\text{ind}} = -L\dot{I}$. Soll diese Spannung die Form $U_0 \sin(\omega t)$, folgt für den Strom durch Integration

$$I(t) = \frac{U_0}{\omega L} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) . \tag{8}$$

Für den Blindwiderstand gilt also

$$X_L = i\omega L \, . \tag{9}$$

Hier eilt die Spannung also dem Strom voraus und die Phasenverschiebung beträgt $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Außerdem ist X_L größer, je größer die Frequenz ω des Wechselstroms.
Außerdem besitzen Spulen meist einen nicht zu vernachlässigenden ohmschen Widerstand R_L, da sie aus sehr langem Draht bestehen.

2.5 RLC-Serienschaltung

Schaltet man einen ohmschen Widerstand R, eine Spule mit der Induktivität L und einen Kondensator mit der Kapazität C in Reihe ist die Impedanz die Summe aus ohmschem, kapazitivem sowie induktivem Widerstand

$$Z = R + X_C + X_L \, . \tag{10}$$

Der Scheinwiderstand beträgt folglich

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \, . \tag{11}$$

Außerdem kann man alle drei Widerstände in die komplexe Ebene einzeichnen. Dabei ist der ohmsche Widerstand auf der reelen Achse und die beiden Blindwiderstände auf der imaginären Achse. Addiert man alle, ergibt sich die Impedanz. Der Winkel zwischen Z und der reelen Achse ist die Phasenverschiebung ϕ zwischen Spannung und Strom Sie kann also mit der Formel

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) \tag{12}$$

berechnet werden.
Bei der **Resonanzfrequenz** ω_R ist der Scheinwiderstand am geringsten, die Blindwiderstände heben sich nämlich auf: $\omega_R L = \frac{1}{\omega_R C}$. Daraus folgt:

$$\omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC}}\,, \tag{13}$$

$$\varphi(\omega_R) = 0\,, \tag{14}$$

$$Z(\omega_R) = R\,. \tag{15}$$

2.6 Parallelschaltung

Schaltet man eine Spule mit der Induktivität L und dem ohmschen Widerstand R_L parallel zu einem Kondensator mit der Kapazität C, ergibt sich für die Impedanz

$$Z(\omega) = \left(\frac{1}{R_L + i\omega L} + i\omega C\right)^{-1} \tag{16}$$

und

$$|Z| = \left[\left(\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2}\right)^2 + \left(\frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{17}$$

als Scheinwiderstand.

3 Durchführung

Zuerst wird der **Serienresonanzkreis** aus Abb. (1) aufgebaut. Dabei wird das Oszilloskop so angeschlossen und eingestellt, dass die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung abgelesen werden kann: Während die Spannung parallel zum Frequenzgenerator gemessen wird und an Channel 1 des Oszilloskops anliegt, legt man in die Stromzange (Channel 2) das Kabel, von welchem der Strom gemessen werden soll. Nun schaltet man im y-t-Mode des Oszilloskops unter dem Punkt *Messung* die Bestimmung der Phasenverschiebung zwischen den beiden Signalen ein.

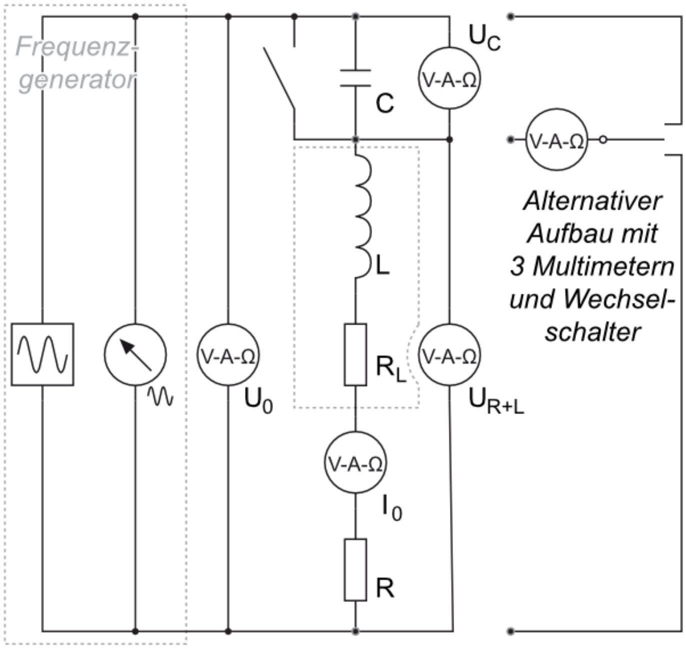

Abbildung 1: RLC-Serienschaltung [LP1, Datum: 03.10.14].

Zur ersten Messung überbrückt man den Kondensator, indem man den Schalter schließt. Nun wird für mindestens 10 Frequenzen Spannung und Strom sowie deren Phasenverschiebung gemessen. Daraus kann man später die Induktivität der Spule sowie den ohmschen Widerstand berechnen.
Die nächsten Messungen finden mit dem Kondensator statt, der Schalter wird also geöffnet. In Abhängigkeit der Frequenz werden jetzt der Strom I, die Spannung U sowie die Teilspannungen U_C und U_{L+R} und die Phasenverschiebung φ gemessen. Dabei sollen möglichst viele Messungen in der Nähe der Resonanzfrequenz ω_R durchgeführt werden.

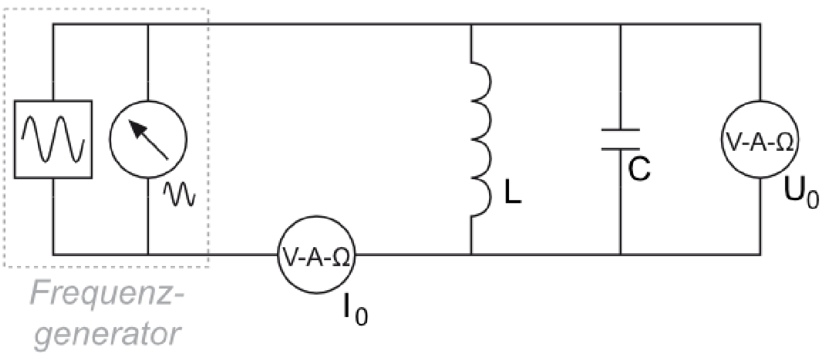

Abbildung 2: LC-Parallelschaltung [LP1, Datum: 03.10.14].

Als nächstes wird die Schaltung nach Abb. (2) zu einem **Parallelkreis** aus Spule und Kondensator umgebaut. Wieder wird die Spannung und der Strom in Abhängigkeit der Frequenz gemessen. Auch hier liegt der Fokus auf der Resonanzfrequenz.

Zum Schluss misst man mit dem Multimeter den Innenwiderstand des Amperemeters und den einzelnen ohmschen Widerstand R_Ω sowie R_L der Spule. Außerdem werden die Kapazität des Kondensators gemessen und die Spulendaten notiert.

4 Auswertung

4.1 Widerstand und Spule in Reihe

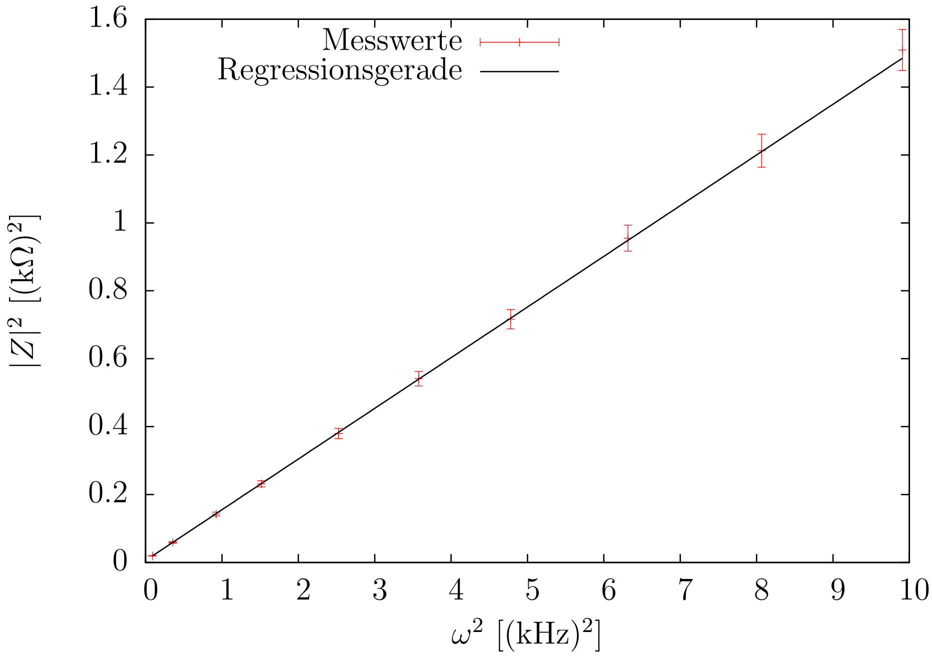

Abbildung 3: RL-Serienschaltung: Quadrat des Scheinwiderstandes als Funktion der Kreisfrequenz.

Trägt man das Quadrat der Impedanz gegen das der Kreisfrequenz auf, ergibt sich eine Gerade $Z^2 = R^2 + L^2\omega^2 = b + m \cdot (\omega^2)$. Dies kann man in Abbildung (3) erkennen. Um aus dem Ergebnis der linearen Regression m und b die Indukivität L sowie den ohmschen Widerstand R zu berechnen, muss also die Wurzel gezogen werden. Der Fehler von $x = \sqrt{y}$ berechnet man mit der Formel $\sigma_x = \frac{\sigma_y}{2\sqrt{y}}$, welche aus der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung stammt.

So erhält man aus $m = (0.1493 \pm 0.0005)\,\Omega^2/\mathrm{Hz}^2$ und $b = (0.00597 \pm 0.00017)\,(\mathrm{k}\Omega)^2$

$$L = (386.3 \pm 0.6)\,\mathrm{mH} \qquad \text{sowie}$$
$$R = (77.3 \pm 1.1)\,\Omega\,.$$

4.2 RLC-Serienschaltung

4.2.1 Scheinwiderstand

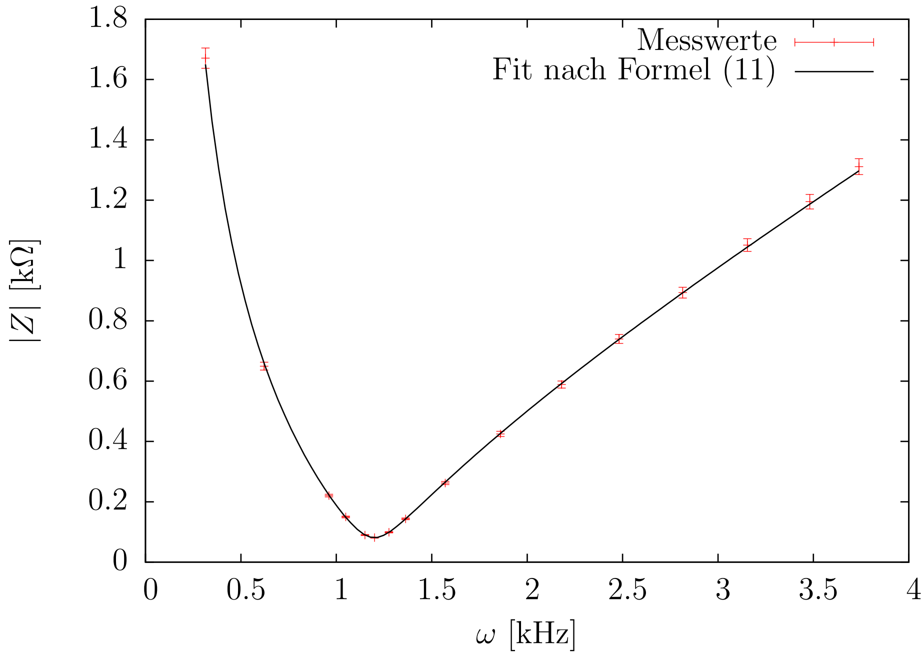

Abbildung 4: Scheinwiderstand des Serienresonanzkreises als Funktion der Kreisfrequenz.

Trägt man den Scheinwiderstand der Serienschaltung in Abhängigkeit der Frequenz auf (Abb.4) und fittet die theoretische Kurve aus Formel (11), erhält man für die Parameter

$$R = (80.9 \pm 0.5)\,\Omega\,,$$
$$L = (386.1 \pm 1.0)\,\mathrm{mH} \qquad \text{und}$$
$$C = (1.799 \pm 0.005)\,\mu\mathrm{F}\,.$$

Mit der Formel (13) kann nun die Resonanzfrequenz bestimmt werden. Dabei wird die Formel

$$\sigma_{\omega_R} = \frac{\sqrt{\frac{\sigma_L^2}{L^2} + \frac{\sigma_C^2}{C^2}}}{2 \cdot \sqrt{C} \cdot \sqrt{L}}\,, \tag{18}$$

die sich aus der Fehlerfortpflanzung ergibt, für den Fehler verwendet. Man erhält:

$$\boxed{\omega_R = (1199.9 \pm 2.3)\,\text{Hz}\,.}$$

4.2.2 Phasenverschiebung

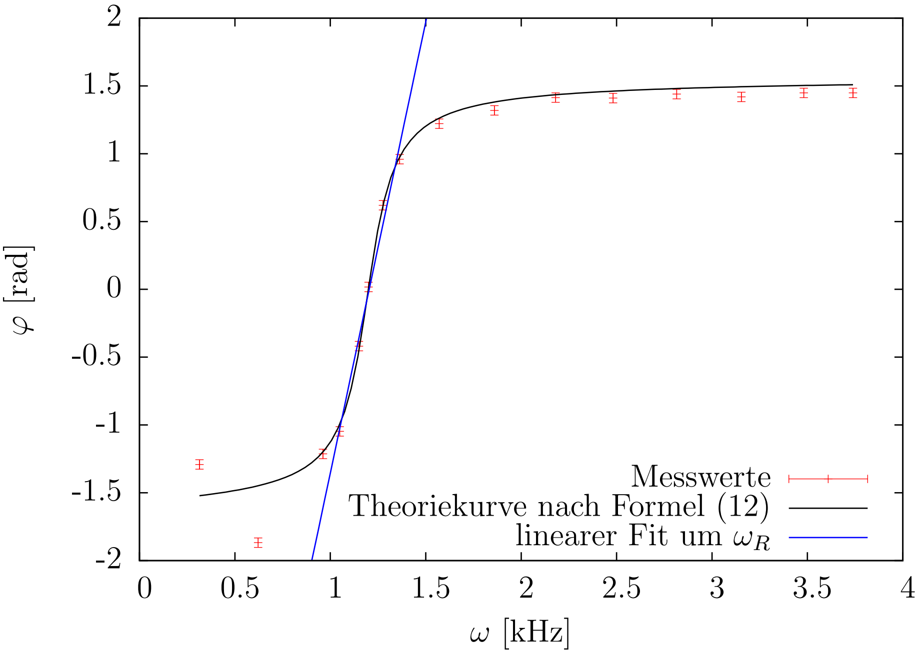

Abbildung 5: Phasenverschiebung des Serienresonanzkreises.

Das Programm *Gnuplot* liefert bei dem Theorie-Fit der Phasenverschiebung aus Formel (12) für die drei Parameter R, L und C Fehler, die 30 mal so groß sind wie der eigentliche Wert. Um dies zu beheben, setzt man den Wert für den Widerstand fest und fittet nur die anderen beiden Parameter. Dabei wird der Mittelwert $\overline{R} = (80.3 \pm 0.5)\,\Omega$ aus den beiden obigen Werten verwendet. Man erhält

$$C = (1.80 \pm 0.24)\,\mu\text{F} \qquad \text{und}$$
$$L = (390 \pm 50)\,\text{mH}\,.$$

Die daraus mit (13) und (18) berechnete Resonanzfrequenz beträgt

$$\boxed{\omega_R = (1200 \pm 110)\,\text{Hz}\,.}$$

Bei der Resonanzfrequenz verschwindet die Phasenverschiebung. In diesem Bereich ist der Arcustangens in etwa linear. So kann man zusätzlich zu dem Fit der Theoriekurve

(12) noch eine Gerade durch die Werte in der Nähe der Resonanzfrequenz legen. Aus der Steigung $m = (6.7 \pm 0.5)\,\mathrm{Hz}^{-1}$ und dem y-Achsenabschnitt $b = (-8.0 \pm 0.6)$ kann man mit

$$\omega_R = \omega(\varphi = 0) = -\frac{b}{m}\,, \tag{19}$$

$$\sigma_{\omega_R} = \frac{1}{m^2} \cdot \sqrt{b^2 \cdot \sigma_m^2 + m^2 \cdot \sigma_b^2} \tag{20}$$

die Resonanzfrequenz berechnen. Man erhält

$$\boxed{\omega_R = (1200 \pm 120)\,\mathrm{Hz}\,.}$$

4.2.3 Teilspannungen

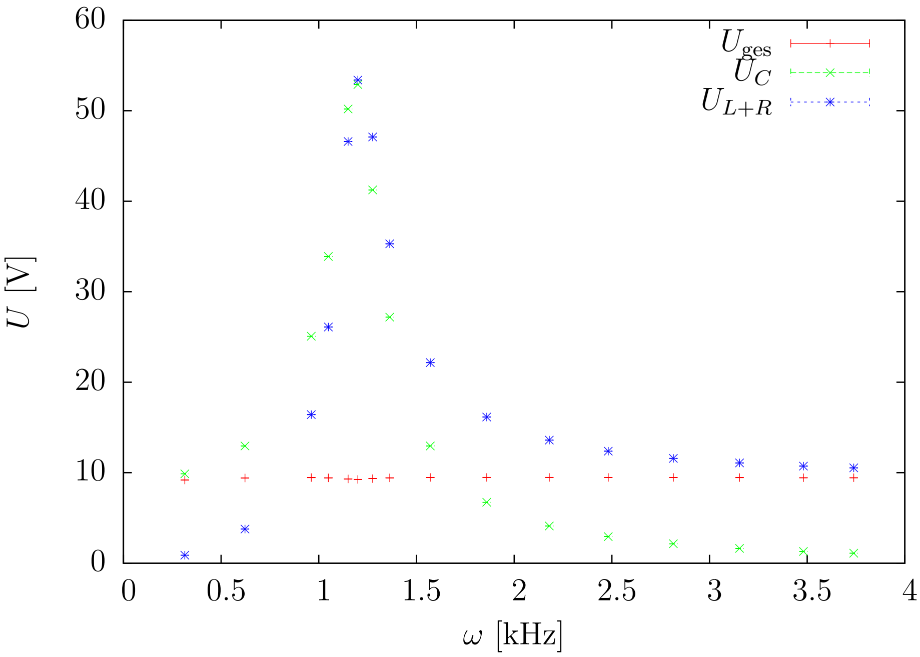

Abbildung 6: Teilspannungen des Serienresonanzkreises.

Trägt man die Teilspannungen U_C und U_{L+R} in Abhängigkeit der Frequenz auf (Abb. 6), fällt auf, dass beide ihr Maximum bei der Resonanzfrequenz haben. Außerdem ist dieses in etwa gleich groß. Dies war zu erwarten, da sich dort kapazitiver Widerstand und induktiver Widerstand aufheben. Dies kann man auch in der Abbildung (7) erkennen. Dort sind die Spannungen U_C und U_{L+R} sowie die Gesamtspannung U maßstabsgetreu eingezeichnet, welche sich bei der Resonanzfrequenz ergeben. Dazu werden die Messwerte bei einer gemessenen Phasenverschiebung von 1° verwendet: $U = 9.26\,\mathrm{V}$, $U_C = 52.9\,\mathrm{V}$

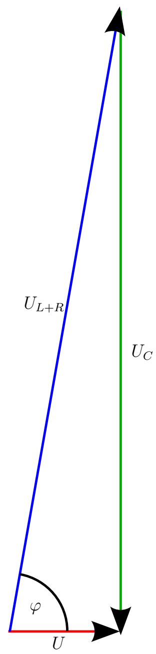

Abbildung 7: Zeigerdiagramm der Spannungen U, U_C und U_{L+R} der Serienschaltung bei der Resonanzfrequenz

und $U_{L+R} = 53.4\,\mathrm{V}$. Der eingezeichnete Winkel $\varphi = \arccos\left(\frac{U}{U_{L+R}}\right) = 80° = 1.396\,\mathrm{rad}$ ist die Phasenverschiebung zwischen U_{L+R} und dem Strom I, da dieser bei ω_R mit U in Phase ist. Da hier kein kapazitiver Widerstand vorhanden ist, kann man diese Verschiebung auch mit der Formel (12) ausrechnen. Dazu wird $C = 0$ gesetzt:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega_R L}{R}\right)\,. \tag{21}$$

Da alle drei Größen fehlerbehaftet sind, folgt mit der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{(L\omega_R)^2 + R^2} \cdot \sqrt{(LR)^2\,\sigma_{\omega_R}^2 + (L\omega_R)^2\,\sigma_R^2 + (R\omega_R)^2\,\sigma_L^2}\,. \tag{22}$$

Für die gewichteten Mittelwerte $\overline{\omega_R} = (1199.9 \pm 2.3)\,\mathrm{Hz}$, $\overline{R} = (80.3 \pm 0.5)\,\Omega$ und $\overline{L} = (386.2 \pm 0.6)\,\mathrm{mH}$ aus den obigen Berechnungen ergibt sich eine Phasenverschiebung von

$$\varphi = (1.399 \pm 0.001)\,\mathrm{rad}\,.$$

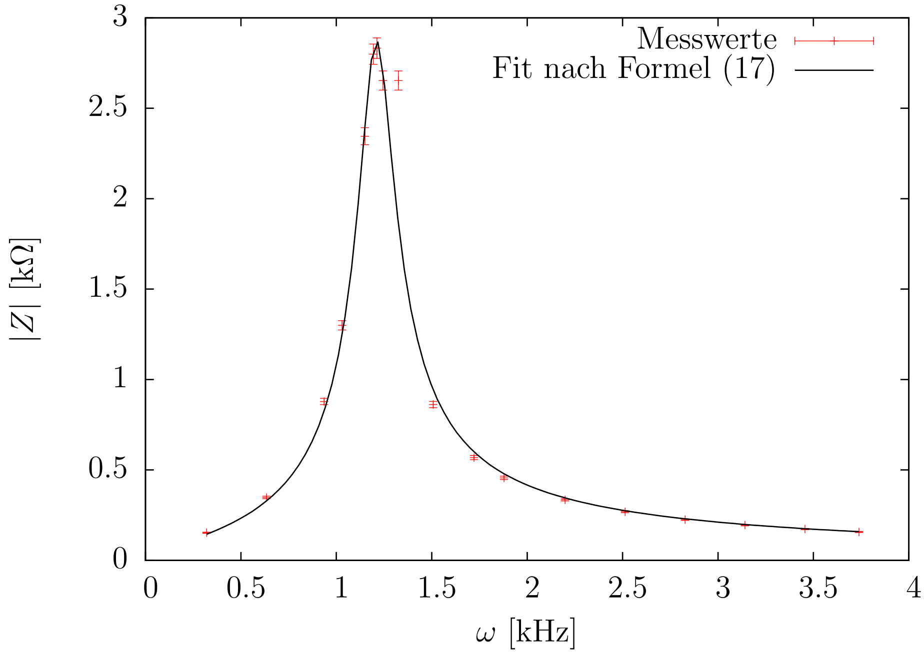

Abbildung 8: Scheinwiderstand des Parallelkreises als Funktion der Kreisfrequenz.

4.3 Parallelkreis

In Abbildung (8) ist der Scheinwiderstand des Parallelkreises gegen die Frequenz aufgetragen. Der Fit der Theoriekurve (17) liefert

$$\begin{aligned} R_L &= (68 \pm 5)\,\Omega\,, \\ L &= (370 \pm 10)\,\mathrm{mH} \qquad \text{und} \\ C &= (1.88 \pm 0.05)\,\mu\mathrm{F}\,. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit (13) und (18) die Resonanzfrequenz des Serienschwingkreises

$$\boxed{\omega_R = (1199 \pm 23)\,\mathrm{Hz}\,.}$$

5 Diskussion

5.1 Ohmscher Widerstand

5.2 Induktivität

5.3 Kapazität

5.4 Resonanzfrequenz

Literatur

[LP1] *Lehrportal der Universität Göttingen: Wechselstromwiderstände.* https://lp.uni-goettingen.de/get/text/4165.