



GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT  
GÖTTINGEN

PHYSIKALISCHES  
GRUNDPRAKTIKUM

---

VERSUCH 7

# DER ADIABATENEXPONENT

---

*Praktikanten:*

Alexander Osterkorn

Tobias Wegener

*E-Mail:*

a.osterkorn@stud.uni-goettingen.de

tobias.wegener@stud.uni-goettingen.de

*Tutor:*

Marten Düvel

*Gruppe:*

3

*Durchgeführt am:*

13.5.2013

*Protokoll abgegeben:*

27.5.2013

Testiert:

--

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>2</b>
2.1	Adiabatexponent nach Rüchardt . . . . .	2
2.2	Adiabatexponent nach Clement-Desormes . . . . .	3
2.2.1	Herleitung von Gl. 5 . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>5</b>
3.1	Methode nach Rüchardt . . . . .	5
3.2	Methode nach Clement-Desormes . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>8</b>
4.1	Methode nach Rüchardt . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Methode nach Clement-Desormes</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Diskussion</b>	<b>10</b>
6.1	Methode nach Rüchardt . . . . .	10
6.2	Methode nach Clement-Desormes . . . . .	10
	<b>Literatur</b>	<b>11</b>

# 1 Einleitung

In der Natur treten häufig Zustandsänderungen von Gasen auf. Viele dieser Zustandsänderungen sind adiabatisch, das bedeutet, dass keine Wärme übertragen wird. Ein wichtiges Beispiel aus der Meteorologie sind großräumige Luftströmungen.

Wie sich zeigen wird, lassen sich solche Vorgänge gut mit Hilfe einer charakteristischen Eigenschaft des betrachteten Fluids, dem Adiabatenexponent  $\kappa$  beschreiben.

## 2 Theorie

### 2.1 Adiabatenexponent nach Rüchardt

Im Gegensatz zu Flüssigkeiten werden Gase nicht als inkompressibel angenommen, das heißt sie können unter Einwirkung von Kräften zusammengedrückt werden. Eine Anordnung, in der dies realisiert wird, ist in Abb. 2 dargestellt: An einem mit einem Gas gefüllten Kolben ist ein vertikales Rohr. In diesem befindet sich ein kleiner Körper der Masse  $m$ , der den gesamten Querschnitt des Rohres bedeckt. Ist dieser nicht in Bewegung, so gibt es ein Kräftegleichgewicht, was einer Gleichheit von Innendruck  $p$  und Außendruck  $p_0$  entspricht:

$$p = p_0 + \frac{mg}{A} \quad (1)$$

Dabei ist  $mg$  die Gewichtskraft des Körpers und  $A$  die Querschnittsfläche des Rohres. Ist der Körper um eine Entfernung  $\Delta x$  aus dieser Lage ausgelenkt, so ändert sich der Innendruck im Rohr und es gibt eine resultierende Kraft auf den Körper:

$$F = A \cdot dp = m\ddot{x} \quad (2)$$

Da dieser Vorgang adiabatisch erfolgt, gilt nach [Demtröder, 2013, S. 289]  $pV^\kappa = \text{const}$ , wobei  $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$  den Adiabatenexponent bezeichnet, sodass folgt:

$$\frac{d(pV^\kappa)}{dV} = p\kappa V^{\kappa-1} + \frac{dp}{dV} \cdot V^\kappa = 0$$

Umstellen zu  $dp$  und Einsetzen in Gl. 2 liefert die Differentialgleichung

$$m\ddot{x} = -\kappa \cdot \frac{pA^2\Delta x}{V},$$

woraus mit dem allgemeinen Schwingungsansatz folgt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mV}{\kappa A^2 p}} \quad (3)$$

$$\kappa = \frac{4\pi^2 mV}{A^2 p T^2} \quad (4)$$

Dabei ist noch zu berücksichtigen, dass die effektiv schwingende Masse  $m_{eff}$  eigentlich größer ist, als die bloße Masse des Körpers, da auch noch die Luftsäule mitschwingt, sodass  $m_{eff} = m + m_L$ .

## 2.2 Adiabatenexponent nach Clement-Desormes

Eine alternative Methode zur Bestimmung des Adiabatenexponents ist das Verfahren von "Clement-Desormes". Dieses beruht auf der Druckmessung vor und nach einer adiabatischen Expansion.

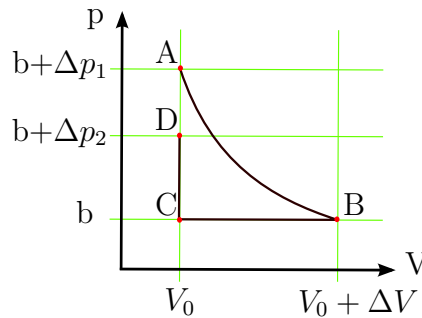


Abbildung 1: Phasendiagramm

Der Druck  $b$  (Umgebungsdruck) eines mit Luft gefüllten Glasbehälters des Volumens  $V_0$  und der Temperatur  $T_0$  (Umgebungstemperatur) wird mit einem kleinen Blasebalg um den Betrag  $\Delta p$  erhöht. Da der Luft dabei Kompressionswärme zugeführt wird, steigt die Temperatur. Nach einem kurzen Wärmeaustausch mit der Umgebung ist diese jedoch wieder gleich der Umgebungstemperatur und auch der Druck sinkt wieder ein wenig (Zustand A). Daraufhin wird ein Ventil für einen kurzen Zeitraum geöffnet, sodass sich der Druck im Gefäß dem Außendruck  $b$  anpasst und das Volumen auf  $V_0 + \Delta V$  steigt. Da dies sehr schnell geschieht, kann der Prozess als adiabatisch angesehen werden. Mit dieser adiabatischen Expansion ist jedoch eine Abnahme der Temperatur um  $\Delta T$  verbunden (Zustand B). Nachdem das Ventil wieder geschlossen wurde, betrachtet man nur noch den Teil des Volumens, der sich im Gefäß befindet, sodass wieder  $V = V_0$  ist (Zustand C). Nun findet ein weiterer Temperatúrausgleich mit der Umgebung statt. Da die Luft im Behälter dabei erwärmt wird, steigt bei konstantem Volumen  $V_0$  der Druck auf  $b + \Delta p_2$  (Zustand D). Der gesamte Prozess ist in Abb. 1 dargestellt.

Zustand	Volumen V	Druck p	Temperatur T
A	$V_0$	$b + \Delta p_1$	$T_0$
B	$V_0 + \Delta V$	$b$	$T_0 - \Delta T$
C	$V_0$	$b$	$T_0 - \Delta T$
D	$V_0$	$b + \Delta p_2$	$T_0$

Tabelle 1: Übersicht über die verschiedenen Zustände

Aus diesen Phasenübergängen und unter Verwendung der *Poisson-Gleichung* und der *idealen Gasgleichung* folgt für den Adiabatenexponent nach [Kohlrausch, 1960, S. 350]  $\kappa$ :

$$\kappa = \frac{\Delta p_1}{\Delta p_1 - \Delta p_2} \quad (5)$$

### 2.2.1 Herleitung von Gl. 5

Da der Übergang von A nach B adiabatisch ist, gilt für diesen Teil die Poisson-Gleichung: [Demtröder, 2013, S.289]

$$\begin{aligned} p_1 V_1^\kappa &= p_2 V_2^\kappa \\ (b + \Delta p_1) V_0^\kappa &= b (V_0 + \Delta V)^\kappa. \end{aligned}$$

Da für  $\Delta V \ll V_0$  die Näherung  $(V_0 + \Delta V)^\kappa \approx V_0^\kappa + \kappa V_0^{\kappa-1} \Delta V$  gilt, folgt nach Division durch  $b$ :

$$\begin{aligned} \frac{b + \Delta p_1}{b} V_0^\kappa &= V_0^\kappa + \kappa V_0^{\kappa-1} \Delta V \\ 1 + \frac{\Delta p_1}{b} &\approx 1 + \kappa \frac{\Delta V}{V_0} \\ \frac{\Delta p_1}{b} &\approx \kappa \frac{\Delta V}{V_0} \\ \frac{\Delta p_1}{\kappa b} &\approx \frac{\Delta V}{V_0}. \end{aligned}$$

Für die Temperaturen der Zustände A und B folgt aus der Poisson-Gleichung und dem idealen Gasgesetz [?, S. 612]:

$$T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}.$$

Einsetzen liefert:

$$(T_0 - \Delta T)(V_0 + \Delta V)^{\kappa-1} = T_0 V_0^{\kappa-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta T}{T_0} = (\kappa - 1) \frac{\Delta V}{V_0}.$$

Mit  $\Delta V/V$  aus der ersten Gleichung folgt:

$$\frac{\Delta T}{T_0} = (\kappa - 1) \frac{\Delta p_1}{\kappa b} \quad (6)$$

Da der Übergang zwischen C und D isochor ist, kann man die jeweiligen Volumina gleichsetzen. Nach erneuter Verwendung der idealen Gasgleichung folgt:

$$\begin{aligned} V_3 &= V_4 \\ \frac{nR(T_0 - \Delta T)}{b} &= \frac{nRT_0}{b + \Delta p_2} \\ \frac{b}{b + \Delta p_2} &= \frac{T_0 - \Delta T}{T_0} = 1 - \frac{\Delta T}{T_0}. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen von Gl. 6 und Umformen nach  $\kappa$  erhält man

$$\kappa = \frac{b\Delta p_1 + \Delta p_1\Delta p_2}{b(\Delta p_1 - \Delta p_2) + \Delta p_1\Delta p_2},$$

was sich für  $\Delta p_1\Delta p_2 \ll b$  vereinfachen lässt zu

$$\kappa \approx \frac{\Delta p_1}{\Delta p_1 - \Delta p_2}.$$

Da nun für die Druckänderung im Manometer  $\Delta p = \varrho g \Delta h$  gilt [?, S. 458], wobei  $\varrho$  die Dichte des Öls,  $g$  die Schwerebeschleunigung und  $\Delta h$  die Höhenänderung am Manometer ist, vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\kappa \approx \frac{\varrho g \Delta h_1}{\varrho g \Delta h_1 - \varrho g \Delta h_2} = \frac{\Delta h_1}{\Delta h_1 - \Delta h_2}.$$

### 3 Durchführung

Der Adiabatenexponent  $\kappa$  wird in diesem Versuch auf zwei verschiedene Arten bestimmt, mit den Methoden nach Rüchardt und Clement-Desormes. Für beide Messmethoden wird zunächst der Umgebungs-Luftdruck mit einem Digitalbarometer gemessen.

#### 3.1 Methode nach Rüchardt

Abb. 2 zeigt das Prinzip der Messung nach der Methode von Rüchardt. Der Aufbau besteht aus einem kugeligen Glasgefäß mit einem langen vertikalen Glasrohr, in dem ein Gummi-Pfropfen so eingelassen ist, dass er sich frei bewegen kann, aber das Entweichen von Gas aus dem Glasrohr verhindert. Durch ein dünnes Nadelventil kann Gas in das Glasgefäß eingelassen werden. Es ist mit einer

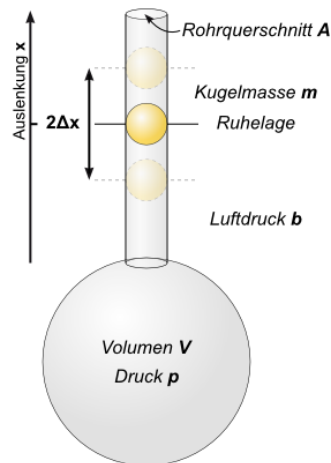


Abbildung 2: Skizze Rüchardt

externen Gasversorgung verbunden, über die Luft, Kohlenstoffdioxid und Argon zugeführt werden können.

Der Gummipropfen soll in eine Schwingung versetzt werden. Am Glasrohr ist eine Lichtschranke befestigt, die ausgelöst wird, wenn der Pfropfen den Lichtstrahl unterbricht. An einer Messelektronik kann eingestellt werden, über wieviele Schwingungsperioden die Zeit gemessen werden soll. Die Versuchsdurchführung folgt nun folgendem Schema:

1. Ein Belüftungsventil und das Nadelventil werden geöffnet. Über das Nadelventil wird ein Gas in das Gefäß eingeführt, so dass es das ganze Gefäß inkl. Glasrohr ausfüllt.
2. Das Nadelventil wird so eingestellt, dass der Gummi-Pfropfen eine harmonische Schwingung beginnt.
3. Es werden nacheinander die Zeiten für 10, 20, 50, 100 (jeweils dreimal) und eine Schwingungsperiode (zehnmal) mit der Messelektronik der Lichtschranke gemessen.
4. Die Schwingungsamplitude wird gemessen.
5. Die Schritte 1-4 werden für die Gase Luft, Kohlenstoffdioxid und Argon durchgeführt.

### 3.2 Methode nach Clement-Desormes

Der Aufbau besteht aus einem bauchigen Glasgefäß, das abgeschlossen gegenüber der Umgebungsluft und mit einem Wassermanometer verbunden ist. Abb. 3 zeigt eine Skizze.

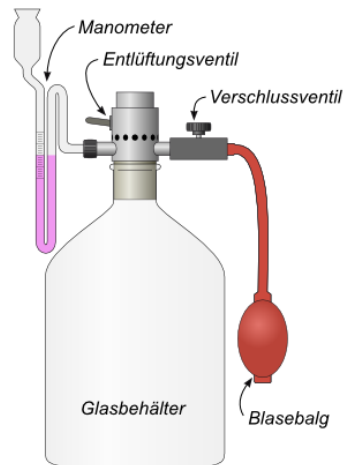


Abbildung 3: Skizze Clement-Desormes

Durch den Blasebalg kann der Druck im Glasgefäß erhöht werden. Nach Temperaturengleich mit der Umgebungsluft stellt sich ein ablesbarer Druckunterschied gegenüber der Umgebungsluft am Manometer ein. Dieser Unterschied wird notiert. Nun wird das in der Skizze angedeutete Belüftungsventil für eine bestimmte Zeit geöffnet, so dass ein Druckausgleich mit der Umgebung stattfinden kann. Wieder wird der Temperaturengleich abgewartet und dann der Gefäßinnendruck am Manometer abgelesen und notiert.



## 4 Auswertung

### 4.1 Methode nach Rüchardt

In diesem Versuchsteil soll der Adiabatenexponent aus dem Rüchardt-Experiment berechnet werden. Dabei waren folgende Daten gegeben und werden deshalb als fehlerfrei betrachtet:

Masse des schwingenden Körpers $M$	4,88 g
Rohrdurchmesser $d$	9,97 mm
Kolbenvolumen $V$	2300,45 cm <sup>3</sup>

Tabelle 2: Herstellerangaben

Außerdem wird der Umgebungsluftdruck  $p_0$  benötigt. Dieser wurde zu  $p_0 = 100870$  Pa abgelesen. Der Ablesefehler ist im Vergleich zu den anderen Fehlern zu vernachlässigen. Desweiteren wird ein Wert für den Luftdruck  $p$  im Kolben benötigt. Dieser kann nach Gl. 1 berechnet werden und ergibt sich damit zu  $p = 101483$  Pa.

Querschnittsfläche Rohr $A$	$7,8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$
Druck im Kolben $p$	$101483 \text{ kg m}^{-2}$
Luftichte $\rho$	$1,2 \text{ kg m}^{-3}$

Tabelle 3: Abgeleitete Größen

Die Dichte  $\rho_0$  der Luft ist für eine Temperatur von  $T_0 = 271,15$  K in [Stöcker, 2005, S. 220] angegeben. Nimmt man an, dass die Luft sich wie ein ideales Gas verhält, so gilt für  $T \neq T_0$ :

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 \cdot \frac{p}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T} \quad [\text{ebd.}] \\ \Rightarrow \quad \rho &= 1,2 \text{ kg/m}^2\end{aligned}$$

Für die gemessenen Zeiten wird jeweils der systematische Fehler der Stoppuhr berücksichtigt:

$$\Delta t_{\text{sys}} = 0,001 + 0,005 \cdot t$$

Außerdem wird der Fehler beim Ablesen der Schwingungsamplitude  $a$  zu  $\Delta a = 1$  cm abgeschätzt.

Nun wird für jede Schwingungsmessung bei jedem der drei Gase der Adiabatenkoeffizient mit Hilfe von Gl. 4 berechnet:

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{64 \cdot (m + m_l) \cdot V}{T^2 \cdot p \cdot d^4} \\ (\Delta\kappa)^2 &= \left(\frac{\partial\kappa}{\partial T} \Delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial a} \Delta a\right)^2 \\ &= \left(\frac{64(m + A \cdot 2a\rho) \cdot V}{T^3 \cdot p \cdot d^4} \cdot \Delta T\right)^2 + \left(\frac{64(m + A \cdot 2\rho) \cdot V}{T^2 \cdot p \cdot d^4} \Delta a\right)^2\end{aligned}$$

Für die unterschiedlichen Gase ergeben sich dann folgende Resultate:

Gas	$\kappa$	$\Delta\kappa$
Luft	1,27	0,02
$CO_2$	1,24	0,02
$Ar$	1,50	0,02

Tabelle 4: Ergebnisse Rüchardt

In der Literatur (z.B. [Demtröder, 2013, S. 289]) findet man für für Luft  $\kappa = \frac{7}{5} = 1,4$ , für  $CO_2$   $\kappa = \frac{9}{7} \approx 1,29$  und für atomares Argon einen Wert von  $\kappa = \frac{5}{3} \approx 1,67$ .

## 5 Methode nach Clement-Desormes

Der Adiabatenexponent  $\kappa$  von Luft lässt sich aus den abgelesenen Manometerhöhen  $\Delta h_1$  vor und  $\Delta h_2$  nach der Öffnung des Belüftungsventils bestimmen. Die Formel dazu folgt direkt aus Formel 5, da der Druck auf die Flüssigkeit im Manometer direkt proportional zur Steighöhe ist, also:

$$\kappa = \frac{\Delta h_1}{\Delta h_1 - \Delta h_2}$$

mit der zugehörigen Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_\kappa^2 = \sigma_{\Delta h_1}^2 \frac{\Delta h_2}{(\Delta h_1 - \Delta h_2)^2} + \sigma_{\Delta h_2}^2 \frac{\Delta h_1}{(\Delta h_1 - \Delta h_2)^2}$$

Es wurden drei Messungen für jede Öffnungszeit  $T$  erhoben,  $\kappa$  berechnet und dann der gewichtete Mittelwert über die drei Messungen gebildet. Tab. 5 zeigt das Ergebnis.

Für größere Öffnungszeiten scheint der berechnete Wert für den Adiabatenexponenten also kleiner zu werden. Dabei kann vermutet werden, dass der gemessene Wert für größere Öffnungszeiten immer ungenauer wird, da die der Berechnung zugrundeliegende Formel unter der Annahme aufgestellt wurde, dass die Öffnung

$T$ [s]	$\kappa$	$\sigma_\kappa$
0.1	1.54	0.05
1	1.36	0.04
5	1.27	0.03

Tabelle 5: Gewichtete Mittelwerte  $\kappa$

des Ventils ein adiabatischer Prozess ist, also ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung. Dies trifft näherungsweise aber nur für sehr kurze Öffnungszeiten zu. Bei langen Öffnungszeiten kann davon ausgegangen werden, dass während der Expansion gegen den Luftdruck ein starker Wärmeaustausch stattfindet, der das Ergebnis verfälscht.

Insgesamt gibt es nun vier Messwerte für den Adiabatenexponenten von Luft, von denen jetzt das gewichtete Mittel gebildet werden kann. Es ergibt sich dann  $\kappa = 1.31 \pm 0.02$ . In der Literatur (z.B. [Demtröder, 2013, S. 289]) findet man für molekularen Stickstoff einen Wert von  $\kappa = \frac{7}{5} = 1.4$ , der hier als Vergleichswert dienen soll.

## 6 Diskussion

### 6.1 Methode nach Rüchardt

Die in 4 aufgeführten Ergebnisse für die Adiabatenexponente liegen in der gleichen Größenordnung wie die Literaturwerte, weichen jedoch um etwa 10% von ihnen ab. Jedoch sind die Fehlerintervalle ziemlich klein, sodass die Abweichungen nicht allein dadurch erklärt werden können. Möglicherweise sind gewisse Annahmen bei der Herleitung der Schwingungsperiode nicht ganz korrekt. In einem realen System würde es keine strikte Abgrenzung zwischen schwingenden und nicht-schwingenden Luftmolekülen geben. Außerdem schwingen Moleküle, die weiter von der schwingenden Masse entfernt sind, weniger stark. Zudem ist vermutlich die Annahme nicht ganz richtig, dass die schwingende Masse reibungsfrei schwingt und gleichzeitig seitlich keine Luft durchlässt. Man kann auch nicht genau sagen, in wie weit das Gas im Kolben tatsächlich rein war, oder ob es noch Rückstände von einem anderen Gas gab, die das Ergebnis natürlich entscheiden verfälschen.

### 6.2 Methode nach Clement-Desormes

Der Literaturwert für den Adiabatenexponenten von Luft liegt weit außerhalb der Fehlergrenzen des berechneten Wertes (siehe Auswertung). Das kann unterschiedliche Gründe haben. Zum einen wurde bereits in der Auswertung darauf eingegangen, dass der Wert für fünf Sekunden durch die verhältnismäßig lange Öffnungszeit mit einem systematischen Fehler behaftet ist. Dieser Wert wurde

trotzdem direkt in die Berechnung des gewichteten Mittels einbezogen. Probleme bei der Versuchsdurchführung treten vor allem durch die recht ungenaue Messung des Gleichgewichtsdrucks auf. Die Wassersäule im Manometer bewegt sich während des Temperatúrausgleichs langsam über einen größeren Zeitraum. Es ist somit schwierig, den exakten Gleichgewichtspunkt zu bestimmen. Schwierig festzustellen ist auch, ob das Gas im Glasbehälter beim Durchspülen wirklich komplett ausgetauscht wurde.

## Literatur

Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 1*. Springer Spektrum, 2013.

F. Kohlrausch. *Praktische Physik, Band 1*. Teubner, 21 edition, 1960.

Horst Stöcker. *Taschenbuch der Physik*. H. Deutsch, 2005.