

ANFÄNGERPRAKTIKUM DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK,
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

Diffusion
Protokoll:

Praktikant: Felix Kurtz
E-Mail: felix.kurtz@stud.uni-goettingen.de
Versuchspartner: Skrollan Detzler
Betreuer: Martin Ochmann
Versuchsdatum: 30.06.2014

Note:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	3
2.1	Brown'sche Bewegung	3
2.2	Ficksche Gesetze	3
2.3	Wheatstone'sche Messbrücke und Fotowiderstand	4
3	Durchführung	5
3.1	Versuchsaufbau	5
3.2	Konzentrationsverlauf in Abhängigkeit der Zeit	6
3.3	Konzentrationsprofil	6
4	Auswertung	6
4.1	erwartete Diffusionskurven	6
4.2	Berechnung des Diffusionskoeffizienten	7
4.3	Konzentrationsprofil	9
5	Diskussion	10
5.1	Messung 1 und 2	10
5.2	Filter	11
5.3	Messung 3 und 4	11
6	Anhang	12
	Literatur	12

1 Einleitung

In diesem Versuch soll das Phänomen der *Diffusion* untersucht werden. Darunter versteht man die Durchmischung von zwei verschiedenen Gasen oder Flüssigkeiten, welche mit der Zeit vonstatten geht. Sie spielt besonders in der Biologie bei osmotischen Prozessen eine große Rolle. Als eine von vielen Transportphänomenen wie Wärmeleitung ist sie jedoch am besten experimentell messbar.

Wir wollen hier die Diffusion von Methylenblau in Wasser untersuchen.

2 Theorie

2.1 Brown'sche Bewegung

Den Effekt der Diffusion kann man qualitativ durch die *Brown'sche Molekularbewegung* erklären. So bewegen sich die Moleküle in einer Flüssigkeit aufgrund ihrer Temperatur und stoßen mit anderen Teilchen zusammen. Dabei vermischen sich zwei verschiedene Flüssigkeiten. Man kann diese Bewegung durch Staubkörner sichtbar machen. Diese sind nämlich um Größenordnungen größer als die Flüssigkeitsmoleküle und können so mit dem Mikroskop gesehen werden. Dies wurde zuerst von dem Botaniker *Robert Brown* im Jahre 1827 entdeckt.

Literatur: [2, S.221]

2.2 Ficksche Gesetze

Man kann die Diffusion allerdings auch quantitativ beschreiben. So erhält man die von A.Fick im Jahre 1855 auf empirischer Basis aufgestellten und nach ihm benannten Gesetze. Diese wurden später von Albert Einstein aus der Thermodynamik abgeleitet.

Literatur: [5] und [3]

1.Ficksches Gesetz

Die Teilchen wollen die Inhomogenität ausgleichen und fließen so zu Orten geringer Konzentration. Mit der Teilchenstromdichte \vec{j} , dem Konzentrationsgradienten $\text{grad } c$ und dem Diffusionskoeffizienten D , der hier orts- und zeitunabhängig sein soll, ergibt sich das 1.Ficksche Gesetz.

$$\vec{j}(\vec{x}) = -D \cdot \nabla c \quad (1)$$

2.Ficksches Gesetz

Da die Teilchenzahl konstant ist, ergibt sich die Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial c}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}$. Kombiniert man dies mit dem 1.Gesetz erhält man das zweite Gesetz.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -D \cdot \Delta c \quad (2)$$

Da wir nur den eindimensionalen Fall betrachteten, ergibt sich daraus diese Differentialgleichung

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (3)$$

In unserem Versuchsaufbau befindet sich die Grenzschicht zwischen den beiden Flüssigkeiten bei $x = 0$.

$$c(x, t = 0) = \begin{cases} c_0, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Man kann das 2.Ficksche Gesetz für diese Anfangsbedingung analytisch lösen. Dabei ergibt sich diese Lösung:

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] \quad (4)$$

mit der Gaußschen Fehlerfunktion, die so definiert ist

$$\operatorname{erf}(y) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-v^2} dv .$$

Für die genaue Herleitung siehe [3, S.11 ff.].

2.3 Wheatstone'sche Messbrücke und Fotowiderstand

Um einen ohmschen Widerstand zu messen, könnte man die abfallende Spannung und den durchfließenden Strom messen und beides durcheinander teilen. Dieses Verfahren ist jedoch aufgrund der endlichen Innenwiderstände der Messgeräte sehr ungenau. Daher benutzt man die *Wheatstone'sche Brückenschaltung* (siehe Abb. 1, Literatur [1, S.345 f.]). Misst man keine Spannungsdifferenz, gleichbedeutend mit keinem Stromfluss, dann gilt nach den Kirchhoff'schen Regeln

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} .$$

Im folgenden ist das Messgerät ein Amperemeter und nicht wie in den Abbildungen zu sehen, ein Voltmeter.

Bei dem Aufbau, der in diesem Versuch vorliegt, kann man 3 verschiedene Widerstände für R_1 wählen, während R_2 ein Fotowiderstand ist. R_3 und R_4 bilden ein Potentiometer, welches in der Mitte frei abgegriffen werden kann.

Je mehr Licht auf den *Fotowiderstand* fällt, desto kleiner ist sein ohmscher Widerstand. Dies beruht auf dem inneren fotoelektrischen Effekt.

Mit dieser Schaltung kann man also sicherstellen, dass der Fotowiderstand immer dann einen bestimmten Lichteinfall misst, wenn kein Strom am Amperemeter gemessen wird.

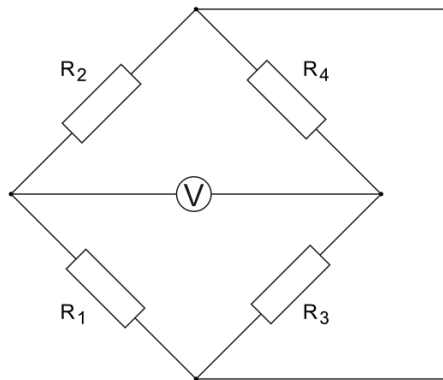


Abbildung 1: Wheatstone'sche Brückenschaltung [4]

3 Durchführung

3.1 Versuchsaufbau

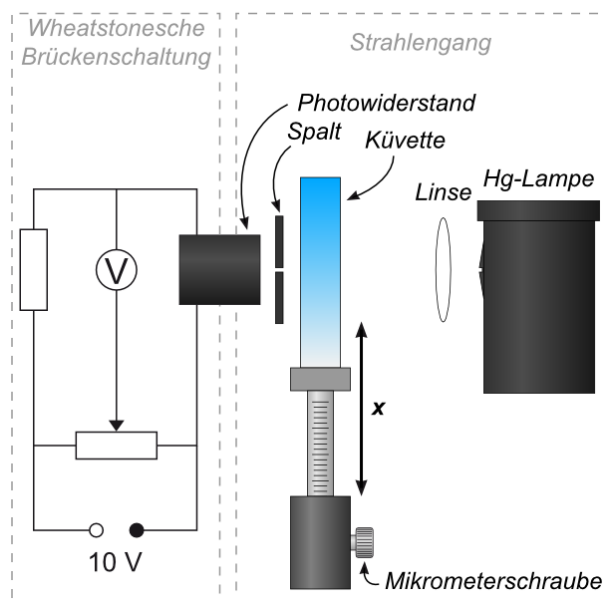


Abbildung 2: schematischer Versuchsaufbau [4]

Zuerst wird der Spalt so justiert, dass auf den Photowiderstand die maximale Intensität trifft. Außerdem benötigt man noch zwei Stoppuhren für die späteren Messungen und die Wheatstone'sche Brücke muss verkabelt werden.

3.2 Konzentrationsverlauf in Abhängigkeit der Zeit

Messung 1: Für den Graufilter $c_0/16$ regelt man das Potentiometer so, dass das Amperemeter keinen Strom anzeigt. Dann wird die Küvette zu $3/4$ mit Wasser gefüllt, darüber Methylenblau. Man startet die Stoppuhr, nachdem man die Küvette in den Strahlengang gestellt hat. Für eine halbe Stunde notiert man alle 30 Sekunden den Ort der Konzentration $c_0/16$. Dabei wird jedoch die Messbrücke nicht verändert, sondern die Küvette mittels Micrometerschraube nach oben bewegt, bis das Amperemeter wieder keinen Strom zeigt.

Nach der Messung wird diese Küvette vorsichtig zur Seite gestellt, damit sich die Flüssigkeiten nicht zusätzlich vermischen. Die benutzte Stoppuhr lässt man für eine spätere Messung weiterlaufen.

Messung 2: Dann füllt man eine zweite Küvette wie die erste, gleicht aber die Messbrücke mit dem Graufilter $c_0/32$ ab. Die vorige Messung wird mit der zweiten Küvette, der zweiten Stoppuhr und dem anderen Filter wiederholt.

3.3 Konzentrationsprofil

Messung 3: Etwa 40 Minuten nach Beginn der letzten Messung wird die Konzentrationsverteilung der zweiten Küvette in Abhängigkeit des Ortes gemessen. Dies sollte schnell geschehen, damit die Zeit als konstant angenommen werden kann. Trotzdem notiert man Beginn und Ende dieser Messung, die Stoppuhr muss also weiter laufen. Der Messvorgang sieht folgendermaßen aus: Nacheinander wird die Messbrücke auf die verschiedenen Graufilter $c_0/2, c_0/4, c_0/8, c_0/16, c_0/32$ abgeglichen, bevor man dazu die Stelle sucht, an der genau diese Konzentration herrscht. Diesen Vorgang wiederholt man nochmal in umgekehrter Reihenfolge der Graufilter.

Messung 4: Diesen ganzen Messvorgang wird für die erste Küvette nach ca. 100 Minuten seit Beginn der zugehörigen ersten Messung wiederholt.

4 Auswertung

4.1 erwartete Diffusionskurven

Aus der Lösung der Diffusionsgleichung (4) ergibt sich Abbildung 3. Man erkennt, dass es zu $t = 0$ eine klare Grenze zwischen den beiden Flüssigkeiten gibt. Im Verlauf der Zeit (hier nach 30 und 90 Minuten bzw. 6 Stunden und 2 Tagen) vermischen sie sich und die Konzentration nähert sich überall $c_0/2$ an. Bei $x = 0$ befindet sich jedoch immer die Konzentration $c_0/2$.

Bei den ersten beiden Messungen wird der c/c_0 Wert konstant gehalten und der Ort dieser Konzentration im Verlaufe der Zeit verfolgt. Also in Abb. 3 die Schnittpunkte einer parallelen Gerade zur x-Achse mit den Kurven zu unterschiedlichen Zeitpunkten.

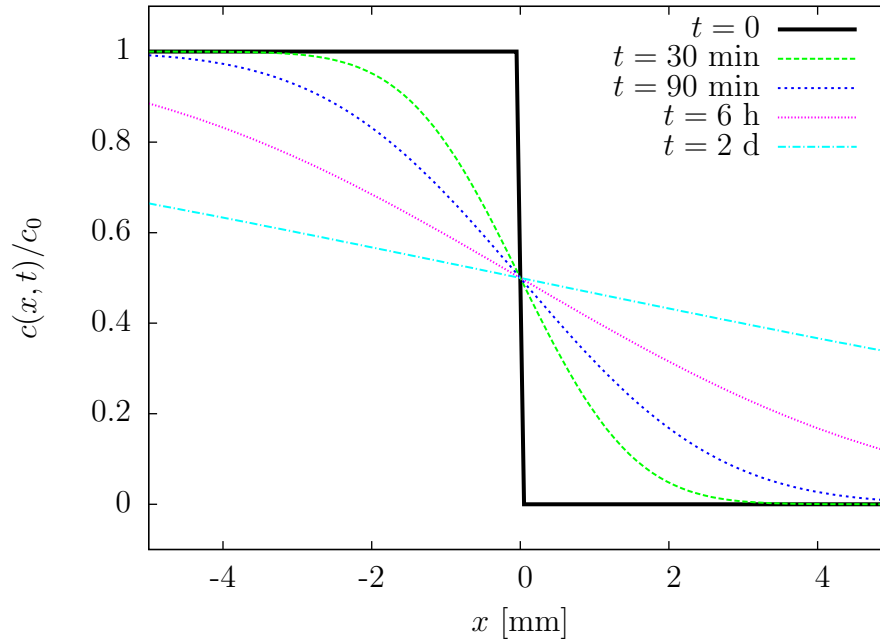


Abbildung 3: Profil für den Diffusionskoeffizienten $D = 4 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 / \text{s}$ zu verschiedenen Zeiten

In den letzten beiden Messungen verfolgt man Werte auf einer Kurve mit konstanter Zeit.

4.2 Berechnung des Diffusionskoeffizienten

Aus der Lösung der Diffusionsgleichung (Formel 4) folgt für einen festen Konzentrationswert $c := C \cdot c_0$

$$1 - 2C = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{erf}^{-1}(1 - 2C) = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}$$

Mit $y := \operatorname{erf}^{-1}(1 - 2C)$ folgt $x^2 = 4yD \cdot t$. Trägt man also die Diffusionsstrecke x quadratisch gegen die Zeit auf, sollte sich eine Ursprungsgerade ergeben. Deren Steigung sei m . Damit kann der Diffusionskoeffizient berechnet werden.

$$D = \frac{m}{4 y^2} \quad (5)$$

$$\sigma_D = \frac{\sigma_m}{4 y^2} \quad (6)$$

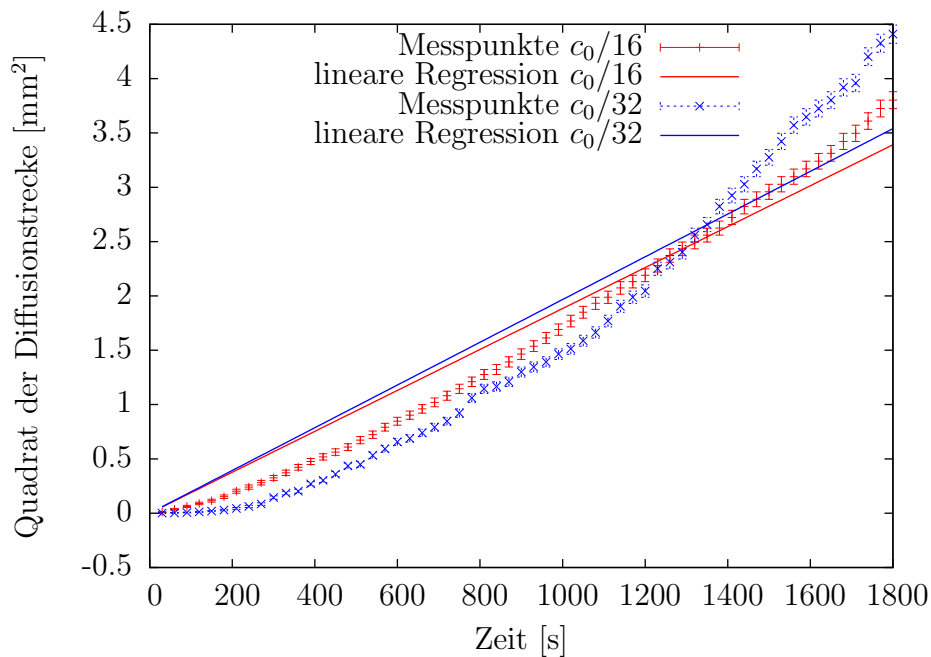


Abbildung 4: Messung 1 und 2: Quadrat der Diffusionsstrecke im Verlaufe der Zeit

Da die Fehlerfunktion keine analytische Umkehrfunktion besitzt, muss ein Computerprogramm genutzt werden, um y zu berechnen. Ich habe mich für den Internet-Dienst *WolframAlpha*¹ entschieden.

Für Messung 1 und 2 ergeben sich die Werte aus Tabelle 1.

	Messung 1 $c_0/16$	Messung 2 $c_0/32$
C	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
y	1.085	1.317
Steigung m	$(18.8 \pm 0.3) \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 / \text{s}$	$(19.7 \pm 0.6) \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 / \text{s}$
Diffusionskoeffizient D	$(4.00 \pm 0.06) \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 / \text{s}$	$(2.83 \pm 0.09) \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 / \text{s}$

Tabelle 1: Auswertung Messung 1 und 2

Daraus kann der gewichtete Mittelwert des Diffusionskoeffizienten berechnet werden

$$\overline{D} = (3.63 \pm 0.04) \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 / \text{s} \quad (7)$$

¹www.wolframalpha.com

4.3 Konzentrationsprofil

Hier wurde der Mittelwert des Ortes mit der Konzentration $c_0/2$ als Nullpunkt gewählt, da sich dieser nicht mit der Zeit verändern sollte. Außerdem wurde für die erwarteten Diffusionskurven der oben berechnete Diffusionskoeffizient \bar{D} verwendet. Des Weiteren geben die Messwerte mit Fehlerbalken in 5 und 6 den Mittelwert der beiden Messwerte und die Abweichung von diesem an.

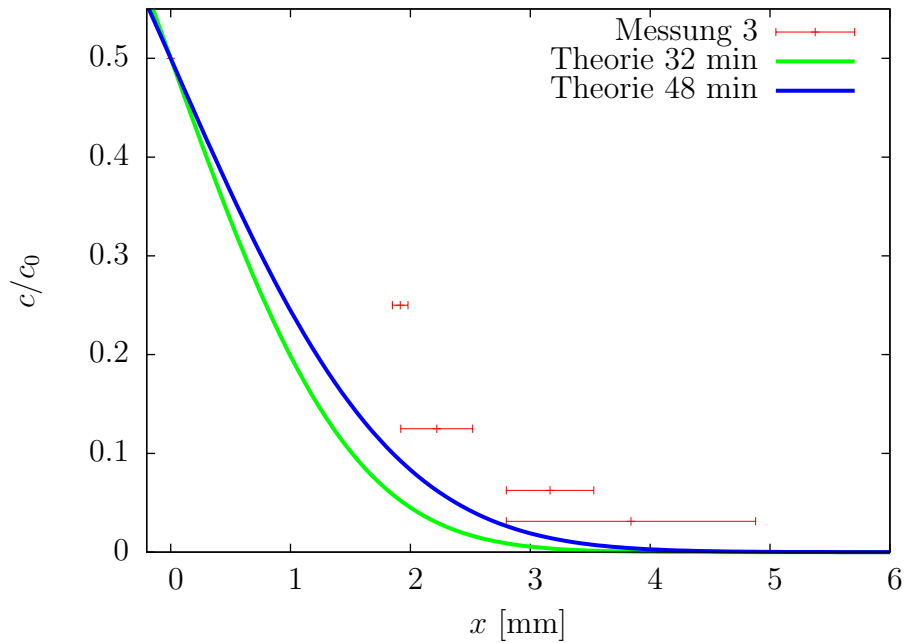


Abbildung 5: Messung 3: Messwerte mit erwartetem Verlauf für Start- und Endzeit der Messung

Um den Fehler zu berechnen, der sich aus der Annahme ergibt, zu konstanter Zeit gemessen zu haben, verwende ich die Formeln und Variablen aus dem vorigen Abschnitt:

$$x = 2y\sqrt{Dt}$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \sqrt{\left(\frac{y}{\sqrt{Dt}}\right)^2 \cdot \sigma_t^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{Dt}}\right)^2 \cdot \sigma_D^2}$$

Für Messung 3 benötigten wir 16 min, für Messung 4 nur 9 min. Nehmen wir diese Werte als $2\sigma_t$, ergibt sich für die Konzentration $c_0/32$ eine Abweichung σ_x

$$\sigma_x(t = 40 \text{ min}) = 0.25 \text{ mm} \quad (8)$$

$$\sigma_x(t = 90.5 \text{ min}) = 0.10 \text{ mm} \quad (9)$$

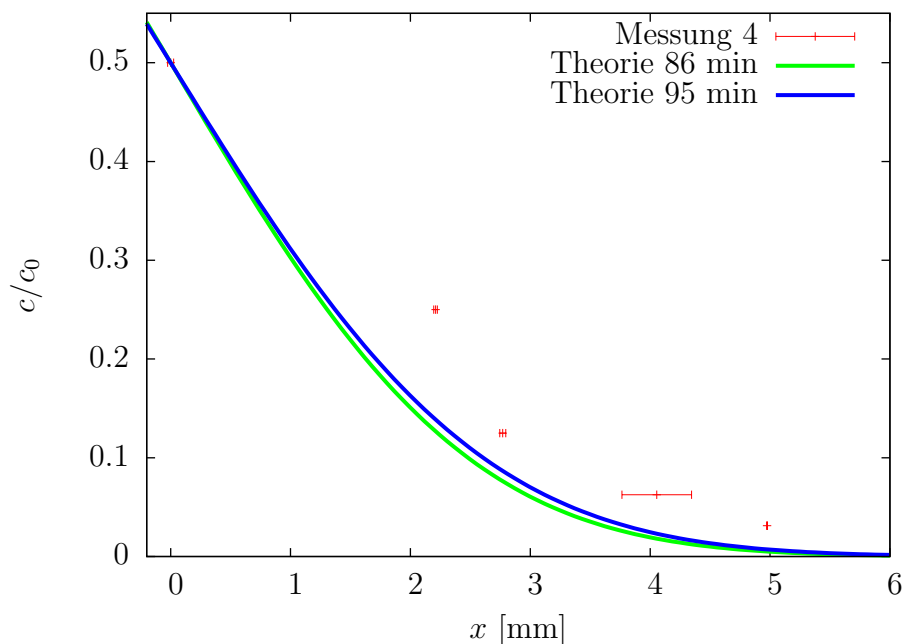


Abbildung 6: Messung 4: Messwerte mit erwartetem Verlauf für Start- und Endzeit der Messung

Da der y-Wert für $c_0/32$ am größten ist, bleibt der Fehler aus der konstanten Zeit für die anderen Konzentrationen stets geringer.

5 Diskussion

5.1 Messung 1 und 2

Betrachtet man Abb. 4, fällt auf, dass sich bei der ersten Messung $c_0/16$ wie erwartet eine Gerade ergibt. Bei der zweiten Messung ergibt sich jedoch eher etwas quadratisches. Deshalb sind beide Ursprungsgeraden ungefähr gleich und dies erklärt die große Abweichung des Wertes für D von 30% zum Wert der ersten Messung. Außerdem überschneiden sich die Fehler nicht. Jedoch ist der gewichtete Mittelwert nahe an dem Wert von $4 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ aus dem Praktikumshandbuch.

Man erkennt, dass die Messwerte von Messung 2 erst nach ca. 20 Minuten größer sind als die der ersten Messung. Dies ergibt physikalisch wenig Sinn, da daraus folgen würde, dass die Konzentration $c_0/32$ näher an der Nulllage ($c = c_0/2$) zu finden wäre als $c_0/16$. Daher muss nach einem Fehler in der Messung gesucht werden. Zum einen kann es daran liegen, dass wir bei der zweiten Messung zu lange zwischen Befüllen und Messen gewartet haben und sich die Flüssigkeiten schon vor der Messung vermischt haben. Dies

geschieht auch, wenn die Küvette geschüttelt wurde. Der erste Messwert ($t = 0$) wurde jedoch als Ort mit konstanter Konzentration $c_0/2$ angenommen. Dies ist er jedoch nicht, wenn die oben beschriebenen Fehler unsererseits berücksichtigt werden. Beachtet man dies, könnten die Daten der zweiten Messung so wie in Abb.7 aussehen. Dabei wurde der Startwert der Messreihe um einen Millimeter verschoben und so dem bereits geschehenen Prozess der Diffusion Rechnung getragen. Man erkennt, dass sich nun eine Gerade ergibt. Diese ist jedoch keine Ursprungsgerade, da man davon ausgeht, dass einige Zeit zwischen Befüllen und Start der Messung vergangen ist.

Diese These wird auch davon unterstützt, dass der erste Messwert der zweiten Messung ($x_0 = 7.55$ mm) stark vom Ort der Konzentration $c_0/2$ aus Messung 3 (gleiche Küvette) abweicht. Hier ist $x_0 = 5.45$ mm. Dieser Unterschied kann aber auch auf einen Ablesefehler hindeuten, also dass die Striche der Micrometerschraube falsch abgelesen wurden.

5.2 Filter

Außerdem haben wir vergessen, die unterschiedlichen Filter zu reinigen. So hat sich der Wert geändert, wenn man die Höhe verändert hat, in der sich der Filter befand. Wir können also nicht garantieren, dass für die Filter die richtigen Werte gemessen wurden. Da uns dies aber zur Messzeit auffiel, haben wir zusätzlich noch die Potentiometer-Einstellung sowie den Wert des dritten Widerstandes notiert. Aus den Daten kann man ablesen, dass besonders die beiden Werte für $c_0/32$ aus Messung 3 (vgl. Abb. 5) stark abweichen, weil die Potentiometer-Einstellungen stark voneinander abweichen. Der größere ist nämlich 2.3 mal so groß wie der kleinere.

5.3 Messung 3 und 4

Man sieht deutlich, dass die Messwerte in Abbildung 5 und 6 neben den erwarteten Kurven liegen und nicht dazwischen - wie vorhergesagt. Vergleicht man dies mit den berechneten Fehlern, die sich aus der Annahme einer konstanten Messzeit ergeben, stellt man fest, dass dieser um eine Größenordnung geringer ist als die Abweichung in den Plots und so nicht dafür verantwortlich sein kann. Dieser Fehler kann zum einen auch wieder an den ungereinigten Filtern liegen. Außerdem liegen alle Werte rechts der erwarteten Kurven. Daran erkennt man, dass die Diffusion schon weiter vorangeschritten ist als vorhergesagt. Dies kann verschiedene Gründe haben. Zum einen kommt es durch das Befüllen der Küvette schon zu einer stärkeren Vermischung der beiden Flüssigkeiten. Zum anderen wurde die Küvette später bewegt und so könnte durch Stöße, die auch durch Wackeln am Tisch hervorgerufen werden, die Vermischung beschleunigt werden. Des Weiteren steigt die Temperatur durch die Lampe, die während der Messzeit die Küvette beleuchtet, und so auch der Diffusionskoeffizient.

Dies sind alles Fehlerquellen, die jedoch zwangsläufig auftreten und nur schwer oder mit hohem Aufwand vermieden werden können.

6 Anhang

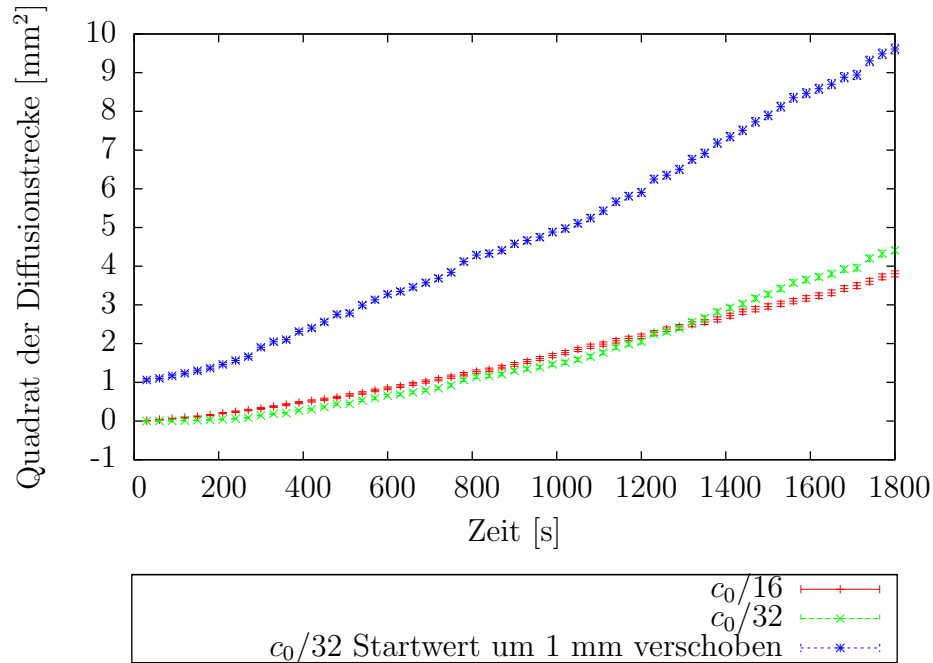


Abbildung 7: Messung 2 angepasst

Literatur

- [1] DIETER MESCHDE (2010): *Gerthsen Physik*, 24. Auflage, Springer Heidelberg Dordrecht London New York
- [2] WOLFGANG DEMTRÖDER (2008): *Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme*, 5. Auflage, Springer Berlin, Heidelberg
- [3] J. CRANK (1975): *Mathematics of Diffusion*, 1. Auflage, Clarendon Press Oxford
- [4] *Lehrportal der Universität Göttingen, Diffusion*, <http://lp.uni-goettingen.de/get/text/3665>, abgerufen 09.07.14 11:21 Uhr
- [5] *Wikipedia-Artikel zu Adolf Fick*, http://de.wikipedia.org/wiki/Adolf_Fick, abgerufen 13.07.14 15:27 Uhr