

CWR 2 SoSe 2014, FAKULTÄT FÜR PHYSIK,  
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

---

# Projekt 65

## Doppelpendel

---

Bearbeiter:	Felix Kurtz
E-Mail:	felix.kurtz@stud.uni-goettingen.de
Betreuer:	Burkhard Blobel
Abgabe:	18.08.2014

Note:
-------

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>System umschreiben</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Kartesische Koordinaten und Energie</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Programmaufbau</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Vergleich der Integrationsverfahren</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Entwicklung der Gesamtenergie</b>	<b>5</b>
<b>7</b>	<b>Anhang</b>	<b>5</b>

# 1 Einleitung

In dieser Hausarbeit stehen die Bewegungen eines Doppelpendels im Vordergrund.

BILD

Man kann es mit folgendem System gekoppelter Differentialgleichungen beschreiben.

$$Ml_1\ddot{\varphi}_1 + m_2l_2\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2l_2\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + Mg \sin \varphi_1 = 0 \quad (1)$$

$$m_2l_2\ddot{\varphi}_2 + m_2l_1\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2l_1\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2g \sin \varphi_2 = 0 \quad (2)$$

Dabei ist  $M = m_1 + m_2$ . Zuerst soll dieses System 2.Ordnung auf eines erster Ordnung zurückgeführt werden, um diese anschließend mittels Runge-Kutta-Verfahren 2. und 4.Ordnung numerisch zu integrieren.

Man fixiert  $l_1 = 1\text{m}$  und  $m_1 = 1\text{kg}$  und variiert die Verhältnisse  $l_2/l_1$  und  $m_2/m_1$ . Für die Anfangsbedingungen  $\varphi_1(0) = \frac{\pi}{4}$ ,  $\dot{\varphi}_1 = 1\frac{\text{rad}}{\text{s}}$  und  $\varphi_2(0) = \frac{\pi}{3}$ ,  $\dot{\varphi}_2 = 1.5\frac{\text{rad}}{\text{s}}$  wird dann das Verhalten des Pendels untersucht. Es soll die Bahn der beiden Massen geplottet werden sowie ihre Geschwindigkeiten in Abhängigkeit des Ortes. Neben dem qualitativen Verhalten des Pendels sollen auch die beiden genutzten Integrationsverfahren hinsichtlich Geschwindigkeit und Genauigkeit getestet werden.

## 2 System umschreiben

Stellt man (2) nach  $\ddot{\varphi}_2$  um und setzt man dies in (1) ein, kann diese Gleichung nach  $\ddot{\varphi}_1$  aufgelöst werden. Analog stellt man (2) nach  $\ddot{\varphi}_1$  um und setzt dies in (1) ein, um  $\ddot{\varphi}_2$  zu erhalten.

$$\ddot{\varphi}_1 = - (m_2l_1\dot{\varphi}_1^2 sc - m_2g \sin \varphi_2 c + m_2l_2\dot{\varphi}_2^2 s + Mg \sin \varphi_1) / (l_1M - l_1m_2c^2) \quad (3)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = (Ml_1\dot{\varphi}_1^2 s - Mg \sin \varphi_2 + m_2l_2\dot{\varphi}_2^2 sc + Mg \sin \varphi_1 c) / (l_2M - l_2m_2c^2) \quad (4)$$

Hier ist  $s = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$  und  $c = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ .

Nun hängen die zweiten Ableitungen nicht mehr von der jeweils anderen zweiten Ableitung ab. Substituiert man nun noch  $\dot{\varphi}_1$  bsp. durch  $\theta_1$  und analog  $\dot{\varphi}_2$  durch  $\theta_2$ , sind diese 4 Gleichungen ein System erster Ordnung. Dies kann nun numerisch gelöst werden.

## 3 Kartesische Koordinaten und Energie

$$x_1 = l_1 \sin \varphi_1$$

$$y_1 = -l_1 \cos \varphi_1$$

$$x_2 = x_1 + l_2 \sin \varphi_2$$

$$y_2 = y_1 - l_2 \cos \varphi_2$$

Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= l_1 \cos \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1 \\ \dot{y}_1 &= l_1 \sin \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1 \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 + l_2 \cos \varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2 \\ \dot{y}_2 &= \dot{y}_1 + l_2 \sin \varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2\end{aligned}$$

Energie

$$E = E_{pot} + E_{kin} = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

## 4 Programmaufbau

Ich habe mich für den objektorientierten Ansatz entschieden. So beschreibt die Klasse *Doppelpendel* eben dieses. Sie hat folgende Attribute:

- Massen und Längen
- $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  sowie ihre ersten Ableitungen
- zugehörige kartesische Koordinaten - auch Geschwindigkeiten
- Energie - anfangs und aktuell
- Saltozähler
- Zeit???

Der *Konstruktor* setzt  $m_1 = 1\text{kg}$  und  $l_1 = 1\text{m}$ , da wir uns hier nur auf diesen Fall beschränken. Da alle Attribute jedoch *public* sind, könnte man diese beiden auch ändern.

Berechnung der Trajektorie

Außerdem hat sie noch weitere Methoden:

- $\ddot{\varphi}_1(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2)$  und  $\ddot{\varphi}_2(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2)$
- Runge-Kutta 2. und 4.Ordnung
- Berechnung der kartesischen Koordinaten und deren Ableitungen
- Berechnung der Gesamtenergie

## 5 Vergleich der Integrationsverfahren

Zwar ist Runge-Kutta 2.Ordnung mit gleicher Integrationsschrittweite schneller als der 4.Ordnung, aber auch ungenauer. Dies ist bei einem chaotischen System wie diesem unerwünscht.

## 6 Entwicklung der Gesamtenergie

Um die Genauigkeit des Integrationsverfahrens zu überprüfen, kann man sich die Gesamtenergie anschauen. Diese sollte bekanntlich konstant sein. In Abbildung ... ist die Energie gegen die Zeit aufgetragen. Man erkennt, dass es Energiespitzen gibt. Die Gesamtenergie fällt jedoch in Fall A ungefähr auf das anfängliche Niveau zurück. In Fall B klettert die Energie unaufhörlich, die Simulation ist also nur zu einem gewissen Grad brauchbar.

## 7 Anhang