Navigation

Felix Kurtz

31. Dezember 2015

1 GPS Versuch

Das Satelliten-Navigationssystem GPS beruht darauf, dass man von drei bzw. wegen relativistischen Effekten vier bekannten Positionen durch Abstandsmessungen zu einer unbekannten Position diese bestimmen kann. Dabei wird der Abstand über die Laufzeit der Photonen bestimmt, denn diese bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit, der Lichtgeschwindigkeit. In diesem Versuch soll dies
Aus der Differenz von Start- und Zielzeit wird die Wegstrecke der menschlichen Photonen bestimmt.

Position	Startzeit	Zielzeit	Dauer Δt	v^{-1}	Strecke Δs
Schranke	15:26:00 Uhr	15:26:39 Uhr	39 s	$8.86\frac{\mathrm{s}}{10\mathrm{m}}$	44 m
Brücke	15:25:57 Uhr	15:26:52 Uhr	55 s	$9.78\frac{\mathrm{s}}{15\mathrm{m}}$	84 m
Haus 21	15:27:20 Uhr	15:28:15 Uhr	55 s	$10.5\frac{\mathrm{s}}{15\mathrm{m}}$	79 m

Tabelle 1: GPS-Versuch: Messdaten

2 Foucaultsches Pendel

Zuerst bestimmt man mit einem Pendel die Erdbeschleunigung g: Für den Tangentialanteil der Gewichtskraft gilt nach Newton: $F_{G,\text{tan.}} = mg\ddot{\varphi}$. Für kleine Winkel ist er etwa linear zur Auslenkung: $F_{G,\text{tan.}} \approx mg\varphi$. Die sich daraus ergebende Differentialgleichung lässt sich z.B durch $\varphi(t) = A\cos(\omega t)$, mit der Amplitude A und der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ lösen. Daraus lässt sich die Periodendauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1}$$

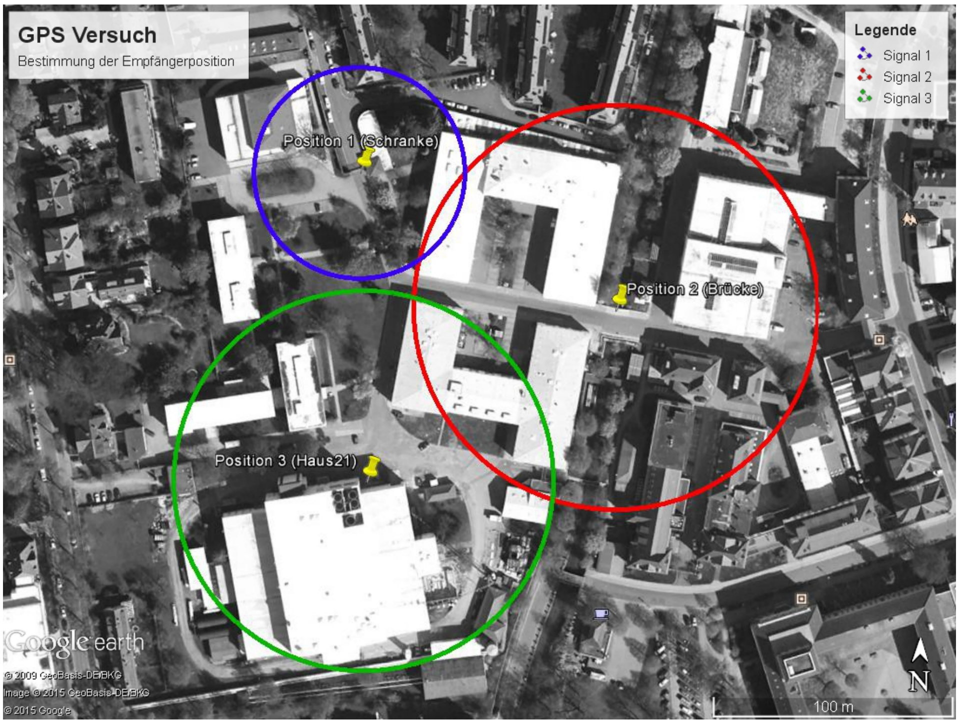

Abbildung 1: Karte des DLR-Geländes mit den drei Satellitenpositionen und zugehörigen

bestimmen bzw. aus ihr die hier gesuchte Erdbeschleunigung (inklusive Fehlerformel aus der Gaußschen Fehlerfortpflanzung)

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}\,, \tag{2}$$

$$\sigma_g = \frac{4\pi^2}{T^2}\sqrt{\sigma_l^2 + \left(\frac{2l}{T}\right)^2 \cdot \sigma_T^2} \tag{3}$$

ausrechnen. Da diese nicht von der Pendelmasse abhängt, wird nur die Seillänge variiert. In Tabelle 2 sind unsere Messwerte für die Periodendauer zu finden und in Abbildung 2 sind diese dann mit (3) in Werte für die Erdbeschleunigung umgerechnet. Dabei werden Längenmessfehler von $\Delta s = 1\,\mathrm{cm}$ und Zeitungenauigkeiten von $0.01\,\mathrm{s}$ angenommen, da zur Bestimmung der Periodendauer über 10 Perioden gemittelt wurde. Es ergibt sich ein gemittelter Wert von $(9.83 \pm 0.08)\,\mathrm{m/s^2}$. Somit liegt der Literaturwert von $9.81\,\mathrm{m/s^2}$ in diesem Intervall.
Im zweiten Teil soll mit einem **Foucaultschen Pendel** die Erdrotation nachgewiesen werden. Bei diesem Pendel handelt es sich um sehr langes und schweres Pendel, das lange pendeln kann. Aufgrund der Corioliskraft dreht sich die Pendelrichtung, eigentlich dreht sich jedoch der Boden unter dem Pendel. Dies kann man sich an den Polen gut

Seil-länge [m]	Perioden-dauer [s]
0.6	1.55
0.8	1.79
1.0	2.025
1.2	2.165

Tabelle 2: Messung der Erdbeschleunigung: Periodendauer des Pendels bei verschiedenen Seillängen.

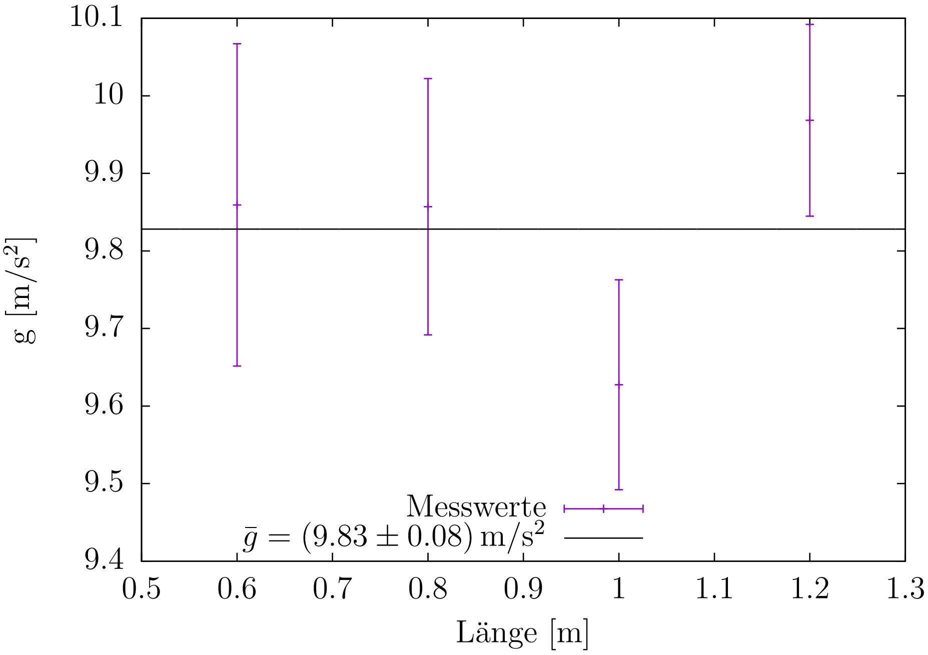

Abbildung 2: Bestimmung der Erdbeschleunigung bei verschiedenen Seillängen und Mittelwert der Messungen.

vorstellen. Dort ist diese Rotationsperiode $T = 24\,\mathrm{h}$. Je näher man dem Äquator kommt, desto länger wird sie; da dort jedoch keine Corioliskraft wirkt, würde dort der Versuch nicht funktionieren. In der Vorlesung wurde hergeleitet, dass für die Rotationsperiode

$$T = \frac{24\,\mathrm{h}}{\sin\phi} \tag{4}$$

gilt, wobei ϕ der Breitengrad ist. Man lenkt das Pendel also aus und wartet eine gewisse Zeit, nach der man schaut, wie weit sich die Pendelebene gedreht hat. Dies wird bei unserem Pendel durch Aufleuchten von LEDs in 1°-Schritten realisiert. Die Messung ergab eine Drehung von 9° in etwa 24 min. Dies entspricht einer Rotationsperiode von $T = 16\,\mathrm{h}$, widerspricht somit (4). Es muss sich also um einen Fehler im Aufbau handeln, welcher zu einer verstärkten Rotation oder einer Pendel-Vorzugsrichtung führt. Dies geschieht etwa, wenn das Pendel etwas elliptisch schwingt. Um dies zu verhindern, ist ganz oben der sog. Charron-Ring angebracht, an den sich das Stahlsein anschmiegen soll. Bei der ersten Messung war der Ausschlag jedoch so gering, dass dieser nicht berührt wurde. Deshalb ist der ganze Versuch mit dem maximal möglichen Ausschlag (ohne irgendwo anzuecken) wiederholt worden: Diese Messung ergab eine Drehung von 26° in etwa 100 min, also $T = \frac{360}{26} \cdot 100\,\mathrm{min} \approx 23\,\mathrm{h}$. Dieser Wert ist also etwas besser, jedoch sollte der Wert für Göttingen bei $T(\phi \approx 51.5°) \approx 30\,\mathrm{h}\ 40\,\mathrm{min}$ liegen. Es muss also noch weitere Messfehler geben.

3 Erdumfang

Eratosthenes konnte schon 200 v.Chr. den Erdumfang bestimmen: Er stellte fest, dass die Sonne wenige Minuten am längsten Tag im Jahr in Syene, dem heutigen Assuan, keinen Schatten wirft, sie also genau über einem steht. Im nördlich gelegenen Alexandria jedoch beträgt der Schattenwurf $7°12'$. Die Luftlinie zwischen den beiden Orten beträgt etwa 840 km, jedoch sind sie nicht auf dem gleichen Längengrad. Man muss etwa 20° von Assuan nach Westen gehen, um nach Alexandria zu gelangen. So ist der Nord-Süd-Abstand der beiden Städte nur $\cos(20°) \cdot 840\,\mathrm{km} = 790\,\mathrm{km}$. Aus dem Schattenwurf kann man ableiten, dass dies der 50ste Teil des Erdumfangs sein muss. Also beträgt der Erdumfang etwa 39500 km. Bei einer Messung am Globus im DLR-SchoolLab beträgt der Winkel zwischen den beiden Städten etwa 8°. So erhält man einen Erdumfang von etwa $\frac{360}{8} \cdot 840\,\mathrm{km} = 37800\,\mathrm{km}$. Da man aber den Winkel nicht sehr genau messen konnte, ist dieser Wert mit einer großen Ungenauigkeit behaftet.
Um nun die Strecke zwischen zwei Städten zu messen, schritten früher amtliche Schrittzähler diese mit einer Kette zwischen den Beinen ab. Damit wurde die Schrittlänge konstant gehalten. Wenn man nun um ein Hindernis laufen musste, lief man senkrecht zur eigentlichen Richtung, zählte diese Schritte nicht, lief ein Stück parallel zur eigentlichen Richtung (Schritte werden gezählt), um dann wieder nicht zählend senkrecht zurück zulaufen. Um sicherzustellen, dass man rechtwinklig zur bisherigen Route läuft, nutzt man z.B. ein an den Enden verknotetes Seil mit 12 Knoten, die in äquidistanten Abständen vorkommen. Nun wird das Seil zu einem Dreieck mit den Kantenlängen $3, 4$ sowie 5 gelegt, denn nach dem Satz von Pythagoras ist ein solches Dreieck rechtwinklig ($3^2 + 4^2 = 5^2$). So kann man auch die Entfernung der obigen Städte in Nord-Süd-Richtung messen.