

进位计数制

战德臣

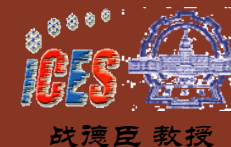
哈尔滨工业大学 教授·博士生导师
教育部大学计算机课程教学指导委员会委员



Research Center on **I**ntelligent
Computing for **E**nterprises & **S**ervices,
Harbin **I**nstitute of **T**echnology

进位计数制

(1)从十进制谈起？



进位计数制与十进制

◆进位制：用数码和带有权值的数位来表示有大小关系的数值性信息的表示方法。

◆十进制

$$\begin{array}{cccccc} (2 & 4 & 5 & . & 2 & 5)_{+} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 0 & & -1 & -2 \\ 10^2 & 10^1 & 10^0 & & 10^{-1} & 10^{-2} \end{array}$$

$$(245.25)_{+} = 2 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$$

- 有0,1,2,3,4,5,6,7,8,9共十个数码
- 数码的位置规定了数码的等级“权/数位”： 10^i
- 逢十进一、借一当十、高数位的1相当于低数位的10
- “十”----基值，十进制

进位计数制

(2)二进制?



二进制

- 有0,1共两个数码
- 数码的位置规定了数码的等级“权/数位”： 2^i
- 逢二进一、借一当二、高数位的1相当于低数位的2
- “二”----基值，二进制

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	.	2^{-1}	2^{-2}	数位的权值
7	6	5	4	3	2	1	0	.	-1	-2	数位

例如： $(1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1.0\ 1)_2$ 二进制数

$$\begin{aligned} &= 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 \\ &+ 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = (245.25)_+ \end{aligned}$$

进位计数制

(3)任意进制?

r 进制



$r^{n-1} \ r^{n-2} \ \dots \ r^2 \ r^1 \ r^0 \ . \ r^{-1} \ r^{-2} \ \dots \ r^{-m}$ ————— 数位的权值

$n-1 \ n-2 \ \dots \ 2 \ 1 \ 0 \ . \ -1 \ -2 \ \dots \ -m$ ————— 数位

$(d_{n-1}d_{n-2}\dots d_2d_1d_0 \cdot d_{-1}d_{-2}\dots d_{-m})_r$ ————— r进制数

$$= d_{n-1}r^{n-1} + d_{n-2}r^{n-2} + \dots + d_2r^2 + d_1r^1 + d_0r^0 + d_{-1}r^{-1} + d_{-2}r^{-2} + \dots + d_{-m}r^{-m}$$

$$= \sum_{i=-m}^{n-1} d_i r^i$$

◆ 十六进制: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A(10), B(11), C(12), D(13), E(14), F(15)

◆ 八进制: 0,1,2,3,4,5,6,7

◆ 十进制: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

$(365.2)_{10}, (11011.01)_2, (3460.32)_8, (596.12)_{16}$

$$\begin{aligned}(753.37)_8 &= 753.37\text{ O} \\ &= 7 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 3 \times 8^0 + 3 \times 8^{-1} + 7 \times 8^{-2} \\ &= (491.484375)_{+}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(753.37)_{16} &= 753.37\text{ H} = 0x753.37 \\ &= 7 \times 16^2 + 5 \times 16^1 + 3 \times 16^0 + 3 \times 16^{-1} + 7 \times 16^{-2} \\ &= (1875.2148)_{+}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(753.37)_{12} &= 753.37 \\ &= 7 \times 12^2 + 5 \times 12^1 + 3 \times 12^0 + 3 \times 12^{-1} + 7 \times 12^{-2} \\ &= (1071.2986)_{+}\end{aligned}$$

同一个数串，由于进位制不同其所表达的数值大小也是不同的

245的十进制表示记为：

245

245的二进制表示记为：

11110101

245的八进制表示记为：

365

245的十六进制表示记为：

F5

同一个数值，用不同进位制表达，结果也是不同的

进位计数制之间的转换

战德臣

哈尔滨工业大学 教授·博士生导师
教育部大学计算机课程教学指导委员会委员

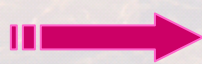


Research Center on **I**ntelligent
Computing for **E**nterprises & **S**ervices,
Harbin **I**nstitute of **T**echnology

进位计数制之间的转换

(1)r进制到十进制?



r进制  十进制(已知 $d_m \dots d_{-n}$, 求十进制的N)

$$N = (d_{n-1}d_{n-2} \dots d_2d_1d_0.d_{-1}d_{-2} \dots d_{-m})_r$$

$$= d_{n-1}r^{n-1} + d_{n-2}r^{n-2} + \dots + d_2r^2 + d_1r^1 + d_0r^0 + d_{-1}r^{-1} + d_{-2}r^{-2} + \dots + d_{-m}r^{-m}$$

$$= \sum_{i=-m}^{n-1} d_i r^i$$

例如
$$\begin{array}{cccccccccc} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & . & -1 & -2 \\ \hline (1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & . & 0 & 1)_{\text{二}} \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 \\ &+ 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = (245.25)_{\text{十}} \end{aligned}$$

$$\text{再如 } (F5.4)_{\text{十六}} = F \times 16^1 + 5 \times 16^0 + 4 \times 16^{-1} = (245.25)_{\text{十}}$$

进位计数制之间的转换

(2)十进制到r进制?



十进制 \longrightarrow r进制(已知十进制的N, 求 d_i):整数部分

$$N = (d_{n-1}d_{n-2}\dots\dots d_2d_1d_0)_r$$
$$= d_{n-1}r^{n-1} + d_{n-2}r^{n-2} + \dots + d_2r^2 + d_1r^1 + d_0r^0$$

(N/r)的余数为 d_0

((N/r)/r)的余数为 d_1

((((N/r)/r)/r)的余数为 d_2

... ..

(...(((N/r)/r)/r).../r)的余数为 d_{n-1}

“除基取余”

例如: $(245)_{+} = (F5)_{十六}$

$$\begin{array}{r|l} 16 & 245 \\ \hline 16 & 15 \text{ ----- } 5 \\ \hline & 0 \text{ ----- } 15(F) \end{array}$$

进位计数制之间的转换

(2)十进制到r进制?

十进制 \longrightarrow r进制(已知十进制的N, 求 d_i):小数部分

$$N = (0.d_{-1}d_{-2}\dots\dots d_{-m})_r = d_{-1}r^{-1} + d_{-2}r^{-2} + \dots + d_{-m}r^{-m}$$

$(N \times r)$ 的整数部分为 d_{-1}

$((N \times r) \times r)$ 的整数部分为 d_{-2}

$((((N \times r) \times r) \times r))$ 的整数部分为 d_{-3}

... ..

$(\dots(((N \times r) \times r) \times r) \dots \times r)$ 的整数部分为 d_{-n}

注: 每次相乘都是去掉整数后的小数部分相乘。

例如: $(0.525)_{+} = (0.8666)_{+六}$

“乘基取整”

$$\begin{array}{r} 0.525 \\ \times 16 \\ \hline 8 \quad .4 \\ \times 16 \\ \hline 6 \quad .4 \\ \times 16 \\ \hline 6 \quad .4 \\ \times 16 \\ \hline 6 \quad .4 \end{array}$$

进位计数制之间的转换

(3)二进制到十六进制?

二进制  十六进制

因为: $8=2^3$, $16=2^4$, 即3位二进制数相当于一位八进制数, 4位二进制数相当于一位十六进制, 从小数点开始向左右分组, 3位一组或4位一组, 每一组转换成相应的8进制或十六进制即可;

例如 $(7\ 5\ 3\ .\ 3\ 7)_{\text{八}}$
 $= (111\ 101\ 011\ .\ 011\ 111)_{\text{二}}$

再如 $(011, 101, 011\ .\ 011, 110)_{\text{二}}$
 $= (3\ 5\ 3\ .\ 3\ 6)_{\text{八}}$