

数值常微分

张阳

2022 年 3 月 10 日

目录

1	各阶数值微分	3
1.1	一阶微分	3
1.1.1	向前差分	3
1.1.2	向后差分	3
1.1.3	中心差分	3
1.2	二阶微分	3
2	第一题	3
2.1	题目	3
2.2	数值解	3
3	第二题	4
3.1	题目	4
3.2	数值解	4
4	第三题	4
4.1	题目	4
4.2	数值解	4
5	第四题	5
5.1	题目	5
5.2	数值解	5
6	第五题	5
6.1	题目	5
6.2	数值解	5
7	第六题	6
7.1	题目	6
7.2	数值解	6

目录	2
8 第七题	6
8.1 题目	6
8.2 数值解	6
9 第八题	7
9.1 题目	7
9.2 数值解	7
10 误差分析	8

1 各阶数值微分

1.1 一阶微分

1.1.1 向前差分

$$u'_F(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{h}{2}u''(x+\xi)$$

1.1.2 向后差分

$$u'_F(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{h}{2}u''(x+\xi)$$

1.1.3 中心差分

$$u'_C(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}u^{(3)}(x+\xi)$$

1.2 二阶微分

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + \dots$$

2 第一题

2.1 题目

$$y'' + 10y = 0, x \in (0, 1); y(0) = 0, y(1) = 1$$

2.2 数值解

$$\begin{cases} n = 100, h = \frac{1}{100}, y_0 = 0, y_n = 0 \\ \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + 10y_i = 0, i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (2.1)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & (10h^2 - 2) & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (10h^2 - 2) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (10h^2 - 2) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

3 第二题

3.1 题目

$$y'' + 400y = 40 \cos(20x), x \in (0, 1); y(0) = 0, y(1) = 0$$

3.2 数值解

$$\begin{cases} n = 100, h = \frac{1}{100}, y_0 = 0, y_n = 0 \\ \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + 400y_i = 40 \cos(20x_i), i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (3.1)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & (400h^2 - 2) & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (400h^2 - 2) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (400h^2 - 2) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ h^2 40 \cos(20x_1) \\ h^2 40 \cos(20x_2) \\ \vdots \\ h^2 40 \cos(20x_{n-1}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

4 第三题

4.1 题目

$$y'' + 100xy = 0, x \in (0, 1); y'(0) = 0, y(1) = 1$$

4.2 数值解

$$\begin{cases} n = 100, h = \frac{1}{100}, y_1 = 1 \\ \frac{y_1 - y_0}{h} = 0 \\ \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + 100x_i y_i = 0, i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (4.1)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & (100x_1 h^2 - 2) & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (100x_2 h^2 - 2) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (100x_{n-1} h^2 - 2) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

5 第四题

5.1 题目

$$y'' + xy' - 2y = 2, x \in (0, 1); y(0) = 0, y(1) = 1$$

5.2 数值解

$$\begin{cases} n = 100, h = \frac{1}{100}, y_0 = 0, y_1 = 1 \\ \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - 2y_i = 2, i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (5.1)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ (2 - x_1 h) & -(4 + 4h^2) & (2 + x_1 h) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (2 - x_2 h) & -(4 + 4h^2) & (2 + x_2 h) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(4 + 4h^2) & (2 + x_{n-1} h) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4h^2 \\ 4h^2 \\ \vdots \\ 4h^2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

6 第五题

6.1 题目

$$y'' + x^3 y' - 3x^2 y = 6x, x \in (0, 1); y(0) = 0, y(1) = 1$$

6.2 数值解

$$\begin{cases} n = 100, h = \frac{1}{100}, y_0 = 0, y_1 = 1 \\ \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i^3 \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - 3x_i^2 y_i = 6x_i, i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (6.1)$$

即

$$\begin{cases} n = 100, h = \frac{1}{100}, y_0 = 0, y_1 = 1 \\ (2 - x_i^3 h) y_{i-1} - (4 + 6h^2 x_i^3) y_i + (2 + x_i^3 h) y_{i+1} = 12x_i h^2, i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (6.2)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ (2-x_1^3h) & -(4+6h^2x_1^3) & (2+x_1^3h) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (2-x_2^3h) & -(4+6h^2x_2^3) & (2+x_2^3h) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(4+6h^2x_{n-1}^3) & (2+x_{n-1}^3h) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12x_1h^2 \\ 12x_2h^2 \\ \vdots \\ 12x_{n-1}h^2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

7 第六题

7.1 题目

$$y'' + y = \tan(x), x \in (0, 1); y(0) = 0, y(1) = 1$$

7.2 数值解

$$\begin{cases} n = 100, h = \frac{1}{100}, y_0 = 0, y_n = 1 \\ \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + y_i = \tan(x_i), i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (7.1)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & (h^2 - 2) & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (h^2 - 2) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (h^2 - 2) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ h^2 \tan x_1 \\ h^2 \tan x_2 \\ \vdots \\ h^2 \tan x_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

8 第七题

8.1 题目

$$y'' + 100x^2y' - xy = 0, x \in (0, 1); y(0) = 0, y(1) = 1$$

8.2 数值解

$$\begin{cases} n = 100, h = \frac{1}{100}, y_0 = 0, y_1 = 1 \\ \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + 100x_i^2 \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - x_i y_i = 0, i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (8.1)$$

即

$$\begin{cases} n = 100, h = \frac{1}{100}, y_0 = 0, y_1 = 1 \\ (2 - 100x_i^2h)y_{i-1} - (4 + 2h^2x_i)y_i + (2 + 100x_i^2h)y_{i+1} = 0, i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (8.2)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ (2 - 100x_1^2h) & -(4 + 2h^2x_1) & (2 + 100x_1^2h) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (2 - 100x_2^2h) & -(4 + 2h^2x_2) & (2 + 100x_2^2h) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(4 + 2h^2x_{n-1}) & (2 + 100x_{n-1}^2h) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

9 第八题

9.1 题目

$$y'' + 2x^2y' - 2xy = 0, x \in (0, 1); y(0) = 0, y(1) = 1$$

9.2 数值解

$$\begin{cases} n = 100, h = \frac{1}{100}, y_0 = 0, y_1 = 1 \\ \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + 2x_i^2 \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - 2x_i y_i = 0, i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (9.1)$$

即

$$\begin{cases} n = 100, h = \frac{1}{100}, y_0 = 0, y_1 = 1 \\ (2 - 2x_i^2h)y_{i-1} - (4 + 4h^2x_i)y_i + (2 + 2x_i^2h)y_{i+1} = 0, i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (9.2)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ (2 - 2x_1^2h) & -(4 + 4h^2x_1) & (2 + 2x_1^2h) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (2 - 2x_2^2h) & -(4 + 4h^2x_2) & (2 + 2x_2^2h) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(4 + 4h^2x_{n-1}) & (2 + 2x_{n-1}^2h) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

10 误差分析

有限差分法的潜在的误差来源是中心差分公式的截断误差，以及在求解方程组时带来的误差。此处我们调用的是 MATLAB 内置的求解方程组的算法，精度较高。因此，截断误差占优，误差是 $O(h^2)$ ，因而我们期望随着子区间 $n+1$ 升高，误差降低为 $O(h^2)$ 。

我们对于问题 7 测试了这种方差，图 xx 显示了最大误差对于不同 n 取值对应的解的误差 E 的量级。在 log-log 图中，误差作为 n 的函数，其本质上是一条斜率为 -2 的直线，意味着， $\lg E \approx \alpha + b \lg n$ ，其中 $b = -2$ ；换句话说，与我们预期一致，误差为 $E \approx Kn^{-2}$