# 三次样条插值

张阳

2021 年 12 月 1 日

## 目录

# 1 问题的引出

当多项式次数较大时 ($n \geqslant 8$)，使用多项式拟合函数 $f(x)$ 就会产生龙格现象。

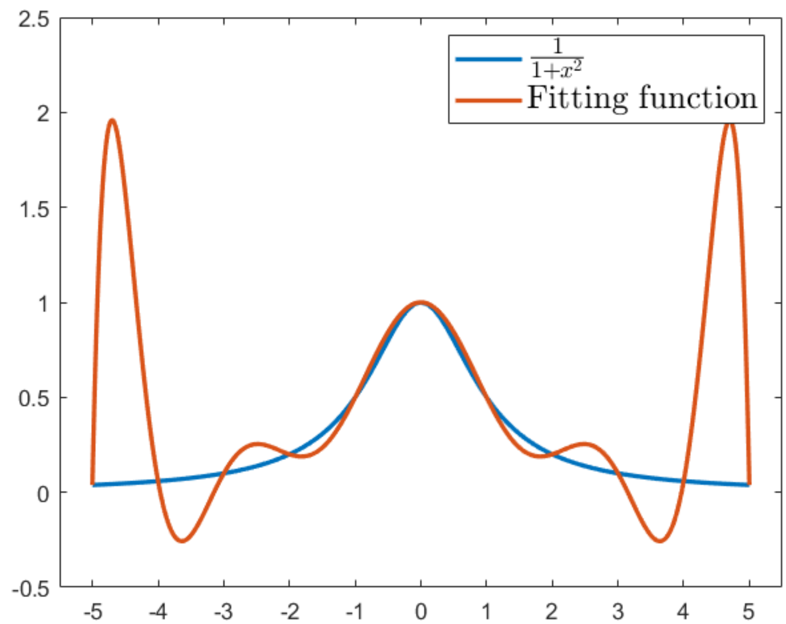


图 1: 图为 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 与 10 阶多项式拟合函数

为了避免高次多项式函数带来的龙格现象，又保留多项式函数的良好性质，我们采用了分段低次拟合的方法。

有定理已经证明，分段线性插值函数可在插值区间上一致收敛到原函数。

但是，分段线性插值函数在插值点处大多数情况下不可导，这就导致了拟合的函数不够光滑。因此，我们引入了三次样条插值。

# 2 三次样条插值的性质

**定义 2.1.** 若函数 $S(x) \in C^2[a,b]$ 且在每个小区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上是三次多项式，其中 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是给定节点，则称 $S(X)$ 是节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的三次样条函数，若在节点 $x_j$ 上给定函数值 $y_j = f(x_j)(j = 0, 1, \cdots, n)$，并成立

$$S(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, \cdots, n, \tag{2.1}$$

则称 $S(x)$ 为三次样条插值函数。记 $S_i(x) = S(x)|_{x \in [x_i, x_{i+1}]}$。

三次样条插值的特点是：在避免了龙格现象的同时，又使得插值函数具有良好的光滑性。

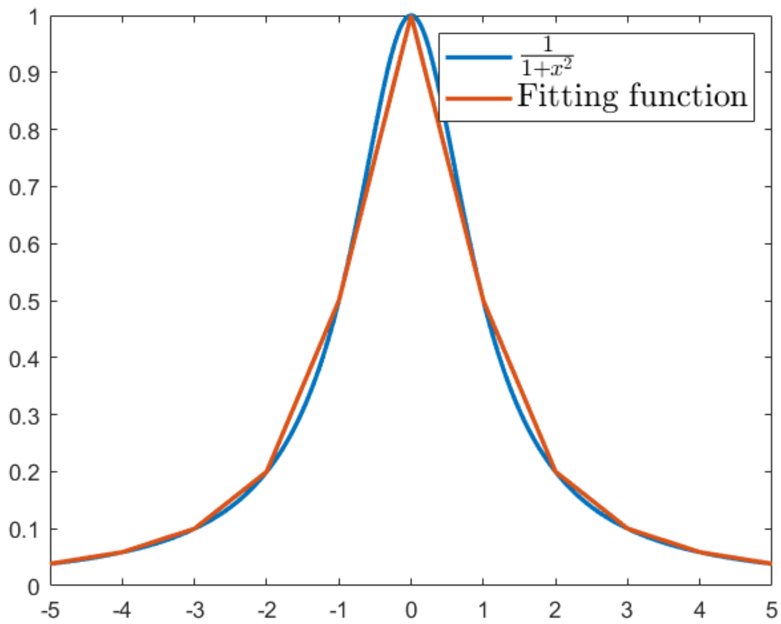


图 2: 图为 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 与线性插值拟合函数

由定义知，$S(X)$ 在 $[a,b]$ 上的二阶导数连续（显然一阶导数和原函数也连续），于是应当满足

$$\begin{aligned}
&S_a = y_0 \\
&S_b = y_n \\
&S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1 \\
&S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n-1 \\
&S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n-1
\end{aligned} \tag{2.2}$$

共有 $n$ 个三次函数，所以有 $4n$ 个未知参数求解，而 (2.2) 中共有 $4n-2$ 个等式。

为了求出确定的样条插值函数，还需给定 2 个条件。常用的条件有：

1. $S''_0(x_0) = S''_{n-1}(x_n) = 0$ 这样构造出来的样条称为自然样条
2. $S''_0(x_0) = u, S''_{n-1}(x_n) = v$ 这样构造出来的样条称为曲率调整三次样条
3. $S'_0(x_0) = u, S'_{n-1}(x_n) = v$ 这样构造出来的样条称为钳制三次样条
4. $S_0, S_{n-1}$ 均为至多二阶，这样构造出来的样条称为抛物线端点的三次样条

下面详细介绍钳制三次样条的求解方法。

# 3 钳制三次样条的求解方法

设

$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i) = m_{i-1}, \quad i = 2, 3, \cdots, n-1 \tag{3.1}$$

为形式上的统一，令 $u = m_0, v = m_n$
于是有

| | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $y_0$ | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_n$ |
| $f'(x)$ | $m_0$ | $m_1$ | $m_2$ | $\cdots$ | $m_n$ |

则

$$\begin{aligned} s_i(x) &= \frac{(x-x_{i+1})^2\left[h_i+2\left(x-x_i\right)\right]}{h_i^3}y_i \\ &+ \frac{(x-x_i)^2\left[h_i+2\left(x-x_{i+1}\right)\right]}{h_i^3}y_{i+1} \\ &+ \frac{(x-x_{i+1})^2\left(x-x_i\right)}{h_i^2}m_i \\ &+ \frac{(x-x_i)^2\left(x-x_{i+1}\right)}{h_i^2}m_{i+1} \qquad i=,0,1\cdots,n-1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中 $h_i = x_{i+1} - x_i$

**注意 1.** 这里求 $S_i(x)$ 用到了埃尔米特插值的基函数的方法。

为了解出 $m_i$，就要用到二阶导数连续的性质。

$$\begin{aligned} S_i''(x) &= \frac{6x-2x_i-4x_{i+1}}{h_i^2}m_i \\ &+ \frac{6x-4x_i-2x_{i+1}}{h_i^2}m_{i+1} \\ &+ \frac{6\left(x_i+x_{i+1}-2x\right)}{h_i^3}\left(y_{i+1}-y_i\right) \quad ,i=0,1,\cdots,n-1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

从而

$$\begin{aligned} S_i''(x_i) &= -\frac{4}{h_i}m_i - \frac{2}{h_i}m_{i+1} + \frac{6}{h_i^2}(y_{i+1}-y_i) \\ S_i''(x_{i+1}) &= \frac{2}{h_i}m_i + \frac{4}{h_i}m_{i+1} - \frac{6}{h_i^2}(y_{i+1}-y_i) \end{aligned} \quad ,i=0,1,\cdots,n-1 \tag{3.4}$$

由二阶导数连续的条件，有：

$$-\frac{4}{h_i}m_i - \frac{2}{h_i}m_{i+1} + \frac{6}{h_i}(y_{i+1}-y_i) = \frac{2}{h_{i-1}}m_{i-1} + \frac{4}{h_{i-1}}m_i - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i-y_{i-1}) \quad ,i=1,2,\cdots,n-1$$

整理得到：

$$\frac{1}{h_{i-1}}m_{i-1} + 2\left(\frac{1}{h_{i-1}}+\frac{1}{h_i}\right)m_i + \frac{1}{h_i}m_{i+1} = 3\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i^2}+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}^2}\right) \quad (i=1,2,\cdots,n-1) \tag{3.5}$$

令

$$\lambda_i=\frac{\frac{1}{h_{i-1}}}{\frac{1}{h_{i-1}}+\frac{1}{h_i}}\quad \mu_i=\frac{\frac{1}{h_i}}{\frac{1}{h_{i-1}}+\frac{1}{h_i}}\quad g_i=3\frac{\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i^2}+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}^2}}{\frac{1}{h_{i-1}}+\frac{1}{h_i}} \tag{3.6}$$

于是 (3.5) 可进一步化简为

$$\lambda_i m_{i-1}+2m_i+\mu_i m_{i+1}=g_i\quad (i=1,2,\cdots,n-1) \tag{3.7}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_3 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & \mu_{n-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1\\ m_2\\ m_3\\ \vdots\\ m_{n-3}\\ m_{n-2}\\ m_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g_1-\lambda_1 f_0'\\ g_2\\ g_3\\ \vdots\\ g_{n-3}\\ g_{n-2}\\ g_{n-1}-\mu_{n-1}f_n'\end{bmatrix} \tag{3.8}$$

求解线性方程组 3.8 即可解出 $m_1,m_2,\cdots,m_{n-1}$ 从而算出 $s_i(x)$

**注意 2.** 此方程为严格对角占优矩阵，可用追赶法求解。

# 4 示例演示

- 根据下列数据点，求出三次样条插值多项式
- 利用三次样条插值多项式计算当 $x=3.5$ 时，$y$ 的拟合值

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.84 | 0.91 | 0.14 | -0.76 | -0.96 | -0.28 | -0.66 | 0.99 |
| $f'(x)$ | 0.5403 | | | | | | | -0.1455 |

利用公式 (3.6),(3.8)，可以得到关于 $m_i$ 的线性方程组。

$$\begin{bmatrix} 2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.5 & 2 & 0.5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 2 & 0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.5 & 2 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 2 & 0.5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1\\ m_2\\ m_3\\ m_4\\ m_5\\ m_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1.3201\\ -2.5050\\ -1.6500\\ 0.7200\\ 2.4300\\ 1.9778\end{bmatrix} \tag{4.1}$$

解得:

$$m=[0.5403,-0.4133,-0.9869,-0.6490,0.2831,0.9568,0.7497,-0.1455]^T$$

带入 (3.2)，即可得到：

$$S(x)=\begin{cases}0.84(x-2)^2(2x-1)-0.91(x-1)^2(2x-5)+0.54(x-1)(x-2)^2-0.41(x-1)^2(x-2) & x\in(1,2)\\ 0.91(x-3)^2(2x-3)-0.99(x-2)^2(x-3)-0.14(x-2)^2(2x-7)-0.41(x-2)(x-3)^2 & x\in(2,3)\\ 0.14(x-4)^2(2x-5)-0.99(x-4)^2(x-3)-0.65(x-4)(x-3)^2+0.76(x-3)^2(2x-9) & x\in(3,4)\\ 0.96(x-4)^2(2x-11)-0.76(x-5)^2(2x-7)-0.65(x-4)(x-5)^2+0.28(x-4)^2(x-5) & x\in(4,5)\\ 0.28(x-5)(x-6)^2+0.96(x-5)^2(x-6)-0.96(x-6)^2(2x-9)+0.28(x-5)^2(2x-13) & x\in(5,6)\\ 0.96(x-6)(x-7)^2+0.75(x-6)^2(x-7)-0.28(x-7)^2(2x-11)-0.66(x-6)^2(2x-15) & x\in(6,7)\\ 0.75(x-8)^2(x-7)-0.15(x-8)(x-7)^2+0.66(x-8)^2(2x-13)-0.99(x-7)^2(2x-17) & x\in(7,8)\end{cases} \tag{4.2}$$

于是 $S(3.5)=-0.3522$

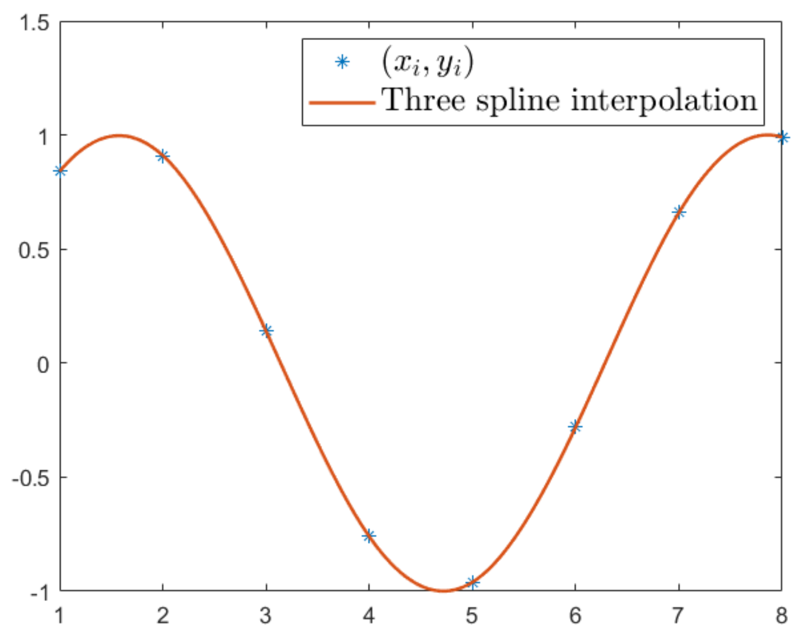


图 3: 插值点与插值函数

# 5 代码附录

Listing 1: **main.m**

```
clc, clear, close all
x = 1:8;
y = [0.84 0.91 0.14 -0.76 -0.96 -0.28 0.66 0.99];
n = length(x);
u = 0.5403;
v = -0.1455;
m = get_m(x,y,u,v);
xx = x(1):0.01:x(end);
yy = my_elmit(x,y,m,xx);
plot(x,y,'*')
hold on
plot(xx,yy,'LineWidth',1.5)
h=legend('$(x_i,y_i)$','Three spline interpolation');
set(h,'Interpreter','latex','FontName','Times New Roman','FontSize',15,'FontWeight','normal')
```

Listing 2: **get_m.m**

```
function m = get_m(x,y,u,v)
n = length(x);
lambda = zeros(1,n-2);
mu = zeros(1,n-2);
g = zeros(1,n-2);
h = diff(x);

for i = 1:n-2
    lambda(i) = h(i+1)/(h(i)+h(i+1));
    mu(i) = 1-lambda(i);
    g_1 = h(i)^2*(y(i+2)-y(i+1)) + h(i+1)^2*(y(i+1)-y(i));
    g_2 = h(i)^2*h(i+1)+h(i+1)^2*h(i);
    g(i) = 3 * g_1/g_2;
end

A_1 = diag(2*ones(1,n-2));
A_2 = diag(lambda(2:end),-1);
A_3 = diag(mu(1:end-1),1);
A = A_1+A_2+A_3;

```

```
b = g';

b(1) = b(1) - lambda(1)*u;
b(end) = b(end) - mu(end)*v;
m = A\b;
m = [u;m;v];

end
```

Listing 3: **my_elmit.m**

```
function yy = my_elmit(x,y,m,xx)

n = length(x);
nn = length(xx);
yy = zeros(1,nn);
for i = 1:nn
    if xx(i) == x(end)
        yy(i) = y(end);
        continue
    elseif xx(i) == x(1)
        yy(i) = y(1);
        continue
    end


    dif = xx(i)-x;
    index = zeros(1,2);
    for j = 1:n
        if dif(j)<=0
            index(1) = round(j-1);
            index(2) = round(j);
            break
        end
    end

    index = sort(index);
    x_temp = x(index);
```

```
    y_temp = y(index);
    m_temp = m(index);


    s_1 = (xx(i) - x_temp(2))^2 * (1 + 2*(xx(i)-x_temp(1))/diff(x_temp)) / diff(x_temp)^2 * y_temp(1);
    s_2 = (xx(i) - x_temp(1))^2 * (1 - 2*(xx(i)-x_temp(2))/diff(x_temp)) / diff(x_temp)^2 * y_temp(2);
    s_3 = (xx(i) - x_temp(2))^2 * (xx(i) - x_temp(1)) / diff(x_temp)^2 * m_temp(1);
    s_4 = (xx(i) - x_temp(1))^2 * (xx(i) - x_temp(2)) / diff(x_temp)^2 * m_temp(2);
    s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4;
    yy(i) = s;
end
end
```