

Sistemes de coordenades i espais vectorials: introducció als vectors

Jordi Villà i Freixa

Universitat de Vic - Universitat Central de Catalunya
Grau en Multimèdia. Aplicacions i Videojocs

jordi.villa@uvic.cat

curs 2022-2023

Introducció al curs

El material d'aquestes presentacions està basat en anteriors presentacions i apunts d'altres professors [?, ?, ?] de la UVic-UCC, pàgines web diverses (normalment enllaçades des del text), així com monografies [?, ?, ?].

Perquè necessitem els nombres reals

- Per a descriure el món, cal mesurar magnituds
- Per a comprendre'l, cal conèixer com es relacionen les magnituds
- Per a saber com es relacionen les magnituds, cal generar models

$$\mathbb{C} \text{ Complexos } \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \text{ Reals} \\ \mathbb{I} \text{ Imaginaris} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Q} \text{ Racionals} \\ \mathbb{R} - \mathbb{Q} \text{ Irracionals} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Z} \text{ Enters} \\ \mathbb{Q} - \mathbb{Z} \text{ Fraccionaris} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N} \text{ Naturals} \\ \text{Zero} \\ \text{Enters negatius} \end{array} \right.$$

(1)

exercises

- Escribe ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros que tengan como soluciones números naturales, enteros, racionales, irracionales (*algebraics*)
- Escribe una ecuación polinómica con coeficientes enteros que tenga como solución el número π (*transcendent*)
- Encuentra una ecuación polinómica con coeficientes constantes sin ningún número real como solución

Nombres discrets vs nombres continus

- \mathbb{Z} és un conjunt de nombres discrets: donat un enter, sempre hi ha un enter consecutiu. Exemple: el codi binari, 0, 1.
- Un conjunt de números es diu que és continu si poden prendre qualsevol valor en un interval finit o infinit. Exemples: $]3, 5]$, $(-\infty, 0)$. El món no és discret, sinó **mesurable**! Per tant, no podem parlar de dos nombres reals consecutius.

La recta real

Els nombres reals es representen damunt una recta, la recta real.

Propietat de la recta real

- Necessitem una referència per anomenar els punts de la recta: fixarem un origen (el 0) i una escala (1)
- La recta està ordenada
- És infinita
- els intervals i semirectes són parts de la recta:

$$\begin{aligned}
 [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\
 (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\
 [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \\
 (-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}
 \end{aligned} \tag{2}$$

- La distància entre nombres reals és $d(a, b) = |b - a|$.

El pla 2D

- Fem el salt a dues dimensions. Necessitarem referenciar els punts en un pla.
- René Descartes (1590-1650) va posar les bases matemàtiques per a poder fer-ho: el producte cartesià $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, consistent en el conjunt de parells (ordenats) de nombres reals:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} \quad (3)$$

El pla 2D

- Com fèiem amb la recta, usem una referència per identificar els punts del pla: fixem un origen $(0, 0)$ i dos punts que ens donguin l'escala horitzontal i vertical: $\{(1, 0), (0, 1)\}$.
- Els eixos d'abscisses i ordenades venen determinats per les rectes $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ i $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$, respectivament.



**FACULTAT
DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA
I ENGINYERIES**

UVIC | UVIC·UCC

El pla 2D

- Podem definir els quatre quadrants del pla com:

$$Q1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$Q2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \geq 0\}$$

$$Q3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \leq 0\}$$

$$Q4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0\}$$

- La distància euclídea:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (4)$$

L'Espai 3D

- El nostre interès és l'espai tridimensional, que ens apropa a la realitat (escultura, holografia, impressió-3D, animació 3D...).
- L'espai 3D és el conjunt de tríos de nombres reals:

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\} \quad (5)$$

- Triem un origen $(0, 0, 0)$ i tres punts més que ens donen les tres escales, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$
- podem definir eixos (per exemple l'eix Z es defineix com $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y = 0\}$) o plans (l'Eix XY vidra definit per $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$).
- La distància euclídea:

$$d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Desplaçament i vectors

El nostre interès és descriure moviments, ja siguin en la recta, en el pla o en l'espai 3D.

Desplaçament a la recta real

Com descriuries el desplaçament d'un punt des de la posició $x = 2$ a la posició $x = 4$? i el desplaçament invers?

Desplaçament al Pla 2D

Com descriuries el desplaçament rectilini d'un punt des de la posició $(2, 1)$ a la $(-3, 2)$. I el desplaçament contrari? Dóna dos punts inicial i final entre els quals hi hauria el mateix desplaçament.

Desplaçament a l'espai 3D

Pots posar un exemple similar en l'espai 3D?

En general:

Desplaçament a la recta real

El vector desplaçament entre la posició inicial A i la final B es defineix com $\vec{AB} = B - A$

Desplaçament al Pla 2D

El vector desplaçament entre la posició inicial $A = (x_1, y_1)$ i la final $B(x_2, y_2)$ es defineix com $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Desplaçament a l'espai 3D

El vector desplaçament entre la posició inicial $A = (x_1, y_1, z_1)$ i la final $B = (x_2, y_2, z_2)$ es defineix com $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Cada escalar del vector s'anomena component

ex:pla2 Donats els punts $A(1, 1)$, $B = (0, -1)$ i el vector $\vec{u} = (2, 4)$

- ① Calcula els vectors que van des de l'origen de coordenades cap a cadascun dels punts A i B (pregunta trampa...).
- ② Calcula i dibuixa \overrightarrow{AB} .
- ③ Calcula i dibuixa \overrightarrow{BA} .
- ④ Si $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$, quina posició és C ?
- ⑤ Si $\vec{u} = \overrightarrow{CB}$, quina posició és C ?
- ⑥ Dóna una altres dos punts A i B que tinguin el mateix vector desplaçament \overrightarrow{AB} .

Els desplaçaments, doncs, es representen amb vectors, quines principals característiques són:

- Tenen una direcció.
- Tenen un sentit.
- Tenen una intensitat, anomenada **norma** o **mòdul** del vector, que és la distància entre la posició inicial i la final:

$$||\overrightarrow{AB}|| = d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (7)$$

si $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$ són dos punts en el pla.

Calcula la norma del vector d' \mathbb{R}^5 $(1, -2, -3, 0, 2)$.

ex:pla3 Donats el punt $A(1, 1)$ i els vectors $\vec{u} = (2, 4)$, $\vec{v} = (0, -3)$:

- 1 Aplica al punt A el desplaçament \vec{u} , i al nou punt trobat el desplaçament \vec{v} . Quin és el vector desplaçament des d' A a la posició final?
- 2 Repeteix l'exercise canviant l'ordre dels desplaçaments.
- 3 Aplica al punt A el desplaçament \vec{u} , i al nou punt trobat el desplaçament \vec{u} novament. Quin és el vector desplaçament des d' A a la posició final?



FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES

UVIC | UVIC-UCC

La suma de vectors és commutativa.

A partir d'ara considerarem els vectors com a entitats pròpies, més enllà del concepte de desplaçament.

Espais vectorials

Considerem el conjunt de tots els possibles vectors al pla amb origen a $(0,0)$. En realitat, es tracta de tots els parells ordenats de nombres reals: el conjunt \mathbb{R}^2 .

El conjunt de tots els vectors de \mathbb{R}^2 , amb les operacions definides per a qualsevol parell de vectors $\vec{u} = (u_1, u_2)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2)$, i qualsevol nombre real λ de la següent manera

- ❶ **Suma** (interna) $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$, i
- ❷ **Producte per escalar** (externa) $\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2)$

satisfà les propietats següents $\forall \lambda, \gamma \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$:

- ❶ Propietat commutativa de l'operació interna: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- ❷ Propietat associativa de l'operació interna: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- ❸ Existeix un element neutre \vec{e} tal que $\vec{u} + \vec{e} = \vec{u}$
- ❹ Existeix un element oposat $-(\vec{u})$ per a cada vector \vec{u} tal que $-(\vec{u}) + \vec{u} = \vec{e}$
- ❺ $\lambda \cdot (\gamma \cdot \vec{u}) = (\lambda\gamma) \cdot \vec{u}$
- ❻ $(\lambda + \gamma) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \gamma \cdot \vec{u}$
- ❼ $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$
- ❽ Existeix un element neutre $e \in \mathbb{R}$ tal que $e \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Qui són \vec{e} (a \mathbb{R}^2) i e ? Passa el mateix a \mathbb{R} o \mathbb{R}^3 ? I a \mathbb{R}^n ?

Definició

*Un conjunt d'elements (anomenats vectors) amb dues operacions externa i interna que satisfan les 8 propietats anteriors s'anomena **espai vectorial** (sobre el cos escalar dels nombres reals)*

\mathbb{R} , \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^3 són espais vectorials sobre \mathbb{R} .

Comprova que el conjunt dels polinomis de grau 2 és un espai vectorial sobre \mathbb{R} .

Definició

Un vector \vec{u} és una **combinació lineal** dels vectors $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ si existeixen nombres reals $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ que satisfan:

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$$

a) Troba els valors dels coeficients si $\vec{u} = (2, 1)$ i $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$. b) i si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \{(2, 1), (-2, 1)\}$?
 Agafant els vectors de l'exercice anterior:

- ❶ Pots escriure \vec{e}_2 en funció de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$?
- ❷ Pots escriure \vec{e}_1 en funció de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$?
- ❸ Pots escriure \vec{v}_2 en funció de $\{\vec{e}_1\}$?
- ❹ Com són els vectors que es poden escriure com a combinació lineal de \vec{e}_1 ?

Dependència lineal

Els vectors $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ són **linealment dependents** si qualsevol d'ells es pot escriure com a combinació lineal de la resta. En cas contrari els anomenem **linealment independents**

Amb els mateixos vectors anteriors:

- ① Són \vec{e}_2, \vec{v}_1 i \vec{v}_2 linealment independents?
- ② Són \vec{e}_1, \vec{v}_1 i \vec{v}_2 linealment independents?
- ③ Com són els vectors linealment dependents amb \vec{e}_1 ?
- ④ Són \vec{e}_1 i \vec{v}_2 linealment independents?
- ⑤ Són \vec{e}_1 i \vec{e}_2 linealment independents?
- ⑥ Són \vec{v}_1 i \vec{v}_2 linealment independents?

Vectors generadors

Els vectors $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ són generadors de l'espai vectorial al qual pertanyen quan qualsevol vector de l'espai es pot posar com a combinació lineal de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.

Per indicar que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ generen l'espai vectorial E , escrivim:
 $E = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \rangle$.

Amb els mateixos vectors anteriors:

- 1 Comprova que \vec{e}_1 i \vec{e}_2 són generadors de \mathbb{R}^2 .
- 2 Comprova que \vec{e}_1, \vec{v}_1 i \vec{v}_2 són generadors de \mathbb{R}^2 .
- 3 Ho són \vec{v}_1 i \vec{v}_2 ?
- 4 Dóna exemples de conjunts de vectors d' \mathbb{R}^2 que generin altres vectors del mateix espai vectorial amb la forma $\{(\alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.
- 5 Comprova que el conjunt de vectors $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ genera \mathbb{R}^3 .

Base d'un espai vectorial

Els vectors $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ són una base de l'espai vectorial al qual pertanyen quan:

- ① són generados de l'espai, i
- ② són linealment independents.
- ① Comprova que \vec{e}_1 i \vec{e}_2 és una base de \mathbb{R}^2 .
- ② Perquè \vec{e}_1, \vec{v}_1 i \vec{v}_2 no són una base de \mathbb{R}^2 ?
- ③ Formen una base de \mathbb{R}^2 els vectors \vec{v}_1 i \vec{v}_2 ?
- ④ Quants vectors com a molt formen una base de \mathbb{R}^2 ?
- ⑤ I d' \mathbb{R}^3 ?

Dimensió d'un espai vectorial

En un espai vectorial hi ha infinites bases, però totes tenen el mateix nombre de vectors. la **dimensió** d'un espai vectorial és el nombre de vectors que es troben en una base.

- \mathbb{R} té dimensió 1.
- \mathbb{R}^2 té dimensió 2.
- \mathbb{R}^n té dimensió n .

Per exemple, la **base canònica** de \mathbb{R}^2 és $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

Representació d'un vector en una base

Tot vector d'un espai vectorial es pot expressar com a combinació lineal dels vectors de qualsevol base. Les components d'un vector respecte a una base són els nombres reals que multipliquen cada vector de la base.

Per exemple (veure exercici ??), si $\vec{u} = (2, 1)$ la seva representació en dues bases diferents $C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$, i $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \{(-1, 1)_C, (3, 3)_C\}$ seria:

$$\vec{u} = 2 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 = (2, 1)_C = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$\vec{u} = \frac{-1}{2} \cdot \vec{v}_1 + \frac{1}{2} \cdot \vec{v}_2 = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)_B$$

Observació: sovint anomenem $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ els vectors $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ a \mathbb{R}^3 . En general, és pràctic escriure \vec{u} com a \mathbf{u} per simplicitat.

Supespai vectorial

Definició

Un subconjunt de vectors d'un espai vectorial $F \subset E$ forma un subespai vectorial si i només si:

- 1 $\vec{u} + \vec{v} \in F$, sempre que $\vec{u}, \vec{v} \in F$, i
- 2 $\lambda \cdot \vec{u} \in F$, sempre que $\vec{u} \in F$ i $\lambda \in \mathbb{R}$.

Els subespais vectorials són també espais vectorials i, com a tals, tenen bases i dimensió.

A \mathbb{R}^2 hi ha infinits subespais vectorials de dimensió 1 (infinites rectes que passen per l'origen en el pla).

A \mathbb{R}^3 :

- 1 Quin és el pla generat per la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_3\}$?
- 2 Com és el subespai generat per la base $\{\vec{e}_2\}$?

L'equació $2x - 5y + 7z = 0$ defineix un subespai vectorial a \mathbb{R}^3 . Quina és la seva base? Què representa l'equació?

Quins d'aquests vectors formen una base d' \mathbb{R}^2 : $(1, 1), (1, 2), (-1, 2)$?

Sistemes de coordenades

Definició

Un **sistema de coordenades** $[O; \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}]$ del producte cartesià \mathbb{R}^n està format per:

- un punt $O \in \mathbb{R}^n$, anomenat origen i
- una base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ de l'espai vectorial \mathbb{R}^n .

Si triem $O = (0, 0, \dots, 0)$ i la base canònica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ s'anomenen **coordenades cartesianes**

Les coordenades d'un punt A respecte el sistema de coordenades $[O; \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}]$ són les components del vector \vec{OA} en la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$.



FACULTAT
DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA
I ENGINYERIES

UVIC | UVIC-UCC

El dibuix representa el vector

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

A \mathbb{R}^3 és habitual representar la base canònica com a $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

ex:base

Considera el punt de coordenades cartesianes $P = (2, 1)$ a \mathbb{R}^2 :

- 1 Quines series les seves coordenades al sistema $[O; \{\vec{v}_1 = (-1, 1)_C, \vec{v}_2 = (3, 3)_C\}]$?
- 2 Quines series les seves coordenades al sistema $[P; \{\vec{v}_1 = (-1, 1)_C, \vec{v}_2 = (3, 3)_C\}]$?



FACULTAT
DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA
I ENGINYERIES

UVIC | UVIC·UCC

Resum de la solució a l'exercise:

$$(1, 0) = \alpha(-1, 1) + \beta(3, 3)$$

amb resultat $\alpha = -\frac{1}{2}$ i $\beta = \frac{1}{6}$; i

$$(0, 1) = \gamma(-1, 1) + \delta(3, 3)$$

amb resultat $\gamma = \frac{1}{2}$ i $\delta = \frac{1}{6}$. i d'aquí:

$$\begin{aligned}(2, 1) &= 2 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1) = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (-1, 1) + \frac{1}{2} \cdot (3, 3)\end{aligned}$$

Definició

Anomenem angle entre dues semirectes o segments amb un origen comú a la regió compresa entre ambdues semirectes o segments.



Mesurem els angles en graus ($^{\circ}$) o en radians. Un radiant és la rotació necessària per recórrer un arc de longitud igual al radi de la circumferència. Per tant, com que l'angle complet equivaldria a tota la circumferència és fàcil veure que $360^{\circ} \equiv 2\pi rad$.

Per jugar amb aquest concepte proveu d'anar a <https://www.geogebra.org/m/kzc7rbNC>.

Mesura l'angle formen els següents parells de vectors:

- $(2, 0)$ i $(0, 5)$
- $(2, 0)$ i $(0, -5)$
- $(2, 0)$ i $(5, -5)$

A \mathbb{R}^3 , l'angle entre dos vectors es mesura damunt del pla que formen.
Mesura l'angle formen els següents parells de vectors:

- $(2, 0, 1)$ i $(0, 5, 0)$
- $(2, 0, 0)$ i $(0, -5, 0)$
- $(2, 0, 0)$ i $(5, -5, 5)$

Està clar que en general no és tan trivial i cal fer ús de l'operació producte escalar, que definim com:

Definició

S'anomena **producte escalar** de dos vectors d' \mathbb{R}^n , definits per $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, al nombre real:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_n \cdot v_n.$$

Es pot demostrar que si els vectors formen un angle θ , aleshores

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$$

i, per tant

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Quin angle formen els vectors d' \mathbb{R}^3 $(1, 1, 1)$ i $(-1, 1, -1)$?

Quan ha de valer k perquè els vectors $(1, k, 1)$ i $(-1, 1, -1)$ siguin paral·lels? i perpendiculars?

Troba l'àrea del triangle delimitat pels vèrtex $(1, 1)$, $(4, 5)$, $(1, 2)$.

Coordenades polars

Gràcies als angles podem descriure qualsevol posició al pla amb les anomenades **coordenades polars**: (r, φ) , on

- r és la distància del punt a l'origen de coordenades i
- l'angle φ és el format pel vector i l'eix de les abscisses

Pots tafanejar aquesta URL: <https://www.geogebra.org/m/WTJq9yC9>



FACULTAT
DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA
I ENGINYERIES

UVIC | UVIC-UCC

La conversió a coordenades cartesianes és:

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

i d'aquí podem treure la conversió contrària:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

on caldrà tenir en compte el quadrant alhora de calcular l'arctangent.

Si enlloc d' \mathbb{R}^2 treballem sobre \mathbb{R}^3 ja no parlarem de coordenades polars sinó esfèriques, (ρ, φ, θ) , on

$$x = \rho \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta$$

$$y = \rho \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta$$

$$z = \rho \cdot \cos \varphi$$



FACULTAT
DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA
I ENGINYERIES

UVIC | UVIC-UCC