# Sistemes de coordenades i espais vectorials: introducció als vectors

#### Jordi Villà i Freixa

Universitat de Vic - Universitat Central de Catalunya Grau en Multimèdia. Aplicacions i Videojocs

jordi.villa@uvic.cat

curs 2022-2023





# Índex

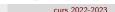


curs 2022-2023

### Introducció al curs

El material d'aquestes presentacions està basat en anteriors presentacions i apunts d'altres professors [?, ?, ?] de la UVic-UCC, pàgines web diverses (normalment enllaçades des del text), així com monografies [?, ?, ?].





# Perquè necessitem els nombres reals

- Per a descriure el món, cal mesurar magnituds
- Per a comprendre'l, cal conèixer com es relacionen les magnituds
- Per a saber com es relacionen les magnituds, cal generar models

$$\mathbb{C} \ \textit{Complexos} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} & \textit{Reals} \\ \mathbb{R} & \textit{Reals} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Q} & \textit{Racionals} \\ \mathbb{Z} & \textit{Enters} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N} & \textit{Naturals} \\ \textit{Zero} \\ \textit{Enters negatius} \\ \mathbb{Q} - \mathbb{Z} & \textit{Fraccionaris} \end{array} \right.$$

(1)



#### exercises

- Escriu equacions polinòmiques amb coeficients enters que tinguin com a solucions nombres naturals, enters, racionals, irracionals (algebraics)
- Escriu una equació polinòmica amb coeficients enters que tingui com a solució el número  $\pi$  (transcendent)
- Troba una equació polinòmica amb coeficients constants sense cap nombre real com a solució





### Nombres discrets vs nombres continus

- $\mathbb{Z}$  és un conjunt de nombres discrets: donat un enter, sempre hi ha un enter consecutiu. Exemple: el codi binari, 0, 1.
- Un conjunt de números es diu que és continu si poden prendre qualsevol valor en un interval finit o infinit. Exemples: [3,5], (- inf,0). El món no és discret, sinó mesurable! Per tant, no podem parlar de dos nombres reals consecutius.

#### La recta real

Els nombres reals es representen damunt una recta, la recta real.



# Propietat de la recta real

- Necessitem una referència per anomenar els punts de la recta: fixarem un orígen (el 0) i una escala (1)
- La recta està ordenada
- És infinita
- els intèrvals i semirectes són parts de la recta:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$$

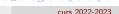
$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$[a,\infty] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x\}$$

$$(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$
(2)

• La distància entre nombres reals és d(a, b) = |b - a|.





### El pla 2D

- Fem el salt a dues dimensions. Ncessitarem referenciar els punts en un pla.
- René Descartes (1590-1650) va posar les bases matemàtiques per a poder fer-ho: el producte cartesià  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , consistent en el conjunt de parells (ordenats) de nombres reals:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$$
 (3)





### El pla 2D

- Com fèiem amb la recta, usem una referència per identificar els punts del pla: fixem un origen (0,0) i dos punts que ens donguin l'escala horitzontal i vertical:  $\{(1,0),(0,1)\}$ .
- Els eixos d'abcisses i ordenades venen determinats per les rectes  $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y=0\}$  i  $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x=0\}$ , respectivament.







# El pla 2D

• Podem definir els quatre quadrants del pla com:

$$Q1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, y \ge 0\}$$

$$Q2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \le 0, y \ge 0\}$$

$$Q3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \le 0, y \le 0\}$$

$$Q4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, y \le 0\}$$

• La distància euclídea:

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$
 (4)





# L'Espai 3D

- El nostre interès és l'espai tridimensional, que ens apropa a la realitat (escultura, holografia, impressió-3D, animació 3D...).
- L'espai 3D és el conjunt de tríos de nombres reals:

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y, z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \}$$
 (5)

- Triem un origen (0,0,0) i tres punts més que ens donen les tres escales, (1,0,0), (0,1,0) i (0,0,1)
- podem definir eixos (per exemple l'eix Z es defineix com  $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x=0,y=0\}$ ) o plans (l'Eix XY vidra definit per  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ ).
- La distància euclídea:

$$d((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

### Desplaçament i vectors

El nostre interès és descriure moviments, ja siguin en la recta, en el pla o en l'espai 3D.

Desplaçament a la recta real

Com descriuries el desplaçament d'un punt des de la posició x=2 a la posició x=4? i el desplaçament invers?

### Desplaçament al Pla 2D

Com descriuries el desplaçament rectilini d'un punt des de la posició (2,1) a la (-3,2). I el desplaçament contrari? D óna dos punts inicial i final entre els quels hi hauria el mateix desplaçament.

### Desplaçament a l'espai 3D

Pots posar un exemple similar en l'espai 3D?

#### En general:

Desplaçament a la recta real

El vector desplaçament entre la posició inicial A i la final B es defineix com  $\overrightarrow{AB} = B - A$ 

Desplaçament al Pla 2D

El vector desplaçament entre la posició inicial  $A=(x_1,y_1)$  i la final  $B(x_2,y_2)$  es defineix com  $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$ 

Desplaçament a l'espai 3D

El vector desplaçament entre la posició inicial  $A=(x_1,y_1,z_1)$  i la final  $B=(x_2,y_2,z_2)$  es defineix com  $\vec{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ 

Cada escalar del vector s'anomena component

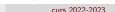




ex:pla2 Donats els punts A(1,1), B=(0,-1) i el vector  $\vec{u}=(2,4)$ 

- Calcula els vectors que van des de l'origen de coordenades cap a cadascun dels punts A i B (pregunta trampa...).
- 2 Calcula i dibuixa  $\overrightarrow{AB}$ .
- **3** Calcula i dibuixa  $\overrightarrow{BA}$ .
- Si  $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ , quina posició és *C*?
- **5** Si  $\vec{u} = \overrightarrow{CB}$ , quina posició és *C*?
- Dóna una altres dos punts A i B que tinguin el mateix vector desplaçament AB.





Els desplaçaments, doncs, es representen amb vectors, quines principals característiques són:

- Tenen una direcció.
- Tenen un sentit.
- Tenen una intensitat, anomenada norma o mòdul del vector, que és la distància entre la posició inicial i la final:

$$||\overrightarrow{AB}|| = d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$
 (7)

si  $A = (x_1, y_1)$  i  $B = (x_2, y_2)$  són dos punts en el pla.

Calcula la norma del vector d' $\mathbb{R}^5$  (1, -2, -3, 0, 2).

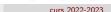




ex:pla3 Donats el punt A(1,1) i els vectors  $\vec{u}=(2,4)$ ,  $\vec{v}=(0,-3)$ :

- Aplica al punt A el desplaçament  $\vec{u}$ , i al nou punt trobat el desplaçament  $\vec{v}$ . Quin és el vector desplaçament des d'A a la posició final?
- Repeteix l'exercise canviant l'ordre dels desplaçaments.
- **3** Aplica al punt A el desplaçament  $\vec{u}$ , i al nou punt trobat el desplaçament  $\vec{u}$  novament. Quin és el vector desplaçament des d'A a la posició final?





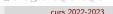


UVIC | UVIC-UCC

La suma de vectors és commutativa.

A partir d'ara considerarem els vectors com a entitats pròpies, més enllà del concepte de desplaçament.





# Espais vectorials

Considerem el conjunt de tots els possibles vectors al pla amb origen a (0,0). En realitat, es tracta de tots els parells ordenats de nombres reals: el conjunt  $\mathbb{R}^2$ .

El conjunt de tots els vectors de  $\mathbb{R}^2$ , amb les operacions definides per a qualsevol parell de vectors  $\vec{u}=(u_1,u_2)$  i  $\vec{v}=(v_1,v_2)$ , i qualsevol nombre real  $\lambda$  de la següent manera

- **1** Suma (interna)  $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ , i
- **2** Producte per escalar (externa)  $\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2)$

satisfà les propietats següents  $\forall \lambda, \gamma \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ :

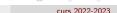




- **1** Propietat commutativa de l'operació interna:  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- ② Propietat associativa de l'operació interna:  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- **3** Existeix un element neutre  $\vec{e}$  tal que  $\vec{u} + \vec{e} = \vec{u}$
- **9** Existeix un element oposat  $-\vec{u}$  per a cada vector  $\vec{u}$  tal que  $-\vec{u} + \vec{u} = \vec{e}$
- $(\lambda + \gamma) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \gamma \cdot \vec{u}$
- **1** Existeix un element neutre  $e \in \mathbb{R}$  tal que  $e \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Qui són  $\vec{e}$  (a  $\mathbb{R}^2$ ) i e? Passa el mateix a  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{R}^3$ ? I a  $\mathbb{R}^n$ ?





#### Definició

Un conjunt d'elements (anomenats vectors) amb dues operacions externa i interna que satisfan les 8 propietats anteriors s'anomena **espai vectorial** (sobre el cos escalar dels nombres reals)

 $\mathbb{R}$  ,  $\mathbb{R}^2$  i  $\mathbb{R}^3$  són espais vectorials sobre  $\mathbb{R}.$ 

Comprova que el conjunt dels polinomis de grau 2 és un espai vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .



#### Definició

Un vector  $\vec{u}$  és una **combinació lineal** dels vectors  $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$  si existeixen nombres reals  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  que satisfan:

$$\vec{u} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{v_n}$$

- a) Troba els valors dels coeficients si  $\vec{u}=(2,1)$  i  $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\}=\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}=\{(1,0),(0,1)\}$ . b) i si  $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\}=\{(2,1),(-2,1)\}$ ? Agafant els vectors de l'exercise anterior:
- Pots escriure  $\overrightarrow{e_2}$  en funció de  $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ ?
  - ② Pots escriure  $\overrightarrow{e_1}$  en funció de  $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ ?
  - **3** Pots escriure  $\overrightarrow{v_2}$  en funció de  $\{\overrightarrow{e_1}\}$ ?
  - Com són els vectors que es poden escriure com a combinació lineal de  $\overrightarrow{e_1}$ ?





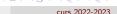
# Dependència lineal

Els vectors  $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$  són **linealment dependents** si qualsevol d'ells es pot escriure com a combinació lineal de la resta. En cas contrari els anomenem **linealment independents** 

Amb els mateixos vectors anteriors:

- Són  $\overrightarrow{e_2}$ ,  $\overrightarrow{v_1}$  i  $\overrightarrow{v_2}$  linealment independents?
- ② Són  $\overrightarrow{e_1}$ ,  $\overrightarrow{v_1}$  i  $\overrightarrow{v_2}$  linealment independents?
- **3** Com són els vectors linealment dependents amb  $\overrightarrow{e_1}$ ?
- **9** Són  $\overrightarrow{e_1}$  i  $\overrightarrow{v_2}$  linealment independents?
- **5** Són  $\overrightarrow{e_1}$  i  $\overrightarrow{e_2}$  linealment independents?
- **6** Són  $\overrightarrow{v_1}$  i  $\overrightarrow{v_2}$  linealment independents?





# Vectors generadors

Els vectors  $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$  són generadors de l'espai vectorial al qual pertanyen quan qualsevol vector de l'espai es pot posar com a combinació lineal de  $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ .

Per indicar que  $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$  generen l'espai vectoria E, escrivim:

$$E = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n} \rangle.$$

Amb els mateixos vectors anteriors:

- **1** Comprova que  $\overrightarrow{e_1}$  i  $\overrightarrow{e_2}$  són generadors de  $\mathbb{R}^2$ .
- ② Comprova que  $\overrightarrow{e_1}$ ,  $\overrightarrow{v_1}$  i  $\overrightarrow{v_2}$  són generadors de  $\mathbb{R}^2$ .
- $\bullet \quad \text{Ho son } \overrightarrow{v_1} \text{ i } \overrightarrow{v_2}?$
- **1** Dóna exemples de conjunts de vectors d' $\mathbb{R}^2$  que generin altres vectors del mateix espai vectorial amb la forma  $\{(\alpha,0): \alpha \in \mathbb{R}\}.$
- **5** Comprova que el conjunt de vectors  $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$  genera  $\mathbb{R}^3$ .





# Base d'un espai vectorial

Els vectors  $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$  són una base de l'espai vectorial al qual pertanyen quan:

- 1 són generados de l'espai, i
- són linealment independents.
- **①** Comprova que  $\overrightarrow{e_1}$  i  $\overrightarrow{e_2}$  és una base de  $\mathbb{R}^2$ .
- ② Perquè  $\overrightarrow{e_1}$ ,  $\overrightarrow{v_1}$  i  $\overrightarrow{v_2}$  no són una base de  $\mathbb{R}^2$ ?
- **3** Formen una base de  $\mathbb{R}^2$  els vectors  $\overrightarrow{v_1}$  i  $\overrightarrow{v_2}$ ?
- **4** Quants vectors com a molt formen una base de  $\mathbb{R}^2$ ?
- $\bullet$  I d' $\mathbb{R}^3$ ?





# Dimensió d'un espai vectorial

En un espai vectorial hi ha infinites bases, però totes tenen el mateix nombre de vectors. la **dimensió** d'un espai vectorial és el nombre de vectors que es troben en una base.

- $\mathbb{R}$  té dimensió 1.
- $\mathbb{R}^2$  té dimensió 2.
- $\mathbb{R}^n$  té dimensió n.

Per exemple, la base canònica de  $\mathbb{R}^2$  és  $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}=\{(1,0),(0,1)\}.$ 





### Representació d'un vector en una base

Tot vector d'un espai vectorial es pot expressar com a combinació lineal dels vectors de qualsevol base. Les components d'un vector respecte a una base són els nombres reals que multipliquen cada vector de la base. Per exemple (veure exercise  $\ref{eq:condition}$ ), si  $\ref{u}=(2,1)$  la seva representació en dues bases diferents  $C=\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}=\{(1,0),(0,1)\}$ , i  $B=\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\}=\{(-1,1)_C,(3,3)_C\}$  seria:

$$\vec{u} = 2 \cdot \overrightarrow{e_1} + 1 \cdot \overrightarrow{e_2} = (2,1)_C = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$$
  
 $\vec{u} = \frac{-1}{2} \cdot \overrightarrow{v_1} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{v_2} = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})_B$ 

Observació: sovint anomenem  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  els vectors  $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}$  a  $\mathbb{R}^3$ . En general, és pràctic escriure  $\vec{u}$  com a  $\mathbf{u}$  per simplicitat.





### Supespai vectorial

#### Definició

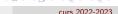
Un subconjunt de vectors d'un espai vectorial  $F \subset E$  forma un subespai vectorial si i només si:

- $\mathbf{0}$   $\vec{u} + \vec{v} \in F$ , sempre que  $\vec{u}, \vec{v} \in F$ , i
- ②  $\lambda \cdot \vec{u} \in F$ , sempre que  $\vec{u} \in F$  i  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Els subespais vectorials son també espais vectorials i, com a tals, tenen bases i dimensió.

A  $\mathbb{R}^2$  hi ha infinits subespais vectorials de dimensió 1 (infinites rectes que passen per l'origen en el pla).





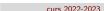
### A $\mathbb{R}^3$ :

- Quin és el pla generat per la base  $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}\}$ ?
- ② Com és el subespai generat per la base  $\{\overrightarrow{e_2}\}$ ?

L'equació 2x - 5y + 7z = 0 defineix un subespai vectorial a  $\mathbb{R}^3$ . Quina és la seva base? Què representa l'equació?

Quins d'aquests vectors formen una base d' $\mathbb{R}^2$ : (1,1),(1,2),(-1,2)?





### Sistemes de coordenades

#### Definició

*Un* **sistema de coordenades**  $[O; \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}]$  del producte cartesià  $\mathbb{R}^n$  està format per:

- ullet un punt  $O\in\mathbb{R}^n$ , anomenat origen i
- una base  $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$  de l'espai vectorial  $\mathbb{R}^n$ .

Si triem  $O = (0, 0, \dots, O)$  i la base canònica  $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$  s'anomenen **coordenades cartesianes** 

Les coordenades d'un punt A respecte el sistema de coordenades  $[O; \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}]$  són les components del vector  $\overrightarrow{OA}$  en la base  $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}.$ 





UVIC | UVIC-UCC

El dibuix representa el vector

$$\vec{a} = a_{x}\vec{i} + a_{y}\vec{j} + a_{z}\vec{k}$$

A  $\mathbb{R}^3$  és habitual representar la base canònica com a  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ .





#### ex:base

Considera el punt de coordenades cartesianes P = (2,1) a  $\mathbb{R}^2$ :

- Quines series les seves coordenades al sistema  $[O; \{\overrightarrow{v_1} = (-1,1)_C, \overrightarrow{v_2} = (3,3)_C\}]$ ?
- Quines series les seves coordenades al sistema  $[P: \{\overrightarrow{v_1} = (-1,1)_C, \overrightarrow{v_2} = (3,3)_C\}]?$







Resum de la solució a l'exercise:

$$(1,0) = \alpha(-1,1) + \beta(3,3)$$

amb resultat  $\alpha = -\frac{1}{2}$  i  $\beta = \frac{1}{5}$ ; i

$$(0,1) = \gamma(-1,1) + \delta(3,3)$$

amb resultat  $\gamma = \frac{1}{2}$  i  $\delta = \frac{1}{6}$ . i d'aquí:

$$(2,1) = 2 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1) = = -\frac{1}{2} \cdot (-1,1) + \frac{1}{2} \cdot (3,3)$$







#### Definició

Anomenem angle entre dues semirectes o segments amb un origen comú a la regió compresa entre ambdues semirectes o segments.



**FACULTAT** DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES

**FACULTAT** DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES

UVIC | UVIC-UCC



Mesurem els angles en graus (°) o en radiants. Un radiant és la rotació necessària per recórrer un arc de longitud igual al radi de la circumferència. Per tant, com que l'angle complet equvaldria a tota la circumferència és fàcil veure que  $360^\circ \equiv 2\pi rad$ .

Per jugar amb aquest concepte proveu d'anar a https://www.geogebra.org/m/kzc7rbNC.



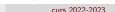
Mesura l'angle formen els següents parells de vectors:

- (2,0) i (0,5)
- (2,0) i (0,-5)
- (2,0) i (5,-5)

A  $\mathbb{R}^3$ , l'angle entre dos vectors es mesura damunt del pla que formen. Mesura l'angle formen els següents parells de vectors:

- (2,0,1) i (0,5,0)
- (2,0,0) i (0,-5,0)
- (2,0,0) i (5,-5,5)





Està clar que en general no és tan trivial i cal fer ús de l'operació producte escalar, que definim com:

#### Definició

S'anomena **producte escalar** de dos vectors d' $\mathbb{R}^n$ , definits per  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  i  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , al nombre real:

$$\vec{u}\cdot\vec{(v)}=u_1\cdot v_1+u_1\cdot v_1+\cdots+u_1\cdot v_1.$$

Es pot demostrar que si els vectors formen un angle  $\theta$ , aleshores

$$\vec{u} \cdot (\vec{v}) = ||\vec{u}|| \cdot ||(\vec{v})|| \cdot \cos \theta$$

i, per tant

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot (\vec{v})}{||\vec{u}|| \cdot ||(\vec{v})||}$$

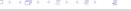




Quin angle formen els vectors d' $\mathbb{R}^3$  (1,1,1) i (-1,1,-1)? Quan ha de valer k perque els vectors (1,k,1) i (-1,1,-1) siguin paral·lels? i perpendiculars?

Troba l'àrea del triangle delimitat pels vèrtex (1,1), (4,5), (1,2).





# Coordenades polars

Gràcies als angles podem descriure qualsevol posició al pla amb les anomenades **coordenades polars**:  $(r, \varphi)$ , on

- r és la distància del punt a l'origen de coordenades i
- l'angle  $\varphi$  és el format pel vector i l'eix de les abcissses

Pots tafanejar aquesta URL: https://www.geogebra.org/m/WTJq9yC9







La conversió a coordenades cartesianes és:

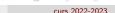
$$x = r \cdot \cos \varphi$$
$$y = r \cdot \sin \varphi$$

i d'aquí podem treure la conversió contrària:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = \arctan \frac{y}{x}$$

on caldrà tenir en compte el quadrant alhora de calcular l'arctangent.





Si enlloc d' $\mathbb{R}^2$  treballem sobre  $\mathbb{R}^3$  ja no parlarem de coordenades polars sinó esfèriques,  $(\rho, \varphi, \theta)$ , on

$$x = \rho \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta$$
$$y = \rho \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta$$

$$z = \rho \cdot \cos \varphi$$





