Sistemes de coordenades i espais vectorials: introducció als vectors

Jordi Villà i Freixa

Universitat de Vic - Universitat Central de Catalunya
Grau en Multimèdia. Aplicacions i Videojocs

jordi.villa@uvic.cat

curs 2022-2023

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC-UCC

Índex

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC-UCC

Introducció al curs

El material d'aquestes presentacions està basat en anteriors presentacions i apunts d'altres professors [**?**, **?**, **?**] de la UVic-UCC, pàgines web diverses (normalment enllaçades des del text), així com monografies [**?**, **?**, **?**].

Perquè necessitem els nombres reals

- Per a descriure el món, cal mesurar magnituds
- Per a comprendre'l, cal conèixer com es relacionen les magnituds
- Per a saber com es relacionen les magnituds, cal generar models

$$\mathbb{C}\ \textit{Complexos}\begin{cases}\mathbb{R} & \textit{Reals}\begin{cases}\mathbb{Q} & \textit{Racionals}\begin{cases}\mathbb{Z} & \textit{Enters}\begin{cases}\mathbb{N} & \textit{Naturals}\\ & \textit{Zero}\\ & \textit{Enters negatius}\end{cases}\\ \mathbb{Q}-\mathbb{Z} & \textit{Fraccionaris}\end{cases}\\ \mathbb{R}-\mathbb{Q} & \textit{Irracionals}\end{cases}\\ \mathbb{I} & \textit{Imaginaris}\end{cases} \tag{1}$$

exercises

- Escriu equacions polinòmiques amb coeficients enters que tinguin com a solucions nombres naturals, enters, racionals, irracionals (*algebraics*)
- Escriu una equació polinòmica amb coeficients enters que tingui com a solució el número π (*transcendent*)
- Troba una equació polinòmica amb coeficients constants sense cap nombre real com a solució

Nombres discrets vs nombres continus

- $\mathbb{Z}$ és un conjunt de nombres discrets: donat un enter, sempre hi ha un enter consecutiu. Exemple: el codi binari, $0, 1$.
- Un conjunt de números es diu que és continu si poden prendre qualsevol valor en un interval finit o infinit. Exemples: $]3, 5]$, $(-\inf, 0)$. El món no és discret, sinó **mesurable**! Per tant, no podem parlar de dos nombres reals consecutius.

[redacted]

Els nombres reals es representen damunt una recta, la recta real.

Propietat de la recta real

- Necessitem una referència per anomenar els punts de la recta: fixarem un orígen (el 0) i una escala (1)
- La recta està ordenada
- És infinita
- els intèrvals i semirectes són parts de la recta:

$$\begin{aligned} [a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\ (a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\ [a,\infty] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \\ (-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \end{aligned} \tag{2}$$

- La distància entre nombres reals és $d(a,b) = |b-a|$.

El pla 2D

- Fem el salt a dues dimensions. Ncessitarem referenciar els punts en un pla.
- René Descartes (1590-1650) va posar les bases matemàtiques per a poder fer-ho: el producte cartesià $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, consistent en el conjunt de parells (ordenats) de nombres reals:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} \tag{3}$$

El pla 2D

- Com fèiem amb la recta, usem una referència per identificar els punts del pla: fixem un origen $(0,0)$ i dos punts que ens donguin l'escala horitzontal i vertical: $\{(1,0),(0,1)\}$.
- Els eixos d'abcisses i ordenades venen determinats per les rectes $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0\}$ i $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0\}$, respectivament.

FACULTAT
DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA
I ENGINYERIES
UVIC | UVIC·UCC

El pla 2D

- Podem definir els quatre quadrants del pla com:

$$Q1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$$
$$Q2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \geq 0\}$$
$$Q3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \leq 0\}$$
$$Q4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0\}$$

- La distància euclídea:

$$d\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{4}$$

L'Espai 3D

- El nostre interès és l'espai tridimensional, que ens apropa a la realitat (escultura, holografia, impressió-3D, animació 3D...).
- L'espai 3D és el conjunt de tríos de nombres reals:

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\} \tag{5}$$

- Triem un origen $(0, 0, 0)$ i tres punts més que ens donen les tres escales, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$
- podem definir eixos (per exemple l'eix Z es defineix com $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y = 0\}$) o plans (l'Eix XY vidra definit per $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$).
- La distància euclídea:

$$d\left((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\right) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \tag{6}$$

Desplaçament i vectors

El nostre interès és descriure moviments, ja siguin en la recta, en el pla o en l'espai 3D.

[redacted]

Com descriuries el desplaçament d'un punt des de la posició $x = 2$ a la posició $x = 4$? i el desplaçament invers?

[redacted]

Com descriuries el desplaçament rectilini d'un punt des de la posició $(2, 1)$ a la $(-3, 2)$. I el desplaçament contrari? D óna dos punts inicial i final entre els quels hi hauria el mateix desplaçament.

[redacted]

Pots posar un exemple similar en l'espai 3D?

En general:

[redacted]

El vector desplaçament entre la posició inicial A i la final B es defineix com $\vec{AB} = B - A$

[redacted]

El vector desplaçament entre la posició inicial $A = (x_1, y_1)$ i la final $B(x_2, y_2)$ es defineix com $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

[redacted]

El vector desplaçament entre la posició inicial $A = (x_1, y_1, z_1)$ i la final $B = (x_2, y_2, z_2)$ es defineix com $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Cada escalar del vector s'anomena component