Sistemes de coordenades i espais vectorials: introducció als vectors

Jordi Villà i Freixa

Universitat de Vic - Universitat Central de Catalunya
Grau en Multimèdia. Aplicacions i Videojocs

jordi.villa@uvic.cat

curs 2022-2023

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC-UCC

Índex

Introducció al curs

El material d'aquestes presentacions està basat en anteriors presentacions i apunts d'altres professors [**?**, **?**, **?**] de la UVic-UCC, pàgines web diverses (normalment enllaçades des del text), així com monografies [**?**, **?**, **?**].

Perquè necessitem els nombres reals

- Per a descriure el món, cal mesurar magnituds
- Per a comprendre'l, cal conèixer com es relacionen les magnituds
- Per a saber com es relacionen les magnituds, cal generar models

$$\mathbb{C}\ \textit{Complexos} \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{Reals} \begin{cases} \mathbb{Q} & \textit{Racionals} \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{Enters} \begin{cases} \mathbb{N} & \textit{Naturals} \\ & \textit{Zero} \\ & \textit{Enters negatius} \end{cases} \\ \mathbb{Q}-\mathbb{Z} & \textit{Fraccionaris} \end{cases} \\ \mathbb{R}-\mathbb{Q} & \textit{Irracionals} \end{cases} \\ \mathbb{I} & \textit{Imaginaris} \end{cases} \tag{1}$$

exercises

- Escriu equacions polinòmiques amb coeficients enters que tinguin com a solucions nombres naturals, enters, racionals, irracionals (*algebraics*)
- Escriu una equació polinòmica amb coeficients enters que tingui com a solució el número π (*transcendent*)
- Troba una equació polinòmica amb coeficients constants sense cap nombre real com a solució

Nombres discrets vs nombres continus

- $\mathbb{Z}$ és un conjunt de nombres discrets: donat un enter, sempre hi ha un enter consecutiu. Exemple: el codi binari, $0, 1$.
- Un conjunt de números es diu que és continu si poden prendre qualsevol valor en un interval finit o infinit. Exemples: $]3, 5]$, $(-\inf, 0)$. El món no és discret, sinó **mesurable**! Per tant, no podem parlar de dos nombres reals consecutius.

La recta real

Els nombres reals es representen damunt una recta, la recta real.

Propietat de la recta real

- Necessitem una referència per anomenar els punts de la recta: fixarem un orígen (el 0) i una escala (1)
- La recta està ordenada
- És infinita
- els intèrvals i semirectes són parts de la recta:

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\ (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\ [a, \infty] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \\ (-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \end{aligned} \tag{2}$$

- La distància entre nombres reals és $d(a, b) = |b - a|$.

El pla 2D

- Fem el salt a dues dimensions. Ncessitarem referenciar els punts en un pla.
- René Descartes (1590-1650) va posar les bases matemàtiques per a poder fer-ho: el producte cartesià $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, consistent en el conjunt de parells (ordenats) de nombres reals:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} \tag{3}$$

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES UVIC | UVIC-UCC

El pla 2D

- Com fèiem amb la recta, usem una referència per identificar els punts del pla: fixem un origen $(0,0)$ i dos punts que ens donguin l'escala horitzontal i vertical: $\{(1,0),(0,1)\}$.
- Els eixos d'abcisses i ordenades venen determinats per les rectes $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0\}$ i $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0\}$, respectivament.

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC·UCC

El pla 2D

- Podem definir els quatre quadrants del pla com:

$$Q1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$$
$$Q2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \geq 0\}$$
$$Q3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \leq 0\}$$
$$Q4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0\}$$

- La distància euclídea:

$$d\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (4)$$

L'Espai 3D

- El nostre interès és l'espai tridimensional, que ens apropa a la realitat (escultura, holografia, impressió-3D, animació 3D...).
- L'espai 3D és el conjunt de tríos de nombres reals:

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\} \tag{5}$$

- Triem un origen $(0, 0, 0)$ i tres punts més que ens donen les tres escales, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$
- podem definir eixos (per exemple l'eix Z es defineix com $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y = 0\}$) o plans (l'Eix XY vidra definit per $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$).
- La distància euclídea:

$$d\left((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\right) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \tag{6}$$

Desplaçament i vectors

El nostre interès és descriure moviments, ja siguin en la recta, en el pla o en l'espai 3D.

Desplaçament a la recta real

Com descriuries el desplaçament d'un punt des de la posició $x = 2$ a la posició $x = 4$? i el desplaçament invers?

Desplaçament al Pla 2D

Com descriuries el desplaçament rectilini d'un punt des de la posició $(2, 1)$ a la $(-3, 2)$. I el desplaçament contrari? D óna dos punts inicial i final entre els quels hi hauria el mateix desplaçament.

Desplaçament a l'espai 3D

Pots posar un exemple similar en l'espai 3D?

En general:

Desplaçament a la recta real

El vector desplaçament entre la posició inicial A i la final B es defineix com $\vec{AB} = B - A$

Desplaçament al Pla 2D

El vector desplaçament entre la posició inicial $A = (x_1, y_1)$ i la final $B(x_2, y_2)$ es defineix com $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Desplaçament a l'espai 3D

El vector desplaçament entre la posició inicial $A = (x_1, y_1, z_1)$ i la final $B = (x_2, y_2, z_2)$ es defineix com $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Cada escalar del vector s'anomena component ex:pla2 Donats els punts $A(1,1)$, $B=(0,-1)$ i el vector $\vec{u}=(2,4)$

1. Calcula els vectors que van des de l'origen de coordenades cap a cadascun dels punts A i B (pregunta trampa...).
2. Calcula i dibuixa $\overrightarrow{AB}$.
3. Calcula i dibuixa $\overrightarrow{BA}$.
4. Si $\vec{u}=\overrightarrow{AC}$, quina posició és C?
5. Si $\vec{u}=\overrightarrow{CB}$, quina posició és C?
6. Dóna una altres dos punts A i B que tinguin el mateix vector desplaçament $\overrightarrow{AB}$.

Els desplaçaments, doncs, es representen amb vectors, quines principals característiques són:

- Tenen una direcció.
- Tenen un sentit.
- Tenen una intensitat, anomenada **norma** o **mòdul** del vector, que és la distància entre la posició inicial i la final:

$$||\overrightarrow{AB}|| = d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{7}$$

  si $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$ són dos punts en el pla.

Calcula la norma del vector d'$\mathbb{R}^5$ $(1, -2, -3, 0, 2)$.

ex:pla3 Donats el punt $A(1,1)$ i els vectors $\vec{u}=(2,4)$, $\vec{v}=(0,-3)$:

1. Aplica al punt A el desplaçament $\vec{u}$, i al nou punt trobat el desplaçament $\vec{v}$. Quin és el vector desplaçament des d'A a la posició final?
2. Repeteix l'exercise canviant l'ordre dels desplaçaments.
3. Aplica al punt A el desplaçament $\vec{u}$, i al nou punt trobat el desplaçament $\vec{u}$ novament. Quin és el vector desplaçament des d'A a la posició final?

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC-UCC

La suma de vectors és commutativa.
A partir d'ara considerarem els vectors com a entitats pròpies, més enllà del concepte de desplaçament.

Espais vectorials

Considerem el conjunt de tots els possibles vectors al pla amb origen a $(0,0)$. En realitat, es tracta de tots els parells ordenats de nombres reals: el conjunt $\mathbb{R}^2$.

El conjunt de tots els vectors de $\mathbb{R}^2$, amb les operacions definides per a qualsevol parell de vectors $\vec{u}=(u_1,u_2)$ i $\vec{v}=(v_1,v_2)$, i qualsevol nombre real λ de la següent manera

1. **Suma** (interna) $\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2)$, i
2. **Producte per escalar** (externa) $\lambda\cdot\vec{u}=(\lambda u_1,\lambda u_2)$

satisfà les propietats següents $\forall\lambda,\gamma\in\mathbb{R},\forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^2$:

1. Propietat commutativa de l'operació interna: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
2. Propietat associativa de l'operació interna: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
3. Existeix un element neutre $\vec{e}$ tal que $\vec{u}+\vec{e}=\vec{u}$
4. Existeix un element oposat $-\vec{(u)}$ per a cada vector $\vec{u}$ tal que $-\vec{u}+\vec{u}=\vec{e}$
5. $\lambda\cdot(\gamma\cdot\vec{u})=(\lambda\gamma)\cdot\vec{u}$
6. $(\lambda+\gamma)\cdot\vec{u}=\lambda\cdot\vec{u}+\gamma\cdot\vec{u}$
7. $\lambda\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\cdot\vec{u}+\lambda\cdot\vec{v}$
8. Existeix un element neutre $e\in\mathbb{R}$ tal que $e\cdot\vec{u}=\vec{u}$

Qui són $\vec{e}$ (a $\mathbb{R}^2$) i e? Passa el mateix a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^3$? I a $\mathbb{R}^n$?

Definició

Un conjunt d'elements (anomenats vectors) amb dues operacions externa i interna que satisfan les 8 propietats anteriors s'anomena **espai vectorial** *(sobre el cos escalar dels nombres reals)*

$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ són espais vectorials sobre $\mathbb{R}$.
Comprova que el conjunt dels polinomis de grau 2 és un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Definició

Un vector $\vec{u}$ és una **combinació lineal** *dels vectors $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ si existeixen nombres reals $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ que satisfan:*

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} + \cdots \lambda_n \vec{v_n}$$

a) Troba els valors dels coeficients si $\vec{u} = (2, 1)$ i $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$. b) i si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\} = \{(2, 1), (-2, 1)\}$?
Agafant els vectors de l'exercise anterior:

1. Pots escriure $\vec{e_2}$ en funció de $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$?
2. Pots escriure $\vec{e_1}$ en funció de $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$?
3. Pots escriure $\vec{v_2}$ en funció de $\{\vec{e_1}\}$?
4. Com són els vectors que es poden escriure com a combinació lineal de $\vec{e_1}$?

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC·UCC

Dependència lineal

Els vectors $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ són **linealment dependents** si qualsevol d'ells es pot escriure com a combinació lineal de la resta. En cas contrari els anomenem **linealment independents**

Amb els mateixos vectors anteriors:

1. Són $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ linealment independents?
2. Són $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ linealment independents?
3. Com són els vectors linealment dependents amb $\overrightarrow{e_1}$?
4. Són $\overrightarrow{e_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ linealment independents?
5. Són $\overrightarrow{e_1}$ i $\overrightarrow{e_2}$ linealment independents?
6. Són $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ linealment independents?

Vectors generadors

Els vectors $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ són generadors de l'espai vectorial al qual pertanyen quan qualsevol vector de l'espai es pot posar com a combinació lineal de $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$.
Per indicar que $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ generen l'espai vectoria E, escrivim: $E = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n} \rangle$.
Amb els mateixos vectors anteriors:

1. Comprova que $\overrightarrow{e_1}$ i $\overrightarrow{e_2}$ són generadors de $\mathbb{R}^2$.
2. Comprova que $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ són generadors de $\mathbb{R}^2$.
3. Ho són $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$?
4. Dóna exemples de conjunts de vectors d'$\mathbb{R}^2$ que generin altres vectors del mateix espai vectorial amb la forma $\{(\alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.
5. Comprova que el conjunt de vectors $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ genera $\mathbb{R}^3$.

Base d'un espai vectorial

Els vectors $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ són una base de l'espai vectorial al qual pertanyen quan:

1. són generados de l'espai, i
2. són linealment independents.

1. Comprova que $\overrightarrow{e_1}$ i $\overrightarrow{e_2}$ és una base de $\mathbb{R}^2$.
2. Perquè $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ no són una base de $\mathbb{R}^2$?
3. Formen una base de $\mathbb{R}^2$ els vectors $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$?
4. Quants vectors com a molt formen una base de $\mathbb{R}^2$?
5. I d'$\mathbb{R}^3$?

Dimensió d'un espai vectorial

En un espai vectorial hi ha infinites bases, però totes tenen el mateix nombre de vectors. la **dimensió** d'un espai vectorial és el nombre de vectors que es troben en una base.

- $\mathbb{R}$ té dimensió 1.
- $\mathbb{R}^2$ té dimensió 2.
- $\mathbb{R}^n$ té dimensió n.

Per exemple, la **base canònica** de $\mathbb{R}^2$ és $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\} = \{(1,0),(0,1)\}$.

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES UVIC | UVIC-UCC

Representació d'un vector en una base

Tot vector d'un espai vectorial es pot expressar com a combinació lineal dels vectors de qualsevol base. Les components d'un vector respecte a una base són els nombres reals que multipliquen cada vector de la base.
Per exemple (veure exercise **??**), si $\overrightarrow{u} = (2,1)$ la seva representació en dues bases diferents $C = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\} = \{(1,0),(0,1)\}$, i
$B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\} = \{(-1,1)_C,(3,3)_C\}$ seria:

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= 2\cdot\overrightarrow{e_1} + 1\cdot\overrightarrow{e_2} = (2,1)_C = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} \\
\vec{u} &= \frac{-1}{2}\cdot\overrightarrow{v_1} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{v_2} = (\frac{-1}{2},\frac{1}{2})_B
\end{aligned}$$

Observació: sovint anomenem $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ els vectors $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}$ a $\mathbb{R}^3$. En general, és pràctic escriure $\vec{u}$ com a $\mathbf{u}$ per simplicitat.

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC-UCC

Supespai vectorial

Definició

Un subconjunt de vectors d'un espai vectorial $F \subset E$ forma un subespai vectorial si i només si:

1. $\vec{u} + \vec{v} \in F$, *sempre que* $\vec{u}, \vec{v} \in F$, *i*
2. $\lambda \cdot \vec{u} \in F$, *sempre que* $\vec{u} \in F$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Els subespais vectorials son també espais vectorials i, com a tals, tenen bases i dimensió.

A $\mathbb{R}^2$ hi ha infinits subespais vectorials de dimensió 1 (infinites rectes que passen per l'origen en el pla).

A $\mathbb{R}^3$:

1. Quin és el pla generat per la base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}\}$?
2. Com és el subespai generat per la base $\{\overrightarrow{e_2}\}$?

L'equació $2x - 5y + 7z = 0$ defineix un subespai vectorial a $\mathbb{R}^3$. Quina és la seva base? Què representa l'equació?

Quins d'aquests vectors formen una base d'$\mathbb{R}^2$: $(1, 1), (1, 2), (-1, 2)$?

Sistemes de coordenades

Definició

Un **sistema de coordenades** $[O; \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}]$ *del producte cartesià* $\mathbb{R}^n$ *està format per:*

- *un punt* $O \in \mathbb{R}^n$*, anomenat origen i*
- *una base* $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ *de l'espai vectorial* $\mathbb{R}^n$*.*

Si triem $O = (0, 0, \ldots, O)$ i la base canònica $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ s'anomenen **coordenades cartesianes**

Les coordenades d'un punt A respecte el sistema de coordenades $[O; \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}]$ són les components del vector $\overrightarrow{OA}$ en la base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$.

El dibuix representa el vector

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

A $\mathbb{R}^3$ és habitual representar la base canònica com a $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

ex:base

Considera el punt de coordenades cartesianes $P = (2, 1)$ a $\mathbb{R}^2$:

1. Quines series les seves coordenades al sistema $[O; \{\overrightarrow{v_1} = (-1, 1)_C, \overrightarrow{v_2} = (3, 3)_C\}]$?
2. Quines series les seves coordenades al sistema $[P; \{\overrightarrow{v_1} = (-1, 1)_C, \overrightarrow{v_2} = (3, 3)_C\}]$?

Resum de la solució a l'exercise:

$$(1,0) = \alpha(-1,1) + \beta(3,3)$$

amb resultat $\alpha = -\frac{1}{2}$ i $\beta = \frac{1}{6}$; i

$$(0,1) = \gamma(-1,1) + \delta(3,3)$$

amb resultat $\gamma = \frac{1}{2}$ i $\delta = \frac{1}{6}$. i d'aquí:

$$\begin{aligned}(2,1) &= 2\cdot(1,0) + 1\cdot(0,1) = \\ &= -\frac{1}{2}\cdot(-1,1) + \frac{1}{2}\cdot(3,3)\end{aligned}$$

Definició

Anomenem angle entre dues semirectes o segments amb un origen comú a la regió compresa entre ambdues semirectes o segments.

FACULTAT
DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA
I ENGINYERIES
UVIC | UVIC-UCC

FACULTAT
DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA
I ENGINYERIES
UVIC | UVIC-UCC

Mesurem els angles en graus ($^\circ$) o en radiants. Un radiant és la rotació necessària per recórrer un arc de longitud igual al radi de la circumferència. Per tant, com que l'angle complet equvaldria a tota la circumferència és fàcil veure que $360^\circ \equiv 2\pi rad$.
Per jugar amb aquest concepte proveu d'anar a `https://www.geogebra.org/m/kzc7rbNC`.

Mesura l'angle formen els següents parells de vectors:

- $(2, 0)$ i $(0, 5)$
- $(2, 0)$ i $(0, -5)$
- $(2, 0)$ i $(5, -5)$

A $\mathbb{R}^3$, l'angle entre dos vectors es mesura damunt del pla que formen.
Mesura l'angle formen els següents parells de vectors:

- $(2, 0, 1)$ i $(0, 5, 0)$
- $(2, 0, 0)$ i $(0, -5, 0)$
- $(2, 0, 0)$ i $(5, -5, 5)$

Està clar que en general no és tan trivial i cal fer ús de l'operació producte escalar, que definim com:

Definició

S'anomena **producte escalar** *de dos vectors d'*$\mathbb{R}^n$*, definits per* $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *i* $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$*, al nombre real:*

$$\vec{u} \cdot \vec{(v)} = u_1 \cdot v_1 + u_1 \cdot v_1 + \cdots + u_1 \cdot v_1.$$

Es pot demostrar que si els vectors formen un angle θ, aleshores

$$\vec{u} \cdot \vec{(v)} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{(v)}|| \cdot \cos\theta$$

i, per tant

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{(v)}}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{(v)}||}$$

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC-UCC

Quin angle formen els vectors d'$\mathbb{R}^3$ $(1,1,1)$ i $(-1,1,-1)$?
Quan ha de valer k perque els vectors $(1,k,1)$ i $(-1,1,-1)$ siguin paral·lels? i perpendiculars?
Troba l'àrea del triangle delimitat pels vèrtex $(1,1),(4,5),(1,2)$.

Coordenades polars

Gràcies als angles podem descriure qualsevol posició al pla amb les anomenades **coordenades polars**: (r, φ), on

- r és la distància del punt a l'origen de coordenades i
- l'angle φ és el format pel vector i l'eix de les abcissses

Pots tafanejar aquesta URL: `https://www.geogebra.org/m/WTJq9yC9`

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC·UCC

La conversió a coordenades cartesianes és:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\varphi \\ y &= r \cdot \sin\varphi \end{aligned}$$

i d'aquí podem treure la conversió contrària:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= \arctan\frac{y}{x} \end{aligned}$$

on caldrà tenir en compte el quadrant alhora de calcular l'arctangent.

Si enlloc d'$\mathbb{R}^2$ treballem sobre $\mathbb{R}^3$ ja no parlarem de coordenades polars sinó esfèriques, (ρ, φ, θ), on

$$
\begin{aligned}
x &= \rho \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta \\
y &= \rho \cdot \sin\varphi \cdot sin\theta \\
z &= \rho \cdot \cos\varphi
\end{aligned}
$$