Exercicis Resolts

MATEMÀTIQUES

Graus en Biologia i Biotecnologia

FACULTAT
DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA
I ENGINYERIES
UVIC | UVIC-UCC [1]

Jordi Villà i Freixa

Darrera modificació: 16 d'octubre de 2024

[1]Adreça electrònica: jordi.villa@uvic.cat

Taula de continguts

0.1 Models matemàtics

provant celůla

0.1.1 Models discrets

Ex. 1 — Considerem una població de ratolins que es troba en una illa deserta. La població inicial de ratolins és de 100 individus. La taxa de creixement natural anual és del 30% ($r = 0.30$).
Es vol determinar el temps necessari perquè la població arribi a 1 milió de ratolins en dos casos:

- **Sense aportacions externes:** Només es considera el creixement natural de la població.
- **Amb aportacions externes:** Cada any arriben 20 ratolins nous a més del creixement natural.

Answer (Ex. 1) — Sense Aportacions Externes
La població en temps t es modela amb l'equació de creixement exponencial:

$$P(t) = P_0 \cdot (1 + r)^t$$

ja que cada pas implica:

$$P(t + 1) = P(t) \cdot (1 + r)$$

On:

- $P_0 = 100$ (població inicial)
- $r = 0.30$ (taxa de creixement)
- $P(t) = 1{,}000{,}000$ (població objectiu)

Per trobar el temps t necessari per arribar a 1 milió de ratolins, resolem:

$$1{,}000{,}000 = 100 \cdot (1.30)^t$$

$$10{,}000 = (1.30)^t$$

Aplicant logaritmes:

$$\ln(10{,}000) = t \cdot \ln(1.30)$$

$$t = \frac{\ln(10{,}000)}{\ln(1.30)} \approx \frac{9.21034}{0.26236} \approx 35.11$$

Per tant, el temps necessari és aproximadament **35 anys**.

Amb Aportacions Externes

Amb aportacions externes, la població es modela amb l'equació:

$$P(t+1) = P(t) \cdot (1+r) + A$$

o bé

$$P(t) = P_0 \cdot (1+r)^t + A \cdot \frac{(1+r)^t - 1}{r}$$

On:

- $P_0 = 100$ (població inicial)
- $r = 0.30$ (taxa de creixement)
- $A = 20$ (aportacions externes)
- $P(t) = 1{,}000{,}000$ (població objectiu)

Utilitzant un enfocament iteratiu, s'ha de trobar el temps t per al qual la població supera 1 milió de ratolins. En aquest cas, el càlcul és:

$$P(t) = 100 \cdot (1.30)^t + 20 \cdot \frac{(1.30)^t - 1}{0.30}$$

Després de calcular iterativament, es troba que el temps necessari és aproximadament **34 anys**.

El següent gràfic mostra l'evolució de la població amb i sense aportacions externes al llarg del temps:

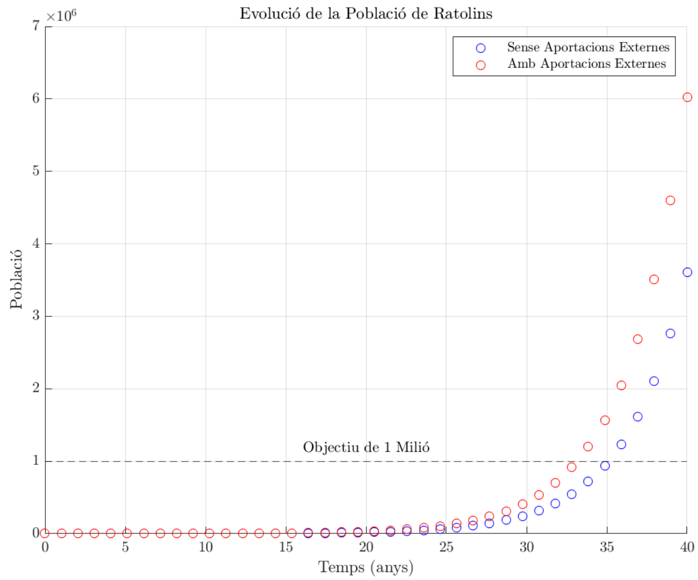


Figura 1: Evolució de la població de ratolins amb i sense aportacions externes. La línia horitzontal indica l'objectiu de 1 milió de ratolins.

■

0.2 Fonaments i espais vectorials

0.2.1 Els nombres reals

Ex. 2 — Escriu una equació de cada cas:

(1) Escriu equacions polinòmiques amb coeficients enters que tinguin com a solucions nombres naturals, enters, racionals, irracionals (*algebraics*)

(2) Escriu una equació polinòmica amb coeficients enters que tingui com a solució el número π (*transcendent*)

(3) Troba una equació polinòmica amb coeficients constants sense cap nombre real com a solució

Answer (Ex. 2) — (1) Intuitivament, una equació algebraica és aquella en la que es pot trobar la resposta usant operacions algebraiques: addició, multipliació i extracció d'arrel.

$$2x - 1 = 0,\ x = \frac{1}{2}$$

o bé

$$x^2 - 2 = 0,\ x = \pm\sqrt{2}$$

(2) Una equació transcendent, "transcedeix" l'àlgebra i s'han d'usar altres operacions. Per exemple, les funcions exponencials, algorítmiques o trigonomètriques. Per definició, un número real α és transcendent si no és algebraic. És a dir, si no existeix cap polinomi amb coeficients enters de manera que α en sigui una arrel. Per tant, la pregunta no té resposta, ja que no podem construir un polinomi amb solució π. La demostració és complicada i la deixo com a lectura avançada.

(3) Ens passarà sempre que la solució impliqui haver de trobar l'arrel parella d'un número negatiu:

$$x^2 + 1 = 0,\ x = \pm\sqrt{-1}$$

que en el conjunt dels reals no té solució. Caldria resoldre-la en el conjunt dels números complexos:

$$x^2 + 1 = 0,\ x = \pm i$$

■

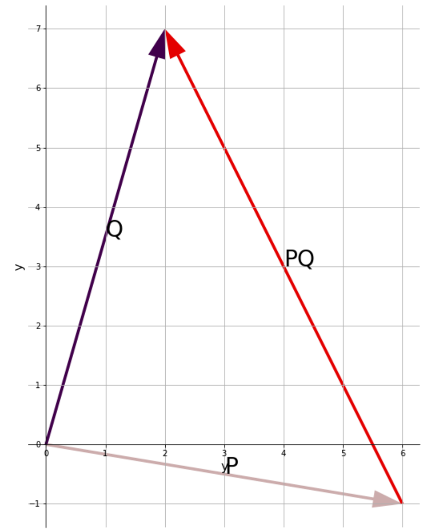
0.2.2 Vectors

Ex. 3 — El vector $\overrightarrow{PQ} = (-4, 8)$ té l'origen en el punt $P(6, -1)$. Determina les coordinades de l'extrem Q i el mòdul d'aquest vector.

Answer (Ex. 3) — Podem expressar el vector $\overrightarrow{PQ}$ com la diferència dels vectors que identifiquen els seus dos extrems:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P$$

$$\begin{aligned}(-4,8) &= Q-(6,-1)\\(-4,8)+(6,-1) &= Q\\(2,7) &= Q\end{aligned}$$



Pel que fa al mòdul:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(-4)^2+8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

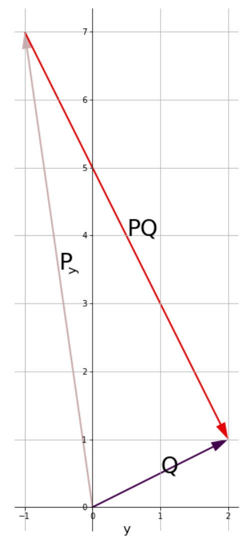
■

Ex. 4 — El vector $\overrightarrow{PQ} = (3,-6)$ té l'extrem en el punt $Q(2,1)$. Determina les coordenades de l'origen P i el mòdul d'aquest vector.

Answer (Ex. 4) — Podem expressar el vector $\overrightarrow{PQ}$ com la diferència dels vectors que identifiquen els seus dos extrems:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P$$

$$\begin{aligned} (3,-6) &= (2,1) - P \\ P = &= (2,1) - (3,-6) \\ P &= (-1,7) \end{aligned}$$



Pel que fa al mòdul:

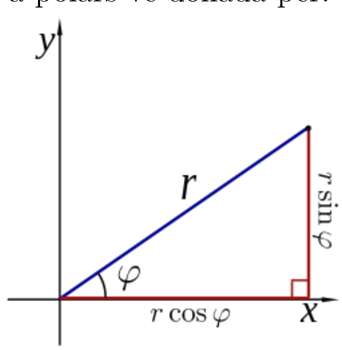
$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

■

Ex. 5 — Expressa en forma polar cadascun dels punts següents:

1.$(3,3)$
2.$(-\sqrt{3},3)$
3.$(-\sqrt{8},-\sqrt{8})$
4.$(6,-8)$

Answer (Ex. 5) — D'acord amb la imatge, el canvi de coordenades cartesianes a polars ve donada per:



$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \operatorname{atan} \frac{y}{x} \end{cases}$$

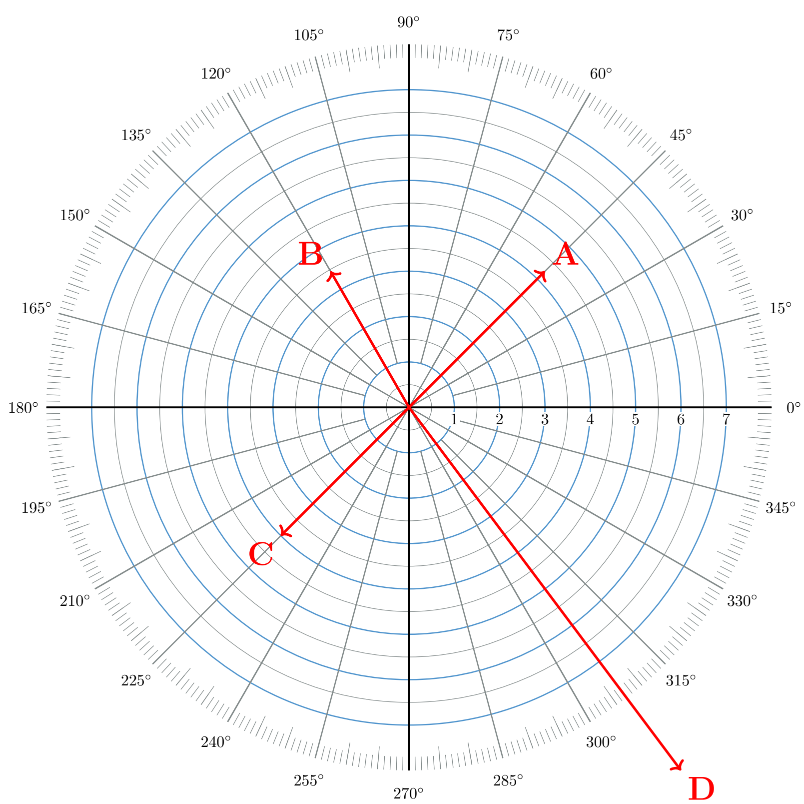
Per tant:

1.
$$\begin{cases} r = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} \\ \varphi = \operatorname{atan} 1 = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} r = \sqrt{-\sqrt{3}^2 + 3^2} = 2\sqrt{3} \\ \varphi = \operatorname{atan} -\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} r = \sqrt{-\sqrt{8}^2 + -\sqrt{8}^2} = 4 \\ \varphi = \operatorname{atan} \frac{-\sqrt{8}}{-\sqrt{8}} = -\frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} r = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10 \\ \varphi = \operatorname{atan} \frac{-8}{6} = 2.21\,\mathrm{rad} \end{cases}$$



■

Ex. 6 — Donats els punts $A(1,1)$, $B=(0,-1)$ i el vector $\vec{u}=(2,4)$

(1)Calcula els vectors que van des de l'origen de coordenades cap a cadascun dels punts A i B (pregunta trampa...).

(2)Calcula i dibuixa $\overrightarrow{AB}$.

(3)Calcula i dibuixa $\overrightarrow{BA}$.

(4)Si $\vec{u}=\overrightarrow{AC}$, quina posició és C?

(5)Si $\vec{u}=\overrightarrow{CB}$, quina posició és C?

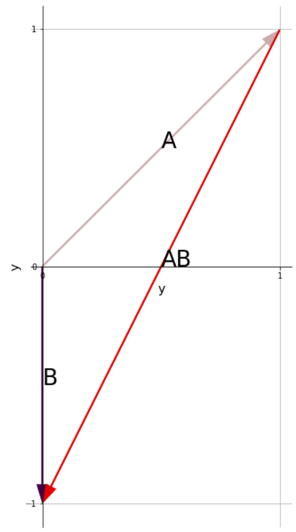
(6)Dóna una altres dos punts A i B que tinguin el mateix vector desplaçament $\overrightarrow{AB}$.

Answer (Ex. 6) — (1)Calcula els vectors que van des de l'origen de coordenades cap a cadascun dels punts A i B (pregunta trampa...). El vector el trobarem substraient el punt inicial (en aquest cas $O=(0,0)$) del punt final

- $$\overrightarrow{OA}=A-O=(1,1)$$
- $$\overrightarrow{OB}=B-O=(0,-1)$$

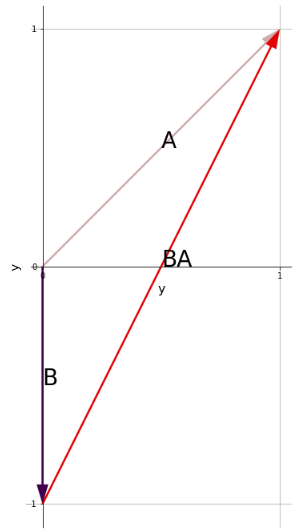
(2)Calcula i dibuixa $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(0,-1)-(1,1)=(-1,-2)$$



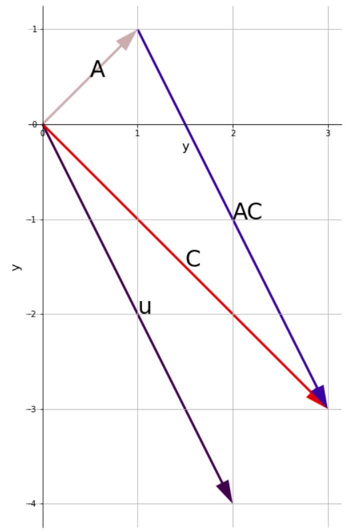
(3)Calcula i dibuixa $\overrightarrow{BA}$.

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (1,1) - (0,-1) = (1,2)$$



(4)Si $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$, quina posició és C?

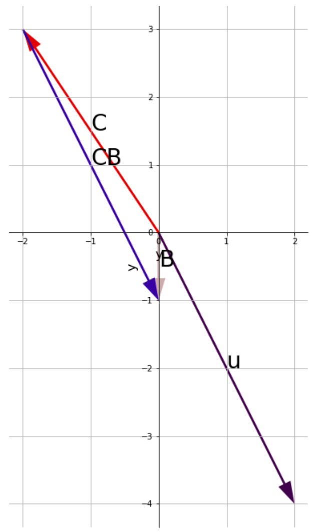
$$\vec{u} = \overrightarrow{AC} = C - A \Rightarrow C = A + \vec{u} = (1, 1) + (2, 4) = (3, 5)$$



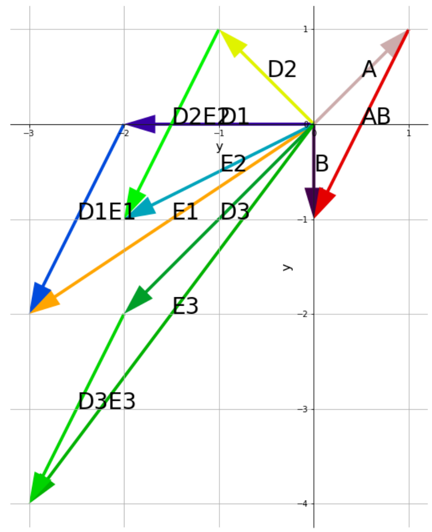
(5)Si $\vec{u} = \overrightarrow{CB}$, quina posició és C?

(6)

$$\vec{u} = \overrightarrow{CB} = B - C \Rightarrow C = B - \vec{u} = (0, -1) - (1, 1) = (-1, -2)$$



(7)Dóna una altres dos punts A i B que tinguin el mateix vector desplaçament $\overrightarrow{AB}$. Només cal agafar un punt D qualsevol i sumar-li el vector $\overrightarrow{AB}$ per trobar el punt E. Alguns exemples



■

Ex. 7 — Siguin $\mathbf{u} = (2, -1)$ i $\mathbf{v} = (3, 4)$, es demana el següent:

(1)Efectueu les següents operacions:

(1.1)$\mathbf{u} + \mathbf{v}$
(1.2)$2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$
(1.3)$\mathbf{u} - \frac{2}{3}\mathbf{v}$

(2)Calculeu $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

(3)Determineu $\|\mathbf{u}\|$ i $\|\mathbf{v}\|$

(4)Trobeu l'angle format pels dos vectors

Answer (Ex. 7) — Seguint l'ordre de les qüestions plantejades:

(1)Fem les operacions:

(1.1)$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2, -1) + (3, 4) = (5, 3)$
(1.2)$2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = 2(2, -1) + 3(3, 4) = (4, -2) + (9, 12) = (13, 10)$
(1.3)$\mathbf{u} - \frac{2}{3}\mathbf{v} = (2, -1) - \frac{2}{3}(3, 4) = (2, -1) - (2, \frac{8}{3}) = (0, -\frac{11}{3})$

(2)$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (2,-1)\cdot(3,4) = 2\cdot 3 + (-1)\cdot 4 = 6-4 = 2$

(3)$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$; $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

(4)L'angle format pels dos vectors es pot obtenir usant:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|} = \frac{2}{5\sqrt{5}}$$

que correspon a un angle de 1.39 radiants, o bé 79.69°.

■

Ex. 8 — Calcula la norma del vector d'$\mathbb{R}^5$ $\vec{u} = (1,-2,-3,0,2)$.

Answer (Ex. 8) — La norma del vector $\vec{u}$ serà:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2+(-2)^2+(-3)^2+0^2+2^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

■

Ex. 9 — Donats el punt $A(1,1)$ i els vectors $\vec{u} = (2,4)$, $\vec{v} = (0,-3)$:

1. Aplica al punt A el desplaçament $\vec{u}$, i al nou punt trobat el desplaçament $\vec{v}$. Quin és el vector desplaçament des d'A a la posició final?
2. Repeteix l'exercici canviant l'ordre dels desplaçaments.
3. Aplica al punt A el desplaçament $\vec{u}$, i al nou punt trobat el desplaçament $\vec{u}$ novament. Quin és el vector desplaçament des d'A a la posició final?

Answer (Ex. 9) — Es tracta de veure que la suma de vectors és commutativa, i que podem multiplicar un vector per un escalar:

1. Aplica al punt A el desplaçament $\vec{u}$, i al nou punt trobat el desplaçament $\vec{v}$. Quin és el vector desplaçament des d'A a la posició final?

$$(A+\vec{u})+\vec{v} = ((1,1)+(2,4))+(0,-3) = (3,2)$$

2. Repeteix l'exercici canviant l'ordre dels desplaçaments.

$$(A+\vec{v})+\vec{u} = ((1,1)+(0,-3))+(2,4) = (3,2)$$

3. Aplica al punt A el desplaçament $\vec{u}$, i al nou punt trobat el desplaçament $\vec{u}$ novament. Quin és el vector desplaçament des d'A a la posició final?

$$(A+\vec{u})+\vec{u} = ((1,1)+(2,4))+(2,4) = (5,9) = A+2\vec{u}$$

■

0.2.3 Espais vectorials

Ex. 10 — A partir de la definició d'espai vectorial, qui són $\vec{e}$ (a $\mathbb{R}^2$) i e? Passa el mateix a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^3$? I a $\mathbb{R}^n$?

Answer (Ex. 10) — $\vec{e}$ és l'element neutre de la suma de vectors tal que $\vec{u}+\vec{e}=\vec{u}$. Per a qualsevol vector $\vec{u}\in\mathbb{R}^2$:

$$(u_1,u_2)+(e_1,e_2)=(u_1,u_2)\Rightarrow(e_1,e_2)=(0,0)$$

A $\mathbb{R}^3$? I a $\mathbb{R}^n$ seria, respectivament, $(0,0,0)$ i $(0,\dots,0)\in\mathbb{R}^n$.
Respecte el valor de l'element neutre $e\in\mathbb{R}$ tal que $e\cdot\vec{u}=\vec{u}$, si agafem per exemple $\vec{u}\in\mathbb{R}^2$:

$$e\cdot(u_1,u_2)=(e\cdot u_1,e\cdot u_2)=(u_1,u_2)\Rightarrow e=1$$

i el mateix succeeix per a un espai vectorial d'$\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^n$.
■

Ex. 11 — Troba la combinació lineal que genera $\vec{u}=(2,1)$ a partir de
(1)$\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\}=\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}=\{(1,0),(0,1)\}$;
(2)i si $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\}=\{(2,1),(-2,1)\}$?

Answer (Ex. 11) — Recordem que un vector $\vec{u}$ és una **combinació lineal** dels vectors $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_n}$ si existeixen nombres reals $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ que satisfan:

$$\vec{u}=\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2}+\cdots\lambda_n\overrightarrow{v_n}$$

(1)Hem de trobar els coeficients que satisfan

$$\vec{u}=\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2}$$

Substituint:

$$(2,1)=\lambda_1(1,0)+\lambda_2(0,1)$$

d'on, clarament, $\lambda_1=2$ i $\lambda_2=1$.

(2)En aquest cas:

$$\vec{u}=\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2}$$

Substituint:

$$(2,1)=\lambda_1(2,1)+\lambda_2(2,-1)$$

d'on obtenim $\lambda_1=1$ i $\lambda_2=0$.

■

Ex. 12 — Si $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\} = \{(2,1), (-2,1)\}$ i $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\} = \{(1,0), (0,1)\}$

(1)Pots escriure $\overrightarrow{e_2}$ en funció de $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$?

(2)Pots escriure $\overrightarrow{e_1}$ en funció de $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$?

(3)Pots escriure $\overrightarrow{v_2}$ en funció de $\{\overrightarrow{e_1}\}$?

(4)Com són els vectors que es poden escriure com a combinació lineal de $\overrightarrow{e_1}$?

Answer (Ex. 12) — Recordem que un vector $\vec{u}$ és una **combinació lineal** dels vectors $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ si existeixen nombres reals $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ que satisfan:

$$\vec{u} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots \lambda_n \overrightarrow{v_n}$$

(1)Hem de trobar els coeficients que satisfan

$$\vec{e_2} = \alpha \overrightarrow{v_1} + \beta \overrightarrow{v_2}$$

Substituint:

$$(0,1) = \alpha(2,1) + \beta(-2,1)$$

d'on obtenim

$$\begin{cases} 0 = 2\alpha - 2\beta \\ 1 = \quad \alpha + \beta \end{cases}$$

multiplicant la segona equació per 2 i sumant-la a la primera obtenim que $2 = 4\alpha$, d'on $\alpha = \beta = 1/2$. Per tant:

$$\vec{e_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{v_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{v_2}$$

(2)Hem de trobar els coeficients que satisfan

$$\vec{e_1} = \alpha \overrightarrow{v_1} + \beta \overrightarrow{v_2}$$

Anàlogament al que hem fet abans:

$$(1,0) = \alpha(2,1) + \beta(-2,1)$$

d'on obtenim

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha - 2\beta \\ 0 = \quad \alpha + \beta \end{cases}$$

multiplicant la segona equació per 2 i sumant-la a la primera obtenim que $1 = 4\alpha$, d'on $\alpha = 1/4$ i $\beta = -1/4$. Per tant:

$$\vec{e_2} = \frac{1}{4}\overrightarrow{v_1} - \frac{1}{4}\overrightarrow{v_2}$$

(3)Si intentem fer $\overrightarrow{v_2} = \alpha\vec{e_1}$ obtenim:

$$\begin{cases} 2 = \alpha \cdot 1 \\ 1 = \alpha \cdot 0 \end{cases}$$

que no té solució.

(4)Els vectors que es poden posar com a combinació lineal de $\vec{e_1}$ són de la forma $(\alpha, 0)$. És per això que en l'apartat anterior veiem que no podem posar $\overrightarrow{v_2}$ com a combinació lineal de $\vec{e_1}$.

■

Ex. 13 — Si $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\} = \{(2,1),(-2,1)\}$ i $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\} = \{(1,0),(0,1)\}$

(1)Són $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ linealment independents?

(2)Són $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ linealment independents?

(3)Com són els vectors linealment dependents amb $\overrightarrow{e_1}$?

(4)Són $\overrightarrow{e_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ linealment independents?

(5)Són $\overrightarrow{e_1}$ i $\overrightarrow{e_2}$ linealment independents?

(6)Són $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ linealment independents?

Answer (Ex. 13) — Els vectors $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ són **linealment dependents** si qualsevol d'ells es pot escriure com a combinació lineal de la resta.

$$\vec{v_1} = \alpha\overrightarrow{v_2} + \beta\overrightarrow{v_3} + \cdots + \omega\overrightarrow{v_n}$$

En cas contrari els anomenem **linealment independents**. La definició equival a veure si en l'expressió

$$\vec{0} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{v_n}$$

hi ha alguna solució per a α i β diferent de la trivial $\lambda_1, \ldots, \lambda_n = 0$.

(1)Són $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ linealment independents?

$$\vec{0} = \alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2} + \gamma\overrightarrow{e_2}$$

Reescrivint el sistema:

$$\begin{cases} 0 = \quad 2\alpha - 2\beta \\ 0 = \alpha + \beta + \gamma \end{cases}$$

Es tracta d'un sistema de dues equacions i tres incògnites, compatible perque segur que té la solució trivial ($\alpha = \beta = \gamma = 0$) però també la solució

$$\begin{cases} \alpha = \delta \\ \beta = \delta \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Per tant, són L.D. Sempre passarà el mateix quan intentem esbrinar la dependència lineal de tres vectors qualsevols al conjunt $\mathbf{R}^2$ o de 4 vectors qualsevols al conjunt $\mathbf{R}^3$, per exemple.

(2)Són $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ linealment independents? Veure resposta a l'apartat anterior.

(3)Com són els vectors linealment dependents amb $\overrightarrow{e_1}$? Qualsevol vector que en la segona component tingui qualsevol valor diferent de 0.

(4)Són $\overrightarrow{e_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ linealment independents?
Plantegem

$$\vec{0} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{v_2}$$

o, el que és el mateix:

$$\begin{cases} 0 = \alpha - 2\beta \\ 0 = \qquad \beta \end{cases}$$

El resultat del sistema és $\alpha = \beta = 0$ i, per tant, són L.I..

(5)Són $\overrightarrow{e_1}$ i $\overrightarrow{e_2}$ linealment independents? Veure l'apartat anterior.

(6)Són $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ linealment independents? Veure l'apartat anterior.

■

Ex. 14 — Si $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\} = \{(2,1), (-2,1)\}$ i $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\} = \{(1,0), (0,1)\}$

(1)Comprova que $\overrightarrow{e_1}$ i $\overrightarrow{e_2}$ són generadors de $\mathbb{R}^2$.

(2)Comprova que $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ són generadors de $\mathbb{R}^2$.

(3) Ho són $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$?

(4) Dóna exemples de conjunts de vectors d'$\mathbb{R}^2$ que generin altres vectors del mateix espai vectorial amb la forma $\{(\alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(5) Comprova que el conjunt de vectors $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ genera $\mathbb{R}^3$.

Answer (Ex. 14) — Els vectors $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ són generadors de l'espai vectorial E al qual pertanyen, i diem $E = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n} \rangle$, quan qualsevol $\vec{u} \in E$ es pot posar com a combinació lineal de $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$:

$$\vec{u} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{v_n}$$

(1) Comprova que $\overrightarrow{e_1}$ i $\overrightarrow{e_2}$ són generadors de $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{u} = \alpha \overrightarrow{e_1} + \beta \overrightarrow{e_2}$$

o, anàlogament:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$$

Per tant, és obvi que podem trobar valors de α i β que satisfacin aquesta expressió per a qualsevol vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(2) Comprova que $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ són generadors de $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{u} = \alpha \overrightarrow{e_1} + \beta \overrightarrow{v_1} + \gamma \overrightarrow{v_2}$$

quedant:

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta - 2\gamma \\ y = \qquad \beta + \gamma \end{cases}$$

Donats valors a α, β i γ podem trobar tots els valors possibles de les components dels vectors (x, y).

(3) Ho són $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$? El mateix cas que l'apartat (1).

(4) Dóna exemples de conjunts de vectors d'$\mathbb{R}^2$ que generin altres vectors del mateix espai vectorial amb la forma $\{(\alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. $(1, 0)$ o $(-3/2, 0)$ serien exemples d'aquests vectors. Cal notar que no generarien tot l'espai $\mathbb{R}^2$, sinó un subespai de dimensió 1 (una recta al pla $\mathbb{R}^2$).

(5)Comprova que el conjunt de vectors $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ genera $\mathbb{R}^3$. Cas anàleg a l'apartat (1).

■

Ex. 15 — Si $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\} = \{(2,1),(-2,1)\}$ i $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\} = \{(1,0),(0,1)\}$

(1)Comprova que $\overrightarrow{e_1}$ i $\overrightarrow{e_2}$ és una base de $\mathbb{R}^2$.

(2)Perquè $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ no són una base de $\mathbb{R}^2$?

(3)Formen una base de $\mathbb{R}^2$ els vectors $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$?

(4)Quants vectors com a molt formen una base de $\mathbb{R}^2$?

(5)I d'$\mathbb{R}^3$?

Answer (Ex. 15) — Recordem que els vectors $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ són una base de l'espai vectorial al qual pertanyen quan (1) són generados de l'espai, i (2) són linealment independents.

(1)Comprova que $\overrightarrow{e_1}$ i $\overrightarrow{e_2}$ és una base de $\mathbb{R}^2$. Ens preguntem promer si podem posar tots els vectors d'$\mathbf{R}^2$ en funció dels vectors $\overrightarrow{e_1}$ i $\overrightarrow{e_2}$:

$$(x,y) = \alpha(1,0) + \beta(0,1)$$

Es pot veure que si $x = \alpha$ i $y = \beta$ es satisfà l'equació.
Mirem ara si són linealment independents. Els vectors $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ són **linealment dependents** si qualsevol d'ells es pot escriure com a combinació lineal de la resta. En cas contrari els anomenem **linealment independents**. La definició equival a veure si en l'expressió

$$(0,0) = \alpha(1,0) + \beta(0,1)$$

hi ha alguna solució per a α i β diferent de la trivial $\alpha = 0$ i $\beta = 0$. Plantejant el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 0 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 \\ 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 \end{cases}$$

veiem que l'única solució possible és que, justament, $\alpha = 0$ i $\beta = 0$. Per tant, són **linealment independents**.
Per tant, $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ forma una base d'$\mathbf{R}^2$.

(2)Perquè $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ no són una base de $\mathbb{R}^2$? Són, de fet, un conjunt generador de $\mathbb{R}^2$, però no en formen base perquè no són linealment independents. Plantegem l'equació

$$(0,0) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) + \gamma(-2,1)$$

que duu al sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 0 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 - \gamma \cdot 2 \\ 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 1 \end{cases}$$

que podem reduir a

$$\begin{cases} 0 = \alpha - 2\gamma \\ 0 = \quad \beta + \gamma \end{cases}$$

Es tracta d'un sistema de dues equacions amb tres incògnites. El sistema és compatible (té solució) perquè sempre podem dir que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ (que anomenem solució trivial), però també podem veure que si donem un valor arbitrari a, per exemple, γ, obtenim $\alpha = 2\gamma$ i $\beta = -\gamma$. Per tant, la solució trivial no és l'única possible i, per tant, són linealment dependents. Dit d'una altra manera, a $\mathbf{R}^2$ només hi çapüna base de dos vectors, no tres.

(3)Formen una base de $\mathbb{R}^2$ els vectors $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$? En ser dos només ens cal veure si són linealment independents. Plantegem

$$(0,0) = \alpha(2,1) + \beta(-2,1)$$

i obtenim

$$\begin{cases} 0 = 2\alpha - 2\beta \\ 0 = \quad \alpha + \beta \end{cases}$$

Sumant la segona equació dos cops a la primera obtenim

$$\begin{cases} 0 = 4\alpha \end{cases}$$

Per tant, la solució $\alpha = \beta = 0$ ens fa concloure que sñón linealment independents i, per tant, formen base de $\mathbb{R}^2$

(4)Quants vectors com a molt formen una base de $\mathbb{R}^2$? Un màxiom de dos poden ser L.I. i seguir generant tot l'espai.

(5)I d'$\mathbb{R}^3$? Pel mateix raonament, 3 vectors.

■

0.3 Càlcul Matricial

0.3.1 Matrius

Ex. 16 — Determineu el valor de m i p, perquè es pugui realitzar el producte següent:

$$(P^t \cdot Q^t) \cdot M^t$$

si $M_{2\times 3}$, $P_{m\times p}$, $Q_{3\times 4}$ i el resultat del producte és una matriu quadrada.

Answer (Ex. 16) — Per resoldre'l primer tenim en compte que:

$$\begin{array}{rcl} M_{2\times 3} & \Rightarrow & M^t_{3\times 2} \\ P_{m\times p} & \Rightarrow & P^t_{p\times m} \\ Q_{3\times 4} & \Rightarrow & Q^t_{4\times 3} \end{array}$$

Amb la qual cosa:

$$(P^t_{p\times m} \cdot Q^t_{4\times 3}) \cdot M^t_{3\times 2} = A_{p\times 2}$$

Com que ens diuen que A és quadrada, obtenim $p = 2$ i, a més, és fàcil veure que perquè el producte es pugui realitzar $m = 4$. ■

Ex. 17 — Aïlleu X, si és possible, en les equancions següents, suposant que totes les matrius són quadrades del mateix ordre i invertibles:

(a)$3X^t + (XA)^t + I = B$

(b)$(XA)^{-1} = 2I + B$

(c)$AX + C = BX$

Answer (Ex. 17) — Usant les propietats de les operacions amb matrius:

(a)$3X^t + (XA)^t + I = B$

$$\begin{array}{rcl} 3X^t + (XA)^t + I & = & B \\ (3X)^t + (XA)^t & = & B - I \\ (3X + XA)^t & = & B - I \\ 3X + XA & = & (B - I)^t \\ 3XI + XA & = & (B - I)^t \\ X(3I + A) & = & (B - I)^t \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} X\underbrace{(3I+A)(3I+A)^{-1}}_{I} & = & (B-I)^t(3I+A)^{-1} \\ X & = & (B-I)^t(3I+A)^{-1} \end{array}$$

■

(b)$(XA)^{-1} = 2I + B$

$$\begin{array}{rcl} (XA)^{-1} & = & 2I+B \\ XA & = & (2I+B)^{-1} \\ X & = & (2I+B)^{-1}A^{-1} \end{array}$$

■

(c)$AX + C = BX$

$$\begin{array}{rcl} AX+C & = & BX \\ AX-BX & = & C \\ (A-B)X & = & C \\ X & = & (A-B)^{-1}C \end{array}$$

■

Ex. 18 — Quins dels següents conjunts de vectors formen una base de $\mathbb{R}^3$?

(a)$\{(1,-2,3),(0,1,1),(-1,1,2)\}$

(b)$\{(1,-2,3),(0,1,1),(1,-3,2)\}$

(c)$\{(1,-2,3),(0,1,1),(0,0,1)\}$

Answer (Ex. 18) — L'espai vectorial $E = x \in \mathbb{R}^3$ té dimensió 3. Això vol dir que si trobem un conjunt de tres vectors linealment independents en formaran una base:

(a)$\{(1,-2,3),(0,1,1),(-1,1,2)\}$ Fem el determinant de la matriu formada pels tres vectors:

$$\begin{array}{rcl} det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} & = & +[1\cdot 1\cdot 2 + 0\cdot 1\cdot 3 + (-2)\cdot 1\cdot(-1)] - \\ & & -[(-1)\cdot 1\cdot 3 + 0\cdot(-2)\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 1] \end{array}$$

$$= \quad 4-(-2)=6\neq 0$$

Per tant, són linealment independents i formen una base d'$\mathbb{R}^3$. ■

(b)$\{(1,-2,3),(0,1,1),(1,-3,2)\}$

$$\begin{aligned} det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} &= +[1\cdot 1\cdot 2+0\cdot(-3)\cdot 3+(-2)\cdot 1\cdot(1)]- \\ &\quad -[1\cdot 1\cdot 3+0\cdot(-2)\cdot 2+(-3)\cdot 1\cdot 1] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Per tant, són linealment dependents i no formen una base d'$\mathbb{R}^3$. ■

(c)$\{(1,-2,3),(0,1,1),(0,0,1)\}$

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Per tant, són linealment independents i formen una base d'$\mathbb{R}^3$. ■

Ex. 19 — Donades les bases de $\mathbb{R}^2$, $B=\{(1,-2),(0,1)\}$ i $D=\{(3,2),(-1,1)\}$:

(a)Doneu la matriu de canvi de base de B a C (base canònica)

(b)Doneu la matriu de canvi de base de C a B

(c)Doneu la matriu de canvi de base de D a B

Answer (Ex. 19) — Només cal recordar que la matriu de canvi de base de B a C és la matriu dels vectors de la base B en funció de la base C, i que la matriu del canvi oposat és la inversa de l'anterior:

(a)Doneu la matriu de canvi de base de B a C (base canònica)

$$A_{B\to C}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

■

(b)Doneu la matriu de canvi de base de C a B

$$A_{C\to B}=(A_{B\to C})^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

I obtenim la inversa fent:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Per tant,

$$A_{C\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

■

(c)Doneu la matriu de canvi de base de D a B Podem construir-la amb una composició de transformacions lineals, és a dir, amb una multiplicació de les matrius que les defineixen:

$$\begin{aligned} A_{D\to B} &= A_{C\to B} \cdot A_{D\to C} \\ A_{D\to B} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

0.3.2 Valors i Vectors propis

Ex. 20 — Vectors i valors propis en una matriu 2×2Trobar els valors i vectors propis de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Answer (Ex. 20) — Trobem primer el polinomi característic de la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Perquè això tingui solució diferent de la trivial ($(x, y) = (0, 0)$) cal que el determinant secular sigui igual a zero:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, cal solucionar el polinomi característic de la matriu:

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

que té per solució els valors propis $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -2$. Calculem ara els vectors propis:

$\boxed{\lambda_1 = 2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2x \\ 3x - y = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases}$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_1 = 2$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_2 = -2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x + y = -2x \\ 3x - y = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -3\alpha \end{cases}$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_2 = -2$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

■

Ex. 21 — Vectors i valors propis en una matriu 3×3Calcula els valors propis i vectors propis de la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Answer (Ex. 21) — Trobem primer el polinomi característic de la matriu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Perquè això tingui solució diferent de la trivial ($(x, y, z) = (0, 0, 0)$) cal que el determinant secular sigui igual a zero:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, cal solucionar el polinomi característic de la matriu:

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 3 = 0$$

Per Ruffini obtenim el primer dels coeficients:

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 6 & -10 & 3 \\ 3 & & -3 & 9 & -3 \\ \hline & -1 & 3 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Per tant:

$$-\lambda^3+6\lambda^2-10\lambda+3 = 0-(\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda+1) = (\lambda-3)(\lambda-\frac{3-\sqrt{5}}{2})(\lambda-\frac{\sqrt{5}+3}{2}) = 0$$

Per a cada valor propi, trobem els vectors propis associats:

$\boxed{\lambda_1 = 3}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} 2x + \ y - \ z = 3x \\ x + 2y \qquad = 3y \\ -x + \ y + 2z = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x - y \qquad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases}$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_1 = 3$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x - y + 4z = 3x \\ 3x + 2y - z = 3y \\ 2x + y - z = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 4z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 4z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Així doncs, un vector propi associat a $\lambda_2 = 3$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_3 = -2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x - y + 4z = -2x \\ 3x + 2y - z = -2y \\ 2x + y - z = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y + 4z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y + 4z = 0 \\ - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Finalment, doncs, un vector propi associat a $\lambda_3 = -2$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El determinant de la matriu original és justament el producte dels tres valors propis:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -6 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

i la traça de la matriu és la suma dels tres valors propis:

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2$$

Els tres vectors són L.I., ja que

$$\det\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 4 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = -6 \neq 0$$

De fet, en no haver cap valor propi igual a 0, la matriu formada pels tres vectors propis ha de ser per força invertible i, per tant, el seu determinant diferent de zero o, el que és el mateix, els vectors propis són L.I.
■

Ex. 22 — Calcula $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}^6$ usant el concepte de valors i vectors propis de la matriu.

Answer (Ex. 22) — Sabem que si una matriu A és diagonalitzable, podem expressar-la com

$$D = P^{-1}AP$$

on D és una matriu diagonal amb els valors propis de la matriu A i P és una matriu quines columnes representen els vectors propis associats a cada valor propi.
Si usem aquesta expressió, fer l'operació és senzilla. Efectivament:

$$\left(PDP^{-1}\right)^6 = A^6$$

o, el que és el mateix:

$$\begin{aligned} PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} &= A^6 \\ PD^6P^{-1} &= A^6 \qquad (1) \end{aligned}$$

Anem, doncs, a cercar els valors i vectors propis de la matriu. Aquests seran els valors que compleixin:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

Perquè això tingui solució diferent de la trivial ($(x, y) = (0, 0)$) cal que el determinant secular sigui igual a zero:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 3 & -1-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

Per tant, cal solucionar el polinomi característic de la matriu:

$$(1-\lambda)(-1-\lambda)-3=0$$

d'on $\lambda = \pm 2$.
Un cop tenim els valors propis, trobem els vectors propis que hi estan vinculats:

$\boxed{\lambda_1 = 2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x+y=2x \\ 3x-y=2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow x=y$$

Per tant, un vector propi[1] associat a $\lambda_1 = 2$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_1 = -2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x+y=-2x \\ 3x-y=-2y \end{cases} \Rightarrow 3x+y=0$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_2 = 2$ és $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Construïm ara l'expressió de l'Eq. 1:

$$\begin{aligned} A^6 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^6 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[1] De fet, el conjunt de vectors propis associats a un determinat valor propi forma un subespai vectorial.

$$= \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}$$

Sabries dir d'on prové el fet que, en aquest cas particular, la potència de la matriu sigui idèntica a la potència de la seva matriu semblant diagonal?
■

Ex. 23 — Vectors i valors propis en una matriu 3×3Calcula els valors propis i vectors propis de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Quina relació hi ha entre els valors propis i el determinant i la traça de la matriu original? Comprova que els tres vectors propis són L.I.

Answer (Ex. 23) — Trobem primer el polinomi característic de la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Perquè això tingui solució diferent de la trivial $((x, y, z) = (0, 0, 0))$ cal que el determinant secular sigui igual a zero:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, cal solucionar el polinomi característic de la matriu:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

Per Ruffini obtenim el primer dels coeficients:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

Per tant:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 6) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

Un cop tenim els valors propis $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ i $\lambda_3 = -2$, trobem els vectors propis que hi estan vinculats:

$\boxed{\lambda_1 = 1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x - y + 4z = x \\ 3x + 2y - z = y \\ 2x + y - z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 4z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 4z = 0 \\ 3x + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = 4\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_1 = 1$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_2 = 3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x - y + 4z = 3x \\ 3x + 2y - z = 3y \\ 2x + y - z = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 4z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 4z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Així doncs, un vector propi associat a $\lambda_2 = 3$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_3 = -2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x - \ \ y + 4z = -2x \\ 3x + 2y - \ \ z = -2y \\ 2x + \ \ y - \ \ z = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - \ \ y + 4z = 0 \\ 3x + 4y - \ \ z = 0 \\ 2x + \ \ y + \ \ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y + 4z = 0 \\ \ \ \ \ - y + \ \ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \ \ \alpha \\ z = \ \ \alpha \end{cases}$$

Finalment, doncs, un vector propi associat a $\lambda_3 = -2$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El determinant de la matriu original és justament el producte dels tres valors propis:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -6 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

i la traça de la matriu és la suma dels tres valors propis:

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2$$

Els tres vectors són L.I., ja que

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -6 \neq 0$$

De fet, en no haver cap valor propi igual a 0, la matriu formada pels tres vectors propis ha de ser per força invertible i, per tant, el seu determinant diferent de zero o, el que és el mateix, els vectors propis són L.I.

■

0.4 Geometria

0.4.1 Ortogonalitat

Ex. 24 — Determinar si els vectors **u** i **v** són paral̊lels, ortogonals o cap de les dues coses:

(1)$\mathbf{u} = (1, -2)$ i $\mathbf{v} = (2. - 4)$

(2)$\mathbf{u} = (1, -2, 1)$ i $\mathbf{v} = (2, 1, 0)$

(3)$\mathbf{u} = \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

Answer (Ex. 24) — Per determinar el paral·lelisme, observem si un dels dos vectors és proporcional a l'altre. Per determinar l'ortogonalitat en fem el producte escalar:

(1)$\mathbf{u} = (1, -2)$ i $\mathbf{v} = (2, -4)$. Veiem que $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}$ i, per tant, són paral·lels.

(2)$\mathbf{u} = (1, -2, 1)$ i $\mathbf{v} = (2, 1, 0)$. No són paral·lels perquè no són proporcionals. Per saber si són ortogonals en calculem el producte escalar: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$. Per tant, són dos vectors ortogonals.

(3)$\mathbf{u} = \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Novament no són proporcionals i, per tant, no són paral·lels. Pel que fa al producte escalar: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 6 \cdot (-1) = -8 \neq 0$. Per tant, no són ni paral·lels ni ortogonals.

■

Ex. 25 — Trobeu un vector unitari ortogonal als vectors $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ i $\mathbf{v} = 2\mathbf{j}$

Answer (Ex. 25) — Per trobar un vector ortogonal a uns altres dos, fem el producte vectorial d'aquests dos darrers:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$$

I per trobar el vector unitari en aquesta drecció només ens cal dividir aquest vector pel seu mòdul

$$\hat{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{(-2, 0, 2)}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$$

■

Ex. 26 — Comprova que el quadrilàter de vèrtex $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 3, 4)$, $C = (6, 5, 2)$ i $D = (7, 7, 5)$ és un paral·lelogram i calcula'n l'àrea.

Answer (Ex. 26) — Per comprovar si és un quadrilàter hem de veure si els costats del quadrilàter formen dues parelles de vectors paral·lels. És fàcil veure que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = (1, 2, 3)$ i que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = (5, 4, 1)$.

L'àrea serà igual al mòdul del producte vectorial dels dos vectors que formen els costats del paralůlelogram:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix}=(2\mathbf{i}+15\mathbf{j}+4\mathbf{k})-(12\mathbf{i}+\mathbf{j}+10\mathbf{k})=-10\mathbf{i}+14\mathbf{j}-6\mathbf{k}$$

$$Area=\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|=\sqrt{(-10)^2+14^2+(-6)^2}$$

■

0.4.2 Rectes a $\mathbf{R}^2$

Ex. 27 — Troba l'equació paramètrica de la recta que passa per $P(5,-4)$ i té una direcció paralůlela a $\mathbf{v}=(-3,2)$.

Answer (Ex. 27) — L'equació vectorial d'una recta a $\mathbf{R}^2$ ve donada per l'expressió:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}$$

que duu a l'expressió paramètrica:

$$\begin{cases} x=x_0+tv_1\\ y=y_0+tv_2\end{cases}$$

on (x_0,y_0) és un punt de la recta i $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$ és el seu vector director. En aquest cas:

$$\begin{cases} x=5-3t\\ y=-4+2t\end{cases}$$

Ex. 28 — Trobeu l'equació general de les rectes següents:

(1)La recta que passa pel punt $(1,2)$ i té per vector director el vector $\mathbf{v}=(3,-1)$.

(2)La recta que passa pel punt $(0,0)$ i és paralůlela a la recta $x-y=4$.

(3)La recta que passa pel punt $(1,-2)$ i és perpendicular a la recta $x+2y+5=0$

Answer (Ex. 28) — Cada cas el podem ractar lleugerament diferent, però totes les opcions són equivalents i bescanviables en la pràctica:

(1)La recta que passa pel punt $(1,2)$ i té per vector director el vector $\mathbf{v}=(3,-1)$.

Comencem amb l'equació contínua de la recta escrivint:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-1}$$

D'aquí:

$$\begin{aligned} -(x-1) &= 3(y-2) \\ 3y+x-7=0 & \end{aligned}$$

(2)La recta que passa pel punt $(0,0)$ i és paral·lela a la recta $x-y=4$.

Si les dues rectes són paral·leles, els coeficients de la x i la y en l'equació general seran els mateixos i, per tant, busquem el coeficient independent a l'equació $x-y=C$. Com que la recta passa pel punt $(0,0)$, $C=0$ i la recta demanada és $x-y=0$.

(3)La recta que passa pel punt $(1,-2)$ i és perpendicular a la recta $x+2y+5=0$

Si la recta problema és ortogonal a $x+2y+5=0$ vol dir que el producte escalar dels seus vectors directors és 0. El vector director de la recta donada és $(2,1)$ (mira l'equació contínua del primer d'aquests tres apartats) i, per tant, un possible vector ortogonal a aquest seria $(-1,2)$.[2]. Així, novament com en l'apartat anterior, busquem el coeficient independent a l'equació $2x-2y=C$. Com que la recta problema passa pel punt $(1,-2)$, tenim que $2\cdot 1-2\cdot(-2)=6=C$. Per tant, la recta buscada és $2x-2y-6=0$

■

Ex. 29 — Determineu si les rectes següents es tallen.

(1)$x+y+2=0$ i $2x+y-4=0$

(2)$x-y-1=0$ i $2x-2y-2=0$

(3)$x+3y-4=0$ i $3x+9y-8=0$

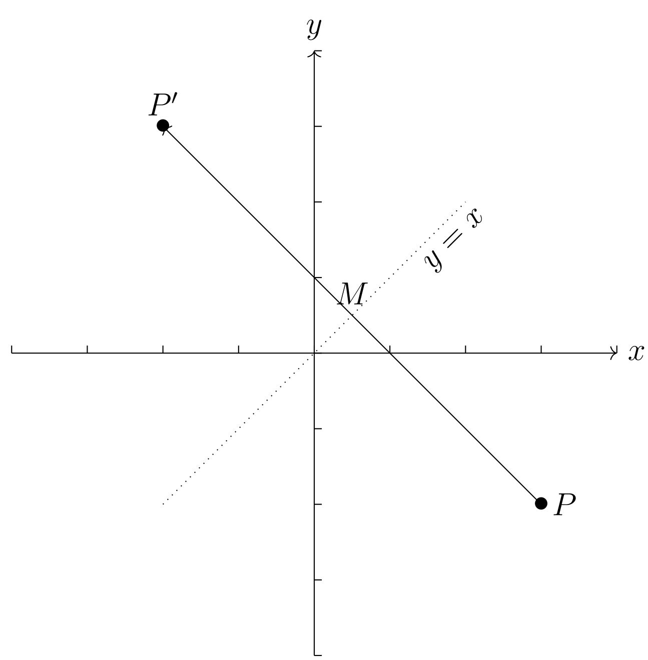
[2]Efectivament, $(2,1)\cdot(-1,2)=0$

Answer (Ex. 29) — No ens demanen pas en quin punt es tallen i, per tant, en tant que són rectes d'$\mathbf{R}^2$, amb analitzar l'angle entre els dos vectors directors $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$, tot aprofitant que $\cos\alpha = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{u}\|}$, en tenim prou:

Rectes	Vectors directors	Angles
$x+y+2=0$ $2x+y-4=0$	$\mathbf{u}=(-1,1)$ $\mathbf{v}=(-1,2)$	$\cos\alpha = \frac{(-1,1)\cdot(-1,2)}{\|(-1,1)\|\|(-1,2)\|} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{5}}$ $\alpha = 0.32rad = 18.43°$
$x-y-1=0$ $2x-2y-2=0$	$\mathbf{u}=(1,1)$ $\mathbf{v}=(2,2)$	$\cos\alpha = \frac{(1,1)\cdot(2,2)}{\|(1,1)\|\|(2,2)\|} = \frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{8}}$ $\alpha = 0\text{radian} = 0°$ vectors proporcionals; equacions proporcionals: rectes coincidents
$x+3y-4=0$ $3x+9y-8$	$\mathbf{u}=(-3,1)$ $\mathbf{v}=(-9,3)$	$\cos\alpha = \frac{(-3,1)\cdot(-9,3)}{\|(-3,1)\|\|(-9,3)\|} = \frac{30}{\sqrt{10}\sqrt{90}}$ $\alpha = 0\text{radian} = 0°$ vectors proporcionals; equacions NO proporcionals: rectes paral̊leles

Ex. 30 — Determina el punt simètric de $P(3,-2)$ respecte la bisectriu del primer quadrant.

Answer (Ex. 30) — El dibuix mostra el plantejament del problema:



Per trobar P' trobarem primer la recta perpendicular a la bisectriu. La recta $y = x$ té pendent 1. Això vol dir que els seus vectors directors seran del tipus $\mathbf{v} = (\alpha, \alpha) \Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha} = 1$. Per exemple, $\mathbf{v} = (1, 1)$. Un vector perpendicular a aquest seria $\mathbf{v'} = (-1, 1)$. Efectivament:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v'} = (1, 1) \cdot (-1, 1) = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$$

La recta perpendicular a la bisectriu i que passa pel punt donat serà, doncs, en la seva forma contínua:

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{1}$$

o bé, en la seva forma explícita,

$$y = 1 - x$$

Trobem ara el punt M on es troben les dues rectes solucionant el sistema d'equacions que formen:

$$\begin{cases} y = \phantom{1 -{}} x \\ y = 1 - x \end{cases}$$

d'on $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Finalment, el punt que cerquem complirà que $\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{PM}$. Per tant:

$$\begin{aligned} (x', y') - (3, -2) &= 2\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - (3, -2)\right) \\ P' = (x', y') &= (-2, 3) \end{aligned}$$

0.4.3 Rectes i plans a $\mathbf{R}^3$

Ex. 31 — Trobeu les equacions paramètriques i cartesianes de les rectes següents:

(1) La recta que passa pels punts $(1, 0, 1)$ i $(1, 3, -2)$

(2) La recta que passa pel punt $(-2, 0, 3)$ i és paral·lela al vector $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

(3) La recta que passa pel punt $(-3, 5, 4)$ i és paral·lela a la recta $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2} = z - 3$

Answer (Ex. 31) — L'equació paramètrica que defineix un punt qualsevol de la recta a $\mathbf{R}^3$ és:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

on $P = (x_0, y_0, z_0)$ és un punt qualsevol de la recta i $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ el seu vector director. en tots tres casos ens donen un punt de la recta i ens donen informació que ens en permet calcular el vector deirector.

(1)La recta que passa pels punts $(1, 0, 1)$ i $(1, 3, -2)$

Aquí $P = (1, 0, 1)$ i $\mathbf{v} = (1, 3, -2) - (1, 0, 1) = (0, 3, -3)$. Per tant, l'equació paramètrica queda:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Pel que fa a l'equació cartesiana o general, la podem construir a partir de la contínua, que no és més que igualar el paràmere λ provinent de cada coordenada a l'equació anterior. Així, l'eqació contínua seria (amb un petit abús denotació permetent-nos posar un 0 al denominador):

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-3}$$

Agafant els dos primers termes de l'equació obtenim la primera de les equacions següents i agafant el segon i tercer terme obtenim la segona equació:

$$\begin{cases} 3x - 3 = 0 \\ -3y = 3z - 3 \end{cases}$$

Simplificant:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Notar que l'equació d'una recta a $\mathbf{R}^3$ es construeix amb les equacions de dos plans que es tallen.

(2)La recta que passa pel punt $(-2, 0, 3)$ i és paralůlela al vector $\mathbf{v} = 6\mathbf{i}+3\mathbf{j}$

En aquest cas ens donen directament $\mathbf{v} = (6, 3, 0)$. Podem fer la mateixa operació que abans:

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{0}$$

d'on

$$\begin{cases} 3x - 6 = 6y \\ 0 = 3z - 9 \end{cases}$$

Simplificant:

$$\begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases}$$

(3)La recta que passa pel punt $(-3, 5, 4)$ i és paral·lela a la recta $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2} = z - 3$

Idènticament, ens diuen que $\mathbf{v} = (4, 1, -3)$. Fem la contínua i després la general o cartesiana:

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-4}{1}$$

d'on

$$\begin{cases} -2x - 6 = 3y - 15 \\ y - 5 = -2z + 8 \end{cases}$$

Simplificant:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 9 = 0 \\ y + 2z - 13 = 0 \end{cases}$$

■

Ex. 32 — Determineu la posició relativa de les rectes següents:

(1) $\begin{cases} x = 4t + 2 \\ y = 3 \\ z = -t + 1 \end{cases}$ i $\begin{cases} x = 2s + 2 \\ y = 2s + 3 \\ z = s + 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ y - z = 0 \end{cases}$ i $\frac{x-1}{4} = y + 2 = \frac{z+3}{-3}$

Answer (Ex. 32) — D'entrada mirem si són paralůleles (o coincidents) especte si es creuen (o es tallen) analitzant els seus vectors directors. Després mirarem si realemnt coincideixen an algun o infinits punts o no.

$$(1)\begin{cases} x = 4t + 2 \\ y = 3 \\ z = -t + 1 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} x = 2s + 2 \\ y = 2s + 3 \\ z = s + 1 \end{cases}$$

En aquest cas, els dos vectors directors són $\mathbf{u} = (4, 0 - 1)$ i $\mathbf{v} = (2, 2, 1)$, amb la qual cosa veiem que no són paralůleles (ni coincidents). Per saber si es tallen hem d'assegurar que passin per algun punt comú. Així, si el sistema

$$\begin{cases} 4t + 2 = 2s + 2 \\ 3 = 2s + 3 \\ -t + 1 = s + 1 \end{cases}$$

és compatible, també ho serà determinat, per força. És fàcil veure que el sistema es soluciona per a $s = t = 0$. Per tant, les dues rectes es tallen, justament, en el punt que determinen aquests dos paràmetres: $P = (2, 3, 1)$, cosa que es podia observar directament a partir de les equacions paramètriques de l'enunciat. ■

$$(2)\begin{cases} x + 3y = 6 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad \tfrac{x-1}{4} = y + 2 = \tfrac{z+3}{-3}$$

En aquest podem analitzar directament el sistema d'equacions format per totes les equacions donades:

$$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ y - z = 0 \\ x - 1 = 4y + 8 \\ -3y - 6 = z + 3 \end{cases}$$

arranjant una mica:

$$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 0x + y - z = 0 \\ x - 4y + 0z = 9 \\ 0x - 3y - z = 9 \end{cases}$$

D'on podem analitzar els rangs de la matriu de coeficients i de la matriu ampliada $(A|B)$ usant, per exemple, el mètode de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 9 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -R_1 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -7R_2 \\ +3R_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \frac{1}{7}R_3 \\ -\frac{1}{4}R_4 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{4} \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ -R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{51}{28} \end{array}\right]$$

d'on deduïm que el sistema és incompatible. Per tant, les rectes no es toquen. Per saber si són paral·leles podem mirar també el resultat de l'eliminació de Gauss-Jordan. Finalment obtenim tres línies de la matriu (les tres primeres) que representen un sistema equivalent al creuament de tres plans en un sol punt. Per tant, les des rectes es creuen en l'espai i no són paral·leles. En aquest darrer cas hauríem obtingut només dues files de la matriu A linealment independents.

Ex. 33 — Trobeu les equacions cartesianes dels plans següents:

(1) El pla que passa pels punts $(0,0,0)$, $(1,2,3)$ i $(-2,3,3)$.

(2) El pla que passa pel punt $(2,1,2)$ i té per vector normal $\mathbf{n} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

(3) El pla que passa pel punt $(3,2,2)$ i és perpendicular a la recta $\frac{x-1}{4} = y+2 = \frac{z+3}{-3}$

(4) El pla que conté les rectes $\frac{x-1}{2} = y-4 = z$ i $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$

(5) El pla que passa pels punts $(2,2,1)$ i $(-1,1,-1)$ i és perpendicular al pla $2x-3y-z=3$

Answer (Ex. 33) — Usarem que els coeficients de l'equació cartesiana del pla $Ax + By + Cz = D$ corresponen amb les coordenades del seu vector normal $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$

(1)El pla que passa pels punts $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$ i $(-2, 3, 3)$.

El vector perpendicular al pla es por calcular amb el producte vectorial de dos vectors del pla com, per exemple: $\mathbf{u} = (1, 2, 3) - (0, 0, 0)$ i $\mathbf{v} = (-2, 3, 3) - (0, 0, 0)$. Així,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) - (9\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) = -3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

Per tant, l'equació serà de la forma: $-3x - 9y + 7z = D$. Com que el pla passa pel punt $(0, 0, 0)$, l'equació buscada és:

$$-3x - 9y + 7z = 0$$

(2)El pla que passa pel punt $(2, 1, 2)$ i té per vector normal $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

El pla tindrà la forma $2x + 3y - z = D$. Substituint el punt donat obtenim el valor de D:

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 2 = D = 5$$

Per tant, el pla buscat és:

$$2x + 3y - z = 5$$

(3)El pla que passa pel punt $(3, 2, 2)$ i és perpendicular a la recta $\frac{x-1}{4} = y + 2 = \frac{z+3}{-3}$

El vector normal al pla és el director de la recta i, per tant: $4x + y - 3z = D$. Substituint el punt donat obtenim el valor de D:

$$4 \cdot 3 + 2 - 3 \cdot 2 = D = 8$$

Per tant, el pla buscat és:

$$4x + y - 3z = 8$$

(4)El pla que conté les rectes $\frac{x-1}{2} = y - 4 = z$ i $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$

Usarem els vectors directors de les dues rectes per trobar el vector normal al pla.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (-1\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) - (4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) = -5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 11\mathbf{k}$$

El pla tindrà la forma $-5x - y + 11z = D$. Podem ara agafar qualsevol punt dels que estan continguts a les dues rectes. Per exemple, agafant-lo de l'equació contínua de la primera:

$$-5 \cdot 1 - 4 + 11 \cdot 0 = D = -9$$

Per tant, el pla buscat és:

$$-5x - y + 11z = -9$$

(5)El pla que passa pels punts $(2, 2, 1)$ i $(-1, 1, -1)$ i és perpendicular al pla $2x - 3y - z = 3$

Un dels vecotrs directors del pla buscat serà el normal del pla perpendicular: $\mathbf{u} = (2, -3. -1)$. L'altre, elpodem obtenir a partir dels dos punts donats: $\mathbf{v} = (-1, 1, -1) - (2, 2, 1) = (-3, -1, -2)$. Ara podem calcular el vector normal al pla demanat:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) - (\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 9\mathbf{k}) = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$$

El pla tindrà la forma $5x + 7y - 11z = D$. Podem ara agafar qualsevol punt dels que estan continguts a les dues rectes.

$$5 \cdot (-1) + 7 \cdot 1 - 11 \cdot (-1) = D = 13$$

Per tant, el pla buscat és:

$$5x + 7y - 11z = 13$$

Ex. 34 — Determineu la posició relativa dels plans següents

(1)$x - y + z = 1$ i $2x + 2y - 3z = 4$

(2)$4x + 2y + 6z = 12$ i $3x + 6y + 2z = 6$

Answer (Ex. 34) — Només cal resoldre els sistemes d'equacions resultants d'aplegar-los i comprovar si són compatibles o incompatibles.

a)$x - y + z = 1$ i $2x + 2y - 3z = 4$

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

Aplicant l'eliminació de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2R_1 \end{array} \qquad \sim \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & 2 \end{array}\right]$$

Es comprova que $rg(A) = 2$ i $rg(A|B) = 2$ i, per tant, el sistema és compatible indeterminat de rang 2. Els plans es tallen en una recta. ■

b)$4x + 2y + 6z = 12$ i $3x + 6y + 2z = 6$

$$\begin{cases} 4x + 2y + 6z = 12 \\ 3x + 6y + 2z = 6 \end{cases}$$

Aplicant l'eliminació de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 2 & 6 & 12 \\ 3 & 6 & 2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -\frac{3}{4}R_1 \end{array} \qquad \sim \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & -3 \end{array}\right]$$

Es comprova que $rg(A) = 2$ i $rg(A|B) = 2$ i, per tant, el sistema és compatible indeterminat de rang 2. Els plans es tallen en una recta. ■

0.4.4 Rotacions

Ex. 35 — Determineu la imatge del punt $(0, -2, 0)$ quan el rotem un angle de 90 graus al voltant d'un eix que està sobre el pla YZ i que forma un angle de 60 graus amb l'eix OY.

Answer (Ex. 35) — Per trobar la imatge haurem d'aplicar l'expressió

$$q_B = q q_A q^* \tag{2}$$

on q_A és el quaternió que correspjn al punt que volem rotar i q_B és la seva imatge després de la rotació, mentre que q_R és el quaternió de rotació unitari $\hat{q} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$. Recordem que, donat un quaternió unitari de rotació, l'angle de rotació i l'eix associats venen donats per:

$$\begin{aligned} \theta &= 2 \arccos q_0 \\ \hat{r} &= \frac{(q_1, q_2, q_3)}{\sqrt{(1 - q_0^2)}} = \left(\frac{q_1}{\sin \frac{\theta}{2}}, \frac{q_2}{\sin \frac{\theta}{2}}, \frac{q_3}{\sin \frac{\theta}{2}} \right) \end{aligned}$$

L'operació inversa seria trobar un quaternió a partir de l'eix de rotació $\hat{r}$ i l'angle de rotació θ:

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \hat{r}_x + j \sin \frac{\theta}{2} \hat{r}_y + k \sin \frac{\theta}{2} \hat{r}_z \tag{3}$$

Per tant, primer ens cal determinar el vector unitat al voltant del qual farem la rotació. En aquest exercici es tracta d'un vector que formarà un angle de 60 graus (o $\pi/3$ rad) respecte l'eix OY i que es troba en el pla YZ. Per tant, les seves coordenades seran:

$$\hat{r} = \cos \frac{\pi}{3} \mathbf{j} + \sin \frac{\pi}{3} \mathbf{k} = \frac{1}{2} \mathbf{j} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{k}$$

Sabent l'angle de rotació $\theta = \pi/2$, podem construir el quaternió de rotació usant l'Equació 3:

$$\begin{aligned} q = &= \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \frac{1}{2} + k \sin \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} j + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} k = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} j + \frac{\sqrt{6}}{4} k \end{aligned}$$

que, com es pot comprovar fàcilment, és unitari i té com a quaternió conjugat

$$q^* = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} j - \frac{\sqrt{6}}{4} k$$

D'altra banda, el quaternió q_A corresponent al punt que hem de rotar es calcula usant directament les seves coordenades per a les parts imaginàries del quaternió i deixant zero la part real:

$$q_A = -2j$$

Amb tot això, ja podem trobar el quaternió imatge amb l'equació 2

$$q_B = qq_Aq^* = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}j + \frac{\sqrt{6}}{4}k\right)\cdot(-2j)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}j - \frac{\sqrt{6}}{4}k\right) = \sqrt{3}i - \frac{1}{2}j - \frac{\sqrt{3}}{2}k$$

Per tant, la imatge del punt donat $(0,-2,0)$ és $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ■

0.5 Transformacions afins

Ex. 36 — A $\mathbb{R}^2$ hem aplicat a un triangle les transformacions concatenades següents (per aquest ordre):

(1)Cisallament en la component horizontal de factor $\lambda = 5$.

(2)Homotècia de raó $a = 1/5$ respecte l'origen.

(3)Gir d'angle $\frac{\pi}{2}$ respecte l'origen de coordenades.

Després del procés, el nou triangle és el format pels vèrtex $(1,1)$, $(2,3)$ i $(5,-1)$. Quin éra el triangle inicial?

Answer (Ex. 36) — Cal aplicar, per ordre sobre cada vector (x,y) que defineix els vèrtex del triangle original, les tres transformacions afins de manera que ens duguin al nou vèrtex (x',y').

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}}_{gir} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}}_{homotcia} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{cisallament} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Per trobar els vectors inicials haurem de fer la inversa d'aquesta matriu:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Aplicant l'expressió a tots tres vèrtex obtenim:

$$\begin{pmatrix} 25 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -5 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 25 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ -10 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 25 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ -25 \end{pmatrix}$$

■

Ex. 37 — Doneu la transformació afí que transforma el quadrat de vèrtex $\{(-5,-2),(-9,-2),(-5,-6),(-9,-6)\}$ en el rectangle de vèrtex $\{(8,7),(2,7),(2,9),(8,9)\}$

Answer (Ex. 37) — Amb tres punts en tenim prou per trobar la matriu d'una transformació afí. Si usem la notació homogènia:

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 7 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & -9 & -5 \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu resultant de combinar les diferents transformacions afins elementals que ens han dut d'uns vèrtex als altres. Per tant:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 7 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & -9 & -5 \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 37 \\ 0 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

■

Ex. 38 — Troba la transformació afí a $\mathbf{R}^2$ que transforma el conjunt de punts $(3,4),(4,6),(6,11)$ en el conjunt $(1,-1),(2,1),(3,5)$

Answer (Ex. 38) — Ens demanen trobar la matriu que compleixi lexpressió

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu resultant de combinar les diferents transformacions afins elementals que ens han dut duns punts als altres. Per tant:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \\ 7 & -3 & -9 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

don

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■

Ex. 39 — Troba la matriu homogènia de la transformació afí corresponent a rotar un objecte 90 graus al voltant del centre $(1, 2)$

Answer (Ex. 39) — Ens cal fer tres passos:

- Moure lobjecte al centre de coordenades mitjançant la matriu A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Aplicar una rotació de $\frac{\pi}{2}$ amb la matriu B:

$$B = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  i, finalment

- dur novament lobjecte a un centre $(1, 2)$ fent el desplaçament contrari a A

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriu buscada serà el producte de les tres:

$$M = C \times B \times A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

■

Ex. 40 — Posat dret sobre un peu. Deixant fixe a terra el taló, mou el peu un angle θ en el sentit contrari a les agulles del rellotge. Un cop fet això, deixa fixa la punta del peu i mou la resta un angle de -2θ en el sentit de les agulles del rellotge. Finalment, repeteix el moviment inicial. Què ha passat en termes de transformació afí del teu peu? Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, series capaç de trobar la matriu de la transformació?

Answer (Ex. 40) — El procés que ens demanen és el següent, llegit de dreta a esquerra, considerant que el peu té una longitud L i que els moviments són perfectes taló-punta:

$$M = \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & -2L\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}}^{=F}\overbrace{\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}}^{=E}\overbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & L\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}}^{=D}\overbrace{\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}}^{=C}\overbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & L\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}}^{=B}\overbrace{\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}}^{=A}}_{\begin{pmatrix}1 & 0 & -2L\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

on les diferents matrius descriuen transformacions afins elementals:

A**:** Rotació $\frac{\pi}{2}$.

B**:** Desplaçament del punt de referència una distància L en el sentit positiu de la coordinada x.

C**:** Rotació $-\pi$.

D**:** Desplaçament del punt de referència una distància L en el sentit positiu de la coordinada x.

E**:** Rotació $\frac{\pi}{2}$.

F**:** Desplaçament del punt de referència una distància $-2L$ en el sentit positiu de la coordinada x. Retorn a l'origen de coordenades inicial.

El resultat gobal és equivalent, doncs, a una matriu de desplaçament $2L$ en la direcció $-X$.

■

Ex. 41 — Tenim un triangle rectangle de catets de mida 1 coincidint amb els eixos de coordenades. Troba la transformació afí que el modifica tot generant un triangle isòsceles de base 1 i alçada 1.

Answer (Ex. 41) — es tracta dun simple "shear"o cisallament horitzontal

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

amb $\lambda = 0.5$. efectivament, els tres vèrtex queden transformats per aquesta matriu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

■

Ex. 42 — Sigui Q el quadrilàter de vèrtex $(4,0)$, $(2,2)$, $(1,1)$ i $(2,-1)$.

(1)Representeu gràficament el quadrilàter.

(2)Trobeu el punt d'intersecció P de les seves dues diagonals.

(3)Dibuixeu les següents transformacions afins:

(3.1)Una translació segons el vector $(1,3)$.

(3.2)Una rotació d'angle $\frac{\pi}{3}$ respecte l'origen.

(3.3)Una rotació d'angle $\frac{\pi}{3}$ respecte el punt P.

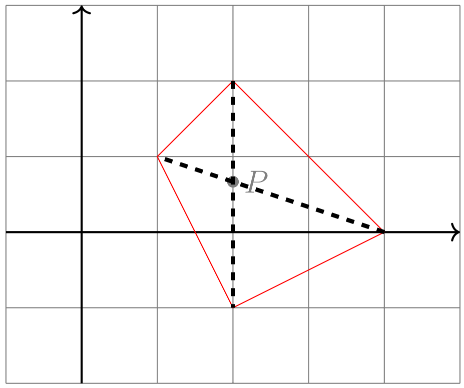
(3.4)Una homotècia de raó 3 centrada a l'origen.

(3.5)Una homotècia de raó 3 centrada a D

(3.6)Una simetria respecte la recta $y = -x$.

(3.7)Una simetria respecte l'eix X seguida d'una simetria respecte l'eix Y.

Answer (Ex. 42) — El punt d'intersecció P el calcularem buscant on es troben les dues rectes formades pels vèrtex oposats



Les dues rectes són:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

i

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Igualant-les, obtenim les dues equacions:

$$\begin{aligned} 1 + 3\lambda &= 2 \\ 1 - \lambda &= 2 - 3\mu \end{aligned}$$

De la primera obtenim que $\lambda = \frac{1}{3}$ que, substituït a la segona, ens diu que $\mu = \frac{4}{9}$. Substituint qualsevol d'aquests dos valors a les equacions paramètiques de les rectes obtenim que el punt buscat és $P = (2, \frac{2}{3})$.

Les transformacions afins corresponents a les diferents operacions produeixen els canvis al quadrilàter mostrats a la Figura 2.

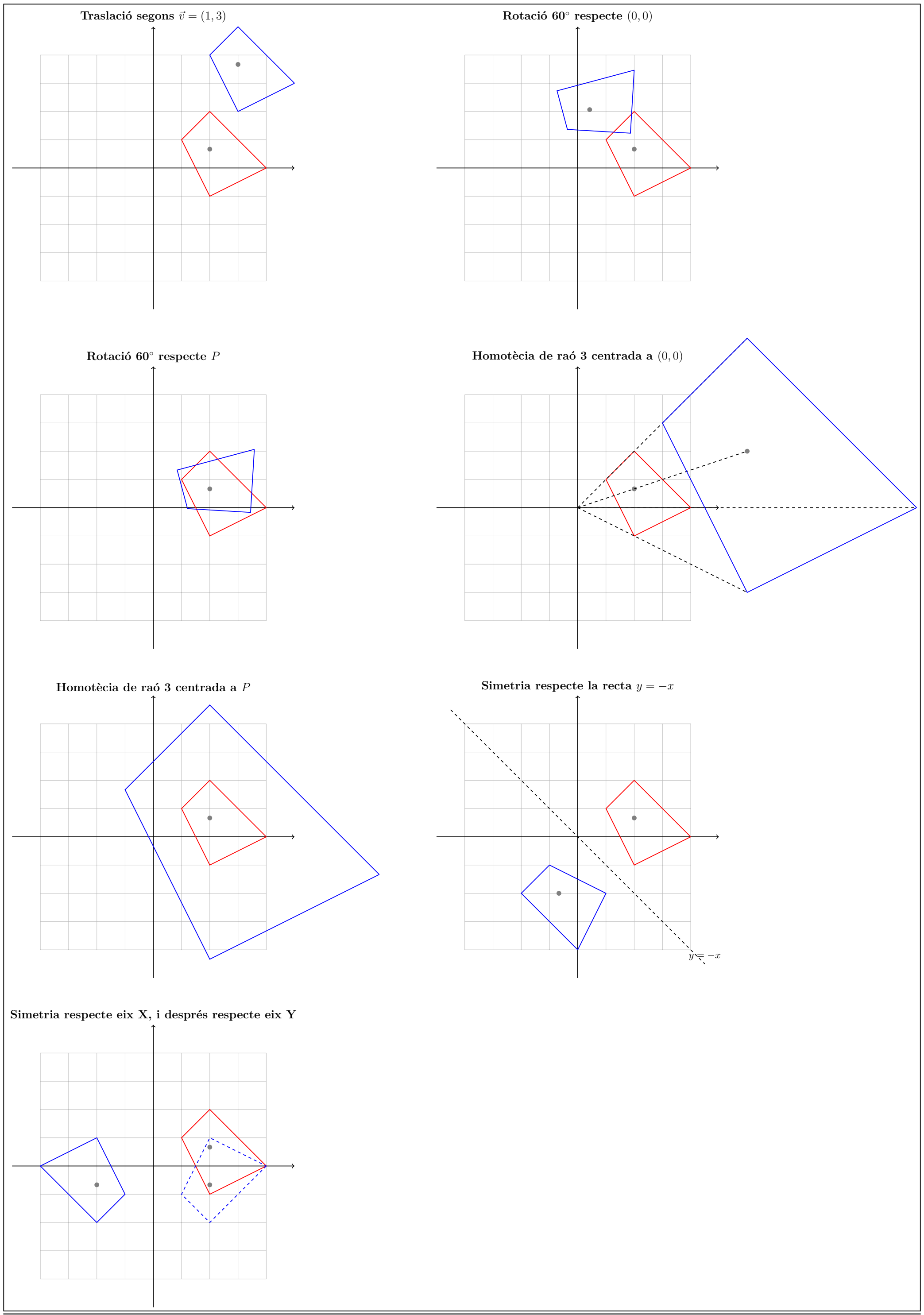


Figura 2: Transformacions afins d'un quadrilàter de vèrtex $(4, 0)$, $(2, 2)$, $(1, 1)$ i $(2, -1)$.

0.6 Interpolació

Ex. 43 — Considereu a $\mathbb{R}^2$ els punts $P_0 = (1,2)$, $P_1 = (2,5)$, $P_2 = (3,7)$ i $P_3 = (4,3)$ i els vectors $\overrightarrow{P_0'} = (-1,2)$ i $\overrightarrow{P_1'} = (2,-5)$

(1)Doneu en cada cas la interpolació lineal que passa pels punts

(1.1)P_0 i P_1

(1.2)P_1 i P_2

(1.3)P_2 i P_3

(1.4)P_0, P_1 i P_2 (a trossos)

(2)Doneu l'spline cúbic d'Hermite que passa pels punts:

(2.1)P_0 i P_1 amb direccions $\overrightarrow{P_0'}$ i $\overrightarrow{P_1'}$, respectivament

(2.2)P_0 i P_1 amb direccions $\overrightarrow{P_1'}$ i $\overrightarrow{P_0'}$, respectivament

(2.3)P_1 i P_2 amb direccions $\overrightarrow{P_0'}$ i $\overrightarrow{P_1'}$, respectivament

(2.4)P_0 i P_1 amb direccions $\overrightarrow{P_1'}$ i $\overrightarrow{P_0'}$, respectivament

(2.5)P_0 i P_1 amb direccions $\overrightarrow{P_0P_2}$ i $\overrightarrow{P_1P_3}$, respectivament

(3)Doneu l'spline cúbic de Béziers que:

(3.1)Passa per P_0 i P_3 amb punts de control P_1 i P_2

(3.2)Passa per P_0 i P_2 amb punts de control P_1 i P_3

(3.3)Passa per P_2 i P_3 amb punts de control P_0 i P_1

(3.4)Passa per P_1 i P_2 amb punts de control P_0 i P_3

Answer (Ex. 43) — Considerem cada cas en particular.

(1)Doneu en cada cas la interpolació lineal que passa pels punts (els resultats globals són graficats a la Figura 3):

(1.1)interpolació lineal que passa pels punts P_0 i P_1
Hem de construir una línea recta que passi pels punts P_0 i P_1. Per a fer-ho, l'estratègia més simple és copnstruir l'equació contínua de la recta. En aquest cas, podem considerar que la recta passarà pel

punt $P_0 = (1,2)$ i que tindrà com a vector director $\overrightarrow{P_0P_1} = (1,3)$. Per tant:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} \tag{4}$$

Quedant $y = \frac{3}{1}(x-1)+2$ a l'intèrval $x \in [1,2]$ ■

(1.2) interpolació lineal que passa pels punts P_1 i P_2
En aquest cas, podem considerar que la recta passarà pel punt $P_1 = (2,5)$ i que tindrà com a vector director $\overrightarrow{P_1P_2} = (1,2)$. Per tant:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{2} \tag{5}$$

Quedant $y = \frac{2}{1}(x-2)+5$ a l'intèrval $x \in [2,3]$ ■

(1.3) interpolació lineal que passa pels punts P_2 i P_3
En aquest cas, podem considerar que la recta passarà pel punt $P_2 = (3,7)$ i que tindrà com a vector director $\overrightarrow{P_2P_3} = (1,-4)$. Per tant:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{-4} \tag{6}$$

Quedant $y = \frac{-4}{1}(x-3)+7$ a l'intèrval $x \in [3,4]$ ■

(1.4) interpolació lineal que passa pels punts P_0, P_1 i P_2 (a trossos)
Aquí només cal construir una funció a trossos amb els fragments obtinguts abans:

$$y = \begin{cases} \frac{3}{1}(x-1)+2, x \in [1,2] \\ \frac{2}{1}(x-2)+5, x \in (2,3] \end{cases} \tag{7}$$

■

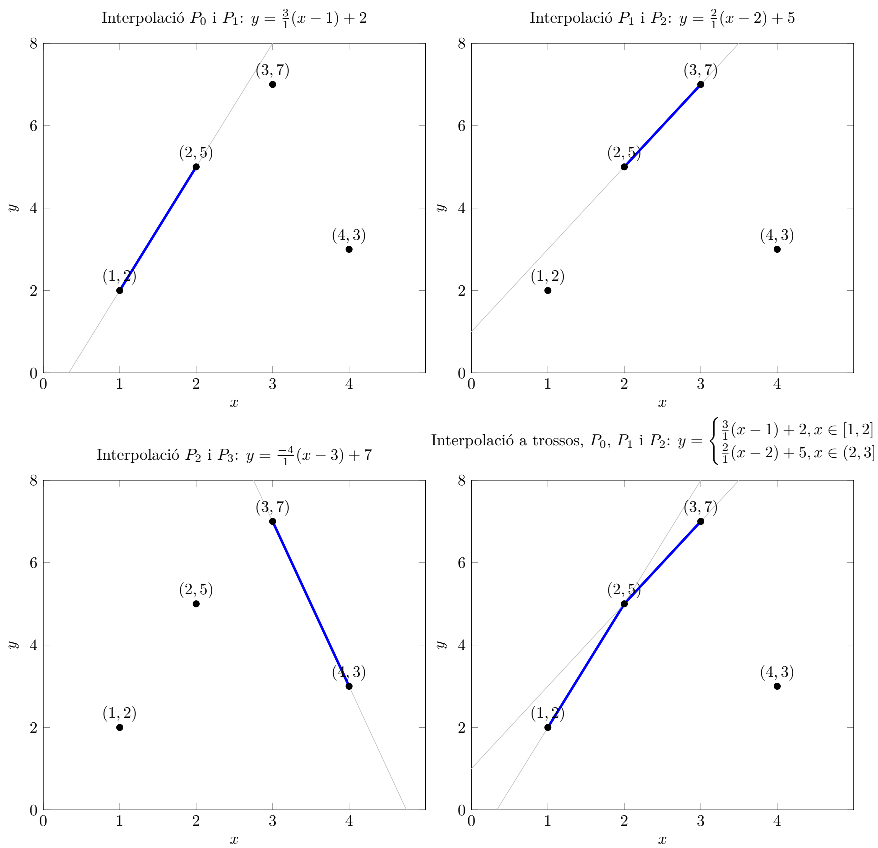


Figura 3: Gràfic resum de les respostes a l'exercici. En gris les rectes resultats i en blau els segments d'aplicació de cada interpolació

(2) Doneu l'spline cúbic d'Hermite que passa pels punts donats (els resultats globals són graficats a la Figura 4). El polinomi d'Hermite per a una interpolació cúbica es construeix fent $Q_0(t) = T \cdot M \cdot G$ on:

$$
\begin{aligned}
T &= \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \\
M &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
G &= \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_0' \\ P_1' \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

o bé:

$Q_0(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)P_0 + (-2t^3 + 3t^2)P_1 + (t^3 - 2t^2 + t)P'_0 + (t^3 - t^2)P'_1$

(2.1)P_0 i P_1 amb direccions $\overrightarrow{P'_0}$ i $\overrightarrow{P'_1}$, respectivament

$$Q_0(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (2t^3-3t^2+1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-2t^3+3t^2)\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + (t^3-2t^2+t)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (t^3-t^2)\Big($$

o bé

$$\begin{aligned} x(t) &= (2t^3 - 3t^2 + 1) + 2(-2t^3 + 3t^2) - (t^3 - 2t^2 + t) + 2(t^3 - t^2) \\ y(t) &= 2(2t^3 - 3t^2 + 1) + 5(-2t^3 + 3t^2) + 2(t^3 - 2t^2 + t) - 5(t^3 - t^2) \end{aligned}$$

Simplificant, obtenim:

$$\begin{aligned} x(t) &= -t^3 + 3t^2 - t + 1 \\ y(t) &= -9t^3 + 2t + 2 \end{aligned}$$

■

(2.2)P_0 i P_1 amb direccions $\overrightarrow{P'_1}$ i $\overrightarrow{P'_0}$, respectivament

$$Q_0(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (2t^3-3t^2+1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-2t^3+3t^2)\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + (t^3-2t^2+t)\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + (t^3-t^2)\Big($$

o bé

$$\begin{aligned} x(t) &= (2t^3 - 3t^2 + 1) + 2(-2t^3 + 3t^2) + 2(t^3 - 2t^2 + t) - (t^3 - t^2) \\ y(t) &= 2(2t^3 - 3t^2 + 1) + 5(-2t^3 + 3t^2) - 5(t^3 - 2t^2 + t) + 2(t^3 - t^2) \end{aligned}$$

Simplificant, obtenim:

$$\begin{aligned} x(t) &= -t^3 + 2t + 1 \\ y(t) &= -9t^3 + 17t^2 - 5t + 2 \end{aligned}$$

■

(2.3)P_1 i P_2 amb direccions $\overrightarrow{P_0'}$ i $\overrightarrow{P_1'}$, respectivament

$$Q_0(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (2t^3-3t^2+1)\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + (-2t^3+3t^2)\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + (t^3-2t^2+t)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (t^3-t^2)\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

o bé

$$\begin{aligned} x(t) &= 2(2t^3-3t^2+1) + 3(-2t^3+3t^2) - (t^3-2t^2+t) + 2(t^3-t^2) \\ y(t) &= 5(2t^3-3t^2+1) + 7(-2t^3+3t^2) + 2(t^3-2t^2+t) - 5(t^3-t^2) \end{aligned}$$

Simplificant, obtenim:

$$\begin{aligned} x(t) &= -t^3+3t^2-t+2 \\ y(t) &= -7t^3+7t^2+2t+5 \end{aligned}$$

■

(2.4)P_0 i P_1 amb direccions $\overrightarrow{P_1'}$ i $\overrightarrow{P_0'}$, respectivament

$$Q_0(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (2t^3-3t^2+1)\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + (-2t^3+3t^2)\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + (t^3-2t^2+t)\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + (t^3-t^2)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

o bé

$$\begin{aligned} x(t) &= 2(2t^3-3t^2+1) + 3(-2t^3+3t^2) + 2(t^3-2t^2+t) - (t^3-t^2) \\ y(t) &= 5(2t^3-3t^2+1) + 7(-2t^3+3t^2) - 5(t^3-2t^2+t) + 2(t^3-t^2) \end{aligned}$$

Simplificant, obtenim:

$$\begin{aligned} x(t) &= -t^3+2t+2 \\ y(t) &= -7t^3+14t^2-5t+5 \end{aligned}$$

■

(2.5)P_0 i P_1 amb direccions $\overrightarrow{P_0P_2}$ i $\overrightarrow{P_1P_3}$, respectivament
Primer trobem els vectors:

$$\overrightarrow{P_0P_2} = P_2 - P_0 = (3,7) - (1,2) = (2,5)$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = P_3 - P_1 = (4,3) - (2,5) = (2,-2)$$

$$Q_0(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (2t^3-3t^2+1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-2t^3+3t^2)\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + (t^3-2t^2+t)\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + (t^3-t^2)\left(\begin{matrix} 2 \\ - \end{matrix}\right.$$

o bé

$$\begin{aligned} x(t) &= (2t^3 - 3t^2 + 1) + 2(-2t^3 + 3t^2) + 2(t^3 - 2t^2 + t) + 2(t^3 - t^2) \\ y(t) &= 2(2t^3 - 3t^2 + 1) + 5(-2t^3 + 3t^2) + 5(t^3 - 2t^2 + t) - 2(t^3 - t^2) \end{aligned}$$

Simplificant, obtenim:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 2t + 1 \\ y(t) &= -3t^3 + t^2 + 5t + 2 \end{aligned}$$

■

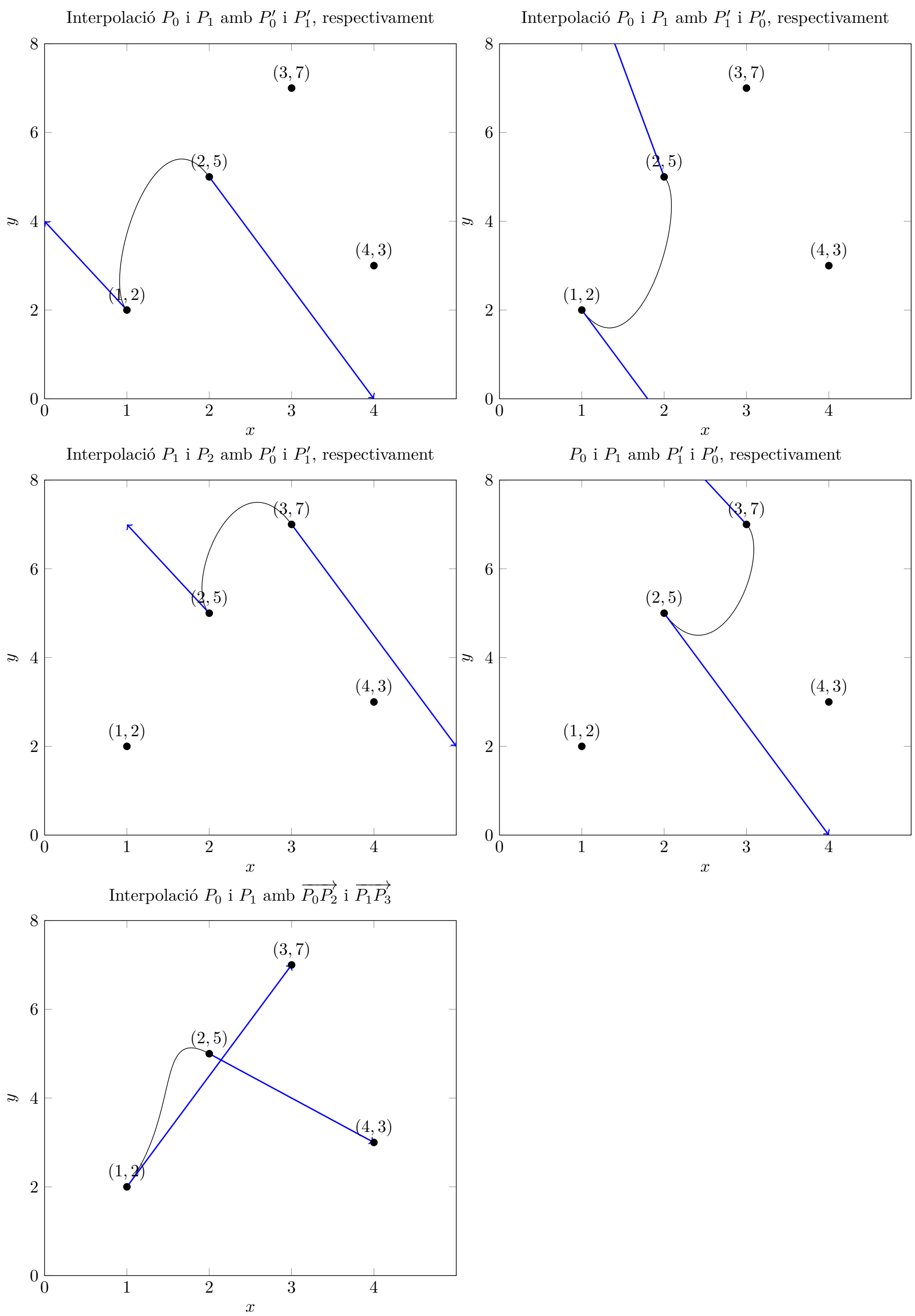


Figura 4: Gràfic resum de les interpolacions cúbiques d'Hermite de l'exercici.

(3)Doneu l'spline cúbic de Béziers que passa pels punts donats (els resultats globals són graficats a la Figura 5). El polinomi de Béziers per a una interpolació cúbica es construeix fent $Q_0(t) = T \cdot M \cdot G$ on:

$$
\begin{aligned}
T &= \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \\
M &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
G &= \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

o bé:

$$Q_0(t) = (-t^3+3t^2-3t+1)P_0+(3t^3-6t^2+3t)P_1+(-3t^3+3t^2)P_2+t^3P_3$$

(3.1)Passa per P_0 i P_3 amb punts de control P_1 i P_2

$$Q_0(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (-t^3+3t^2-3t+1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+(3t^3-6t^2+3t)\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}+(-3t^3+3t^2)\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}+t^3 \Bigg($$

o bé

$$
\begin{aligned}
x(t) &= (-t^3+3t^2-3t+1)+2(3t^3-6t^2+3t)+3(-3t^3+3t^2)+4t^3 \\
y(t) &= 2(-t^3+3t^2-3t+1)+5(3t^3-6t^2+3t)+7(-3t^3+3t^2)+3t^3
\end{aligned}
$$

Simplificant, obtenim:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 3t+1 \\
y(t) &= -5t^3-3t^2+9t+2
\end{aligned}
$$

■

(3.2)Passa per P_0 i P_2 amb punts de control P_1 i P_3

$$Q_0(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (-t^3+3t^2-3t+1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+(3t^3-6t^2+3t)\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}+(-3t^3+3t^2)\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}+t^3 \Bigg($$

o bé

$$\begin{aligned} x(t) &= (-t^3+3t^2-3t+1)+2(3t^3-6t^2+3t)+4(-3t^3+3t^2)+3t^3 \\ y(t) &= 2(-t^3+3t^2-3t+1)+5(3t^3-6t^2+3t)+3(-3t^3+3t^2)+7t^3 \end{aligned}$$

Simplificant, obtenim:

$$\begin{aligned} x(t) &= -4t^3+3t^2+3t+1 \\ y(t) &= 11t^3-15t^2+9t+2 \end{aligned}$$

■

(3.3)Passa per P_2 i P_3 amb punts de control P_0 i P_1

$$Q_0(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (-t^3+3t^2-3t+1)\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}+(3t^3-6t^2+3t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+(-3t^3+3t^2)\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}+t^3\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

o bé

$$\begin{aligned} x(t) &= 3(-t^3+3t^2-3t+1)+1(3t^3-6t^2+3t)+2(-3t^3+3t^2)+4t^3 \\ y(t) &= 7(-t^3+3t^2-3t+1)+2(3t^3-6t^2+3t)+5(-3t^3+3t^2)+3t^3 \end{aligned}$$

Simplificant, obtenim:

$$\begin{aligned} x(t) &= -2t^3+9t^2-6t+3 \\ y(t) &= -13t^3+24t^2-15t+2 \end{aligned}$$

■

(3.4)Passa per P_1 i P_2 amb punts de control P_0 i P_3

$$Q_0(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (-t^3+3t^2-3t+1)\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}+(3t^3-6t^2+3t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+(-3t^3+3t^2)\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}+t^3\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

o bé

$$\begin{aligned} x(t) &= 2(-t^3+3t^2-3t+1)+1(3t^3-6t^2+3t)+4(-3t^3+3t^2)+3t^3 \\ y(t) &= 5(-t^3+3t^2-3t+1)+2(3t^3-6t^2+3t)+3(-3t^3+3t^2)+7t^3 \end{aligned}$$

Simplificant, obtenim:

$$\begin{aligned} x(t) &= -8t^3+12t^2-3t+2 \\ y(t) &= -t^3+12t^2-9t+5 \end{aligned}$$

■

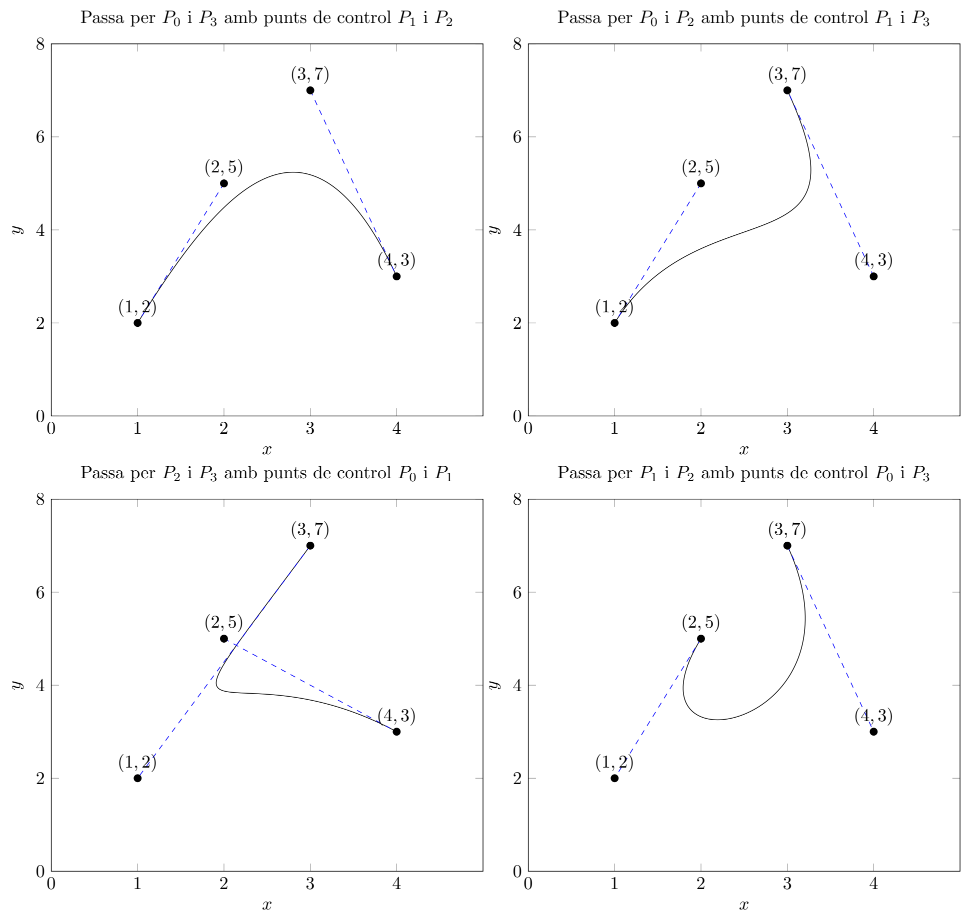


Figura 5: Gràfic resum de les interpolacions cúbiques de Béziers de l'exercici.

Un exemple de codi MATLAB per generar les interpolacions de Beziers pot ser:

```
%Exercici Splines Beziers
% Treballarem amb l'operador simbòlic i la variable
% serà el paràmetre t, que varia entre 0 i 1, els
% dos punts entre els quals interpolem
syms t

% Construïm els polinomis
t1 = -t^3+3*t^2-3*t+1
t2 = 3*t^3-6*t^2+3*t
```

```
t3 = -3*t^3+3*t^2
t4 = t^3

% Determinem les coordenades
x = [1 2 3 4]
y = [2 5 7 3]
scatter(x,y,'d'),hold on

% Cadascun dels supòsits de l'exercici
% beziers a
polx = 1*t1+2*t2+3*t3+4*t4
poly = 2*t1+5*t2+7*t3+3*t4
fplot(polx,poly,[0 1]), hold on

% beziers b
polx = 1*t1+2*t2+4*t3+3*t4
poly = 2*t1+5*t2+3*t3+7*t4
fplot(polx,poly,[0 1]), hold on

% beziers c
polx = 3*t1+1*t2+2*t3+4*t4
poly = 7*t1+2*t2+5*t3+3*t4
fplot(polx,poly,[0 1]), hold on

% beziers d
polx = 2*t1+1*t2+4*t3+3*t4
poly = 5*t1+2*t2+3*t3+7*t4
fplot(polx,poly,[0 1]), hold off
```

Ex. 44 — Considereu a $\mathbb{R}^2$ els punts $P_0 = (1,2)$, $P_1 = (2,5)$, $P_2 = (3,7)$ i $P_3 = (4,3)$ i els vectors $\overrightarrow{P_0'} = (-1,2)$ i $\overrightarrow{P_1'} = (2,-5)$
Considerant els 4 punts $P_0 = (1,1)$, $P_1 = (2,5)$, $P_2 = (3,4)$ i $P_3 = (4,2)$, i recordant que la interpolació de Béziers ens ajuda a construir un spline cúbic seguint $Q_0(t) = T \cdot M \cdot G$ on $T = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i

$$G = \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$$

1. Troba l'expressió paramètrica de l'spline cúbic de Béziers que s'obté entre els extrems P_0 i P_3 amb punts de control P_1 i P_2.

2. Quin és el punt que generem amb aquesta interpolació a mig camí de l'intèrval $t \in [0, 1]$?

3. Grafica tots els punts i una aproximació a la funció interpolada.

Answer (Ex. 44) — 1. Troba l'expressió paramètrica de l'spline cúbic de Béziers que s'obté entre els extrems P_0 i P_3 amb punts de control P_1 i P_2. Usem l'equació donada $Q_0(t) = T \cdot M \cdot G$ i obtenim:

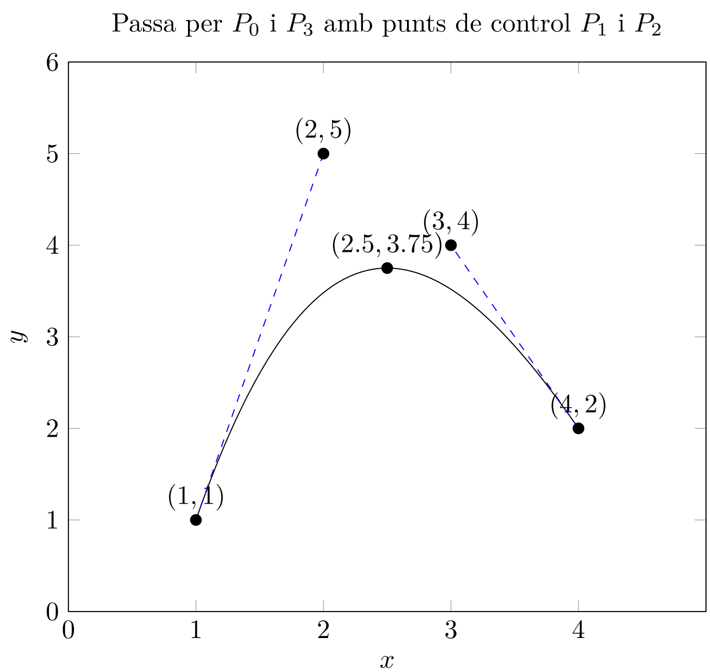
$$\begin{aligned}
Q_0(t) &= \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x(t) & y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -t^3 + 3t^2 - 3t + 1 & 3t^3 - 6t^2 + 3t & -3t^3 + 3t^2 & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3t + 1 \\ 4t^3 - 15t^2 + 12t + 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. Quin és el punt que generem amb aquesta interpolació a mig camí de l'intèrval $t \in [0, 1]$?

A mig camí de l'intèrval $t = [0, 1]$ som a $t = \frac{1}{2}$. Per tant:

$$\begin{pmatrix} x(\frac{1}{2}) \\ y(\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(\frac{1}{2}) + 1 \\ 4(\frac{1}{2})^3 - 15(\frac{1}{2})^2 + 12(\frac{1}{2}) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3.75 \end{pmatrix}$$

3. Grafica tots els punts i una aproximació a la funció interpolada.



Ex. 45 — En la competició FIFA 2023 que organitza Vicjove, l'avatar d'una jugadora del Lluçanès està llançant una falta a 20 metres de la porteria. Un defensa de 2 metres es troba a mig camí entre el punt de llançament de la falta i la porteria. Si el seu xut té una velocitat inicial que ve donada pel vector $P_0' = (8, 7)$, l'escaire és a una alçada de 3 metres i la velocitat d'entrada de la pilota a la porteria ve donada pel vector $P_1' = (5, 0)$,

1.podrà superar el defensa?.

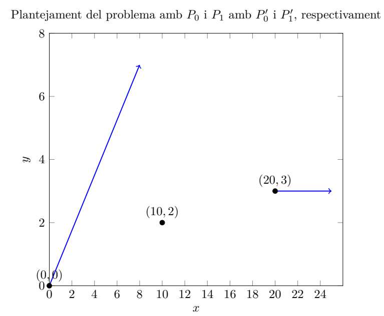
2.Quina és l'alçada màxima que adquireix la pilota?

3.Grafica tots els punts i una aproximació a la funció interpolada.

NOTA important: La jugadora sospita que el rigor del programa FIFA pel que fa a la física pot ser més que dubtós, però afortunadament va aprovar Matemàtiques de primer de multimèdia i recorda que la interpolació d'Hermite segueix la fòrmula $Q_0(t) = T \cdot M \cdot G$ on $T = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix}$,
$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $G = \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_0' \\ P_0' \end{pmatrix}$

Answer (Ex. 45) — 1.podrà superar el defensa?.

Comencem per graficar el problema:



on es pot observar que $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (20,3)$, $P_0' = (8,7)$ i $P_1' = (5,0)$. *Nota*: és obvi que no es tracta d'un problema clàssic de tir parabòlic, ja que en aquest cas tindríem una velocitat horitzontal invariant. En el present exemple aquesta velocitat es redueix, la qual cosa implica una força contrària al moviment de la pilota amb component horitzontal (fricció del vent) que ha reduït aquesta component del valor inicial de 8 al final (en la posició de la porteria) de 5. De la mateixa manera, com que la component Y de la velocitat és zero en arribar a la porteria, es podria deduir que la pilota just ha arribat al seu valor màxim. Més enllà d'això, obviarem la física del problema i ens centrarem en el problema d'interpolació plantejat (que, de fet, ens donarà una corba parametritzada de tercer grau i no de segon grau com seria esperat del problema físic).

La solució del problema es basa en parametritzar el polinomi que descriu el moviment. Segons la informació que ens donen sobre com descriure una interpolació cúbica d'Hermite, tenim:

$$
\begin{aligned}
Q_0(t) &= \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_0' \\ P_1' \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x(t) & y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2t^3 - 3t^2 + 1 & -2t^3 + 3t^2 & t^3 - 2 * t^2 + t & t^3 - t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 20 & 3 \\ 8 & 7 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\begin{pmatrix} x(t) & y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27t^3 + 39t^2 + 8t & t^3 - 5t^2 + 7t \end{pmatrix}$$

Aquesta interpolació es pot expressar com

$$\sigma(t) = (-27t^3 + 39t^2 + 8t)\mathbf{i} + (t^3 - 5t^2 + 7t)\mathbf{j}$$

amb derivada

$$\sigma'(t) = (-81t^2 + 78t + 8)\mathbf{i} + (3t^2 - 10t + 7)(j)$$

i és fàcil veure que es correspon amb les dades donades:

$$\begin{aligned} P_0 &= \sigma(0) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} \\ P_1 &= \sigma 1 = (-27 + 39 + 8)\mathbf{i} + (1 - 5 + 7)\mathbf{j} = 20\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \\ P_0' &= \sigma(0) = 8\mathbf{i} + 7\mathbf{j} \\ P_1' &= \sigma' 1 = (-81 + 78 + 8)\mathbf{i} + (3 - 10 + 7)\mathbf{j} = 5\mathbf{i} + 0\mathbf{j} \end{aligned}$$

Per saber si supera el defensa, hem de veure quin valor de y té la funció quan la $x = 10$.
Això es pot aconseguir trobant el valor de t per al qual $x = 10$:

$$-27t^3 + 39t^2 + 8t = 10$$

Solucionar una equació de tercer grau queda fora del coneixement d'aquest exercici, però podem mirar de trobar valors de t que ens acotin el valor de x i, d'aquesta manera, de y.
Per exemple, en primera aproximació, si $t = 1/2$ tenim

$$-27\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 39\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 8\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{27}{8} + \frac{39}{4} + \frac{8}{2} = \frac{-27 + 78 + 32}{8} = \frac{83}{8} \approx 10$$

Per tant, $t = 1/2$ sembla una bona aproximació inicial al temps que tarda la pilota en assolir $x = 10$. En aquest valor, tenim:

$$y(t = 1/2) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 7\frac{1}{2} = \frac{1}{8} - \frac{5}{4} + \frac{7}{2} = \frac{1 - 10 + 28}{8} = \frac{19}{8} > 2$$

NOTA: un simple càlcul amb matlab ens mostra que el $(x, y) = (10, 2.34)$ quan $t = 0.486$, o sigui que la primera aproximació feta és prou bona.

2.Quina és l'alçada màxima que adquireix la pilota?

Per trobar l'alçada màxima només cal mirar quan la primera derivada de la component y de la trajectòria es fa zero

$$3t^2 - 10t + 7 = 0$$

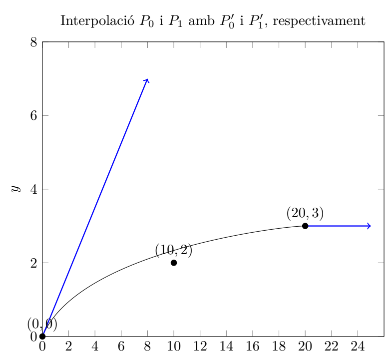
que succeeix quan:

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 3 \cdot 7}}{6}$$

és a dir, a $t_1 = 7/3$ i a $t = 1$. El primer resultat queda exclços perquè és fora del rang de valors de t. El segon és el correcte i lliga amb la intuició inicial de que la pilota arribarà al seu màxim just quan toca el travesser.

3.Grafica tots els punts i una aproximació a la funció interpolada.

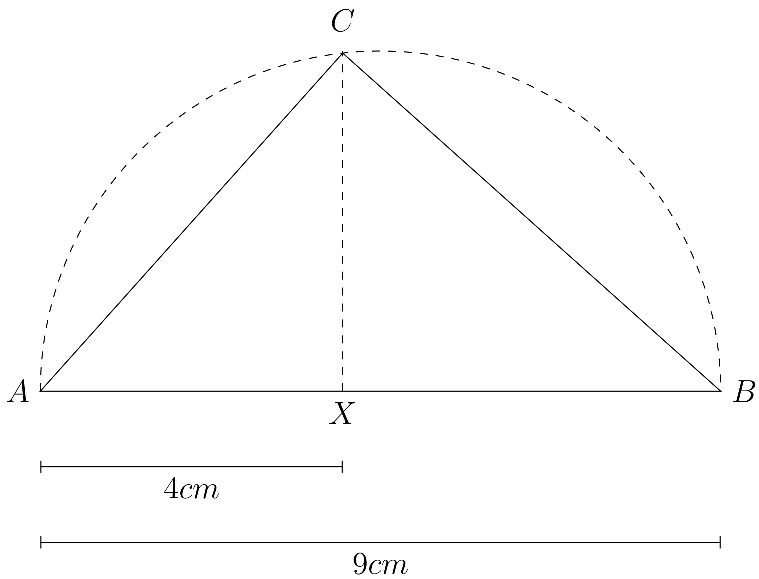
el polinomi resultant serà



0.7 Proporció i Tales

Ex. 46 — La projecció d'un catet sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle medeix 4cm, i la hipotenusa 9c. Quant medeix el catet?

Answer (Ex. 46) — Els triangles AXC i CXB de la figura són semblants:



Per tant, es compleix que:

$$\frac{AX}{CX} = \frac{CX}{XB}$$
$$\frac{4cm}{CX} = \frac{CX}{5cm}$$

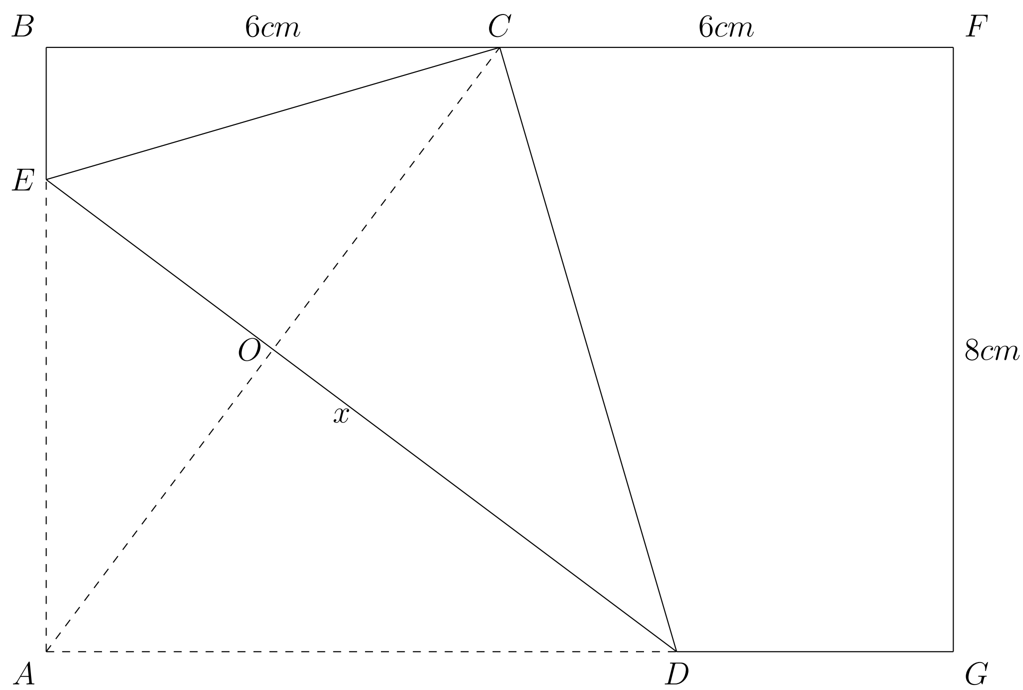
Amb la qual cosa, l'alçada del triangle és $CX = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}cm$. D'aquí, usant el teorema de Pitàgoras: $AC = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{16 + 20} = 6cm$. També podem notar que, de fet, els tres triangles AXC, CXB i ACB de la figura són semblants (només cal observar els seus angles). Per tant:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AX}{AC}$$

És a dir que: $AC = \sqrt{AB \cdot AX} = 6cm$.

Ex. 47 — Si agafo un paper rectangular que fa 8cm d'ample per 12cm de llarg i li faig un plec que dugui una punta del rectangle a la meitat del costat oposat llarg, quina és la mida del plegament?

Answer (Ex. 47) — Dibuixem el problema i marquem els punts importants que defineixin els triangles a comparar:



Observem que $BC = 6cm$, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10cm$. Per tant, $AO = OC = 5cm$.
Observem també que els triangles ABC, AOD i EOA són semblants (per comprovar-ho, agafa un paper rectangulr qualsevol i juga amb possibles plecs similars al proposat). Usant aquestes relacions obtenim que:

$$\frac{5}{OD} = \frac{6}{8}$$

d'on, $OD = \frac{20}{3}$. I, d'altra banda:

$$\frac{5}{OE} = \frac{8}{6}$$

d'on, $OE = \frac{15}{4}$.
Per tant, la distància demanada és

$$x = ED = OE + OD = \frac{20}{3} + \frac{15}{4} = \frac{125}{12}$$

0.8 Simetria

Ex. 48 — Trobeu la simetria d'una lletra "A"majúscula Arial[1]:

A

Answer (Ex. 48) — Primer identifiquem les isometries (elements de simetria que deixen la figura invariant):

- La identitat Id.
- La simetria respecte l'eix verital σ_v.
- Cap rotació en aquest cas.

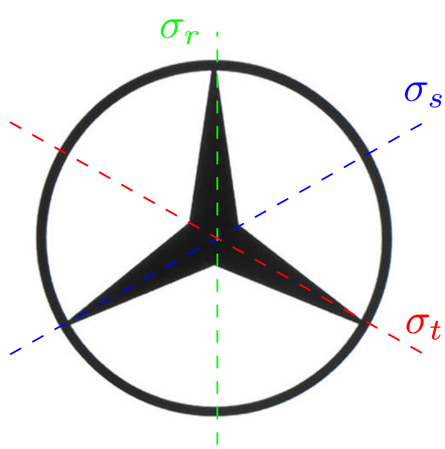
Construïm ara la taula amb les possibles composicions:

$\circ$	Id	σ_v
Id	Id	σ_v
σ_v	σ_v	Id

Es tracta, doncs, d'un objecte de simetria m en la notació de Hermann-Mauguin o D_2 en la de Schönflies.

Ex. 49 — Estudieu el grup de simetria d'aquest objecte (trobeu elements i operacions de simetria i construïu la taula)

Answer (Ex. 49) — Comencem per identificar les isometries, les transformacions que deixen la figura invariant. El logo té tres eixos de simetria (veure figura) i també dues rotacions ($R_0^{2\pi/3}$ i $R_0^{4\pi/3}$). Finalment hem de considerar també la transformació identitat, Id.



a partir d'aquesta informació podem construir la taula de composició d'isometries, cosa que, entre altres, ens permet visualitzar si hem oblidat alguna altra isometria:

$\circ$	Id	σ_r	σ_s	σ_t	$R_0^{2\pi/3}$	$R_0^{4\pi/3}$
Id	Id	σ_r	σ_s	σ_t	$R_0^{2\pi/3}$	$R_0^{4\pi/3}$
σ_r	σ_r	Id	$R_0^{4\pi/3}$	$R_0^{2\pi/3}$	σ_t	σ_s
σ_s	σ_s	$R_0^{2\pi/3}$	Id	$R_0^{2\pi/3}$	σ_r	σ_t
σ_t	σ_t	$R_0^{4\pi/3}$	$R_0^{4\pi/3}$	Id	σ_s	σ_r
$R_0^{2\pi/3}$	$R_0^{2\pi/3}$	σ_s	σ_t	σ_r	$R_0^{4\pi/3}$	Id
$R_0^{4\pi/3}$	$R_0^{4\pi/3}$	σ_t	σ_r	σ_s	Id	$R_0^{2\pi/3}$

De l'observació de la taula es pot trobar la isometria inversa de cada element del grup. De la transformació al voltant d'un eix de simetria, la inversa és ella mateixa, la qual cosa es coneix com la propietat involutiva, ja que la doble transformació duu a la identitat:

$$\sigma_s \circ \sigma_s = Id$$

Pel que fa als girs, l'un és l'invers de l'altre:

$$\begin{aligned} (R_0^{2\pi/3})^{-1} &= R_0^{4\pi/3} \\ (R_0^{4\pi/3})^{-1} &= R_0^{2\pi/3} \end{aligned}$$

També observem que el grup no és commutatiu, ja que, per exemple, $\sigma_s \circ \sigma_t \neq \sigma_t \circ \sigma_s$.

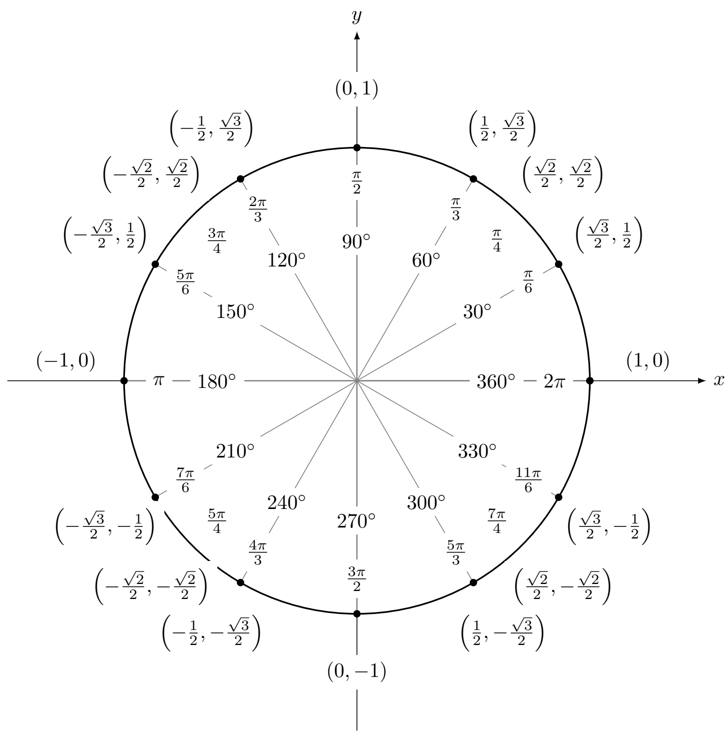


Figura 6: Esquema dels valors de $\sin x$ i $\cos x$ per a alguns valors d'angles.

0.9 Material pràctic

- La Figura 6 conté informació sobre els sinus i cosinus d'alguns dels valors d'angles més comuns en els exercicis de l'assignatura.

Bibliografia

[1] Pere Cruells and Germán Sáez. Matemàtiques per a multimèdia I_mòdul 7_simetria i disseny.pdf. Number PID_00150791. UOC.