FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC-UCC

Enginyeria Mecatrònica

Examen Parcial Matemàtiques I GEMEC-09UV
RESPOSTES

2 de Novembre de 2022

1. (3 Punts) Calcula els següents límits:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ *(0.75p)*
2. $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-(x+1)\right]$ *(0.75p)*
3. $\lim_{x\to 1}(5x^2-5)\csc(2x-2)$ *(0.75p)*
4. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ *(0.75p)*

Resposta:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$
Es tracta d'una indeterminació $\frac{0}{0}$. Per solucionar-la usarem el concepte d'infinitèssim equivalent. Per a fer-ho, podem recordar que $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2/2}=1$, o bé que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Resolem-ho per als dos casos:

Usem $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2/2}=1$ Potser és la manera més fàcil de fer aquest límit:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{x/2}{x/2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2/2}\cdot\frac{x}{2}=1\cdot 0=0$$

Usem $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ En aquest cas, voldrem fer aparèixer un $\sin x$ al numerador:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}=\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}=1\cdot 0=0\end{aligned}$$

2. $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-(x+1)\right]$
Es tracta d'una indeterminació del tipus $\infty-\infty$. En aquest cas, com que volem eliminar

l'arrel quadrada per poder fer operacions que ens simplifiquin el límit, tot transformant el problema en un $\frac{\infty}{\infty}$, usem que $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-(x+1)\right] &= \lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-(x+1)\right]\frac{\left[\sqrt{x^2+x}+(x+1)\right]}{\left[\sqrt{x^2+x}+(x+1)\right]} = \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-(x+1)^2}{\left[\sqrt{x^2+x}+(x+1)\right]} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x-1}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)}
\end{aligned}$$

Dividim ara a dalt i a baix per x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x-1}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+(1+\frac{1}{x})} = \frac{-1+0}{\sqrt{1+0}+1+0} = -\frac{1}{2}$$

3. $\lim_{x\to 1}(5x^2-5)\csc(2x-2)$

   Es tracta d'una indeterminació $0\cdot\infty$. Ens hem de fixar que quan apareix un $\sin(g(x))$ podem mirar de fer servir el seu infinitèssim equivalent $g(x)$. En aquest cas, $g(x) = 2x-2$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}(5x^2-5)\csc(2x-2) &= \lim_{x\to 1}\frac{5x^2-5}{\sin(2x-2)} = \lim_{x\to 1}\frac{5x^2-5}{\sin(2x-2)}\frac{2x-2}{2x-2} = \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{\sin(2x-2)}\frac{5(x^2-1)}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{\sin(2x-2)}\frac{5(x+1)}{2} = 1\cdot\frac{5\cdot 2}{2} = 5
\end{aligned}$$

4. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$

   Es tracta d'una indeterminació 1^∞ i, per tant, usem l'expressió:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a}[f(x)-1]g(x)}$$

Per tant:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}(\cos x-1)\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}}$$

Ara podem escollir diverses opcions per solucionar el límit de l'exponent:

- Usar la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

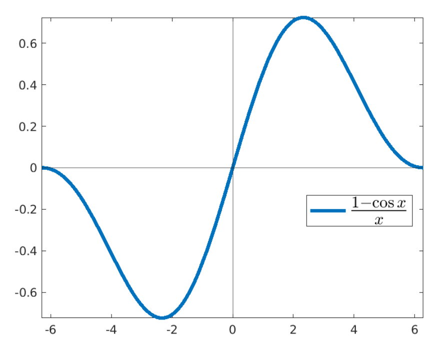
- usar una simple transformació algebraïca:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x}\frac{\cos x + 1}{\cos x + 1} = && (1)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = && (2)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{-\sin x}{\cos x + 1} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x + 1}}_{\frac{0}{2}} = && (3)\\
&= 1\cdot 0 = 0 && (4)
\end{aligned}$$

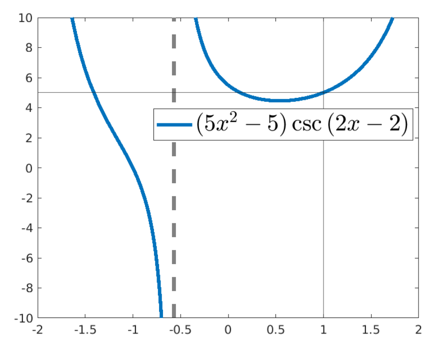
on hem aprofitat que el primer dels dos límits que es multipliquen és una fracció d'infinitèssims equivalents. Finalment, doncs:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

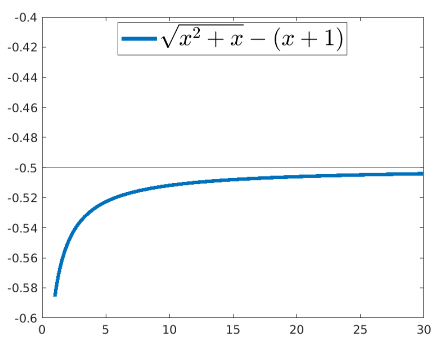
El resum de les diferents funcions es troba a la Figura:



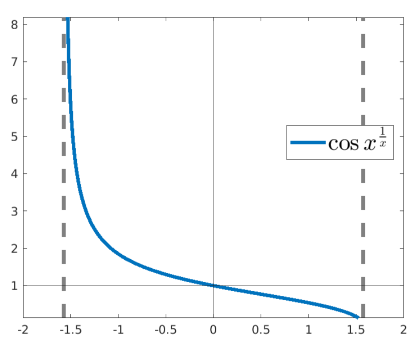
Exercici 1.1



Exercici 1.3



Exercici 1.2



Exercici 1.4

■ **2. (2 Punts)** Donada la funció

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x + e^x & x < 0 \\ \alpha(1+x)^2 + \beta e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

determina quins són els valors d'α i β que la fan alhora contínua i derivable a tot el seu domini.

Resposta:

La funció està formada per dos blocs, cadascun continu en tot l'intèrval en que està definit. Per tant, l'únic punt que ens ha de preocupar és $x = 0$ (punt frontera). Avaluem primer la derivada en els dos fragments de la funció:

$$f'(x) = \begin{cases} -\cos x + e^x & x < 0 \\ 2\alpha(1+x) - \beta e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

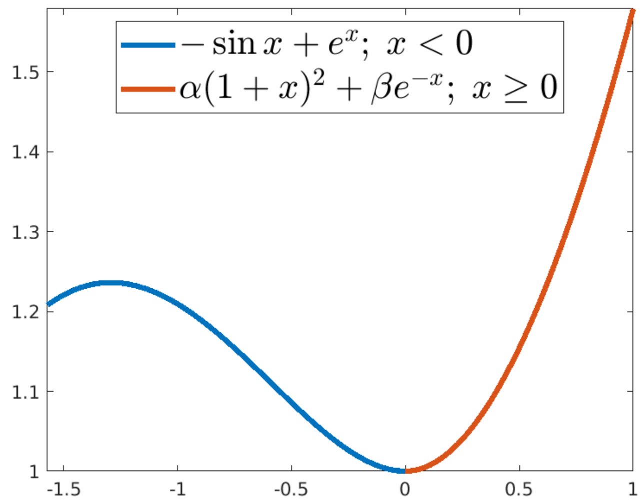
Per tal que la funció sigui contínua i derivable, s'ha de complir, a $x = 0$:

$$\begin{cases} e^0 - \sin 0 = \alpha(1+0)^2 + \beta e^{-0} \\ e^0 - \cos 0 = 2\alpha(1+0) - \beta e^{-0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 0 = 2\alpha - \beta \end{cases}$$

d'on obtenim que $\alpha = \frac{1}{3}$ i $\beta = \frac{2}{3}$.

La Figura mostra la funció resultant $f(x)$ per a $\alpha = \frac{1}{3}$ i $\beta = \frac{2}{3}$:



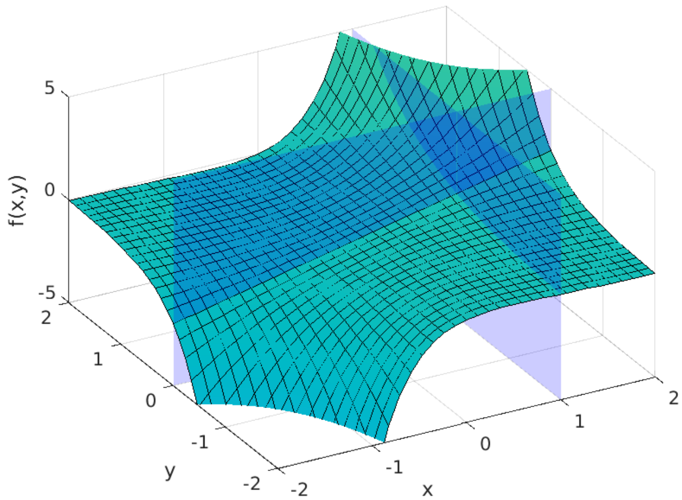
■ **3. (3 Punts)** Donada la funció $f(x, y) = xe^{xy}$, determinar:

1. La derivada direccional de f en el punt $(x, y, f(x, y)) = (1, 0, 1)$ i en la direcció del vector $\vec{v} = (0, 2)$. *(1.5p)*

2. L'equació del pla tangent a la funció en el punt $(1, 0, 1)$. *(1.5p)*

Resposta:

La Figura mostra la funció obtinguda amb MATLAB, com a guia per a entendre els resultats que obtindrem en aquest exercici. S'hi han dibuixat els plans $x = 1$ i $y = 0$ per facilitar la localització del punt $(1, 0, 1)$.



1. La derivada direccional de f en el punt $(1,0,1)$ i en la direcció del vector $\vec{v}=(0,2)$.

   Per calcular la derivada direccional en la direcció d'un vector només ens cal trobar el gradient i projectar-lo sobre aquesta direcció:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1+xy) \\ x^2 e^{xy} \end{pmatrix}$$

   Si l'avaluem al punt $(1,0)$:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   El vector unitari en la direcció del vector $\vec{v}=(0,2)$ és el vector $\hat{v}=(0,1)$. La derivada direccional serà el producte escalar entre el gradient i el vector unitari de la direcció donada: $D_u f(x,y) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f(x,y)\cdot\hat{v}$. Per tant:

$$D_u f(1,0) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f(1,0)\cdot(0,1) = (1,1)\cdot(0,1) = 1$$

   ■

2. L'equació del pla tangent a la funció en el punt $(1,0,1)$.

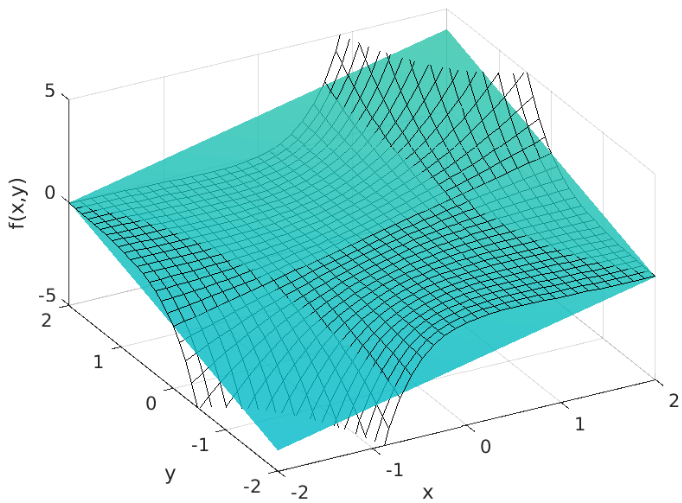
   Apliquem l'expressió del pla tangent a (x_0,y_0):

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)$$

En el nostre cas:

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(1,0) &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,0)} (x-1) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,0)} (y) = (x-1) + (y) \\ f(x,y) &= x + y \end{aligned}$$

On hem usat $f(1,0) = 1$.



■

4. (2 Punts) Troba els punts crítics de la funció $f(x,y) = \sin\frac{x}{2} + \cos y$, i determina de quin tipus són.

Resposta:

Es tracta d'una funció definida a tot el pla (x,y). Per trobar els punts crítics solucionem el sistema generat per:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} \\ -\sin y \end{pmatrix}$$

d'on obtenim

$$\begin{aligned} \cos\frac{x}{2} &= 0 \\ \sin y = 0 & \end{aligned}$$

La primera equació es resol per a tots els valors de x que compleixin

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow x = \pi + 2n\pi = (2n+1)\pi$$

i la segona per a tots els valors de y que compleixin

$$y = m\pi$$

per a qualsevol número sencer m.

Construim la matriu Hessiana fent les segones derivades de la funció:

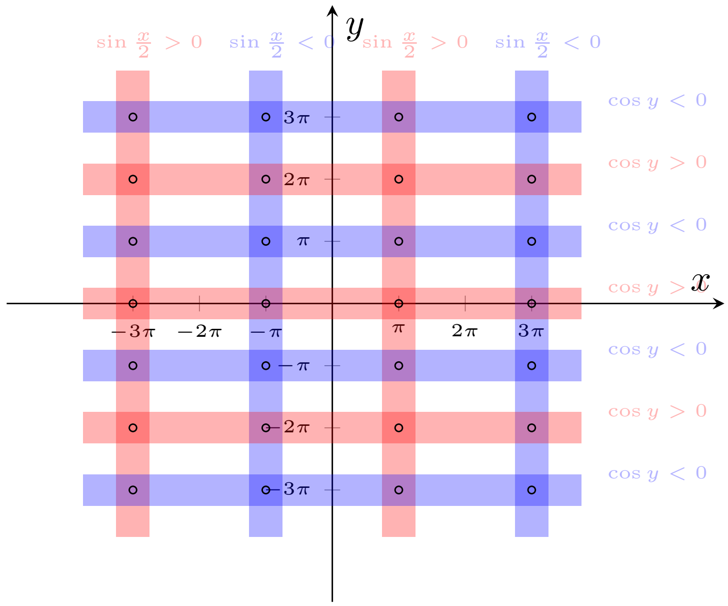
$$\mathbf{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2} & 0 \\ 0 & -\cos y \end{pmatrix}$$

On hem usat que les derivades primeres són contínues a tot $\mathbb{R}^2$ i podem aplicar el teorema de Schwarz: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = C$.

El Hessià, determinant de la matriu Hessiana, queda com:

$$H_f = det(\mathbf{H}_f(x,y)) = \frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}\cos y$$

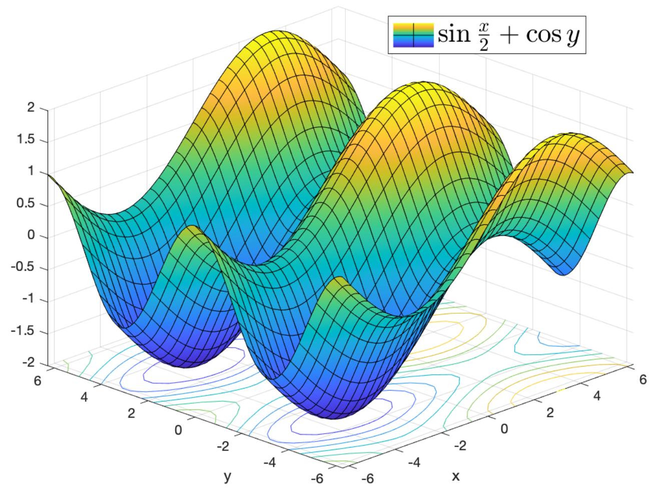
La figura següent representa el valor del Hessià als punts que hem trobat que eren punts crítics: $(x,y) = ([2n-1]\pi, m\pi)$. Les franges vermelles representen els valors de x i y per als quals o bé $\sin\frac{x}{2} > 0$ o bé $\cos y > 0$. Les franges blaves representen els valors de x i y per als quals aquestes mateixes funcions són negatives. Així, $H_f < 0$ on les franges blaves es creuen amb les vermelles, i $H_f > 0$ quan es creuin franges del mateix color.



En resum, tenint present que $A = -\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}$:

y \ x	-3π	$-\pi$	π	3π	$\cdots$
3π	$H_f = -\frac{1}{4}$ Punt sella	$H_f = \frac{1}{4}$ $A = \frac{1}{4} > 0$ Mínim	$H_f = -\frac{1}{4}$ Punt sella	$H_f = \frac{1}{4}$ $A = \frac{1}{4} > 0$ Mínim	$\cdots$
2π	$H_f = \frac{1}{4}$ $A = -\frac{1}{4} < 0$ Màxim	$H_f = -\frac{1}{4}$ Punt sella	$H_f = \frac{1}{4}$ $A = -\frac{1}{4} < 0$ Màxim	$H_f = -\frac{1}{4}$ Punt sella	$\cdots$
π	$H_f = -\frac{1}{4}$ Punt sella	$H_f = \frac{1}{4}$ $A = \frac{1}{4} > 0$ Mínim	$H_f = -\frac{1}{4}$ Punt sella	$H_f = \frac{1}{4}$ $A = \frac{1}{4} > 0$ Mínim	$\cdots$
0	$H_f = \frac{1}{4}$ $A = -\frac{1}{4} < 0$ Màxim	$H_f = -\frac{1}{4}$ Punt sella	$H_f = \frac{1}{4}$ $A = -\frac{1}{4} < 0$ Màxim	$H_f = -\frac{1}{4}$ Punt sella	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

El gràfic de la funció mostra com en una direcció X o Y determinada, els màxims o mínims s'alternen amb punts sella.



$\sin \frac{x}{2} + \cos y$
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
6
4
2
0
-2
-4
-6
y
-6
-4
-2
0
2
4
6
x

■