Exercicis Resolts

MATEMÀTIQUES I

Grau en Enginyeria Mecatrònica *

FACULTAT
DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA
I ENGINYERIES
UVIC | UVIC·UCC

Jordi Villà i Freixa

Darrera modificació: 24 de novembre de 2023

Índex

*Adreça electrònica: `jordi.villa@uvic.cat`

Aquest és un llistat d'exercicis recollits de diverses fonts. Si hi detecteu algun error feu-me'l arribar i corregiré el document.

1 Àlgebra lineal

Ex. 1 — Quins dels següents conjunts de vectors formen una base de $\mathbb{R}^3$?

(a)$\{(1,-2,3),(0,1,1),(-1,1,2)\}$
(b)$\{(1,-2,3),(0,1,1),(1,-3,2)\}$
(c)$\{(1,-2,3),(0,1,1),(0,0,1)\}$

Answer (Ex. 1) — L'espai vectorial $E = x \in \mathbb{R}^3$ té dimensió 3. Això vol dir que si trobem un conjunt de tres vectors linealment independents en formaran una base:

(a)$\{(1,-2,3),(0,1,1),(-1,1,2)\}$ Fem el determinant de la matriu formada pels tres vectors:

$$\begin{aligned} det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} &= +[1\cdot 1\cdot 2 + 0\cdot 1\cdot 3 + (-2)\cdot 1\cdot(-1)] - \\ &\quad -[(-1)\cdot 1\cdot 3 + 0\cdot(-2)\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 1] \\ &= 4-(-2) = 6 \neq 0 \end{aligned}$$

Per tant, són linealment independents i formen una base d'$\mathbb{R}^3$. ■

(b)$\{(1,-2,3),(0,1,1),(1,-3,2)\}$

$$\begin{aligned} det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} &= +[1\cdot 1\cdot 2 + 0\cdot(-3)\cdot 3 + (-2)\cdot 1\cdot(1)] - \\ &\quad -[1\cdot 1\cdot 3 + 0\cdot(-2)\cdot 2 + (-3)\cdot 1\cdot 1] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Per tant, són linealment dependents i no formen una base d'$\mathbb{R}^3$. ■

(c)$\{(1,-2,3),(0,1,1),(0,0,1)\}$

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Per tant, són linealment independents i formen una base d'$\mathbb{R}^3$. ■

Ex. 2 — Si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\} = \{(2,1), (-2,1)\}$ i $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\} = \{(1,0), (0,1)\}$

1. Comprova que $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$ és una base de $\mathbb{R}^2$.
2. Perquè $\vec{e_1}$, $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ no són una base de $\mathbb{R}^2$?
3. Formen una base de $\mathbb{R}^2$ els vectors $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$?
4. Quants vectors com a molt formen una base de $\mathbb{R}^2$?
5. I d'$\mathbb{R}^3$?

Answer (Ex. 2) — Recordem que els vectors $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ són una base de l'espai vectorial al qual pertanyen quan (1) són generados de l'espai, i (2) són linealment independents.

1. Comprova que $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$ és una base de $\mathbb{R}^2$. Ens preguntem promer si podem posar tots els vectors d'$\mathbf{R}^2$ en funció dels vectors $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$:

   $$(x, y) = \alpha(1, 0) + \beta(0, 1)$$

   Es pot veure que si $x = \alpha$ i $y = \beta$ es satisfà l'equació.
   Mirem ara si són linealment independents. Els vectors $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ són **linealment dependents** si qualsevol d'ells es pot escriure com a combinació lineal de la resta. En cas contrari els anomenem **linealment independents**. La definició equival a veure si en l'expressió

   $$(0, 0) = \alpha(1, 0) + \beta(0, 1)$$

   hi ha alguna solució per a α i β diferent de la trivial $\alpha = 0$ i $\beta = 0$. Plantejant el sistema d'equacions:

   $$\begin{cases} 0 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 \\ 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 \end{cases}$$

   veiem que l'única solució possible és que, justament, $\alpha = 0$ i $\beta = 0$. Per tant, són **linealment independents**.
   Per tant, $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ forma una base d'$\mathbf{R}^2$.
2. Perquè $\vec{e_1}$, $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ no són una base de $\mathbb{R}^2$? Són, de fet, un conjunt generador de $\mathbb{R}^2$, però no en formen base perquè no són linealment independents. Plantegem l'equació

   $$(0, 0) = \alpha(1, 0) + \beta(0, 1) + \gamma(-2, 1)$$

   que duu al sistema d'equacions:

   $$\begin{cases} 0 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 - \gamma \cdot 2 \\ 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 1 \end{cases}$$

que podem reduir a

$$\begin{cases} 0 = \alpha - 2\gamma \\ 0 = \quad \beta + \gamma \end{cases}$$

Es tracta d'un sistema de dues equacions amb tres incògnites. El sistema és compatible (té solució) perquè sempre podem dir que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ (que anomenem solució trivial), però també podem veure que si donem un valor arbitrari a, per exemple, γ, obtenim $\alpha = 2\gamma$ i $\beta = -\gamma$. Per tant, la solució trivial no és l'única possible i, per tant, són linealment dependents. Dit d'una altra manera, a $\mathbf{R}^2$ només hi çapüna base de dos vectors, no tres.

3. Formen una base de $\mathbb{R}^2$ els vectors $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$? En ser dos només ens cal veure si són linealment independents. Plantegem

$$(0,0) = \alpha(2,1) + \beta(-2,1)$$

i obtenim

$$\begin{cases} 0 = 2\alpha - 2\beta \\ 0 = \quad \alpha + \beta \end{cases}$$

Sumant la segona equació dos cops a la primera obtenim

$$\begin{cases} 0 = 4\alpha \end{cases}$$

Per tant, la solució $\alpha = \beta = 0$ ens fa concloure que sñón linealment independents i, per tant, formen base de $\mathbb{R}^2$

4. Quants vectors com a molt formen una base de $\mathbb{R}^2$? Un màxiom de dos poden ser L.I. i seguir generant tot l'espai.

5. I d'$\mathbb{R}^3$? Pel mateix raonament, 3 vectors.

■

Ex. 3 — Trobeu les equacions cartesianes dels plans següents:

1. El pla que passa pels punts $(0,0,0)$, $(1,2,3)$ i $(-2,3,3)$.
2. El pla que passa pel punt $(2,1,2)$ i té per vector normal $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.
3. El pla que passa pel punt $(3,2,2)$ i és perpendicular a la recta $\frac{x-1}{4} = y+2 = \frac{z+3}{-3}$
4. El pla que conté les rectes $\frac{x-1}{2} = y-4 = z$ i $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$
5. El pla que passa pels punts $(2,2,1)$ i $(-1,1,-1)$ i és perpendicular al pla $2x - 3y - z = 3$

Answer (Ex. 3) — Usarem que els coeficients de l'equació cartesiana del pla $Ax + By + Cz = D$ corresponen amb les coordenades del seu vector normal $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$

1. El pla que passa pels punts $(0,0,0)$, $(1,2,3)$ i $(-2,3,3)$.
   El vector perpendicular al pla es por calcular amb el producte vectorial de dos vectors del pla com, per exemple: $\mathbf{u} = (1,2,3) - (0,0,0)$ i $\mathbf{v} = (-2,3,3) - (0,0,0)$. Així,

   $$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) - (9\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) = -3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

   Per tant, l'equació serà de la forma: $-3x - 9y + 7z = D$. Com que el pla passa pel punt $(0,0,0)$, l'equació buscada és:

   $$-3x - 9y + 7z = 0$$

2. El pla que passa pel punt $(2,1,2)$ i té per vector normal $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.
   El pla tindrà la forma $2x + 3y - z = D$. Substituint el punt donat obtenim el valor de D:

   $$2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 2 = D = 5$$

   Per tant, el pla buscat és:

   $$2x + 3y - z = 5$$

3. El pla que passa pel punt $(3,2,2)$ i és perpendicular a la recta $\frac{x-1}{4} = y + 2 = \frac{z+3}{-3}$
   El vector normal al pla és el director de la recta i, per tant: $4x + y - 3z = D$. Substituint el punt donat obtenim el valor de D:

   $$4 \cdot 3 + 2 - 3 \cdot 2 = D = 8$$

   Per tant, el pla buscat és:

   $$4x + y - 3z = 8$$

4. El pla que conté les rectes $\frac{x-1}{2} = y - 4 = z$ i $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$
   Usarem els vectors directors de les dues rectes per trobar el vector normal al pla.

   $$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (-1\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) - (4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) = -5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 11\mathbf{k}$$

   El pla tindrà la forma $-5x - y + 11z = D$. Podem ara agafar qualsevol punt dels que estan continguts a les dues rectes. Per exemple, agafant-lo de l'equació contínua de la primera:

   $$-5 \cdot 1 - 4 + 11 \cdot 0 = D = -9$$

Per tant, el pla buscat és:

$$-5x - y + 11z = -9$$

5.El pla que passa pels punts $(2,2,1)$ i $(-1,1,-1)$ i és perpendicular al pla $2x - 3y - z = 3$

Un dels vecotrs directors del pla buscat serà el normal del pla perpendicular: $\mathbf{u} = (2,-3.-1)$. L'altre, elpodem obtenir a partir dels dos punts donats: $\mathbf{v} = (-1,1,-1)-(2,2,1) = (-3,-1,-2)$. Ara podem calcular el vector normal al pla demanat:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (6\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}) - (\mathbf{i}-4\mathbf{j}+9\mathbf{k}) = 5\mathbf{i}+7\mathbf{j}-11\mathbf{k}$$

El pla tindrà la forma $5x+7y-11z = D$. Podem ara agafar qualsevol punt dels que estan continguts a les dues rectes.

$$5\cdot(-1)+7\cdot 1 - 11\cdot(-1) = D = 13$$

Per tant, el pla buscat és:

$$5x + 7y - 11z = 13$$

Ex. 4 — Troba la combinació lineal que genera $\vec{u} = (2,1)$ a partir de

1.$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\} = \{(1,0),(0,1)\}$;

2.i si $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\} = \{(2,1),(-2,1)\}$?

Answer (Ex. 4) — Recordem que un vector $\vec{u}$ és una **combinació lineal** dels vectors $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ si existeixen nombres reals $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ que satisfan:

$$\vec{u} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots \lambda_n\overrightarrow{v_n}$$

1.Hem de trobar els coeficients que satisfan

$$\vec{u} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2}$$

Substituint:

$$(2,1) = \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1)$$

d'on, clarament, $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 1$.

2.En aquest cas:
$$\vec{u} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2}$$
Substituint:
$$(2,1) = \lambda_1(2,1) + \lambda_2(2,-1)$$
d'on obtenim $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 0$.

■

Ex. 5 — Si $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\} = \{(2,1), (-2,1)\}$ i $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\} = \{(1,0), (0,1)\}$

1.Pots escriure $\overrightarrow{e_2}$ en funció de $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$?

2.Pots escriure $\overrightarrow{e_1}$ en funció de $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$?

3.Pots escriure $\overrightarrow{v_2}$ en funció de $\{\overrightarrow{e_1}\}$?

4.Com són els vectors que es poden escriure com a combinació lineal de $\overrightarrow{e_1}$?

Answer (Ex. 5) — Recordem que un vector $\vec{u}$ és una **combinació lineal** dels vectors $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ si existeixen nombres reals $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ que satisfan:
$$\vec{u} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots \lambda_n \overrightarrow{v_n}$$

1.Hem de trobar els coeficients que satisfan
$$\vec{e_2} = \alpha \overrightarrow{v_1} + \beta \overrightarrow{v_2}$$
Substituint:
$$(0,1) = \alpha(2,1) + \beta(-2,1)$$
d'on obtenim
$$\begin{cases} 0 = 2\alpha - 2\beta \\ 1 = \quad \alpha + \beta \end{cases}$$
multiplicant la segona equació per 2 i sumant-la a la primera obtenim que $2 = 4\alpha$, d'on $\alpha = \beta = 1/2$. Per tant:
$$\vec{e_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{v_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{v_2}$$

2.Hem de trobar els coeficients que satisfan
$$\vec{e_1} = \alpha \overrightarrow{v_1} + \beta \overrightarrow{v_2}$$

Anàlogament al que hem fet abans:

$$(1,0) = \alpha(2,1) + \beta(-2,1)$$

d'on obtenim

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha - 2\beta \\ 0 = \quad \alpha + \beta \end{cases}$$

multiplicant la segona equació per 2 i sumant-la a la primera obtenim que $1 = 4\alpha$, d'on $\alpha = 1/4$ i $\beta = -1/4$. Per tant:

$$\vec{e_2} = \frac{1}{4}\vec{v_1} - \frac{1}{4}\vec{v_2}$$

3.Si intentem fer $\vec{v_2} = \alpha\vec{e_1}$ obtenim:

$$\begin{cases} 2 = \alpha \cdot 1 \\ 1 = \alpha \cdot 0 \end{cases}$$

que no té solució.

4.Els vectors que es poden posar com a combinació lineal de $\vec{e_1}$ són de la forma $(\alpha, 0)$. És per això que en l'apartat anterior veiem que no podem posar $\vec{v_2}$ com a combinació lineal de $\vec{e_1}$.

■

Ex. 6 — Si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\} = \{(2,1), (-2,1)\}$ i $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\} = \{(1,0), (0,1)\}$

1.Comprova que $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$ són generadors de $\mathbb{R}^2$.

2.Comprova que $\vec{e_1}$, $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ són generadors de $\mathbb{R}^2$.

3.Ho són $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$?

4.Dóna exemples de conjunts de vectors d'$\mathbb{R}^2$ que generin altres vectors del mateix espai vectorial amb la forma $\{(\alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

5.Comprova que el conjunt de vectors $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ genera $\mathbb{R}^3$.

Answer (Ex. 6) — Els vectors $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ són generadors de l'espai vectorial E al qual pertanyen, i diem $E = \langle \vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n} \rangle$, quan qualsevol $\vec{u} \in E$ es pot posar com a combinació lineal de $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$:

$$\vec{u} = \lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + \cdots + \lambda_n\vec{v_n}$$

1. Comprova que $\overrightarrow{e_1}$ i $\overrightarrow{e_2}$ són generadors de $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{u} = \alpha \overrightarrow{e_1} + \beta \overrightarrow{e_2}$$

o, anàlogament:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$$

Per tant, és obvi que podem trobar valors de α i β que satisfacin aquesta expressió per a qualsevol vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Comprova que $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ són generadors de $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{u} = \alpha \overrightarrow{e_1} + \beta \overrightarrow{v_1} + \gamma \overrightarrow{v_2}$$

quedant:

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta - 2\gamma \\ y = \qquad \beta + \gamma \end{cases}$$

Donats valors a α, β i γ podem trobar tots els valors possibles de les components dels vectors (x, y).

3. Ho són $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$? El mateix cas que l'apartat (1).

4. Dóna exemples de conjunts de vectors d'$\mathbb{R}^2$ que generin altres vectors del mateix espai vectorial amb la forma $\{(\alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. $(1, 0)$ o $(-3/2, 0)$ serien exemples d'aquests vectors. Cal notar que no generarien tot l'espai $\mathbb{R}^2$, sinó un subespai de dimensió 1 (una recta al pla $\mathbb{R}^2$).

5. Comprova que el conjunt de vectors $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ genera $\mathbb{R}^3$. Cas anàleg a l'apartat (1).

■

Ex. 7 — Si $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\} = \{(2, 1), (-2, 1)\}$ i $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$

1. Són $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ linealment independents?
2. Són $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ linealment independents?
3. Com són els vectors linealment dependents amb $\overrightarrow{e_1}$?
4. Són $\overrightarrow{e_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ linealment independents?
5. Són $\overrightarrow{e_1}$ i $\overrightarrow{e_2}$ linealment independents?
6. Són $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ linealment independents?

Answer (Ex. 7) — Els vectors $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ són **linealment dependents** si qualsevol d'ells es pot escriure com a combinació lineal de la resta.

$$\vec{v_1} = \alpha\vec{v_2} + \beta\vec{v_3} + \cdots + \omega\vec{v_n}$$

En cas contrari els anomenem **linealment independents**. La definició equival a veure si en l'expressió

$$\vec{0} = \lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + \cdots + \lambda_n\vec{v_n}$$

hi ha alguna solució per a α i β diferent de la trivial $\lambda_1, \ldots, \lambda_n = 0$.

1. Són $\vec{e_2}$, $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ linealment independents?

   $$\vec{0} = \alpha\vec{v_1} + \beta\vec{v_2} + \gamma\vec{e_2}$$

   Reescrivint el sistema:

   $$\begin{cases} 0 = \quad 2\alpha - 2\beta \\ 0 = \alpha + \beta + \gamma \end{cases}$$

   Es tracta d'un sistema de dues equacions i tres incògnites, compatible perque segur que té la solució trivial ($\alpha = \beta = \gamma = 0$) però també la solució

   $$\begin{cases} \alpha = \delta \\ \beta = \delta \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

   Per tant, són L.D. Sempre passarà el mateix quan intentem esbrinar la dependència lineal de tres vectors qualsevols al conjunt $\mathbf{R}^2$ o de 4 vectors qualsevols al conjunt $\mathbf{R}^3$, per exemple.

2. Són $\vec{e_1}$, $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ linealment independents? Veure resposta a l'apartat anterior.

3. Com són els vectors linealment dependents amb $\vec{e_1}$? Qualsevol vector que en la segona component tingui qualsevol valor diferent de 0.

4. Són $\vec{e_1}$ i $\vec{v_2}$ linealment independents?
   Plantegem

   $$\vec{0} = \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{v_2}$$

   o, el que és el mateix:

   $$\begin{cases} 0 = \alpha - 2\beta \\ 0 = \qquad \beta \end{cases}$$

   El resultat del sistema és $\alpha = \beta = 0$ i, per tant, són L.I..

5. Són $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$ linealment independents? Veure l'apartat anterior.

6. Són $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ linealment independents? Veure l'apartat anterior.

■

Ex. 8 — Escriu una equació de cada cas:

1. Escriu equacions polinòmiques amb coeficients enters que tinguin com a solucions nombres naturals, enters, racionals, irracionals (*algebraics*)
2. Escriu una equació polinòmica amb coeficients enters que tingui com a solució el número π (*transcendent*)
3. Troba una equació polinòmica amb coeficients constants sense cap nombre real com a solució

Answer (Ex. 8) — 1. Intuitivament, una equació algebraica és aquella en la que es pot trobar la resposta usant operacions algebraiques: addició, multipliació i extracció d'arrel.

$$2x - 1 = 0,\ x = \frac{1}{2}$$

o bé

$$x^2 - 2 = 0,\ x = \pm\sqrt{2}$$

2. Una equació transcendent, "transcedeix" l'àlgebra i s'han d'usar altres operacions. Per exemple, les funcions exponencials, algorítmiques o trigonomètriques. Per definició, un número real α és transcendent si no és algebraic. És a dir, si no existeix cap polinomi amb coeficients enters de manera que α en sigui una arrel. Per tant, la pregunta no té resposta, ja que no podem construir un polinomi amb solució π. La demostració és complicada i la deixo com a lectura avançada.
3. Ens passarà sempre que la solució impliqui haver de trobar l'arrel parella d'un número negatiu:

$$x^2 + 1 = 0,\ x = \pm\sqrt{-1}$$

que en el conjunt dels reals no té solució. Caldria resoldre-la en el conjunt dels números complexos:

$$x^2 + 1 = 0,\ x = \pm i$$

■

Ex. 9 — Trobeu l'equació general de les rectes següents:

1. La recta que passa pel punt $(1, 2)$ i té per vector director el vector $\mathbf{v} = (3, -1)$.
2. La recta que passa pel punt $(0, 0)$ i és paral · lela a la recta $x - y = 4$.
3. La recta que passa pel punt $(1, -2)$ i és perpendicular a la recta $x + 2y + 5 = 0$

Answer (Ex. 9) — Cada cas el podem ractar lleugerament diferent, però totes les opcions són equivalents i bescanviables en la pràctica:

1. La recta que passa pel punt $(1, 2)$ i té per vector director el vector $\mathbf{v} = (3, -1)$. Comencem amb l'equació contínua de la recta escrivint:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1}$$

D'aquí:

$$\begin{aligned} -(x-1) &= 3(y-2) \\ 3y + x - 7 = 0 & \end{aligned}$$

2. La recta que passa pel punt $(0, 0)$ i és paral · lela a la recta $x - y = 4$.
Si les dues rectes són paral · leles, els coeficients de la x i la y en l'equació general seran els mateixos i, per tant, busquem el coeficient independent a l'equació $x - y = C$. Com que la recta passa pel punt $(0, 0)$, $C = 0$ i la recta demanada és $x - y = 0$.

3. La recta que passa pel punt $(1, -2)$ i és perpendicular a la recta $x + 2y + 5 = 0$
Si la recta problema és ortogonal a $x + 2y + 5 = 0$ vol dir que el producte escalar dels seus vectors directors és 0. El vector director de la recta donada és $(2, 1)$ (mira l'equació contínua del primer d'aquests tres apartats) i, per tant, un possible vector ortogonal a aquest seria $(-1, 2)$.[1]. Així, novament com en l'apartat anterior, busquem el coeficient independent a l'equació $2x - 2y = C$. Com que la recta problema passa pel punt $(1, -2)$, tenim que $2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) = 6 = C$. Per tant, la recta buscada és $2x - 2y - 6 = 0$

■

Ex. 10 — Aïlleu X, si és possible, en les equancions següents, suposant que totes les matrius són quadrades del mateix ordre i invertibles:

(a) $3X^t + (XA)^t + I = B$

(b) $(XA)^{-1} = 2I + B$

(c) $AX + C = BX$

Answer (Ex. 10) — Usant les propietats de les operacions amb matrius:

[1] Efectivament, $(2, 1) \cdot (-1, 2) = 0$

(a)$3X^t + (XA)^t + I = B$

$$\begin{aligned}
3X^t + (XA)^t + I &= B \\
(3X)^t + (XA)^t &= B - I \\
(3X + XA)^t &= B - I \\
3X + XA &= (B - I)^t \\
3XI + XA &= (B - I)^t \\
X(3I + A) &= (B - I)^t \\
X\underbrace{(3I + A)(3I + A)^{-1}}_{I} &= (B - I)^t(3I + A)^{-1} \\
X &= (B - I)^t(3I + A)^{-1}
\end{aligned}$$

■

(b)$(XA)^{-1} = 2I + B$

$$\begin{aligned}
(XA)^{-1} &= 2I + B \\
XA &= (2I + B)^{-1} \\
X &= (2I + B)^{-1}A^{-1}
\end{aligned}$$

■

(c)$AX + C = BX$

$$\begin{aligned}
AX + C &= BX \\
AX - BX &= C \\
(A - B)X &= C \\
X &= (A - B)^{-1}C
\end{aligned}$$

■

Ex. 11 — Trobeu les equacions paramètriques i cartesianes de les rectes següents:

1. La recta que passa pels punts $(1, 0, 1)$ i $(1, 3, -2)$
2. La recta que passa pel punt $(-2, 0, 3)$ i és paral · lela al vector $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
3. La recta que passa pel punt $(-3, 5, 4)$ i és paral · lela a la recta $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2} = z - 3$

Answer (Ex. 11) — L'equació paramètrica que defineix un punt qualsevol de la recta a $\mathbf{R}^3$ és:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

on $P = (x_0, y_0, z_0)$ és un punt qualsevol de la recta i $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ el seu vector director. en tots tres casos ens donen un punt de la recta i ens donen informació que ens en permet calcular el vector deirector.

1. La recta que passa pels punts $(1, 0, 1)$ i $(1, 3, -2)$

   Aquí $P = (1, 0, 1)$ i $\mathbf{v} = (1, 3, -2) - (1, 0, 1) = (0, 3, -3)$. Per tant, l'equació paramètrica queda:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

   Pel que fa a l'equació cartesiana o general, la podem construir a partir de la contínua, que no és més que igualar el paràmere λ provinent de cada coordenada a l'equació anterior. Així, l'eqació contínua seria (amb un petit abús denotació permetent-nos posar un 0 al denominador):

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-3}$$

   Agafant els dos primers termes de l'equació obtenim la primera de les equacions següents i agafant el segon i tercer terme obtenim la segona equació:

$$\begin{cases} 3x - 3 = 0 \\ -3y = 3z - 3 \end{cases}$$

   Simplificant:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

   Notar que l'equació d'una recta a $\mathbf{R}^3$ es construeix amb les equacions de dos plans que es tallen.

2. La recta que passa pel punt $(-2, 0, 3)$ i és paral · lela al vector $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

   En aquest cas ens donen directament $\mathbf{v} = (6, 3, 0)$. Podem fer la mateixa operació que abans:

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{0}$$

   d'on

$$\begin{cases} 3x - 6 = 6y \\ 0 = 3z - 9 \end{cases}$$

   Simplificant:

$$\begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases}$$

3.La recta que passa pel punt $(-3,5,4)$ i és paral · lela a la recta $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2} = z-3$ Idènticament, ens diuen que $\mathbf{v} = (4,1,-3)$. Fem la contínua i després la general o cartesiana:

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-4}{1}$$

d'on

$$\begin{cases} -2x-6 = 3y-15 \\ y-5 = -2z+8 \end{cases}$$

Simplificant:

$$\begin{cases} 2x+3y-9 = 0 \\ y+2z-13 = 0 \end{cases}$$

■

Ex. 12 — Donades les bases de $\mathbb{R}^2$, $B = \{(1,-2),(0,1)\}$ i $D = \{(3,2),(-1,1)\}$:

(a)Doneu la matriu de canvi de base de B a C (base canònica)

(b)Doneu la matriu de canvi de base de C a B

(c)Doneu la matriu de canvi de base de D a B

Answer (Ex. 12) — Només cal recordar que la matriu de canvi de base de B a C és la matriu dels vectors de la base B en funció de la base C, i que la matriu del canvi oposat és la inversa de l'anterior:

(a)Doneu la matriu de canvi de base de B a C (base canònica)

$$A_{B\to C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

■

(b)Doneu la matriu de canvi de base de C a B

$$A_{C\to B} = (A_{B\to C})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

I obtenim la inversa fent:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Per tant,

$$A_{C\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

■

(c) Doneu la matriu de canvi de base de D a B Podem construir-la amb una composició de transformacions lineals, és a dir, amb una multiplicació de les matrius que les defineixen:

$$\begin{aligned} A_{D\to B} &= A_{C\to B} \cdot A_{D\to C} \\ A_{D\to B} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Ex. 13 — El vector $\overrightarrow{PQ} = (-4, 8)$ té l'origen en el punt $P(6, -1)$. Determina les coordinades de l'extrem Q i el mòdul d'aquest vector.

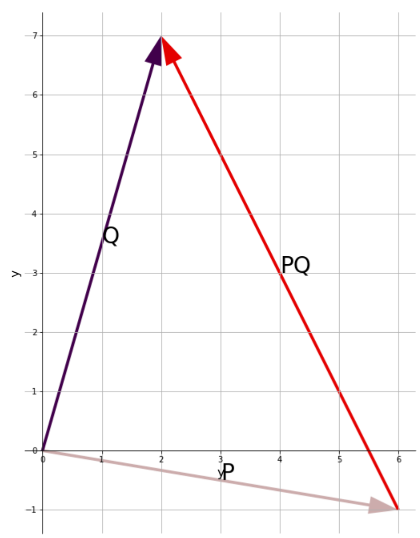
Answer (Ex. 13) — Podem expressar el vector $\overrightarrow{PQ}$ com la diferència dels vectors que identifiquen els seus dos extrems:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P$$

$$\begin{aligned} (-4, 8) &= Q - (6, -1) \\ (-4, 8) + (6, -1) &= Q \\ (2, 7) &= Q \end{aligned}$$

Pel que fa al mòdul:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$



■

Ex. 14 — El vector $\overrightarrow{PQ} = (3, -6)$ té l'extrem en el punt $Q(2, 1)$. Determina les coordenades de l'origen P i el mòdul d'aquest vector.

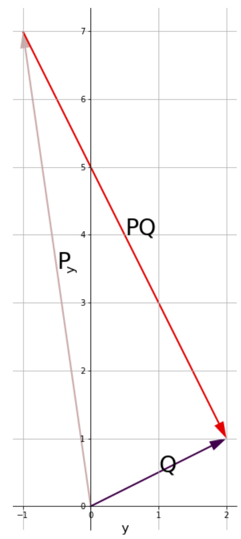
Answer (Ex. 14) — Podem expressar el vector $\overrightarrow{PQ}$ com la diferència dels vectors que identifiquen els seus dos extrems:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P$$

$$\begin{aligned} (3, -6) &= (2, 1) - P \\ P = &= (2, 1) - (3, -6) \\ P &= (-1, 7) \end{aligned}$$

Pel que fa al mòdul:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$



■

Ex. 15 — A partir de la definició d'espai vectorial, qui són $\vec{e}$ (a $\mathbb{R}^2$) i e? Passa el mateix a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^3$? I a $\mathbb{R}^n$?

Answer (Ex. 15) — $\vec{e}$ és l'element neutre de la suma de vectors tal que $\vec{u} + \vec{e} = \vec{u}$. Per a qualsevol vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$:

$$(u_1, u_2) + (e_1, e_2) = (u_1, u_2) \Rightarrow (e_1, e_2) = (0, 0)$$

A $\mathbb{R}^3$? I a $\mathbb{R}^n$ seria, respectivament, $(0, 0, 0)$ i $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Respecte el valor de l'element neutre $e \in \mathbb{R}$ tal que $e \cdot \vec{u} = \vec{u}$, si agafem per exemple $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$:

$$e \cdot (u_1, u_2) = (e \cdot u_1, e \cdot u_2) = (u_1, u_2) \Rightarrow e = 1$$

i el mateix succeeix per a un espai vectorial d'$\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^n$.

■

Ex. 16 — Calcula la norma del vector d'$\mathbb{R}^5$ $\vec{u} = (1, -2, -3, 0, 2)$.

Answer (Ex. 16) — La norma del vector $\vec{u}$ serà:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

■

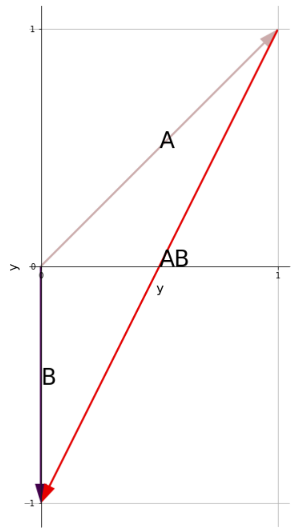
Ex. 17 — Donats els punts $A(1, 1)$, $B = (0, -1)$ i el vector $\vec{u} = (2, 4)$

1. Calcula els vectors que van des de l'origen de coordenades cap a cadascun dels punts A i B (pregunta trampa...).
2. Calcula i dibuixa $\overrightarrow{AB}$.
3. Calcula i dibuixa $\overrightarrow{BA}$.
4. Si $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$, quina posició és C?
5. Si $\vec{u} = \overrightarrow{CB}$, quina posició és C?
6. Dóna una altres dos punts A i B que tinguin el mateix vector desplaçament $\overrightarrow{AB}$.

Answer (Ex. 17) —

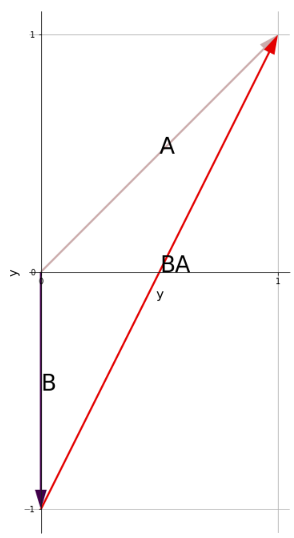
1. Calcula els vectors que van des de l'origen de coordenades cap a cadascun dels punts A i B (pregunta trampa...). El vector el trobarem substraient el punt inicial (en aquest cas $O = (0, 0)$) del punt final
   - $$\overrightarrow{OA} = A - O = (1, 1)$$
   - $$\overrightarrow{OB} = B - O = (0, -1)$$
2. Calcula i dibuixa $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, -1) - (1, 1) = (-1, -2)$$



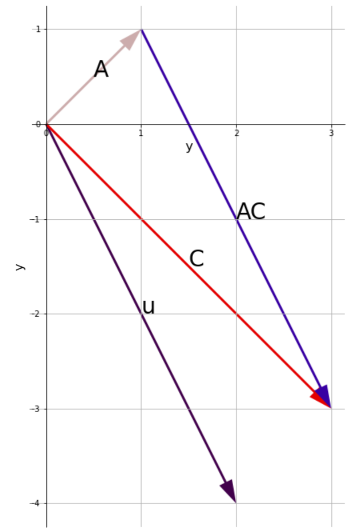
3.Calcula i dibuixa $\overrightarrow{BA}$.

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (1,1) - (0,-1) = (1,2)$$



4.Si $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$, quina posició és C?

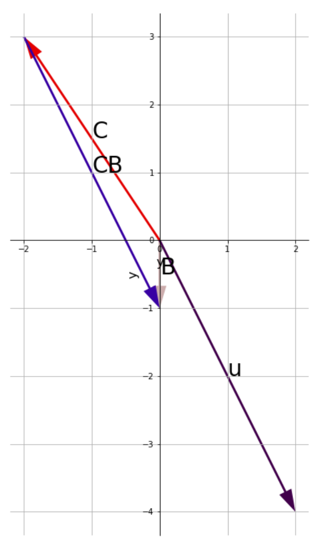
$$\vec{u} = \overrightarrow{AC} = C - A \Rightarrow C = A + \vec{u} = (1,1) + (2,4) = (3,5)$$



5.Si $\vec{u} = \overrightarrow{CB}$, quina posició és C?

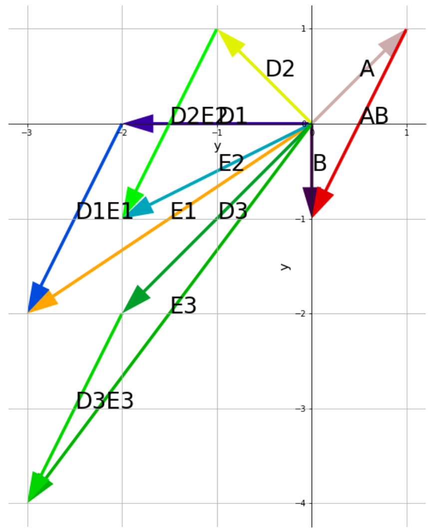
6.

$$\vec{u} = \overrightarrow{CB} = B - C \Rightarrow C = B - \vec{u} = (0, -1) - (1, 1) = (-1, -2)$$



7.Dóna una altres dos punts A i B que tinguin el mateix vector desplaçament $\overrightarrow{AB}$.

Només cal agafar un punt D qualsevol i sumar-li el vector $\overrightarrow{AB}$ per trobar el punt E. Alguns exemples



■

Ex. 18 — Siguin $\mathbf{u} = (2, -1)$ i $\mathbf{v} = (3, 4)$, es demana el següent:

1. Efectueu les següents operacions:
   (a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$
   (b) $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$
   (c) $\mathbf{u} - \frac{2}{3}\mathbf{v}$
2. Calculeu $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
3. Determineu $\|\mathbf{u}\|$ i $\|\mathbf{v}\|$
4. Trobeu l'angle format pels dos vectors

Answer (Ex. 18) — Seguint l'ordre de les qüestions plantejades:

1. Fem les operacions:
   (a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2, -1) + (3, 4) = (5, 3)$
   (b) $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = 2(2, -1) + 3(3, 4) = (4, -2) + (9, 12) = (13, 10)$

(c)$\mathbf{u} - \frac{2}{3}\mathbf{v} = (2,-1) - \frac{2}{3}(3,4) = (2,-1) - (2, \frac{8}{3}) = (0, -\frac{11}{3})$

2.$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2,-1) \cdot (3,4) = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 = 6 - 4 = 2$

3.$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$; $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

4.L'angle format pels dos vectors es pot obtenir usant:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} = \frac{2}{5\sqrt{5}}$$

que correspon a un angle de 1.39 radiants, o bé 79.69°.

■

Ex. 19 — Determinar si els vectors **u** i **v** són paral · lels, ortogonals o cap de les dues coses:

1.$\mathbf{u} = (1,-2)$ i $\mathbf{v} = (2.-4)$

2.$\mathbf{u} = (1,-2,1)$ i $\mathbf{v} = (2,1,0)$

3.$\mathbf{u} = \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

Answer (Ex. 19) — Per determinar el paral · lelisme, observem si un dels dos vectors és proporcional a l'altre. Per determinar l'ortogonalitat en fem el producte escalar:

1.$\mathbf{u} = (1,-2)$ i $\mathbf{v} = (2,-4)$. Veiem que $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}$ i, per tant, són paral · lels.

2.$\mathbf{u} = (1,-2,1)$ i $\mathbf{v} = (2,1,0)$. No són paral · lels perquè no són proporcionals. Per saber si són ortogonals en calculem el producte escalar: $\mathbf{u}{\cdot}\mathbf{v} = 1{\cdot}2+(-2){\cdot}1+1{\cdot}0 = 0$. Per tant, són dos vectors ortogonals.

3.$\mathbf{u} = \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Novament no són proporcionals i, per tant, no són paral · lels. Pel que fa al producte escalar: $\mathbf{u}{\cdot}\mathbf{v} = 0{\cdot}1+1{\cdot}(-2)+6{\cdot}(-1) = -8 \neq 0$. Per tant, no són ni paral · lels ni ortogonals.

■

Ex. 20 — Expressa en forma polar cadascun dels punts següents:

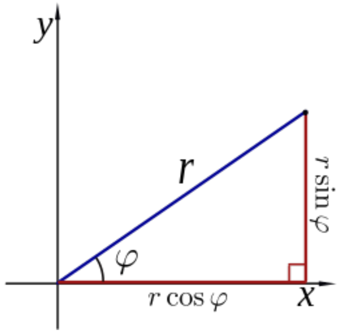
1.$(3,3)$

2.$(-\sqrt{3},3)$

3.$(-\sqrt{8},-\sqrt{8})$

4.$(6,-8)$

Answer (Ex. 20) — D'acord amb la imatge, el canvi de coordenades cartesianes a polars ve donada per:



$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \operatorname{atan} \frac{y}{x} \end{cases}$$

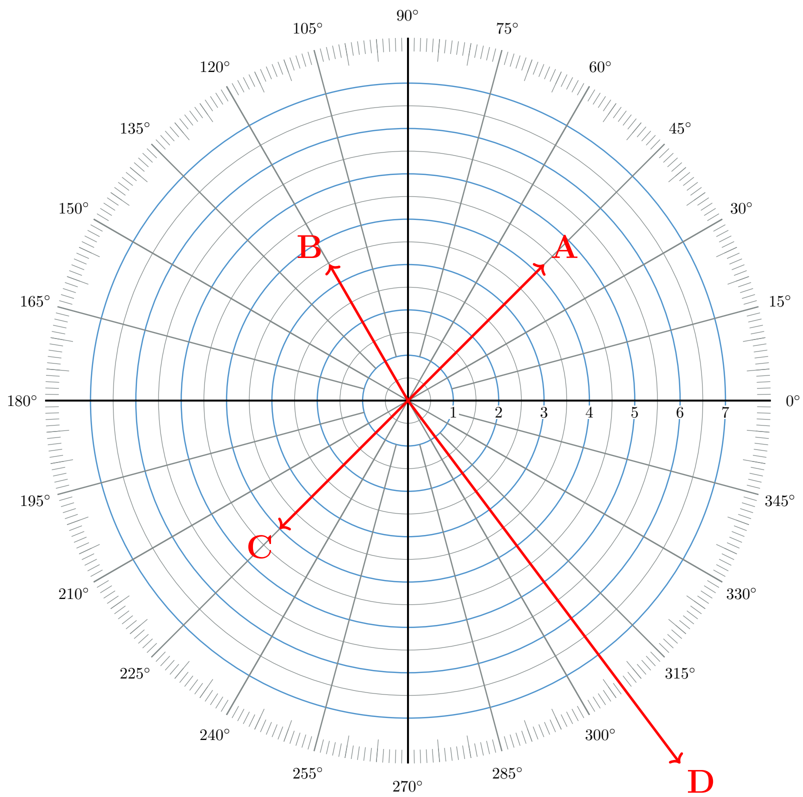
Per tant:

1. $$\begin{cases} r = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2} \\ \varphi = \operatorname{atan} 1 = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} r = \sqrt{-\sqrt{3}^2+3^2} = 2\sqrt{3} \\ \varphi = \operatorname{atan} -\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} r = \sqrt{-\sqrt{8}^2+-\sqrt{8}^2} = 4 \\ \varphi = \operatorname{atan} \frac{-\sqrt{8}}{-\sqrt{8}} = -\frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} r = \sqrt{6^2+(-8)^2} = 10 \\ \varphi = \operatorname{atan} \frac{-8}{6} = 2.21 \,\mathrm{rad} \end{cases}$$



■

Ex. 21 — Determineu la posició relativa dels plans següents

1.$x - y + z = 1$ i $2x + 2y - 3z = 4$

2.$4x + 2y + 6z = 12$ i $3x + 6y + 2z = 6$

Answer (Ex. 21) — Només cal resoldre els sistemes d'equacions resultants d'aplegar-los i comprovar si són compatibles o incompatibles.

a)$x - y + z = 1$ i $2x + 2y - 3z = 4$

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

Aplicant l'eliminació de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2R_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & 2 \end{array}\right]$$

Es comprova que $rg(A) = 2$ i $rg(A|B) = 2$ i, per tant, el sistema és compatible indeterminat de rang 2. Els plans es tallen en una recta. ■

b)$4x + 2y + 6z = 12$ i $3x + 6y + 2z = 6$

$$\begin{cases} 4x + 2y + 6z = 12 \\ 3x + 6y + 2z = 6 \end{cases}$$

Aplicant l'eliminació de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 12 \\ 3 & 6 & 2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -\frac{3}{4}R_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & -3 \end{array}\right]$$

Es comprova que $rg(A) = 2$ i $rg(A|B) = 2$ i, per tant, el sistema és compatible indeterminat de rang 2. Els plans es tallen en una recta. ■

Ex. 22 — Determineu la posició relativa de les rectes següents:

1. $\begin{cases} x = 4t + 2 \\ y = 3 \\ z = -t + 1 \end{cases}$ i $\begin{cases} x = 2s + 2 \\ y = 2s + 3 \\ z = s + 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ y - z = 0 \end{cases}$ i $\frac{x-1}{4} = y + 2 = \frac{z+3}{-3}$

Answer (Ex. 22) — D'entrada mirem si són paral · leles (o coincidents) especte si es creuen (o es tallen) analitzant els seus vectors directors. Després mirarem si realemnt coincideixen an algun o infinits punts o no.

1. $\begin{cases} x = 4t + 2 \\ y = 3 \\ z = -t + 1 \end{cases}$ i $\begin{cases} x = 2s + 2 \\ y = 2s + 3 \\ z = s + 1 \end{cases}$

En aquest cas, els dos vectors directors són $\mathbf{u} = (4, 0 - 1)$ i $\mathbf{v} = (2, 2, 1)$, amb la qual cosa veiem que no són paral · leles (ni coincidents). Per saber si es tallen hem d'assegurar que passin per algun punt comú. Així, si el sistema

$$\begin{cases} 4t + 2 = 2s + 2 \\ 3 = 2s + 3 \\ -t + 1 = s + 1 \end{cases}$$

és compatible, també ho serà determinat, per força. És fàcil veure que el sistema es soluciona per a $s = t = 0$. Per tant, les dues rectes es tallen, justament, en el punt que determinen aquests dos paràmetres: $P = (2, 3, 1)$, cosa que es podia observar directament a partir de les equacions paramètriques de l'enunciat. ■

2. $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ y - z = 0 \end{cases}$ i $\frac{x-1}{4} = y + 2 = \frac{z+3}{-3}$

En aquest podem analitzar directament el sistema d'equacions format per totes les equacions donades:

$$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ y - z = 0 \\ x - 1 = 4y + 8 \\ -3y - 6 = z + 3 \end{cases}$$

arranjant una mica:

$$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 0x + y - z = 0 \\ x - 4y + 0z = 9 \\ 0x - 3y - z = 9 \end{cases}$$

D'on podem analitzar els rangs de la matriu de coeficients i de la matriu ampliada $(A|B)$ usant, per exemple, el mètode de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 9 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -R_1 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -7R_2 \\ +3R_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \frac{1}{7}R_3 \\ -\frac{1}{4}R_4 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{4} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ -R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{51}{28} \end{array}\right]$$

d'on deduïm que el sistema és incompatible. Per tant, les rectes no es toquen. Per saber si són paral·leles podem mirar també el resultat de l'eliminació de Gauss-Jordan. Finalment obtenim tres línies de la matriu (les tres primeres) que representen un sistema equivalent al creuament de tres plans en un sol punt. Per tant, les des rectes es creuen en l'espai i no són paral · leles. En aquest darrer cas hauríem obtingut només dues files de la matriu A linealment independents.

Ex. 23 — Calcula $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^6$ usant el concepte de valors i vectors propis de la matriu.

Answer (Ex. 23) — Sabem que si una matriu A és diagonalitzable, podem expressar-la com

$$D = P^{-1}AP$$

on D és una matriu diagonal amb els valors propis de la matriu A i P és una matriu quines columnes representen els vectors propis associats a cada valor propi.

Si usem aquesta expressió, fer l'operació és senzilla. Efectivament:

$$\left(PDP^{-1}\right)^6 = A^6$$

o, el que és el mateix:

$$\begin{aligned} PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} &= A^6 \\ PD^6P^{-1} &= A^6 \end{aligned} \tag{1}$$

Anem, doncs, a cercar els valors i vectors propis de la matriu. Aquests seran els valors que compleixin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Perquè això tingui solució diferent de la trivial ($(x, y) = (0, 0)$) cal que el determinant secular sigui igual a zero:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, cal solucionar el polinomi característic de la matriu:

$$(1-\lambda)(-1-\lambda) - 3 = 0$$

d'on $\lambda = \pm 2$.

Un cop tenim els valors propis, trobem els vectors propis que hi estan vinculats:

$\boxed{\lambda_1 = 2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2x \\ 3x - y = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$$

Per tant, un vector propi[2] associat a $\lambda_1 = 2$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_1 = -2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x + y = -2x \\ 3x - y = -2y \end{cases} \Rightarrow 3x + y = 0$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_2 = 2$ és $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Construïm ara l'expressió de l'Eq. 1:

$$\begin{aligned} A^6 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^6 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sabries dir d'on prové el fet que, en aquest cas particular, la potència de la matriu sigui idèntica a la potència de la seva matriu semblant diagonal?

■

[2]De fet, el conjunt de vectors propis associats a un determinat valor propi forma un subespai vectorial.

Ex. 24 — Determineu el valor de m i p, perquè es pugui realitzar el producte següent:

$$(P^t \cdot Q^t) \cdot M^t$$

si $M_{2\times 3}$, $P_{m\times p}$, $Q_{3\times 4}$ i el resultat del producte és una matriu quadrada.

Answer (Ex. 24) — Per resoldre'l primer tenim en compte que:

$$\begin{array}{rcl} M_{2\times 3} & \Rightarrow & M^t_{3\times 2} \\ P_{m\times p} & \Rightarrow & P^t_{p\times m} \\ Q_{3\times 4} & \Rightarrow & Q^t_{4\times 3} \end{array}$$

Amb la qual cosa:

$$(P^t_{p\times m} \cdot Q^t_{4\times 3}) \cdot M^t_{3\times 2} = A_{p\times 2}$$

Com que ens diuen que A és quadrada, obtenim $p = 2$ i, a més, és fàcil veure que perquè el producte es pugui realitzar $m = 4$. ■

Ex. 25 — Comprova que el quadrilàter de vèrtex $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 3, 4)$, $C = (6, 5, 2)$ i $D = (7, 7, 5)$ és un paral · lelogram i calcula'n l'àrea.

Answer (Ex. 25) — Per comprovar si és un quadrilàter hem de veure si els costats del quadrilàter formen dues parelles de vectors paral · lels. És fàcil veure que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = (1, 2, 3)$ i que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = (5, 4, 1)$.

L'àrea serà igual al mòdul del producte vectorial dels dos vectors que formen els costats del paral · lelogram:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (2\mathbf{i} + 15\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) - (12\mathbf{i} + \mathbf{j} + 10\mathbf{k}) = -10\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

$$Area = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{(-10)^2 + 14^2 + (-6)^2}$$

■

Ex. 26 — Troba l'equació paramètrica de la recta que passa per $P(5, -4)$ i té una direcció paral · lela a $\mathbf{v} = (-3, 2)$.

Answer (Ex. 26) — L'equació vectorial d'una recta a $\mathbf{R}^2$ ve donada per l'expressió:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

que duu a l'expressió paramètrica:

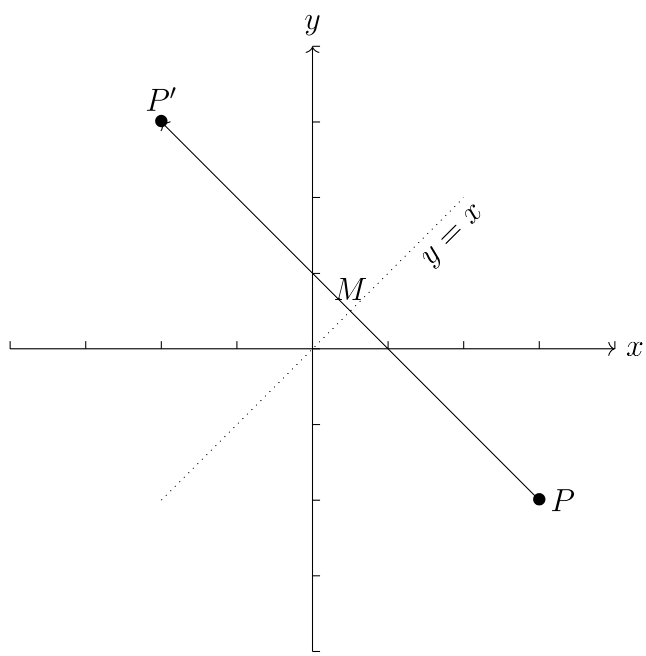
$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}$$

on (x_0, y_0) és un punt de la recta i $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ és el seu vector director. En aquest cas:

$$\begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = -4 + 2t \end{cases}$$

Ex. 27 — Determina el punt simètric de $P(3, -2)$ respecte la bisectriu del primer quadrant.

Answer (Ex. 27) — El dibuix mostra el plantejament del problema:



Per trobar P' trobarem primer la recta perpendicular a la bisectriu. La recta $y = x$ té pendent 1. Això vol dir que els seus vectors directors seran del tipus $\mathbf{v} = (\alpha, \alpha) \Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha} = 1$. Per exemple, $\mathbf{v} = (1, 1)$. Un vector perpendicular a aquest seria $\mathbf{v'} = (-1, 1)$. Efectivament:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v'} = (1, 1) \cdot (-1, 1) = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$$

La recta perpendicular a la bisectriu i que passa pel punt donat serà, doncs, en la seva forma contínua:

$$\frac{x - 3}{-1} = \frac{y + 2}{1}$$

o bé, en la seva forma explícita,

$$y = 1 - x$$

Trobem ara el punt M on es troben les dues rectes solucionant el sistema d'equacions que formen:

$$\begin{cases} y = & x \\ y = 1 - x \end{cases}$$

d'on $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Finalment, el punt que cerquem complirà que $\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{PM}$. Per tant:

$$\begin{aligned} (x', y') - (3, -2) &= 2\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - (3, -2)\right) \\ P' = (x', y') &= (-2, 3) \end{aligned}$$

Ex. 28 — Determineu si les rectes següents es tallen.

1. $x + y + 2 = 0$ i $2x + y - 4 = 0$
2. $x - y - 1 = 0$ i $2x - 2y - 2 = 0$
3. $x + 3y - 4 = 0$ i $3x + 9y - 8 = 0$

Answer (Ex. 28) — No ens demanen pas en quin punt es tallen i, per tant, en tant que són rectes d'$\mathbf{R}^2$, amb analitzar l'angle entre els dos vectors directors $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$, tot aprofitant que $\cos\alpha = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{u}\|}$, en tenim prou:

Rectes	Vectors directors	Angles
$x + y + 2 = 0$ $2x + y - 4 = 0$	$\mathbf{u} = (-1, 1)$ $\mathbf{v} = (-1, 2)$	$\cos\alpha = \frac{(-1,1)\cdot(-1,2)}{\|(-1,1)\|\|(-1,2)\|} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{5}}$ $\alpha = 0.32rad = 18.43°$
$x - y - 1 = 0$ $2x - 2y - 2 = 0$	$\mathbf{u} = (1, 1)$ $\mathbf{v} = (2, 2)$	$\cos\alpha = \frac{(1,1)\cdot(2,2)}{\|(1,1)\|\|(2,2)\|} = \frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{8}}$ $\alpha = 0\text{radian} = 0°$ vectors proporcionals; equacions proporcionals: rectes coincidents
$x + 3y - 4 = 0$ $3x + 9y - 8$	$\mathbf{u} = (-3, 1)$ $\mathbf{v} = (-9, 3)$	$\cos\alpha = \frac{(-3,1)\cdot(-9,3)}{\|(-3,1)\|\|(-9,3)\|} = \frac{30}{\sqrt{10}\sqrt{90}}$ $\alpha = 0\text{radian} = 0°$ vectors proporcionals; equacions NO proporcionals: rectes paral · leles

Ex. 29 — Donats el punt $A(1, 1)$ i els vectors $\vec{u} = (2, 4)$, $\vec{v} = (0, -3)$:

1. Aplica al punt A el desplaçament $\vec{u}$, i al nou punt trobat el desplaçament $\vec{v}$. Quin és el vector desplaçament des d'A a la posició final?
2. Repeteix l'exercici canviant l'ordre dels desplaçaments.
3. Aplica al punt A el desplaçament $\vec{u}$, i al nou punt trobat el desplaçament $\vec{u}$ novament. Quin és el vector desplaçament des d'A a la posició final?

Answer (Ex. 29) — Es tracta de veure que la suma de vectors és commutativa, i que podem multiplicar un vector per un escalar:

1. Aplica al punt A el desplaçament $\vec{u}$, i al nou punt trobat el desplaçament $\vec{v}$. Quin és el vector desplaçament des d'A a la posició final?
$$(A+\vec{u})+\vec{v} = ((1,1)+(2,4))+(0,-3) = (3,2)$$
2. Repeteix l'exercici canviant l'ordre dels desplaçaments.
$$(A+\vec{v})+\vec{u} = ((1,1)+(0,-3))+(2,4) = (3,2)$$
3. Aplica al punt A el desplaçament $\vec{u}$, i al nou punt trobat el desplaçament $\vec{u}$ novament. Quin és el vector desplaçament des d'A a la posició final?
$$(A+\vec{u})+\vec{u} = ((1,1)+(2,4))+(2,4) = (5,9) = A+2\vec{u}$$

■

Ex. 30 — A $\mathbb{R}^2$ hem aplicat a un triangle les transformacions concatenades següents (per aquest ordre):

1. Cisallament en la component horizontal de factor $\lambda = 5$.
2. Homotècia de raó $a = 1/5$ respecte l'origen.
3. Gir d'angle $\frac{\pi}{2}$ respecte l'origen de coordenades.

Després del procés, el nou triangle és el format pels vèrtex $(1,1)$, $(2,3)$ i $(5,-1)$. Quin éra el triangle inicial?

Answer (Ex. 30) — Cal aplicar, per ordre sobre cada vector (x,y) que defineix els vèrtex del triangle original, les tres transformacions afins de manera que ens duguin al nou vèrtex (x',y').
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}}_{gir} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}}_{homotcia} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{cisallament} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Per trobar els vectors inicials haurem de fer la inversa d'aquesta matriu:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Aplicant l'expressió a tots tres vèrtex obtenim:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 25 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 30 \\ -5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 25 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 65 \\ -10 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 25 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 120 \\ -25 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Ex. 31 — Trobeu un vector unitari ortogonal als vectors $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ i $\mathbf{v} = 2\mathbf{j}$

Answer (Ex. 31) — Per trobar un vector ortogonal a uns altres dos, fem el producte vectorial d'aquests dos darrers:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$$

I per trobar el vector unitari en aquesta drecció només ens cal dividir aquest vector pel seu mòdul

$$\hat{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{(-2, 0, 2)}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$$

■

Ex. 32 — **Vectors i valors propis en una matriu** 3×3Calcula els valors propis i vectors propis de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Quina relació hi ha entre els valors propis i el determinant i la traça de la matriu original? Comprova que els tres vectors propis són L.I.

Answer (Ex. 32) — Trobem primer el polinomi característic de la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Perquè això tingui solució diferent de la trivial ($(x, y, z) = (0, 0, 0)$) cal que el determinant secular sigui igual a zero:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, cal solucionar el polinomi característic de la matriu:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

Per Ruffini obtenim el primer dels coeficients:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

Per tant:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 6) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

Un cop tenim els valors propis $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ i $\lambda_3 = -2$, trobem els vectors propis que hi estan vinculats:

$\boxed{\lambda_1 = 1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x - y + 4z = x \\ 3x + 2y - z = y \\ 2x + y - z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 4z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 4z = 0 \\ 3x + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = 4\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_1 = 1$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_2 = 3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x - y + 4z = 3x \\ 3x + 2y - z = 3y \\ 2x + y - z = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 4z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 4z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Així doncs, un vector propi associat a $\lambda_2 = 3$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_3 = -2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x - y + 4z = -2x \\ 3x + 2y - z = -2y \\ 2x + y - z = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y + 4z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y + 4z = 0 \\ - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Finalment, doncs, un vector propi associat a $\lambda_3 = -2$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El determinant de la matriu original és justament el producte dels tres valors propis:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -6 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

i la traça de la matriu és la suma dels tres valors propis:

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2$$

Els tres vectors són L.I., ja que

$$\det\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 4 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = -6 \neq 0$$

De fet, en no haver cap valor propi igual a 0, la matriu formada pels tres vectors propis ha de ser per força invertible i, per tant, el seu determinant diferent de zero o, el que és el mateix, els vectors propis són L.I.

■

Ex. 33 — **Vectors i valors propis en una matriu** 2×2Trobar els valors i vectors propis de la matriu $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

Answer (Ex. 33) — Trobem primer el polinomi característic de la matriu:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

Perquè això tingui solució diferent de la trivial ($(x,y)=(0,0)$) cal que el determinant secular sigui igual a zero:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 3 & -1-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

Per tant, cal solucionar el polinomi característic de la matriu:

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

que té per solució els valors propis $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -2$. Calculem ara els vectors propis:

$\boxed{\lambda_1 = 2}$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2x\\ 3x - y = 2y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0\\ 3x - 3y = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha\\ y = \alpha\end{cases}$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_1 = 2$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_2 = -2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x + y = -2x \\ 3x - y = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -3\alpha \end{cases}$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_2 = -2$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

■

Ex. 34 — Vectors i valors propis en una matriu 3×3Calcula els valors propis i vectors propis de la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Answer (Ex. 34) — Trobem primer el polinomi característic de la matriu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Perquè això tingui solució diferent de la trivial ($(x, y, z) = (0, 0, 0)$) cal que el determinant secular sigui igual a zero:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, cal solucionar el polinomi característic de la matriu:

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 3 = 0$$

Per Ruffini obtenim el primer dels coeficients:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & -1 & 6 & -10 & 3 \\
3 & & -3 & 9 & -3 \\
\hline
 & -1 & 3 & -1 & \boxed{0}
\end{array}
$$

Per tant:

$$-\lambda^3+6\lambda^2-10\lambda+3=0-(\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda+1)=(\lambda-3)(\lambda-\frac{3-\sqrt{5}}{2})(\lambda-\frac{\sqrt{5}+3}{2})=0$$

Per a cada valor propi, trobem els vectors propis associats:

$\boxed{\lambda_1=3}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} 2x+\ \ y-\ \ z=3x \\ \ \ x+2y\qquad\ =3y \\ -x+\ \ y+2z=3z \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -x+y-z=0 \\ \ \ x-y\qquad=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=0 \end{cases}$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_1=3$ és $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x-\ \ y+4z=3x \\ 3x+2y-\ \ z=3y \\ 2x+\ \ y-\ \ z=3z \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -2x-y+4z=0 \\ \ \ 3x-y-\ \ z=0 \\ \ \ 2x+y-4z=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -2x-y+4z=0 \\ \ \ 3x-y-\ \ z=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=\ \alpha \\ y=2\alpha \\ z=\ \alpha \end{cases}$$

Així doncs, un vector propi associat a $\lambda_2=3$ és $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_3 = -2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x - \ \ y + 4z = -2x \\ 3x + 2y - \ \ z = -2y \\ 2x + \ \ y - \ \ z = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - \ \ y + 4z = 0 \\ 3x + 4y - \ \ z = 0 \\ 2x + \ \ y + \ \ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y + 4z = 0 \\ \quad - y + \ \ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \ \ \alpha \\ z = \ \ \alpha \end{cases}$$

Finalment, doncs, un vector propi associat a $\lambda_3 = -2$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El determinant de la matriu original és justament el producte dels tres valors propis:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -6 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

i la traça de la matriu és la suma dels tres valors propis:

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2$$

Els tres vectors són L.I., ja que

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -6 \neq 0$$

De fet, en no haver cap valor propi igual a 0, la matriu formada pels tres vectors propis ha de ser per força invertible i, per tant, el seu determinant diferent de zero o, el que és el mateix, els vectors propis són L.I.

■

2 Càlcul Integral

2.1 Integral indefinida

Ex. 35 — **Substitució** $\int \frac{x}{\sqrt[5]{x^2+2}}dx$ (pista: usa la substició $t = x^2 + 2$)

Answer (Ex. 35) — Ens hem d'adonar que el numerador és proper a la derivada de l'argument de l'arrel del denominador. Això ens mostra que la funció primitiva tindrà l'aspecte d'una arrel, justament. Per mostrar-ho, la substitució a realitzar pot ser

$$t = x^2 + 2;\ dt = 2xdx;\ xdx = \frac{dt}{2}$$

Quedant:

$$\int \frac{x}{\sqrt[5]{x^2+2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt[5]{t}}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{-5}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{-4}}{(-4)} = -\frac{1}{8t^4}$$

Ex. 36 — **Substitució** $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$ (pista: usa dues substitucions consecutives)

Answer (Ex. 36) — Ens hem d'adonar que tenim una arrel de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$. En aquests casos podem mirar de transformar l'arrel en quelcom del tipus $\sqrt{1 - \sin^2 x}$. Per tant, comencem plantejant el canvi

$$x = 2\cos t;\ dx = -2\sin t dt$$

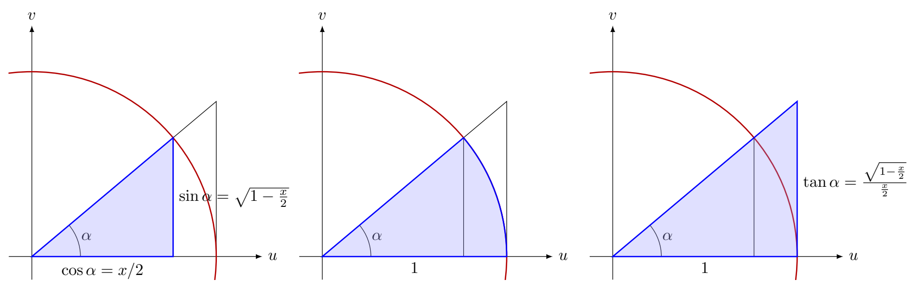
I per tant:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx &= \int \frac{-2\sin t}{4\cos^2 t\sqrt{4-4\cos^2 t}}dt = \int \frac{-2\sin t}{8\cos^2 t\sqrt{1-\cos^2 t}}dt \\ &= \int \frac{-2\sin t}{8\cos^2 t\sqrt{\sin^2 t}}dt = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\cos^2 t}dt = -\frac{1}{4}\tan t\end{aligned}$$

Ara podem desfer el canvi de variable fent $x = 2\cos t \Rightarrow t = \arccos\frac{x}{2}$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx = -\frac{1}{4}\tan\arccos\frac{x}{2}$$

Ho podem deixar així o podem pensar en que si $\alpha = \arccos\frac{x}{2}$, segons el dibuix $\tan\arccos\frac{x}{2} = \tan\alpha = \frac{\sqrt{1-\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}$.



Per tant, per a $x = 2\cos t$:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx = -\frac{1}{4}\tan t = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{1-\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}$$

Ex. 37 — $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$**, amb denominador sense arrels reals (arctangent)** $\int \frac{3}{x^2+2x+4}dx$

Answer (Ex. 37) — En no haver zeros reals del polinoni del denominador ens cal usar l'estratègia de completar quadrats. Aquesta tècnica ens permet acostar l'expressió de la integral a la que tindria una primitiva arctangent. En general,

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left((x+r)^2+s^2\right)$$

on es pot veure fàcilment que $r = \frac{b}{2a}$ i $s = \sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}$.En aquest cas, $r = 1$ i $s = \sqrt{3}$. Per tant:

$$\int \frac{3}{x^2+2x+4}dx = 3\int \frac{1}{(x+1)^2+(\sqrt{3})^2}dx \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$$

$(*)$Immediata, ja que $\int \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{1}{s}\arctan\frac{x+r}{s}+C$:

■

Ex. 38 — $\int \sin^m x\cos^n x dx$ **amb** $m, n \in Z^+$ **i** m **o** n **senar**$\int \sin^5 x dx$

Answer (Ex. 38) — Usarem que $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$ i l'expressió quedarà:

$$I = \int \sin^5 x dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \sin x dx$$

Veiem que, d'aquesta manera, ens queda una expressió que barreja sinus i cosinus, i sabem que un és la derivada de l'altre. Per tant, una bona substició és $t = \cos x;\ dt = -\sin x dx$

$$I = \int \sin^5 x dx = -\int \left(1 - t^2\right)^2 dt = -\frac{t^5}{5} + 2\frac{t^3}{3} - t + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + 2\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$$

Ex. 39 — $\int \sin^m x \cos^n x dx$ **amb** $m, n \in Z^+$ **i** m, n **parells**Avalúa la integral $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Answer (Ex. 39) — Considerem el canvi de variable

$$x = \sin u;\ dx = \cos u du$$

. Per tant:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 u}} \cos u du = \int \frac{1}{\sqrt{\cos^2 u}} \cos u du = \int du = u + C$$

si desfem la substitució:

$$I = \arcsin x + C$$

Ex. 40 — **Racional trigonomètrica** $\int R(sinx, cosx)dx$Avalúa la integral $I = \int \frac{2}{1+3\cos x} dx$

(Pista: si $t = \tan \theta/2$, per raons trigonomètriques obtenim:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos\theta &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan\theta &= \frac{2t}{1-t^2} \end{aligned}$$

)

Answer (Ex. 40) — En els casos en que tenim $I = \int \frac{1}{a+b\cos x}dx$ o bé $I = \int \frac{1}{a+b\sin x}dx$ és pràctic usar la substitució $t = \tan x/2$. Aleshores tenim:

$$dt = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1+t^2}{2}dx$$

i, per tant, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2}{1+3\cos x}dx = \int \frac{2}{(1+3\frac{1-t^2}{1+t^2})}\frac{2}{(1+t^2)}dt \\ &= 4\int \frac{1}{1+t^2+3-3t^2}dt = 4\int \frac{1}{4-2t^2}dt = \int \frac{1}{1-\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}dt \end{aligned}$$

i ara fem la substitució $u = \frac{t}{\sqrt{2}}$ i $du = \frac{dt}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{1-\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{1-u^2}du = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctanh} u + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctanh}\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctanh}\frac{\tan x/2}{\sqrt{2}} + C \end{aligned}$$

Ex. 41 — $\int \sin^m x \cos^n x dx$ **amb** $m, n \in Z^+$ **i** m, n **parells**$\int \cos^4 x dx$ (pista: per a funcions sinusoidals d'exponent parell, usa les expressions $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ o bé $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ per reduir l'exponent.)

Answer (Ex. 41) — Usant

$$\cos^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+\cos^2 2x + 2\cos 2x\right)$$

Altre cop:

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x)$$

Per tant:

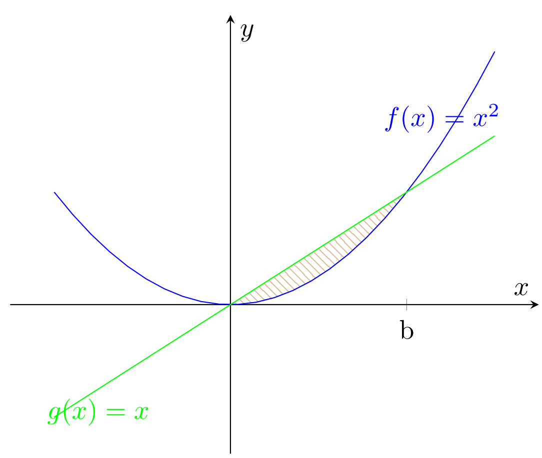
$$I = \int \cos^4 x dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\int \left(1+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)+2\cos 2x\right)dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x+2\cos 2x\right)dx \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x+\sin 2x\right)+C
\end{aligned}
$$

2.2 Integral definida

Ex. 42 — **Integral delimitada entre funcions** 1. Sigui S la regió delimitada per les corbes $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=x$. Calculeu $\int\int_S (x+1)y dx dy$

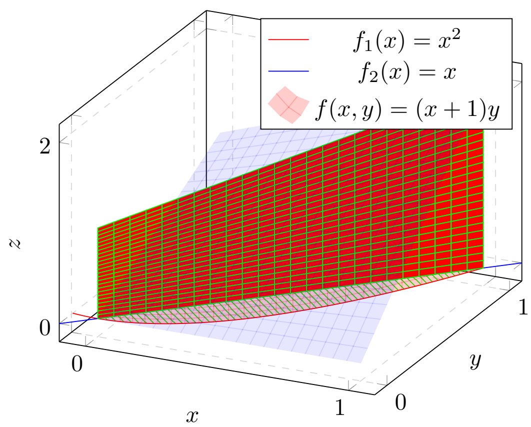
Answer (Ex. 42) — Comencem per dibuixar les dues funcions.



Es tallen en els punts $(0,0)$ i $(1,1)$, ja que

$$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$$

La integració haurà de tenir en compte que la variable x depèn de la y i viceversa, per trobar el volum de l'objecte de la figura:



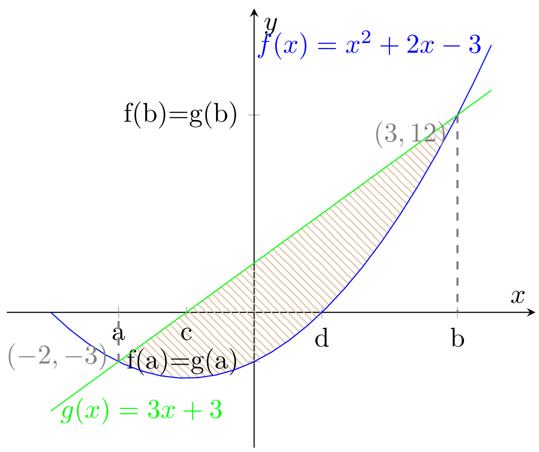
Per tant, una manera de solucionar el problema és:

$$
\begin{aligned}
V = \int\int_S (x+1)y dxdy &= \int_{x=0}^{x=1}\left[\int_{y=x^2}^{y=x}(x+1)ydy\right]dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1}\left[\frac{(x+1)y^2}{2}\right]_{x^2}^{x} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=1}\left[(x+1)x^2-(x+1)x^4\right]dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=1}\left[-x^5-x^4+x^3+x^2\right]dx \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{x^6}{6}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)-(0)\right] = \frac{13}{120}
\end{aligned}
$$

Ex. 43 — Integral delimitada entre funcions Sigui R la regió delimitada per les corbes $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $g(x) = 3x + 3$.

- Representeu gràficament la regió R.
- Determineu l'àrea $A(R)$ de la regió R.
- Calculeu $\int\int_R x dxdy$.

Answer (Ex. 43) — • Comencem per dibuixar les dues funcions.



A partir de solucionar

$$x^2 + 2x - 3 = 3x + 3$$

trobem que es tallen en els punts $(-2, -3)$ i $(3, 12)$.

- Per trobar l'àrea podem pensar en dividir el càlcul en tres parts, si ens fan dubtar els signes de les funcions:

$$A(R) = \int_a^c [f(x) - g(x)]dx + \int_c^d [g(x) + f(x)]dx + \int_d^b [g(x) - f(x)]dx$$

o bé, més pràctic, podem sumar un valor superior a 4 a les dues funcions per tal que ens quedin les dues damunt de l'eix de les abscisses.[3] Per tant, l'àrea serà igual a

$$A(R) = \int_a^b [(g(x) + 4) - (f(x) + 4)]dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$

$$A(R) = \int_{-2}^{3} [(3x+3)-(x^2+2x-3)]dx = \int_{-2}^{3} [-x^2+x+6]dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-2}^{3} = \frac{125}{6}$$

- Com que ens donen dues funcions de la variable x, el més pràctic és integrar primer respecte y i després respecte x:

$$\begin{aligned} V = \int\int_R xdxdy &= \int\int_R xdydx \\ &= \int_{x=-2}^{x=3} \left[\int_{x^2+2x-3}^{3x+3} xdy\right] dx \\ &= \int_{x=-2}^{x=3} x[(3x+3) - (x^2 + 2x - 3)]dx \end{aligned}$$

[3] Només cal trobar el mínim de la funció parabòlica que es dona quan $f'(x) = 2x + 2 = 0$, que passa a $x = -1$, on $f(x) = -4$.

$$
\begin{aligned}
&= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 3x^2\right]_{-2}^{3} \\
&= \left(-\frac{3^4}{4} + \frac{3^3}{3} + 3^3\right) - \left(-\frac{(-2)^4}{4} + \frac{(-2)^3}{3} + 3(-2)^2\right) = \frac{125}{12}
\end{aligned}
$$

2.3 Integració de moltes variables

Ex. 44 — **Volum esfera**Calcula el volum d'una esfera de radi a usant una integral triple.

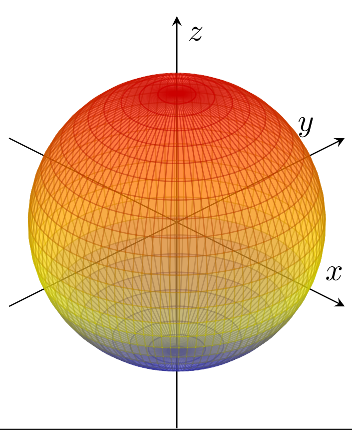
Answer (Ex. 44) — El volum de l'esfera ve donat per l'expressió:

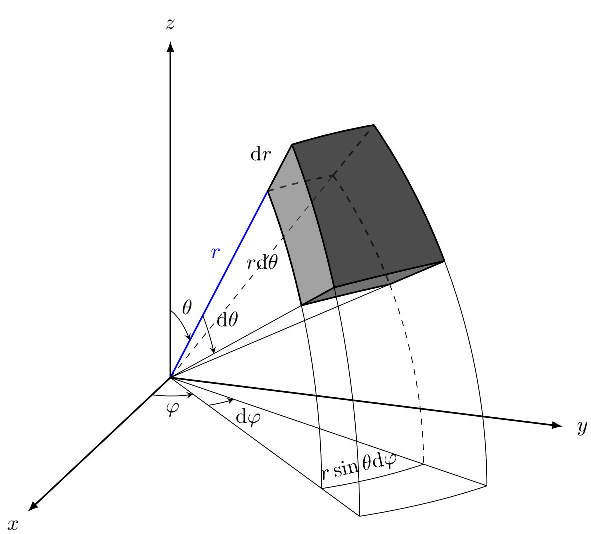
$$V = \int\int\int_{\Omega} dV$$

Si explorem el problema usant coordenades cartesianes, l'element de volum és $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ i els límits d'integració quedarien com:

$$V = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$$

Alternativament, podem observar que la simetria de l'objecte ens permet usar coordenades esfèriques:





Ara l'element de volum vindrà donat per $\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta \; \mathrm{d}r \; \mathrm{d}\theta \; \mathrm{d}\varphi$ i els límits d'integració canviaran de forma molt favorable, ja que:

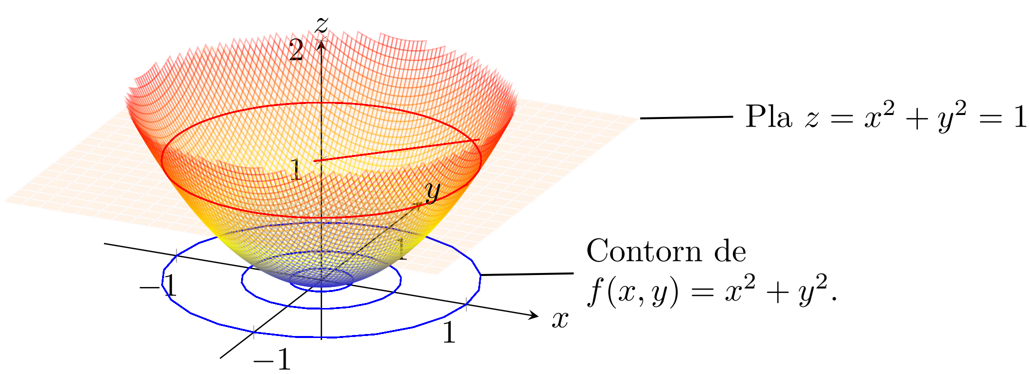
$$\begin{cases} -a \leq x \leq a \\ -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \\ 0 \leq z \leq a^2 - x^2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

Així:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{a} r^2 \sin\theta \; \mathrm{d}r \; \mathrm{d}\theta \; \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \; \mathrm{d}\theta \int_0^{a} r^2 \; \mathrm{d}r \\ &= [\varphi]_0^{2\pi} \, [-\cos\theta]_0^{\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{a} = \boxed{\frac{4}{3}\pi a^3} \end{aligned}$$

Ex. 45 — **Volum paraboloide**Calcula el volum delimitat pel paraboloide $z = x^2 + y^2$. i el pla $z = 1$.

Answer (Ex. 45) — Dibuixem primer el gràfic:



El volum del paraboloide vindria donat per l'expressió:

$$V = \int\int\int_{\Omega} dV$$

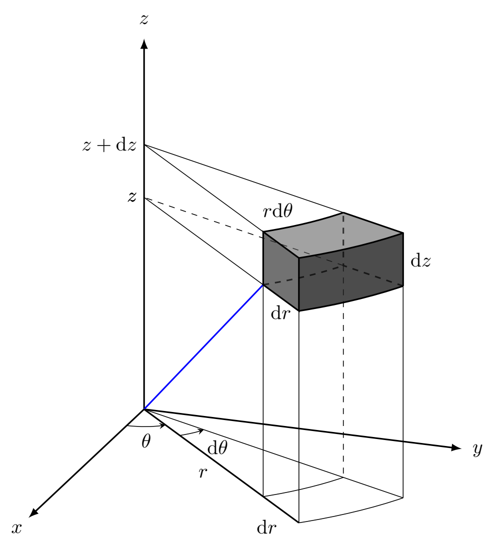
Si explorem el problema usant coordenades cartesianes, l'element de volum és $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y \; \mathrm{d}z$ i els límits d'integració quedarien com:

$$V = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{x^2+y^2} \mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$$

Podem intentar fer aquesta integral, però clarament el fet que apareguin arrels en els límits d'integració no facilita gens la feina (tot i que la integral no és pas molt complicada). Pots solucionar-la amb `Matlab` usant aquest breu codi:

```
syms x y z
intZ = int(1,z,0,x^2+y^2)
intY = int(intZ,y,-sqrt(1-x^2),sqrt(1-x^2))
intX=int(intY)
volum = int(intY,x,-1,1)
```

Alternativament, podem observar que la simetria de l'objecte ens permet usar coordenades cilíndriques, molt més pràctiques:



Ara l'element de volum vindrà donat per $\mathrm{d}V = r\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta$ i els límits d'integració canviaran de forma molt favorable, ja que:

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0 \leq z \leq x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq z \leq x^2+y^2 = r^2 \end{cases}$$

Així:

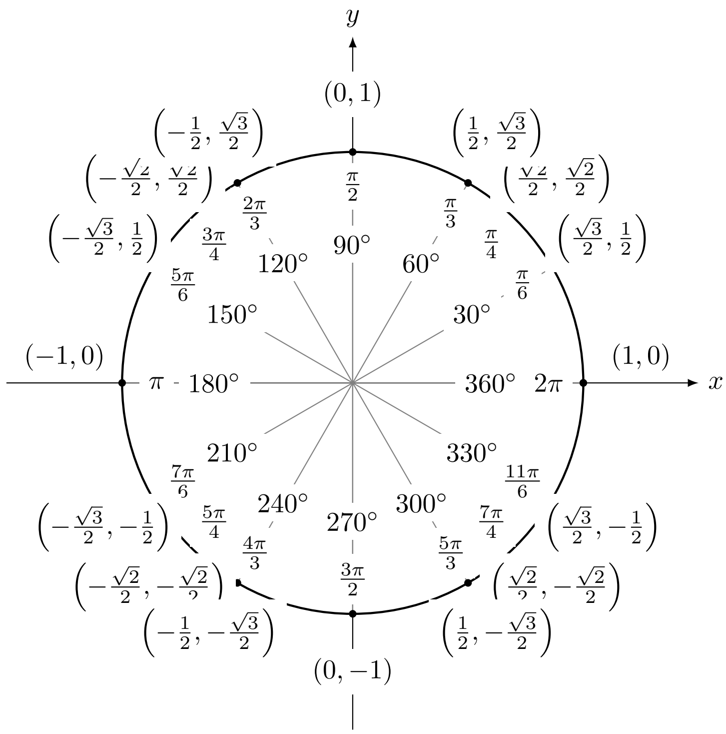


Figura 1: Esquema dels valors de $\sin x$ i $\cos x$ per a alguns valors d'angles.

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{r^2} r \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\left[\int_0^{r^2}\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}r \\
&= \theta\Big]_0^{2\pi}\int_0^1 rz\Big]_0^{r^2}\mathrm{d}r = 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}
$$

3 Material pràctic

- La Figura 1 conté informació sobre els sinus i cosinus d'alguns dels valors d'angles més comuns en els exercicis de l'assignatura.