$\mathbb{R}$

Sistemes d'equacions i Geometria al pla i a l'espai

Jordi Villà i Freixa

Universitat de Vic - Universitat Central de Catalunya
Grau en Multimèdia. Aplicacions i Videojocs

jordi.villa@uvic.cat

curs 2023-2024

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC-UCC

Índex

Referències

El material d'aquestes presentacions està basat en anteriors presentacions i apunts d'altres professors [**?**, **?**, **?**] de la UVic-UCC, pàgines web diverses (normalment enllaçades des del text), així com monografies [**?**, **?**, **?**].

Referències

El material d'aquestes presentacions està basat en anteriors presentacions i apunts d'altres professors [**?**, **?**, **?**] de la UVic-UCC, pàgines web diverses (normalment enllaçades des del text), així com monografies [**?**, **?**, **?**].

Suposem que volem desplaçar 120000 litres de cervesa. Podem utilitzar camions de 10000l i de 12000l, i no tenen perquè anar plens. Matemàticament:

$$120000 = 10000x + 12000y$$

o, equivalentment: $120 = 10x + 12y$, equació que com a **solució general** té:

$$x = \lambda \text{ i } y = \frac{120 - 10y}{12}$$

on λ és qualsevol nombre real (i positiu en aquest cas). Algunes **solucions particulars** serien:

$$\begin{aligned}
\lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = 0, y = 10 \\
\lambda = \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}, y = \frac{115}{12} \\
\lambda = 2 \quad &\Rightarrow \quad x = 2, y = \frac{25}{3}
\end{aligned}$$

Per tal de poder determinar una única solució particular necessitem més **informació**. Per exemple, hem d'usar un total de 10 camions: $x + y = 10$, cosa que determina una única solució:

$$\lambda + \frac{120 - 10y}{12} = 10$$

d'on obtenim $\lambda = 0$ i, conseqüentment, $x = 0$ i $y = 10$. La quantitat d'informació determina la solució, i aquella **resideix en els coeficients**:

$$\left.\begin{array}{rcl} 10x + 12y & = & 120 \\ x + y & = & 10 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 10 & 12 & 120 \\ 1 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

En general, un sistema de m equacions lineals i n incògnites es pot escriure com:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

On $(A|B)$ és la matriu ampliada; A la matriu de coeficients i B el terme independent.

La informació recollida en la matriu ampliada determina la solució d'un sistema d'equacions lineals. Exemples:

Sistema	$(A\|B)$	Solucions	Rangs
$10x+12y=120$ $0x+0y=0$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 10 & 12 & 120 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$x=\lambda$ $y=\frac{120-10\lambda}{12}$	$rg(A)=1$ $rg(A\|B)=1$
$10x+12y=120$ $10x+12y=120$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 10 & 12 & 120 \\ 10 & 12 & 120 \end{array}\right)$	$x=\lambda$ $y=\frac{120-10\lambda}{12}$	$rg(A)=1$ $rg(A\|B)=1$
$10x+12y=120$ $5x+6y=60$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 10 & 12 & 120 \\ 5 & 6 & 60 \end{array}\right)$	$x=\lambda$ $y=\frac{120-10\lambda}{12}$	$rg(A)=1$ $rg(A\|B)=1$
$10x+12y=120$ $1x+y=10$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 10 & 12 & 120 \\ 5 & 6 & 10 \end{array}\right)$	$x=0$ $y=10$	$rg(A)=2$ $rg(A\|B)=2$
$10x+12y=120$ $10x+12y=100$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 10 & 12 & 120 \\ 10 & 12 & 100 \end{array}\right)$	No té solució	$rg(A)=1$ $rg(A\|B)=2$

Una útil calculadora online per a matrius: https://matrixcalc.org/ca/.

Teorema (Teorema de Rouché-Frobenius)

El sistema amb matriu ampliada $(A|B)$ *té solució* $\Leftrightarrow rg(A|B) = rg(A)$

És a dir, que la columna dels termes independents B es pot construir com a combinació lineal dels coeficients de la matriu A i, per tant, aquests termes B no afegeixen informació.

- Si $rg(A) < rg(A|B)$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(A|B) = p < n$ i n incògnites, sistema compatible indeterminat
- Si $rg(A) = rg(A|B) = p = n$, sistema compatible determinat

Resolució de sistemes compatibles indeterminats

Si tenim el sistema en forma matricial $A_{m\times n}X_{n\times 1} = B_{m\times 1}$:

1. Calculem $rg(A)$ i $rg(A|B)$.
2. Si $rg(A) = rg(A|B) = p$, hem trobat un menor d'ordre p dins d'A diferent de zero. Aleshores:
   - Esborrem les $m - p$ files que no hem utilitzat.
   - Passem al terme independent les $n - p$ columnes que no hem utilitzat (amb les seves variables).
3. Obtenim un nou sistema $\tilde{A}_{p\times p}\tilde{X}_{p\times 1} = \tilde{B}$ on $\tilde{A}$ és quadrada i amb deterinant diferent de zero.
4. Apliquem la resolució pel mètode de Cramer (https://www.sangakoo.com/ca/temes/metode-de-cramer).

Valors i vectors propis

Si A és una matriu quadrada, direm que el nombre real α és un **valor propi d'**A si existeix un vector $\mathbf{u} \neq 0$ tal que $A\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}$. Aquest vector s'anomena **vector propi de valor propi** α **d'**A.

Exercici 1 Demostra que els valors propis d'$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ són $\alpha_1 = 2$ i $\alpha_2 = 3$ i troba els corresponents vectors propis.

Càlcul de vectors i valors propis

El que acabem de descriure ens mostra també com calcular els vectors i valors propis:

1. $A\mathbf{u} - \alpha\mathbf{u} = \mathbf{0}$
2. $(A - \alpha I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$
3. $\det(A - \alpha I) = 0$, que genera l'anomenat polinomi característic de la matriu A.

I deduïm també que el vector $\mathbf{v}$ pertany al nucli de l'aplicació $(A - \alpha I)$. Els valors propis seran les arrels del polinomi característic i per trobar el vector propi associat a cada arrel caldrà resoldre els sistemes $A\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}$ o, equivalentment, $(A - \alpha I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Exercici 2 Trobar els valors i vectors propis de les matris $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ i

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES UVIC | UVIC-UCC

Matrius semblants i diagonalització

Dues matrius A i B són semblants si existeix una matriu P no singular ($\det(P) \neq 0$) tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Exercici 3 Comprova que les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ són semblants amb $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Les matrius semblants representen la mateixa aplicació lineal en dues bases diferents, essent P la matriu de canvi de base.

1. Si A i B són semblants, tenen els mateixos valors propis
2. Respecte els vectors propis:
   - si $\mathbf{v}$ és vector propi d'A, $\mathbf{v'} = P^{-1}\mathbf{v}$ ho és de B.
   - si $\mathbf{v'}$ és vector propi de B, $\mathbf{v} = P\mathbf{v'}$ ho és d'A.
3. A és invertible (no singular) $\Leftrightarrow$ 0 no és un valor propi d'A.
4. $\alpha \neq 0$ és un valor propi d'A de vector propi $\mathbf{v} \Rightarrow \frac{1}{\alpha}$ és un valor propi d'A^{-1} de vector propi $\mathbf{v}$
5. si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ són valors propis d'A,
   $$\Rightarrow \begin{cases} tr(A) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \\ \det(A) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n \end{cases}$$
6. A és diagonalitzable si és semblant a una matriu diagonal: $D = P^{-1}AP$.
7. Tota matriu simètrica de coeficients reals és diagonalitzable i té valors propis reals.

Exercici 4 Calcula $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^6$

Exercici 5 Estudia si aquestes matrius són diagonalitzables:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercici 6 Té valors propis reals una matriu de rotació?

Geometria al pla i a l'espai

Objectius:

- introduir els conceptes principals de la geometria: vector, recta, pla, espai;
- discutir diverses reprsentacions analítiques d'aquests objectes;
- dominar producte escalar, vectorial i mixt

Denotem per $\mathbb{R}^3$ el conjunt de termes ordenats (x, y, z) on $x, y, z \in \mathbb{R}^3$.
Siguin $A(a_1, a_2, a_3)$ i $B(b_1, b_2, b_3)$ dos punts de $\mathbb{R}^3$:

Definició

Un vector fix d'origen A i extrem B és un segment orientat amb origen en el punt A i extrem en el punt B que es denota per $\overrightarrow{AB}$ *amb punts d'aplicació A, direcció definida per la recta que passa pels dos punts, sentit el que va de A a B i denotem amb una fletxa i mòdul* $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ *la longitud del segment AB.*

Les components del vector $\overrightarrow{AB}$ són:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) = \text{"Extrem"} - \text{"Origen"}$$

Definició

Un vector lliure és el conjunt de tots els vectors que tenen el mateix mòdul, la mateixa direcció i el mateix sentit o, dit d'una altra manera, el conjunt de tots els vectors que tenen les mateixes components. S'acostumen a denotar per una sola lletra: $\boldsymbol{u}$

Si denotem els vectors unitaris (módul 1) en la direcció dels tres eixos de coordenades i sentit positiu com $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ i $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, aleshores, un vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es pot escriure com:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

i $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

Operacions amb vectors

Donats dos vectors **u** i **v**:

- Suma de vectors:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

- Producte d'un vector per una constant $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \mathbf{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$$

  Dos vectors són paral·lels, si existeix $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ tal que $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}$. També se'n desprèn que $\|\lambda \mathbf{u}\| = |\lambda| \|\mathbf{u}\|$.

Notar que dos vectors **u** i **v** diferents de zero seran paral·lels si

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \frac{v_3}{u_3}$$

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES UVIC | UVIC-UCC

Producte escalar I

Definició

Producte escalar *dels vectors* $\boldsymbol{u}$ *i* $\boldsymbol{v}$ *es defineix com el valor numèric calculat com:*

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

El producte escalar té les següents propietats:

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
3. Per a tot $\lambda \in \mathbb{R}$, es compleix $\lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v})$
4. Si definim $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0$ per a tot $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$
5. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$

Producte escalar II

El producte escalar també es pot definir com

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

on θ és l'angle format pels vectors **u** i **v**, cosa que ens permet interpretar el producte escalar com la projecció d'un vector sobre l'altre:[**?**]

projeccio.png

Producte escalar III

Els vectors **u** i **v** diferents de zero són ortogonals si i només si:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Producte vectorial I

El **producte vectorial** de dos vectors $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^3$ és el vector:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

i representa un vector ortogonal als dos primers com aquest:[**?**]

Producte vectorial II

madreta.png

Producte vectorial III

Propietats del producte vectorial:

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
3. Per a tot $\lambda \in \mathbb{R}$, es compleix $\lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\lambda\mathbf{v})$
4. $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
5. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
6. El mòdul del vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ escalcula fent $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \sin\theta$, on θ és l'angle que formen els dos vectors.

El mòdul del producte vectorial equival a l'àrea del paral·lelogram definit pels dos vectors **u** i **v**.

Producte mixt

El **producte mixt**, o triple producte escalar, es defineix com:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

i té les següents propietats:

1. Les permutacions circulars dels vectors no varien el producte mixt: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
2. Les permutacions de **dos** vectors, modifiquen el signe del producte: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) = -\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

El valor del producte mixt coincideix amb el volum del paral·lelepípede que té per costats els tres vectors. El producte mixt val 0 si els tres vectors són coplanars (pertanyen al mateix pla).

Rectes I

Per definir una recta necessitem, o bé dos punts distints o bé un punt $A(a_1, a_2, a_3)$ i un vector **v** de la recta (que anomenarem **vector director**). Així, tot punt $X(x, y, z)$ de la recta es pot descriure fent:

$$\begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \\ z - a_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Representacions de les rectes:

1. **Equacions paramètriques:** sorgeixen d'aplicar directament l'expressió anterior:

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 \end{cases}$$

Rectes II

2. **Equació contínua de la recta:** Sorgeixen d'eliminar el paràmetre λ de l'equació paramètrica:

$$\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}=\frac{z-a_3}{v_3}$$

Notar que hi ha problemes amb aquesta notació si algun dels components del vector director és 0.

3. **Equacions cartesianes, generals o implícites de la recta:** A partir de l'equació contínua podem obtenir dues equacions linealemnt independents (rang 2) del tipus:

$$\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2} \quad\rightarrow\quad v_2x-v_1y-a_1v_1+a_2v_2=0$$
$$\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{z-a_3}{v_3} \quad\rightarrow\quad v_3x-v_1y-a_1v_1+a_3v_3=0$$

Rectes III

Notar també que, a partir de les paramètriques, els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\mathbf{v}$ són proporcionals. Per tant, el subespai generat per aquests vectors és de dimensió 1:

$$rg \begin{pmatrix} x - a_1 & v_1 \\ y - a_2 & v_2 \\ z - a_3 & v_3 \end{pmatrix} = 1$$

d'on, imposant que qualsevol menor 2×2 que extraiem de l'expressió anterior ha de tenir com a determinant 0, arribem a les mateixes equacions implícites.

Rectes IV

4. **Equacions explícites de la recta:** En el cas que tinguem una recta sobre un pla (és a dir, que la component z sigui zero) podem aïllar la variable y de l'equació implícita obtenim:

$$y = \frac{v_2 x + v_1 a - v_2 a_1}{v_1} = \frac{v_2}{v_1} x + \frac{v_1 a_2 - v_2 a_1}{v_1}$$

és a dir:

$$y = mx + b$$

Plans I

Per definir un pla necessitem una de les quatre coses següents (totes interrelacionades):

- tres punts A, B i C que no pertanyin a la mateixa recta,
- un punt A i dos vectors L.I. continguts al pla,
- una recta continguda al pla i un punt C del pla que no hi pertanyi, o bé
- un punt A del pla i un vector normal (o perpendicular) al pla.

Si considerem el cas en que tenim un punt $A(a_1, a_2, a_3)$ i dos vectors generadors $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$, l'equació vectorial del pla es pot expressar com:

$$\begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \\ z - a_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

D'aquí, obtenim:

Posicions relatives de dues rectes

Considerem les rectes donades per les equacions cartesianes:

$$r : \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_1 = 0 \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} A'_1 x + B'_1 y + C'_1 z + D'_1 = 0 \\ A'_2 x + B'_2 y + C'_2 z + D'_1 = 0 \end{cases}$$

El conjunt de les 4 equacions és un sistema d'equacions lineals amb 4 equacions i 3 incògnites. Si construïm la matriu **A** i la matriu ampliada $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ del sistema es poden presentar les següents situacions:

- $rg(\mathbf{A}) = rg(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 2$. El sistema és compatible indeterminat, amb un grau de llibertat. Per tant, les dues rectes són coincidents.
- $rg(\mathbf{A}) = rg(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 3$. El sistema té una única solució, és compatible determinat. El resultat de resoldre'l és un punt de tall entre les dies rectes.
- $rg(\mathbf{A}) \neq rg(\mathbf{A}|\mathbf{B})$. El sistema és incompatible, i les dues rectes no intersecten. Depenent, però, dels rangs, podem tenir:
  - $rg(\mathbf{A}) = 2$ $rg(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 3$. rectes paral·leles (mateix vector director).
  - $rg(\mathbf{A}) = 3$ $rg(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 4$. rectes es creuen.

Posicions relatives de dos plans

Considerem els plans donats per les equacions cartesianes:

$$\pi : Ax + By + Cz + D_1 = 0 \quad \pi' : A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

El conjunt de les 2 equacions és un sistema d'equacions lineals amb 2 equacions i 3 incògnites. Si construïm la matriu **A** i la matriu ampliada $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ del sistema es poden presentar les següents situacions:

- $rg(\mathbf{A}) = rg(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 1$. El sistema és compatible indeterminat, amb dos graus de llibertat. Per tant, els dos plans són coincidents.
- $rg(\mathbf{A}) = rg(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 2$. El sistema és compatible indeterminat, amb un grau de llibertat. El resultat de resoldre'l és una recta.
- $rg(\mathbf{A}) \neq rg(\mathbf{A}|\mathbf{B})$. El sistema és incompatible, i els dos plans no es tallen: són paral·lels.

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES UVIC | UVIC-UCC

Posicions relatives d'un pla i una recta

Considerem la recta i el pla donats per les equacions cartesianes:

$$r : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_1 = 0 \end{cases} \qquad \pi : Ax + By + Cz + D_1 = 0$$

El conjunt és un sistema d'equacions lineals amb 3 equacions i 3 incògnites. Si construïm la matriu $\mathbf{A}$ i la matriu ampliada $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ del sistema es poden presentar les següents situacions:

- $rg(\mathbf{A}) = rg(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 2$. El sistema és compatible indeterminat, amb un grau de llibertat. Per tant, el resultat és la pròpia recta, continguda en el pla.
- $rg(\mathbf{A}) = rg(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 3$. El sistema té una única solució, és compatible determinat. El resultat de resoldre'l és un punt de tall entre la recta i el pla.
- $rg(\mathbf{A}) \neq rg(\mathbf{A}|\mathbf{B})$. El sistema és incompatible, i la recta és paral·lela al pla.

Paral·lelisme

Ja hem vist que podem observar el paral·lelisme de rectes, plans, i rectes amb plans, usant les equacions implícites. Però podem simplificar la interpretació:

- quan dues rectes són paral·leles, els seus vectors directors **v** i **w** són proporcionals:
$$\frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2} = \frac{v_3}{w_3}$$
- quan dos plans π_1 i π_2 són paral·lels, els seus vectors normals $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ i $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ són proporcionals:
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$
- quan una recta i un pla són paral·lels, el vector director de la recta **v** és ortogonal al vector normal del pla **n**:
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$$

Perpendicularitat

Similar al que succeeix amb el paral·lelisme, podem pensar en la perpendicularitat segons:

- quan dues rectes són perpendiculars, els seus vectors directors **v** i **w** són ortogonals:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$$

- quan dos plans π_1 i π_2 són perpendiculars, els seus vectors normals $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ i $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ són ortogonals:

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$$

- quan una recta i un pla són perpendiculars, el vector director de la recta **v** és paral·lel al vector normal del pla **n**:

$$\frac{v_1}{n_1} = \frac{v_2}{n_2} = \frac{v_3}{n_3}$$

Angles

Fàcilment podem veure que:

- L'angle entre dues rectes es pot obtenir a partir del producte escalar dels seus dos vectors directors:

$$\cos\theta = \left|\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|}\right|$$

- L'angle entre dos plans es pot obtenir a partir del producte escalar dels seus dos vectors normals:

$$\cos\theta = \left|\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}}{\|\mathbf{n}\|\,\|\mathbf{m}\|}\right|$$

- L'angle entre una recta de vector director $\mathbf{v}$ i un pla de vector normal $\mathbf{n}$ vindrà donat per

$$\sin\theta = \left|\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{n}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right|$$

Distància d'un punt a una recta

- O bé usant la fòrmula

$$d(P,r) = \frac{\left\| \overrightarrow{QP} \times \mathbf{v} \right\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

- o bé interpretant geomètricament el problema:
  1. trobem el pla perpendicular a la recta que passa pel punt P, que anomenarem $\pi\perp$
  2. calculem el punt d'intersecció O entre la recta i el pla $\pi^{\perp}$
  3. calculem la distància entre el punt P i el punt O

  Fent això obtenim $d(P,r) = d(P,O)$.

Distància d'un punt a un pla

- A partir de la fòrmula

$$d(P,\pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

  (veure'n una demostració aquí).
- o bé interpretant geomètricament el problema:
  1. trobem la recta perpendicular al pla π que passa per P: $r^\perp$
  2. calculem el punt d'intersecció O entre la recta $r^\perp$ i el pla π
  3. calculem la distància entre el punt P i el punt O

  Fent això obtenim $d(P,\pi) = d(P,O)$.

Matrius de rotació a $\mathbf{R}^3$ I

Les matrius de rotació al voltant dels tres eixos de coordenades en $\mathbb{R}^3$ són:

$$\text{Gir angle } \theta \text{ en l'eix } X \quad R_X(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\text{Gir angle } \theta \text{ en l'eix } Z \quad R_Z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gir angle } \theta \text{ en l'eix } Y \quad R_Y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Notar que $tr(R) = 2\cos\theta + 1 \Rightarrow \theta = \arccos\frac{tr(R)-1}{2}$.

Matrius de rotació a $\mathbf{R}^3$ II

Les matrius de rotació són **ortogonals**: la seva inversa és igual a la seva trasposada:
$R_X(\theta)^{-1} = R_X(\theta)^t$, $R_Y(\theta)^{-1} = R_Y(\theta)^t$ i $R_Z(\theta)^{-1} = R_Z(\theta)^t$.
Els anomenats **angles fixes** són els angles de rotació respecte els tres eixos de coordenades OX, OY, OZ. Els sentits de rotació i l'ordre en que considerarem les rotacions estan donats, per exemple, per:[**?**]

fixedangles.png

Matrius de rotació a $\mathbf{R}^3$ III

Els angles d'Euler, molt usats, representen també tres rotacions consecutives. Un dels seus formats seria:

Matrius de rotació a $\mathbf{R}^3$ IV

En aeronàutica, per exemple, és comú usar els tres angles *roll*, *pitch* i *yaw*, en aquest ordre, per descriure els moviments d'una aeronau:

Matrius de rotació a $\mathbf{R}^3$ V

rollpitchyaw.png

Matrius de rotació a $\mathbf{R}^3$ VI

El producte de rotacions és també una rotació. Podem pensar en rotacions d'objectes concatenant rotacions respecte els eixos, seguint l'ordre que hem fixat abans (producte no commutatiu!):

$$R_X(\theta_X)\cdot R_Y(\theta_Y)\cdot R_Z(\theta_Z) =$$
$$= \begin{pmatrix} C_Y C_Z & -C_Y S_Z & S_Y \\ S_X S_Y C_Z + C_X S_Z & -S_X S_Y S_Z + C_X C_Z & -S_X C_Y \\ -C_X S_Y C_Z + S_X S_Z & C_X S_Y S_Z + S_X C_Z & C_X C_Y \end{pmatrix}$$

on:

$$\begin{array}{ll} C_X = \cos\theta_X & S_X = \sin\theta_X \\ C_Y = \cos\theta_Y & S_Y = \sin\theta_Y \\ C_Z = \cos\theta_Z & S_Z = \sin\theta_Z \end{array}$$

Matrius de rotació a $\mathbf{R}^3$ VII

Exercici 7 Mostra, fent servir matrius de rotació, que la rotació a $\mathbb{R}^2$ és commutativa, mentre que a $\mathbb{R}^3$ no ho és. Mostra-ho també amb un gràfic de rotacions dels eixos XYZ fent servir tres angles de $\pi/2$.

Exercici 8 Mostra que hi ha 12 diferents seqüències d'angles d'Euler.

El teorema d'Euler especifica que una rotació arbitrària a $\mathbb{R}^3$ es pot representar amb tres angles de rotació i que el resultat sempre es podrà representar com la rotació de l'objecte respecte un eix de direcció arbitrària donada per un vector unitari $\hat{\mathbf{r}}$, com veurem a continuació.

Equació d'Euler-Rodrigues

rodrigues.png

Per rotar un vector **v** respecte un eix de direcció arbitrària donada per un vector unitari $\hat{\mathbf{r}}$:[?]

$$
\begin{aligned}
R\mathbf{v} &= R\mathbf{v}_{\|} + R\mathbf{v}_{\perp} \\
&= R\mathbf{v}_{\|} + (\cos\theta)\mathbf{v}_{\perp} + (\sin\theta)\mathbf{w} \\
&= (\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\,[\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}] + \sin\theta(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{v}) \\
&= \cos\theta\mathbf{v} + [1-\cos\theta]\,(\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

Equació de Rodrigues

Matricialment podem escriure la matriu de rotació d'un vector qualsevol **u** un angle θ al voltant d'un eix donat pel vector unitari **r** com:

$$\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{r}}\theta} = \cos\theta \cdot I_3 + (1 - cos\theta)(\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}^t) + \sin\theta \cdot S \tag{1}$$

on $S = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$ on $\hat{\mathbf{r}} = (x, y, z)$.
El càlcul de la inversa és immediat, ja que es tracta d'una matriu ortogonal de rotació i les dues primeres matrius són simètriques i la tercera antisimètrica:

$$\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{r}}\theta}^{-1} = \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{r}}\theta}^{t} = \cos\theta \cdot I_3 + (1 - cos\theta)(\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}^t) - \sin\theta \cdot S$$

Rotació general I

Arreglant l'expressió, la matriu de rotació $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{r}}\theta}$ ve donada per la matriu de forma general:

$$\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{r}}\theta} = \begin{pmatrix} tx^2 + c & txy - sz & txz + sy \\ txy + sz & ty^2 + c & tyz - sx \\ txz - sy & tyz + sx & tz^2 + c \end{pmatrix}$$

amb

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= (x, y, z) \\ c &= \cos\theta \\ s &= \sin\theta \\ t &= 1 - \cos\theta \end{aligned}$$

Rotació general II

Si el que volem és fer l'operació inversa: donada una matriu de rotació genèrica trobar la direcció de l'eix $\hat{\mathbf{r}}$, usem (veure Eq. **??**):

$$\mathbf{R} - \mathbf{R}^t = 2\sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

i ja hem vist abans que $\theta = \arccos\frac{tr(R)-1}{2}$.

L'equació de Rodrigues ens dona una eina per trobar de forma fàcil la rotació d'un vector al voltant d'un eix arbitrari donat per un vector unitari $\hat{\mathbf{r}}$. Per tant, necessitem només dues peces d'informació: aquest vector unitari i un únic angle de rotació.

Per tal de facilitar els càlculs, podem usar l'algebra de quaternions.

Nombres complexos

Un nombre complex s'escriu z formalment com a $a + bi$, on $a, b \in \mathbb{R}$ i i és un símbol que s'identifica per $i^2 = -1$. Pel que fa a la suma i el producte, ambdues internes, els defineixen com a un **cos algebraic**:

$$\begin{aligned} (a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i \\ (a+bi)(c+di) &= ac+adi+bci+bdi^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i \end{aligned}$$

Segons la fòrmula d'Euler:

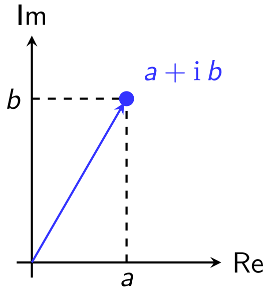
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Veiem que podem expressar qualsevol nombre complex com $z = re^{i\theta}$ i, aleshores:

$$\begin{aligned} z^n &= r^n e^{in\theta} \\ \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \; k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES UVIC | UVIC-UCC

Podem considerar els nombres complexos anàlegs als vectors d'$\mathbb{R}^2$ pel que fa a la seva representació gràfica:



La norma d'un nombre complex es calcula fent $|(a+bi)| = \sqrt{a^2+b^2}$. Podem fer el següent producte:

$$e^{i\theta}(x+iy) = (\cos\theta + i\sin\theta)(x+iy) = (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$$

Que es pot escriure com a la rotació en 2D del punt (x, y):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

El 1843, el matemàtic William R. Hamilton va descobrir que les rotacions tridimensionals es podien descriure amb una generalització dels nombres complexos anomenada **quaternions**.

Àlgebra de quaternions

Un quaternió és una tupla de 4 valors que s'escriu formalment com $q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, on $q_i \in \mathbb{R}$ i els símbols i, j, k satisfan aquestes propietats:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1 \\ ij = k \quad ji &= -k \\ jk = i \quad kj &= -i \\ ki = j \quad ik &= -j \end{aligned}$$

Exercici 9 Troba les expressions de la suma i producte de dos quaternions.

Conjugat i norma I

En **nombres complexos**, el producte és commutatiu i cada nombre té un invers. Considerem el producte d'un nombre complex $z = a + bi$ pel seu conjugat $z^* = a - bi$:

$$\begin{aligned}
(a+bi)(a-bi) &= a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 \\
\frac{(a+bi)(a-bi)}{a^2+b^2} = (a+bi)\frac{a-bi}{a^2+b^2} &= 1 \\
(a+bi)^{-1} &= \frac{a-bi}{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

és a dir, que $z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}$ per a qualsevol nombre complex. En quaternions, el conjugat de $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ es defineix com

$$q^* = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$$

Conjugat i norma II

i la seva norma és:

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

Exercici 10 Mostra com, de manera anàloga als números complexes, cada quaternió no nul té un invers de la forma: $q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}$

El producte de quaternions **no és commutatiu**.

Quaternions en rotacions

Un vector a $\mathbb{R}^3$ pot expressar-se com un quaternió pur, un quaternió que no té part real: $q = 0 + xi + yj + zk$. Podem definir un quaternió q_R de norma 1 que representi la rotació del quaternió q entre dues bases diferents A i B com:

$$
\begin{aligned}
q_B &= q_R q_A q_R^* \\
&= (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)(xi + yj + zk)(q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k) \\
&= (x(q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) + 2y(q_1 q_2 - q_0 q_3) + 2z(q_0 q_2 + q_1 q_3))i + \\
&\quad (2x(q_0 q_3 + q_1 q_2) + y(q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) + 2z(q_2 q_3 - q_0 q_1))j + \\
&\quad (2x(q_1 q_3 - q_0 q_2) + 2y(q_0 q_1 + q_2 q_3) + z(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2))k
\end{aligned} \tag{2}
$$

Tot i semblar enrevessat, és molt simple de programar i eficient (no inclou el càlcul de funcions trigonomètriques!).

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC-UCC

Matriu de rotació a partir d'un quaternió

Podem expressar l'equació anterior en forma matricial i trobar la matriu de rotació entre la base A i la B fent:

$$M = R_{A\to B} = 2\cdot\begin{pmatrix} q_0^2+q_1^2-0.5 & q_1q_2-q_0q_3 & q_0q_2+q_1q_3 \\ q_0q_3+q_1q_2 & q_0^2+q_2^2-0.5 & q_2q_3-q_0q_1 \\ q_1q_3-q_0q_2 & q_0q_1+q_2q_3 & q_0^2+q_3^2-0.5 \end{pmatrix}$$

on hem usat que la norma del quaternió de rotació ha de ser 1:
$|q| = \sqrt{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2} = 1.$
Notar que la rotació obtinguda a partir del quaternió q és la mateixa que l'obtinguda a partir del quaternió $-q$.

Angle i eix de rotació a partir d'un quaternió i viceversa

Donat un quaternió unitari $\hat{q} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, l'angle de rotació i l'eix associats són:

$$\begin{aligned} \theta &= 2 \arccos q_0 \\ \hat{r} &= \frac{(q_1, q_2, q_3)}{\sqrt{(1 - q_0^2)}} = \left(\frac{q_1}{\sin \frac{\theta}{2}}, \frac{q_2}{\sin \frac{\theta}{2}}, \frac{q_3}{\sin \frac{\theta}{2}} \right) \end{aligned}$$

L'operació inversa seria:

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \hat{r}_x + j \sin \frac{\theta}{2} \hat{r}_y + k \sin \frac{\theta}{2} \hat{r}_z$$

Exercici 11 Quin és el quaternió de la rotació de 180 graus al voltant d'un eix qualsevol? i de rotar 0 graus? A partir d'aquests dos quaternions, fes l'operació inversa. Què passa si l'angle és 0 graus?

Quaternió a partir d'una matriu de rotació

1. Primer, calculem la traça de la matriu M: $tr(M) = 4q_0^2 - 1$ i obtenim $q_0 = \sqrt{\frac{tr(M)+1}{4}}$.
2. A partir de $M_{11} = 2(q_0^2 + q_1^2 - 0.5)$, obtenim $q_1 = \sqrt{\frac{M_{11}}{2} + \frac{1-tr(M)}{4}}$
3. A partir de $M_{22} = 2(q_0^2 + q_2^2 - 0.5)$, obtenim $q_2 = \sqrt{\frac{M_{22}}{2} + \frac{1-tr(M)}{4}}$
4. A partir de $M_{33} = 2(q_0^2 + q_3^2 - 0.5)$, obtenim $q_3 = \sqrt{\frac{M_{33}}{2} + \frac{1-tr(M)}{4}}$

Quaternió a partir de tres angles d'Euler

Si considerem la rotació al voltant dels tres eixos:

$$M_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad M_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

i les fòrmules de la pàgina anterior obtenim:

$$q_\psi = \cos\frac{\psi}{2} + k\sin\frac{\psi}{2} \quad q_\theta = \cos\frac{\theta}{2} + j\sin\frac{\theta}{2} \quad q_\phi = \cos\frac{\phi}{2} + i\sin\frac{\phi}{2}$$

Exercici 12 Rota amb quaternions el punt $(1, 1, 1)$ 60 graus al voltant de l'eix Z Una web excepcional: `http://eater.net/quaternions`