FACULTAT
DE CIÈNCIES I TECNOLOGIA
UVIC | UVIC·UCC

Enginyeria Mecatrònica

Examen de Recuperació Càlcul Vectorial
Matemàtiques I GEMEC-09UV
RESPOSTES

7 de Febrer de 2022

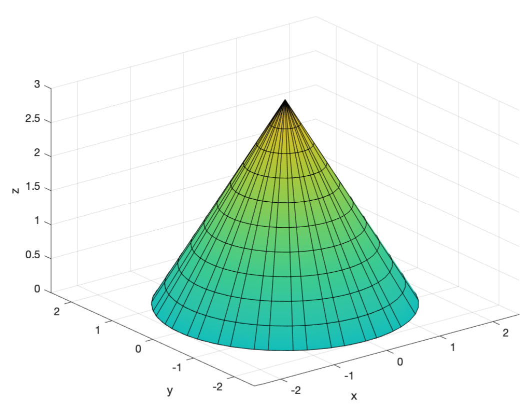
1. (3 Punts) La superfície lateral d'un conus de radi de base 2 i alçada 3, col · locat damunt del pla xy ve donada per l'expressió paramètrica:

$$\mathbf{X} : [0,3] \times [0,2\pi] \to \mathbf{R}^3$$

$$\mathbf{X}(u,\theta) = ((2-2u/3)\cos\theta, (2-2u/3)\sin\theta, u)$$

Calcula'n l'àrea $A(S) = \int\int_S \|\mathbf{dS}\|$

Resposta:



L'àrea de la superfície ve donada per

$$A(S) = \int\int_S \|\mathbf{dS}\| = \int\int_S \|\mathbf{dl_u} \times \mathbf{dl_\theta}\| = \int\int_{[0,3]\times[0,2\pi]} \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta} \right\| du\, d\theta$$

Calculem primer les derivades parcials:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} = \left(-\frac{2}{3}\cos\theta, -\frac{2}{3}\sin\theta, 1\right)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta} = \left(-\left(2-\frac{2u}{3}\right)\sin\theta, \left(2-\frac{2u}{3}\right)\cos\theta, 0\right)$$

L'element de superfície ve donat per

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -\frac{2}{3}\cos\theta & -\frac{2}{3}\sin\theta & 1 \\ -\left(2-\frac{2u}{3}\right)\sin\theta & \left(2-\frac{2u}{3}\right)\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \left(2-\frac{2u}{3}\right)(-\cos\theta, -\sin\theta, -\frac{2}{3})$$

Substituint aquest resultat a l'expressió de l'àrea obtenim:

$$\begin{aligned} A(S) &= \int\int_{[0,3]\times[0,2\pi]} \left\|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta}\right\| du\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \left(2-\frac{2u}{3}\right)\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta + \frac{4}{9}}\, dr\, d\theta \\ &= \frac{\sqrt{13}}{3}\int_0^3 \left(2-\frac{2u}{3}\right) du \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\frac{\sqrt{13}}{3}\left[2u - \frac{u^2}{3}\right]_0^3 = \boxed{2\pi\sqrt{13}} \end{aligned}$$

Efectivament la superfície lateral d'un conus és $\pi r L$, on r és el radi de la base i L és la longitud de la línea recta que uneix el vèrtex superior del conus amb qualsevol punt de la circumferència que en delimita la base. En aquest cas, aquesta línia mesura $\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$. ■ **2. (3 Punts)**
Donat el camp vectorial $\mathbf{A} = 2xy^2\hat{\imath} + 2x^2y\hat{\jmath} + \hat{k}$:

1. Comprova si el camp vectorial **A** és solenoïdal i si és conservatiu. *(1p)*
2. Calcula la seva circulació des del punt $O(0,0,0)$ fins al punt $P(1,1,1)$ per la recta que uneix els punts. *(1p)*
3. Calcula la seva circulació per la corba OP definida paramètricament per (t, t^2, t^3) *(1p)*

Resposta:

1. Comprova si el camp vectorial **A** és solenoïdal i si és conservatiu. *(1p)*

   Solenoidal? Només ens cal comprovar si la divergència del camp és zero:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z$$

En el nostre cas:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}2xy^2 + \frac{\partial}{\partial y}2x^2y + \frac{\partial}{\partial z}1 = 2x^2 + 2y^2 \neq 0$$

Per tant, el camp no és solenoidal.

Conservatiu? En aquest cas hem de comprovar si el vector rotacional és zero a cada punt del camp:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

En el nostre cas:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy^2 & 2x^2y & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}1 - \frac{\partial}{\partial z}2x^2y\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial}{\partial z}2xy^2 - \frac{\partial}{\partial x}1\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial}{\partial x}2x^2y - \frac{\partial}{\partial y}2xy^2\right)\hat{k} = \mathbf{0}$$

Per tant, el camp és conservatiu.

2. Calcula la seva circulació des del punt $O(0,0,0)$ fins al punt $P(1,1,1)$ per la recta que uneix els punts. *(1p)*

   Per a qualsevol corba C, podem calcular la circulació fent:

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{dr} = \int_C \left(2xy^2\,dx + 2x^2y\,dy + dz\right)$$

   En el cas de la recta que uneix els dos punts, la podem representar paramètricament com $x = y = z = t$ per a $t \in [0,1]$. També veiem que $dx = dy = dz = dt$. Per tant:

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{dr} = \int_0^1 \left(4t^3 + 1\right)\,dt = \left[t^4 + t\right]_0^1 = \boxed{2}$$

3. Calcula la seva circulació per la corba OM definida paramètricament per (t, t^2, t^3) *(1p)*

En aquest cas, $x = t$, $y = t^2$ i $z = t^3$ per a $t \in [0,1]$. Per tant: $dx = dt$, $dy = 2tdt$ i $dz = 3t^2dt$. Per tant:

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{dr} = \int_0^1 \left(2t \cdot (t^2)^2 dt + 2t^2 \cdot t^2 \cdot 2tdt + 3t^2dt\right) = \int_0^1 \left(6t^5dt + 3t^2dt\right)\,dt = \boxed{2}$$

Òbviament, sabent que el camp és conservatiu ens podríem haver estalviat aquesta segona operació un cop sabut el resultat de l'apartat 2).

Alternativa a apartats 2) i 3):

Alternativament, podríem haver trobat el mateix resultat a partir de saber que el rotacional era zero (camp conservatiu) trobant la funció potencial $\Phi(x, y, z)$ quin gradient iguala $\mathbf{A}$:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi = \mathbf{A}$$

D'aquí:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = A_x = 2xy^2 \Rightarrow \Phi(x, y, z) = x^2y^2 + f(y, z)$$

on $f(y, z)$ és una funció que no depèn de x i que, per tant, actua com una constant respecte a la integració. Per trobar aquesta funció estudiem la component y del gradient:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = A_y = 2x^2y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow f(y, z) = g(z)$$

Finalment, per trobar $g(z)$ usem la tercera component del gradient:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = A_z = 1 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial z} = 1 \Rightarrow g(z) = z + C$$

amb la qual cosa obtenim l'expressió del potencial

$$\Phi(x, y, z) = x^2y^2 + z + C$$

Avaluant la diferència de potencial entre els punts inicial i final de les corbes, obtenim:

$$\Delta\Phi(x, y, z) = \Phi(1, 1, 1) - \Phi(0, 0, 0) = \boxed{2}$$

com esperàvem pel fet que $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$. ■

3. (4 Punts) Donat el camp vectorial $\mathbf{F} = x^2\hat{\imath} + y^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k}$ i la superfície S donada per la funció $z = g(x, y) = 16 - x^2 - y^2$ que està per damunt del pla xy

1. Comprova si el camp vectorial $\mathbf{F}$ és solenoïdal i si és conservatiu. *(2p)*
2. Determina el flux, $\int\int_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS}$ del camp vectorial $\mathbf{F}$ que travessa la superfície S. *(2p)*

Resposta:

1. Comprova si el camp vectorial $\mathbf{F}$ és solenoïdal i si és conservatiu. *(1p)*

Solenoidal? Només ens cal comprovar si la divergència del camp és zero:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{\partial z} F_z$$

En el nostre cas:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} x^2 + \frac{\partial}{\partial y} y^2 + \frac{\partial}{\partial z} z^2 = 2x + 2y + 2z \neq 0$$

Per tant, el camp no és solenoidal.

Conservatiu? En aquest cas hem de comprovar si el vector rotacional és zero a cada punt del camp:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

En el nostre cas:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y} z^2 - \frac{\partial}{\partial z} y^2 \right) \hat{\imath} + \left(\frac{\partial}{\partial z} x^2 - \frac{\partial}{\partial x} z^2 \right) \hat{\jmath} + \left(\frac{\partial}{\partial x} y^2 - \frac{\partial}{\partial y} x^2 \right) \hat{k} = \mathbf{0}$$

Per tant, el camp és conservatiu.

2. Determina el flux, $\int\int_D \vec{F} d\vec{S}$ del camp vectorial $\vec{F}$ que travessa la superfície S. *(2p)*

En coordenades cartesianes tenim que la superfície està definida com:

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / z = 16 - x^2 - y^2, z \geq 0 \right\}$$

El flux es pot calcular fent $\int\int_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS}$ on D és el domini de les variables (x, y) a cadascuna de les superfícies.

Alernativament, podem calcular el flux segons el teorema de Gauss com:

$$\Phi = \int\int\int_V \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} dx\, dy\, dz = \int\int\int_V (2x + 2y + 2z) dx\, dy\, dz$$

Per solucionar aquesta integral triple usem un canvi de variables a cilíndriques:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq z \leq 16 - \rho^2 \\ 0 \leq \rho \leq 4 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Tenint en compte que el Jacobià en cilíndriques és $J = \rho$ la integral ens queda:

$$\Phi = \int\int\int_V (2x + 2y + 2z) dx\, dy\, dz = \int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{16-\rho^2} (\cancel{2\rho\cos\theta} + \cancel{2\rho\sin\theta} + 2z)\rho\, dz\, d\theta\, d\rho$$

És interessant notar que els únics llocs on apareix θ són sinus i cosinus, i en fer-ne la integració acabaran desapareixent perquè integrem entre 0 i 2π. Per tant:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{16-\rho^2} 2z\rho\, dz\, d\theta\, d\rho \\
&= \int_0^4 [z^2]_0^{16-\rho^2} \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \int_0^4 (16-\rho^2)^2 \rho\, d\rho \\
&= 2\pi \int_0^4 (16^2\rho + \rho^5 - 32\rho^2)\, d\rho = 2\pi \left[128\rho^2 + \frac{\rho^6}{6} - 32\frac{\rho^3}{3}\right]_0^4 = -1364\pi
\end{aligned}$$

■