FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC-UCC

Enginyeria Mecatrònica

Examen Especial Càlcul Integral
Matemàtiques I GEMEC-09UV
RESPOSTES

16 de Desembre de 2022

1. (4 Punts) Calcula les següents integrals:

1. $\int \frac{2}{3+x^2}\,dx$ *(1p)*
2. $\int \cos^2 x\,dx$ *(1p)*
3. $\int \sqrt{16-x^2}\,dx$ *(1p)*
4. $\int \frac{2x}{x^2-3x+2}\,dx$ *(1p)*

Resposta:

1. $\int \frac{2}{3+x^2}\,dx$ *(1p)*

   És fàcil notar que la integral s'assembla a la de l'arctangent. Aprofitant això fem:

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{3+x^2}\,dx &= \int \frac{2/3}{1+x^2/3}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{1/\sqrt{3}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+k}\end{aligned}$$

2. $\int \cos^2 x\,dx$ *(1p)*

   En aquest cas cal recordar que $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$. Per tant:

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int 1\,dx\frac{1}{4}\int 2\cos(2x)\,dx = \boxed{\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)+k}$$

3. $\int \sqrt{16-x^2}\,dx$ *(1p)*

Aplicarem el canvi $x = 4\sin(t)$ i $dx = 4\cos(t)dt$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{16-x^2}\,dx &= \int \sqrt{16-16\sin^2(t)}\cdot 4\cos(t)\,dt = 16\int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,dt\\ &= 16\int \sqrt{\cos^2(t)}\cos(t)\,dt = 16\int \cos^2(t)\,t = 16\int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = 8t + 4\sin(2t) + k\end{aligned}$$

Desfent el canvi obtenim:

$$\int \sqrt{16-x^2}\,dx = \boxed{8\arcsin(\frac{x}{4}) + 2x\sqrt{1-\frac{x^2}{16}} + k}$$

4. $\int \frac{2x}{x^2-3x+2}\,dx$ *(1p)*

Es tracta d'una integral racional amb una fracció pròpia (grau del numerador menor que el grau del denominador). Per tant:

(a) Factoritzem el denominador:

Trobem les arrels del denominador: $x = 1$ i $x = 2$. Això ens indica que el denominador es pot expresssar com

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

(b) Ara descomposem la fracció en una suma de fraccions més simples:

$$\frac{2x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

Desenvolupant l'expressió podem igualar els termes independents i els coeficients d'x per separat:

$$\begin{cases} 2 = A + B \\ 0 = -2A - B \end{cases}$$

d'on $A = -2$ i $B = 4$. Substituint a l'expressió:

$$\int \frac{2x}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{-2}{x-1}\,dx + \int \frac{4}{x-2}\,dx = \boxed{-2\ln|x-1| + 4\ln|x-2| + k}$$

■

2. (3 Punts) Calcula el volum d'una esfera de radi R a partir de la revolució d'un cercle del mateix radi centrat a l'origen de coordenades *(3p)*

Resposta:

Calcula el volum d'una esfera de radi R a partir de la revolució d'un cercle del mateix radi centrat a l'origen de coordenades *(2p)*

El volum de revolució de qualsevol corba al voltant de l'eix de les abscisses es calcula fent $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$. Un esfera de radi R es genera a partir de la revolució d'un cercle del mateix radi, que ve donat per $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ entre $-R$ i R. Per tant:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx \\
&= \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \pi \left[\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right)\right] = \boxed{\frac{4\pi R^3}{3}}
\end{aligned}
$$

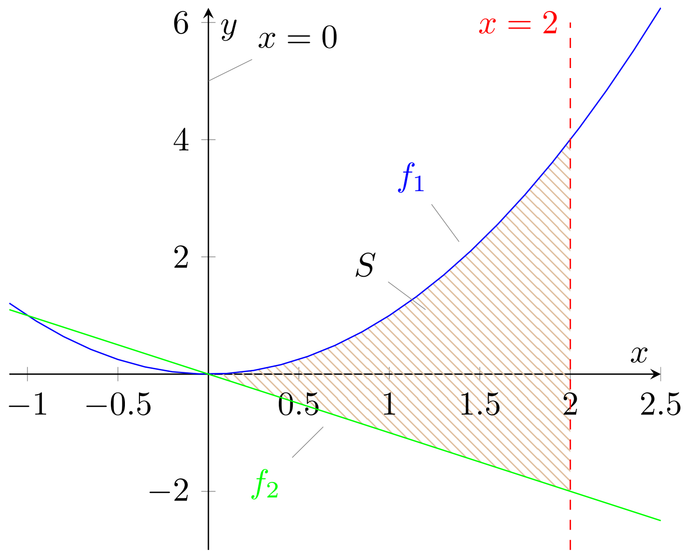
■ **3. (3 Punts)** Sigui S la regió delimitada per les corbes $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -x$ i les rectes $x = 0$ i $x = 2$.

1. Representa gràficament la regió S *(1p)*
2. Troba l'àrea d'aquesta superfície. *(1p)*
3. Calculeu $\int\int_S (x+1)y\, dx\, dy$. *(1p)*

Resposta:

1. Representa gràficament la regió S

   La Figura mostra les diferents corbes i la supèrfície S que delimiten.



■

2. Troba l'àrea d'aquesta superfície.

   Per trobar l'àrea usem com a límits d'integració les dues rectes verticals:

$$S = \int_0^2 [f_1(x) - f_2(x)]\, dx = \int_0^2 \left[x^2 - (-x)\right]\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{8}{3} + \frac{4}{2} = \frac{14}{3}$$

■

3. Calculeu $\int\int_S (x+1)y\, dx\, dy$.

$$\begin{aligned}
\int\int_S (x+1)y\, dx\, dy &= \int_0^2 \left[\int_{-x}^{x^2} (x+1)y\, dy\right] dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left[(x+1)y^2\right]_{-x}^{x^2} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \left[(x+1)(x^4 - x^2)\right] dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (x^5 + x^4 - x^3 - x^2) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2^6}{6} + \frac{2^5}{5} - \frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3}\right] = \frac{26}{5}
\end{aligned}$$

■

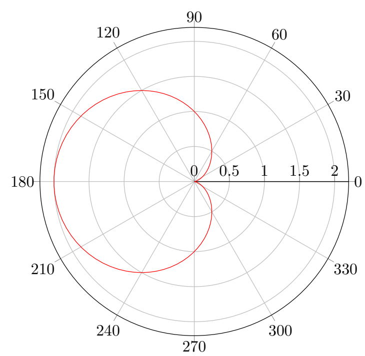
4. (3 Punts) Un cardioide ve donat per la funció $r = 1 - \cos(\theta)$:

1. Dibuixa la funció. *(1.5p)*

2. Troba l'àrea de la regió delimitada per la funció. *(1.5p)*

Resposta:

1. Dibuixa la funció.



■

2. Troba l'àrea de la regió delimitada per la funció.

Per trobar la superfície d'una regió donada R només cal sumar els diferencials de superfície, $dA = dx\,dy$. En aquest cas, però, és més convenient fer l'operació en polars: $A = \frac{1}{2}\int_a^b r(\theta)^2\,d\theta$. Substituint:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos(\theta))^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos^2(\theta)-2\cos(\theta))\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))-2\cos(\theta))\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right)-2\sin(\theta)\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Podeu veure un vídeo explicatiu a `https://www.youtube.com/watch?v=seBgp5vX2fo`. ■