Exercicis Resolts

MATEMÀTIQUES I

Grau en Enginyeria Mecatrònica *

Jordi Villà i Freixa

Darrera modificació: 2 de gener de 2024

Índex

*Adreça electrònica: `jordi.villa@uvic.cat`

document per testejar nous exercicis abans de ficar-los al ExercicisResolts.tex

1 Derivades

Ex. 1 — Troba els punts estacionaris, i el seu tipus, de la funció $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 2$

Answer (Ex. 1) — En trobem primer la derivada i la igualem a zero per tal de trobar els punts estacionaris:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x^2 - x - 6) = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ -2 \end{array} \right.$$

Un cop trobats, per saber de quin tipus són fem la segona derivada i els hi substituïm:

$$f''(x) = 6(2x - 1)$$

$$f''(x = 3) = 30 > 0$$
$$f''(x = -2) = -30 < 0$$

Per tant, la funció té un màxim a $x = -2$ i un mínim a $x = 3$, com es pot veure al gràfic de la Figura 1.

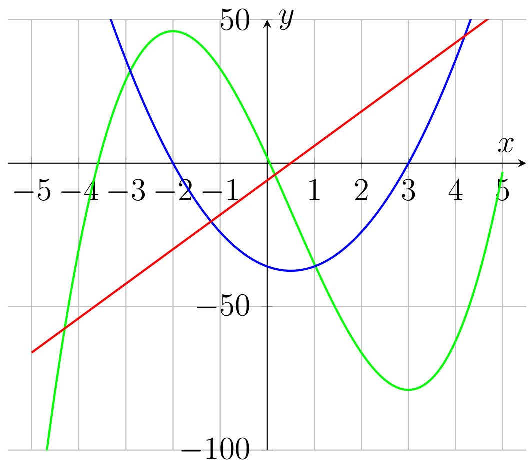

Figura 1: $f(x)$ (verd), $f'(x)$ (blau) i $f''(x)$ (vermell) de l'Exercici 1.

Aquest codi permet resoldre l'exercici a `MATLAB`:

```
% resolució exercici
syms x
f=2*x^3-3*x^2-36*x+2
fplot(f)
f1=diff(f)
f2=diff(f1)
solve(f1==0)
```

■

Ex. 2 — Troba la derivada $\frac{dy}{dx}$ si $x^3 - 3xy + y^3 = 2$

Answer (Ex. 2) — Es tracta d'una funció implícita i farem la derivada com a tal:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^3 - 3xy + y^3) &= \frac{d}{dx}(2) \\
3x^2 - (3y + 3x\frac{dy}{dx}) + 3y^2\frac{dy}{dx} &= 0 \\
(3x^2 - 3y) + (3y^2 - 3x)\frac{dy}{dx} &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{-3x^2 + 3y}{3y^2 - 3x} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}
\end{aligned}$$

Aquest codi permet resoldre l'exercici a `MATLAB`:

```
% resolució exercici
syms y(x) DY
eqn=x^3-3*x*y+y^3==0
dy=diff(y)
deqn=diff(eqn,x)
Deqn = subs(deqn, dy, DY);
DYsol = simplify( solve(Deqn, DY) );
disp(DY == DYsol)
```

■

Ex. 3 — Troba la derivada $\frac{dy}{dx}$ si $y = \sin(3x + 4y)$

Answer (Ex. 3) — Es tracta d'una funció implícita i farem la derivada com a tal:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}y &= \frac{d}{dx}\sin(3x+4y) \\
\frac{dy}{dx} &= \cos(3x+y)\left(3+4\frac{dy}{dx}\right) \\
\frac{dy}{dx}\left(1-4\cos(3x+y)\right) &= 3\cos(3x+y) \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{3\cos(3x+y)}{1-4\cos(3x+y)}
\end{aligned}
$$

Aquest codi permet resoldre l'exercici a `MATLAB`:

```
% resolució exercici
syms y(x) DY
eqn=y==sin(3*x+4*y)
dy=diff(y)
deqn=diff(eqn,x)
Deqn = subs(deqn, dy, DY)
DYsol = simplify( solve(Deqn, DY) )
disp(DY == DYsol)
```

■

Ex. 4 — Troba l'error comès per aproximar el valor de $e^0.1$ a partir de l'aproximació lineal de la funció a l'origen.

Answer (Ex. 4) — Cal recordar que, en tant que infinitèssims equivalents, $e^x \sim x + 1$ per a valors de $x \to 0$ (veure Figura 2).

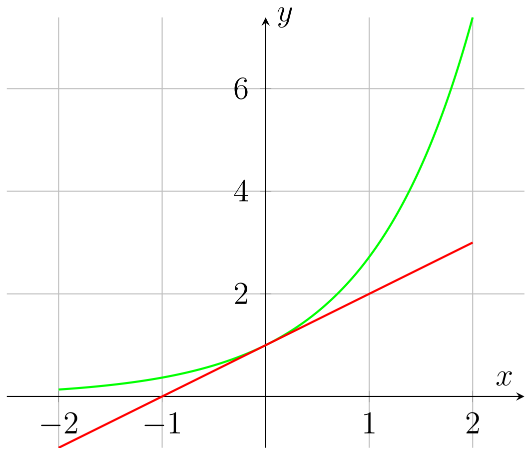

Figura 2: Les gràfiques de les funcions $y = e^x$ (verda) i $y = x + 1$ (vermella) coincideixen en el seu valor i en la seva primera derivada al voltant de $x = 0$ (són infinitèssims equivalents).

Per tant, per a valors propers a zero, com és el cas de $x = 0.1$, teniom que

$$e^{0.1} \sim 0.1 + 1 = 1.1$$

Podem comprovar amb la nostra calculadora que el valor correcte fins a 4 xifres decimals és $e^{0.1} = 1.1052$.

■

Ex. 5 — Com varia la temperatura d'un recinte, que ve donada per la funció $T = (2xy + 2z^2)°C$ en fer un desplaçament a partir del punt $P = (1, 5, 1)$ d'una unitat de longitud en la direcció del vector $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

Answer (Ex. 5) — Notem primer que la funció depèn de tres coordenades, $T(x, y, z)$. Ens demanen avaluar la derivada direccional de la funció en la direcció del vector $\vec{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Hem de fer, doncs, dues coses:

- Trobar el gradient de la funció:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} T(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{dT}{dx} \\ \frac{dT}{dy} \\ \frac{dT}{dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 2x \\ 4z \end{pmatrix}$$

En el punt $P = (1,5,1)$ tenim que $\vec{\boldsymbol{\nabla}} T(1,5,1) = (10,2,4)$.

- Trobar el vector unitari en la direcció del vector donat $\vec{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$:

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0)$$

així, la derivada direccional serà el producte escalar:

$$D_{\mathbf{a}}(P) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} T(x,y,z) \cdot \hat{\mathbf{a}} = (10,2,4) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0) =$$

Aquest codi permet resoldre l'exercici a `MATLAB`:

```
% resolució exercici
syms y(x) DY
eqn=y==sin(3*x+4*y)
dy=diff(y)
deqn=diff(eqn,x)
Deqn = subs(deqn, dy, DY)
DYsol = simplify( solve(Deqn, DY) )
disp(DY == DYsol)
```

■