

# Enginyeria Mecatrònica

Examen Parcial Matemàtiques I GEMEC-09UV

RESPOSTES

1 de Desembre de 2023

1. (3 Punts) Calcula els següents límits:<sup>1</sup>

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$  (0.75p)
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{3x^2 + 5x - 9} - \sqrt{3x^2 - x + 1} \right]$  (0.75p)
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cdot \arctan x}{\ln^2(x+1) \cdot (\sqrt[3]{x+1} - 1)}$  (0.75p)
4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2} \right)^{3x-1}$  (0.75p)

**Resposta:**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$

Una possibilitat és usar els infinitèsims equivalents:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \stackrel{[1]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2/2} = 2$$

[1] Hem usat que:

- $1 - \cos x \sim x^2/2$
- $x \sim \sin x$

Alternativament, podem usar la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos x = 2$$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{3x^2 + 5x - 9} - \sqrt{3x^2 - x + 1} \right]$

---

<sup>1</sup> Infinitèsims equivalents	$x \sim \sin x$ $x \sim e^x - 1$	$x \sim \ln(1+x)$ $1 - \cos x \sim x^2/2$	$x \sim \arctan x$ $\frac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x} \sim 1/n$
---------------------------------------	-------------------------------------	--	--

$$\begin{aligned}
l &= \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{3x^2 + 5x - 9} - \sqrt{3x^2 - x + 1}] \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{3x^2 + 5x - 9} - \sqrt{3x^2 - x + 1}] \cdot \frac{\sqrt{3x^2 + 5x - 9} + \sqrt{3x^2 - x + 1}}{\sqrt{3x^2 + 5x - 9} + \sqrt{3x^2 - x + 1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2 + 5x - 9) - (3x^2 - x + 1)}{\sqrt{3x^2 + 5x - 9} + \sqrt{3x^2 - x + 1}} \\
&\stackrel{[2]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{\sqrt{3x^2 + 5x - 9} + \sqrt{3x^2 - x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{2x\sqrt{3}} = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

[2] Hem usat infinits equivalents. Si  $x \rightarrow \infty$ :

- $4x - 10 \sim 4x$ ,
- $3x^2 + 5x - 9 \sim 3x^2$  i
- $3x^2 - x + 1 \sim 3x^2$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cdot \arctan x}{\ln^2(x+1) \cdot (\sqrt[3]{x+1} - 1)}$

Podem usar infinitèsims equivalents per a simplificar el càlcul

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cdot \arctan x}{\ln^2(x+1) \cdot (\sqrt[3]{x+1} - 1)} \stackrel{[3]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot x}{x^2 \cdot (\sqrt[3]{x+1} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+1} - 1} \stackrel{[4]}{=} 3$$

[3] Hem usat els infinitèsims equivalents:

- $\sin x \sim x$
- $\arctan x \sim x$
- $\ln(x+1) \sim x$

[4] Aquí usem que  $\frac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x} \sim 1/n$

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2} \right)^{3x-1}$

Es tracta d'una indeterminació  $1^\infty$  i, per tant, usem l'expressió:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} [f(x)-1]g(x)}$$

Per tant:

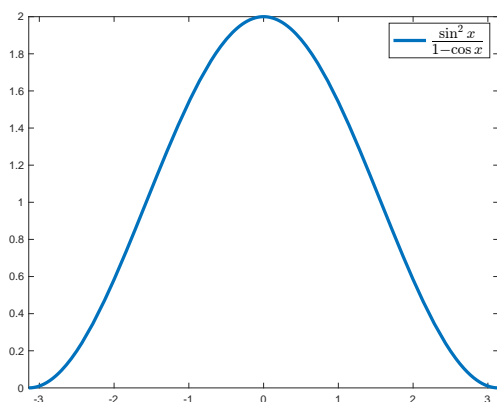
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2} \right)^{3x-1} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2} - 1 \right) (3x-1)} \stackrel{[5]}{=} e^3$$

[5] On hem solucionat el límit de l'exponent fent:

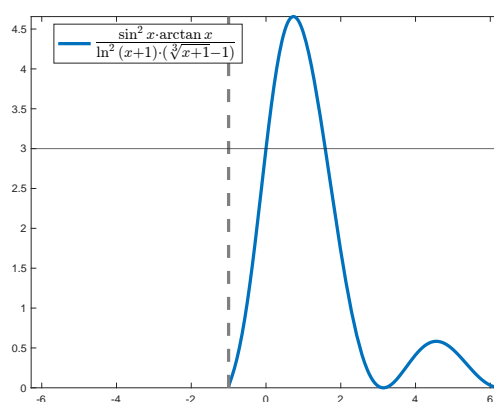
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2} - 1 \right) (3x - 1) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + x - 1) - (x^2 + 2)}{x^2 + 2} (3x - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 3}{x^2 + 2} (3x - 1) \stackrel{[6]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3\end{aligned}$$

[6] Hem usat infinits equivalents.

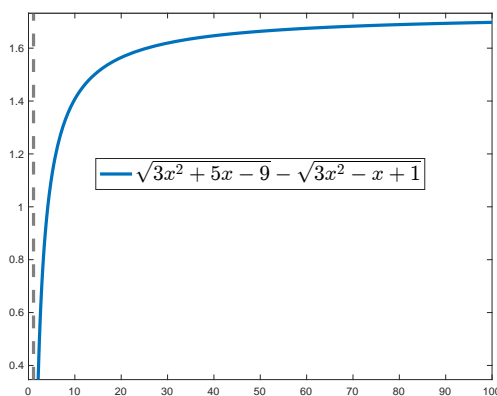
El resum de les diferents funcions es troba a la Figura:



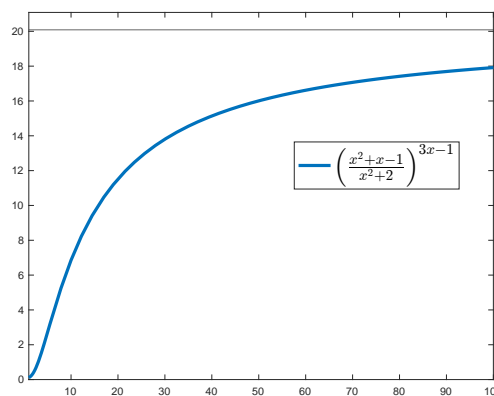
Exercici 1.1



Exercici 1.3



Exercici 1.2



Exercici 1.4

■ **2. (2 Punts)** Estudia la continuïtat i derivabilitat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{kx}{x+3} & x \leq -2 \\ \frac{3x-h}{x-2} & -2 < x < 1 \\ \frac{x+1}{2x} & x \geq 1 \end{cases}$$

---

**Resposta:**

La funció està formada per tres blocs:

$$f_1(x) = \frac{kx}{x+3}, x \leq -2 \text{ Definida a } x \in (-\infty, -3) \cup (-3, -2].$$

$$f_2(x) = \frac{3x-h}{x-2}, -2 < x < 1 \text{ Definida a } x \in (-2, 1).$$

$$\frac{x+1}{2x}, x \geq 1 \text{ Definida a } x \in [1, \infty).$$

Així doncs, el domini de la funció és

$$\text{dom}f(x) = \text{dom}f_1(x) \cup \text{dom}f_2(x) \cup \text{dom}f_3(x) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

**Continuïtat**

Primer explorarem la continuïtat en el domini de la funció. Els únics punts que ens preocupen són els punts frontera  $x = \{-2, 1\}$ , ja que per a la cadascuna de les tres parts de la funció (excepte, com hem vist, a  $x = -3$ , estem parlant de funcions perfectament contínues en el seus respectius dominis.)

Per tal que la funció sigui contínua en aquests dos punts, hem d'imposar que la seva imatge sigui idèntica per a la funció que s'hi aproxima per la dreta i per l'esquerra. D'aquesta manera obtenim un sistema d'equacions que ens permet trobar els valors de  $k$  i  $h$ :

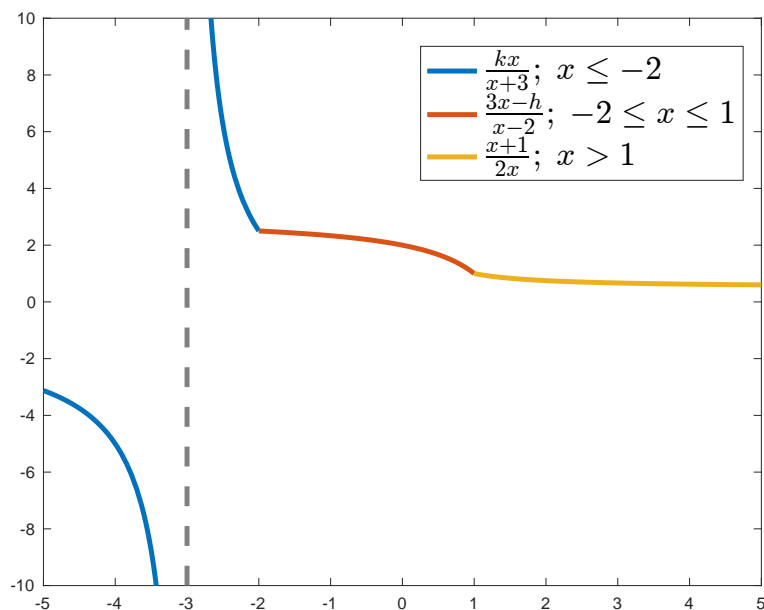
$$\begin{cases} \frac{kx}{x+3} = \frac{3x-h}{x-2} \\ \frac{3x-h}{x-2} = \frac{x+1}{2x} \end{cases} \xRightarrow{[1]} \begin{cases} \frac{-2k}{(-2)+3} = \frac{3(-2)-h}{-2-2} \\ \frac{3-h}{1-2} = \frac{1+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} h = 4 \\ k = -\frac{5}{4} \end{cases}}$$

[1] Substituïm els valors de  $x = -2$  al punt de trobada entre  $f_1(x)$  i  $f_2(x)$  i de  $x = 1$  al punt de trobada entre  $f_2(x)$  i  $f_3(x)$ .

La funció contínua, un cop substituïts els dos valors  $h = 4$  i  $k = -\frac{5}{4}$ , queda com:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-5x}{4(x+3)} & x \leq -2 \\ \frac{3x-4}{x-2} & -2 < x < 1 \\ \frac{x+1}{2x} & x \geq 1 \end{cases}$$

La Figura ?? mostra la funció resultant  $f(x)$ :



Per tant, la funció  $f(x)$  és contínua per a tot  $\text{dom} f$ .

## Derivabilitat

Avaluem primer la derivada en els tres fragments de la funció amb els valors per als quals hem vist que era contínua:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{15}{4(x+3)^2} & x \leq -2 \\ -\frac{2}{(x-2)^2} & -2 < x < 1 \\ -\frac{1}{2x^2} & x \geq 1 \end{cases}$$

Si avaluem la derivada de la funció en els punts frontera  $x = -2$  i  $x = 1$  obtenim:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = -\frac{15}{4} \neq -\frac{1}{16} = \lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x)$$

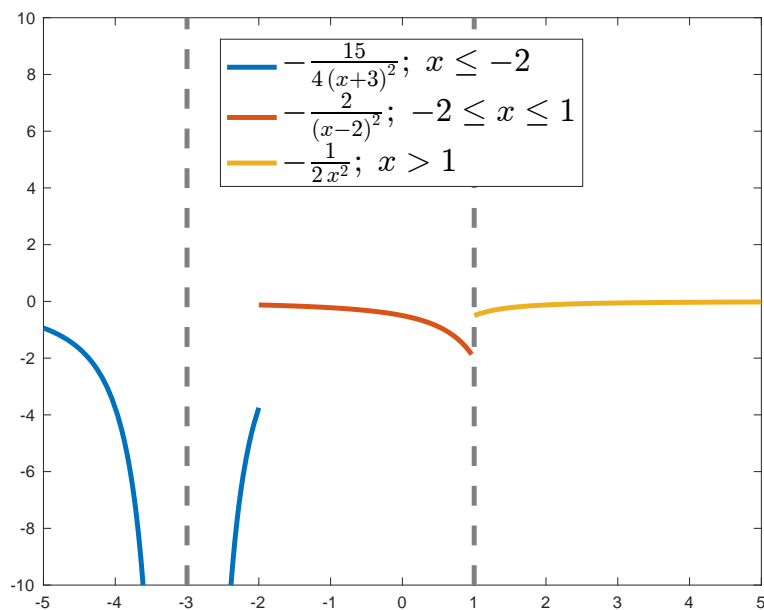
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -2 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$$

tot comprovant que la funció no és derivable en aquests dos punts frontera. Per tant, la funció és

---

derivable en  $\text{dom} f - \{-2, 1\}$ .

La Figura ?? mostra la funció derivada resultant  $f'(x)$  per a  $h = 4$  i  $k = -\frac{5}{4}$ :



■ **3. (2 Punts)** Donada la funció  $f(x, y) = 1 + \sin(3x + y)$ :

1. Trobar els vectors unitaris  $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^2$  per als quals la derivada direccional de la funció en la direcció de  $\mathbf{u}$  a partir del punt  $(0, 0)$  és igual a 1. (1p)
2. Calcular l'equació del pla tangent a la gràfica de la funció en el punt  $(\pi/2, -\pi/2, 1)$ . (1p)

**Resposta:**

1. Trobar els vectors unitaris  $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^2$  per als quals la derivada direccional de la funció en la direcció de  $\mathbf{u}$  a partir del punt  $(0, 0)$  és igual a 1.

La derivada direccional en un punt es calcula a partir del gradient i del vector unitari en la direcció demanada.

Calculem primer el vector gradient:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cos(3x + y) \\ \cos(3x + y) \end{pmatrix}$$

---

Per tant,  $\nabla f(0,0) = (3,1)$ . Al punt  $(x,y) = (0,0)$  tindrem:

$$D_{\mathbf{u}}f(0,0) = \nabla f(0,0) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 3u_1 + u_2$$

Així, es complirà que, per als vectors buscats:

$$D_{\mathbf{u}}f(0,0) = 1 = 3u_1 + u_2$$

o, el que és el mateix, estem buscant vectors amb coordenades  $\mathbf{u} = (u_1, 1 - 3u_1)$ . A més, els vectors buscats han de ser unitaris, la qual cosa vol dir que

$$u_1^2 + (1 - 3u_1)^2 = 1 \Rightarrow 10u_1^2 - 6u_1 = 0 \Rightarrow 2u_1^2(5u_1 - 3) = 0$$

Solucionant l'equació obtenim dos vectors:  $\{(0,1), (3/5, -4/5)\}$ .

2. Calcular l'equació del pla tangent a la gràfica de la funció en el punt  $(\pi/2, -\pi/2, 1)$ .

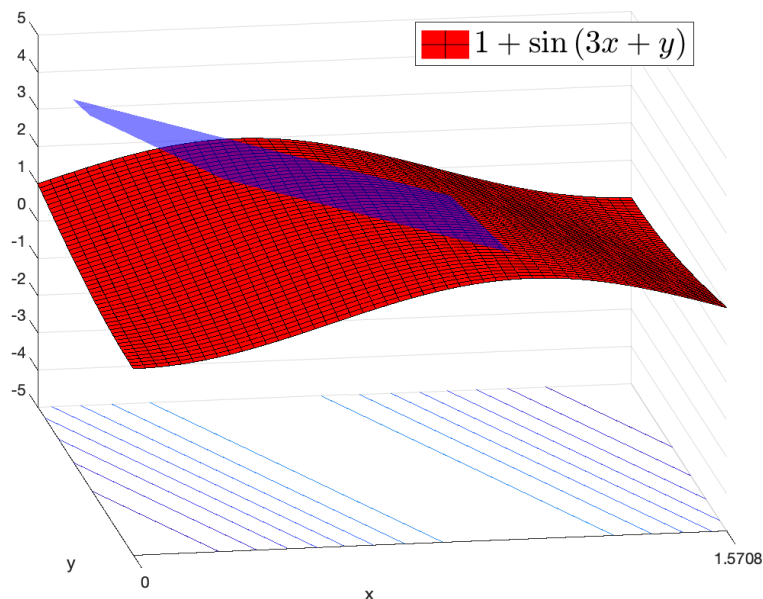
Apliquem l'expressió del pla tangent a  $(x_0, y_0)$ :

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0)$$

$$z - f(\pi/2, -\pi/2) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(\pi/2, -\pi/2)} (x - \pi/2) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(\pi/2, -\pi/2)} (y + \pi/2)$$

En el nostre cas, el gradient en el punt demanat és  $\nabla f(\pi/2, -\pi/2) = (-3, -1)$ , i la funció en el mateix punt és  $f(\pi/2, -\pi/2) = 1 + \sin(3\pi/2 - \pi/2) = 1$ . Per tant, el pla tangent buscat és:

$$3x + y + z = 1 + \pi$$



4. (3 Punts) Troba els punts crítics de la funció  $f(x, y) = e^{x \cos y}$ , i determina de quin tipus són.

**Resposta:**

Es tracta d'una funció definida a tot el pla  $(x, y)$ . Per trobar els punts crítics solucionem el sistema generat per:

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} e^{x \cos y} \cos y \\ -x e^{x \cos y} \sin y \end{pmatrix}$$

La primera equació es compleix si

$$y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Per a aquests valors, la segona equació només es fa zero si  $x = 0$ . Per tant, els punts crítics que estem buscant són

$$(x, y)_c = \left(0, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Construïm la matriu Hessiana fent les segones derivades de la funció:



---

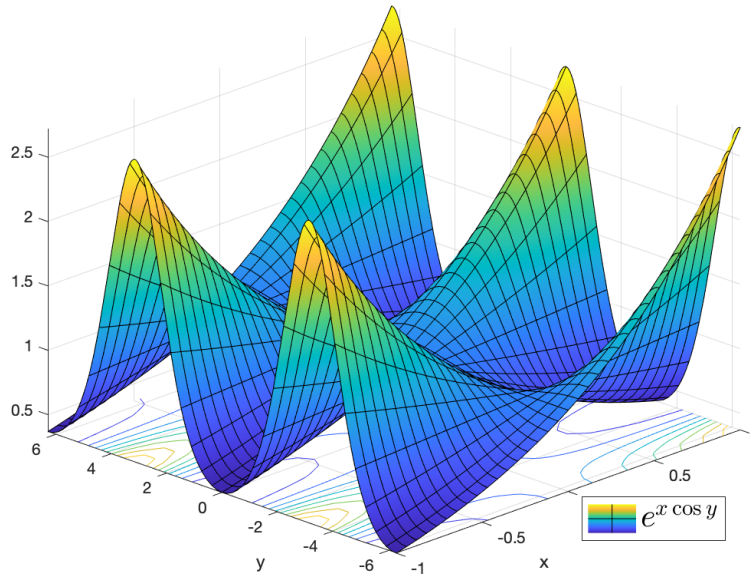

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 x & -\sin y - x \sin y \cos y \\ -\sin y - x \sin y \cos y & -x \cos y + x^2 \sin^2 y \end{pmatrix}$$

(1) hem usat que les derivades primeres són contínues a tot  $\mathbb{R}^2$  i podem aplicar el teorema de Schwarz:  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = C$ .

Com hem vist, als punts crítics serà sempre zero qualsevol terme del hessià que inclogui un producte per  $x$  o per  $\cos y$ . Per tant, el Hessià, determinant de la matriu Hessiana, queda, en aquests punts, com:

$$H_f(x, y)_c = \det(\mathbf{H}_f(x, y)_c) = \begin{vmatrix} 0 & -\sin y_c \\ -\sin y_c & 0 \end{vmatrix} = -1$$

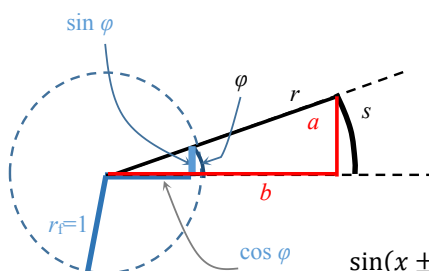
Per tant, tots els punts crítics són punt sella.



■

## Funcions trigonomètriques en la circumferència fonamental

Circumferència fonamental:



Circumferència de radi unitat,  $r_f = 1$

L'angle  $\varphi = s/r$  es mesura en radians. Factor de conversió:

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

$s \equiv$  Arc de circumferència de radi  $r$  corresponent a l'angle  $\varphi$

$$s = r \varphi$$

$a \equiv$  Catet oposat a l'angle  $\varphi$

$$a = r \sin \varphi$$

$b \equiv$  Catet contigu a l'angle  $\varphi$

$$b = r \cos \varphi$$

Funció tangent:

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$a = b \tan \varphi$$

Relació fonamental de la trigonometria:  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

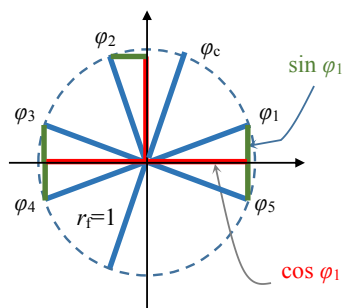
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\{\sin(x+y) + \sin(x-y)\}$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\{\cos(x-y) - \cos(x+y)\}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x-y) + \cos(x+y)\}$$

Relacions entre angles i funcions trigonomètriques inverses



$$\text{1er Q} \quad \varphi_c = \frac{\pi}{2} - \varphi_1 = 90^\circ - \varphi_1 \quad \sin \varphi_c = \cos \varphi_1 \quad \cos \varphi_c = \sin \varphi_1$$

$$\varphi_3 = \pi - \varphi_1 = 180^\circ - \varphi_1 \quad \sin \varphi_3 = \sin \varphi_1 \quad \arcsin \varphi_1 = \begin{cases} \varphi_1 \\ \pi - \varphi_1 \end{cases}$$

$$\varphi_4 = \varphi_1 + \pi = \varphi_1 + 180^\circ \quad \tan \varphi_4 = \tan \varphi_1 \quad \arctan \varphi_1 = \begin{cases} \varphi_1 \\ \varphi_1 + \pi \end{cases}$$

$$\varphi_5 = -\varphi_1 \quad \cos \varphi_5 = \cos \varphi_1 \quad \arccos \varphi_1 = \begin{cases} \varphi_1 \\ -\varphi_1 \end{cases}$$

Desfasament entre les funcions  $y = \sin \varphi$  i  $y = \cos \varphi$

$$\forall \varphi_1 \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} = \varphi_1 + 90^\circ \quad \sin \varphi_2 = \cos \varphi_1 \quad \begin{cases} \cos \varphi_1 = \sin\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin \varphi_2 = \cos\left(\varphi_2 - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = 1/2$$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$$

## Derivades de les funcions elementals i regles de derivació

Funció	Derivada	Funció	Derivada
$c$ amb $c \in \mathbb{R}$	0	$\sin x$	$\cos x$
(*) $x$	1	$\cos x$	$-\sin x$
$x^k$ amb $k \in \mathbb{R}$	$k x^{k-1}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
(*) $\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cotan x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
(*) $\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$a^x$ amb $a \in \mathbb{R}^+$	$a^x \ln a$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$e^x$	$e^x$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\log_a x$ amb $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\cosh x$	$\sinh x$

Funció	Derivada
$\lambda f(x)$	$\lambda f'(x)$
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
Regla de la cadena: $g(f(x))$	$g'(f(x))f'(x)$