FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC-UCC

Enginyeria Mecatrònica

Examen Parcial Matemàtiques I GEMEC-09UV
RESPOSTES

1 de Desembre de 2023

1. (3 Punts) Calcula els següents límits:[1]

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ *(0.75p)*

2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{3x^2+5x-9}-\sqrt{3x^2-x+1}\right]$ *(0.75p)*

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\cdot\arctan x}{\ln^2(x+1)\cdot(\sqrt[3]{x+1}-1)}$ *(0.75p)*

4. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+2}\right)^{3x-1}$ *(0.75p)*

Resposta:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

   Una possibilitat és usar els infinitèssims equivalents:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}\overset{[1]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2/2}=2$$

   [1] Hem usat que:

   - $1-\cos x\sim x^2/2$
   - $x\sim\sin x$

   Alternativament, podem usar la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}2\cos x=2$$

2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{3x^2+5x-9}-\sqrt{3x^2-x+1}\right]$

[1] Infinitèssims equivalents

$x\sim\sin x$	$x\sim\ln(1+x)$	$x\sim\arctan x$
$x\sim e^x-1$	$1-\cos x\sim x^2/2$	$\frac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}\sim 1/n$

$$\begin{aligned}
l &= \lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{3x^2+5x-9}-\sqrt{3x^2-x+1}\right]\\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{3x^2+5x-9}-\sqrt{3x^2-x+1}\right]\cdot\frac{\sqrt{3x^2+5x-9}+\sqrt{3x^2-x+1}}{\sqrt{3x^2+5x-9}+\sqrt{3x^2-x+1}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+5x-9)-(3x^2-x+1)}{\sqrt{3x^2+5x-9}+\sqrt{3x^2-x+1}}\\
&\overset{[2]}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{6x}{\sqrt{3x^2}+\sqrt{3x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x}{2x\sqrt{3}} = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

[2] Hem usat infinits equivalents. Si $x\to\infty$:

- $4x-10\sim 4x$,
- $3x^2+5x-9\sim 3x^2$ i
- $3x^2-x+1\sim 3x^2$.

3. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x\cdot\arctan x}{\ln^2(x+1)\cdot(\sqrt[3]{x+1}-1)}$

   Podem usar infinitèssims equivalents per a simplificar el càlcul

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\cdot\arctan x}{\ln^2(x+1)\cdot(\sqrt[3]{x+1}-1)}\overset{[3]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x}{x^2\cdot(\sqrt[3]{x+1}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}\overset{[4]}{=}3$$

[3] Hem usat els infinitèssims equivalents:

- $\sin x\sim x$
- $\operatorname{atan} x\sim x$
- $\ln(x+1)\sim x$

[4] Aquí usem que $\frac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}\sim 1/n$

4. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x-1}{x^2+2}\right)^{3x-1}$

   Es tracta d'una indeterminació 1^∞ i, per tant, usem l'expressió:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a}[f(x)-1]g(x)}$$

Per tant:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+2}\right)^{3x-1} = e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+2}-1\right)(3x-1)}\overset{[5]}{=}e^3$$

[5] On hem solucionat el límit de l'exponent fent:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+2}-1\right)(3x-1) &= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x-1)-(x^2+2)}{x^2+2}(3x-1) \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x-3}{x^2+2}(3x-1) \overset{[6]}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2} = 3
\end{aligned}
$$

[6] Hem usat infinits equivalents.

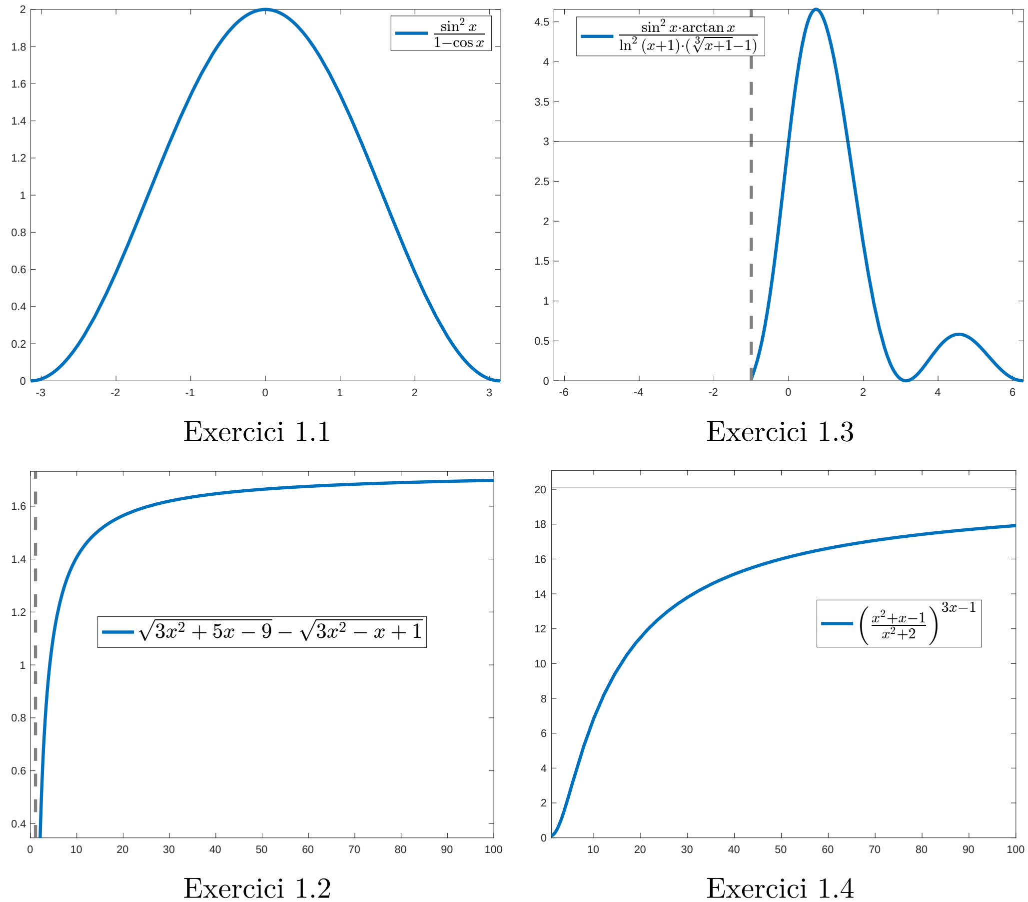

Figura 1: Gràfiques de les diverses funcions per a les que hem avaluat el límit (alguns dels valors del límit es mostren com a línies horitzontals en el valor $y = \updownarrow$).

$\blacksquare$

2. (2 Punts) Estudia la continuïtat i derivabilitat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{kx}{x+3} & x \leq -2 \\ \frac{3x-h}{x-2} & -2 < x < 1 \\ \frac{x+1}{2x} & x \geq 1 \end{cases}$$

Resposta:

La funció està formada per tres blocs:

$f_1(x) = \frac{kx}{x+3}$, $x \leq -2$ Definida a $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, -2]$.

$f_2(x) = \frac{3x-h}{x-2}$, $-2 < x < 1$ Definida a $x \in (-2, 1)$.

$f_3(x) = \frac{x+1}{2x}$, $x \geq 1$ Definida a $x \in [1, \infty)$.

Així doncs, el domini de la funció és

$$\mathrm{dom} f(x) = \mathrm{dom} f_1(x) \cup \mathrm{dom} f_2(x) \cup \mathrm{dom} f_3(x) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

Continuïtat

Primer explorarem la continuïtat en el dominini de la funció. Els únic punts que ens procupen són els punts frontera $x = \{-2, 1\}$, ja que per a la cadascuna de les tres parts de la funció (excepte, com hem vist, a $x = -3$, estem parlant de funcions contínues en el seus respectius dominis).

Per tal que la funció sigui contínua en aquests dos punts frontera, hem d'imposar que la seva imatge sigui idèntica per a la funció que s'hi aproxima per la dreta i per l'esquerra. D'questa manera obtenim un sistema d'equacions que ens permet trobar els valors de k i h:

$$\begin{cases} \frac{kx}{x+3} = \frac{3x-h}{x-2} \\ \frac{3x-h}{x-2} = \frac{x+1}{2x} \end{cases} \overset{[1]}{\Rightarrow} \begin{cases} \frac{-2k}{(-2)+3} = \frac{3(-2)-h}{-2-2} \\ \frac{3-h}{1-2} = \frac{1+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} h = 4 \\ k = \frac{-5}{4} \end{array}}$$

[1] Substituïm els valors de $x = -2$ al punt de trobada entre $f_1(x)$ i $f_2(x)$ i de $x = 1$ al punt de trobada entre $f_2(x)$ i $f_3(x)$.

La funció contínua, un cop substituïts els dos valors $h = 4$ i $k = -\dfrac{5}{4}$, queda com:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{-5x}{4(x+3)} & x\leq -2\\ \frac{3x-4}{x-2} & -2<x<1\\ \frac{x+1}{2x} & x\geq 1\end{cases}$$

La Figura 2 mostra la funció resultant $f(x)$:

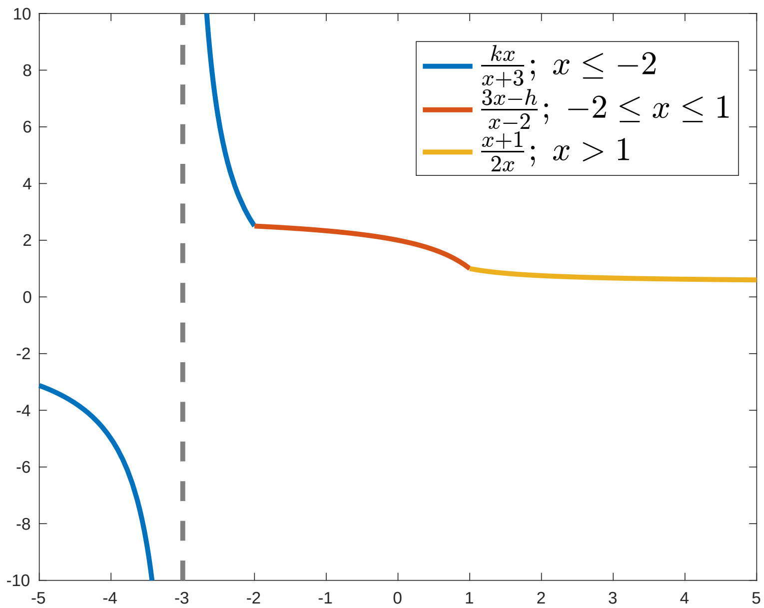

Figura 2: Funció problema per als valors $h=4$ i $k=-\dfrac{5}{4}$.

Per tant, la funció $f(x)$ és contínua per a tot dom$f$.

Derivabilitat

Avaluem primer la derivada en els tres fragments de la funció amb els valors per als quals hem vist que era contínua:

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{15}{4\,(x+3)^2} & x\leq -2\\ -\frac{2}{(x-2)^2} & -2<x<1\\ -\frac{1}{2\,x^2} & x\geq 1\end{cases}$$

Si avaluem la derivada de la funció en els punts frontera $x=-2$ i $x=1$ obtenim:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\frac{15}{4} \neq -\frac{1}{16} = \lim_{x\to -2^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -2 \neq 1 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

tot comprovant que la funció no és derivable en aquests dos puents frontera. Per tant, la funció és derivable en $\mathrm{dom} f \setminus \{-2, 1\}$.

La Figura 3 mostra la funció derivada resultant $f'(x)$ per a $h = 4$ i $k = -\frac{5}{4}$:

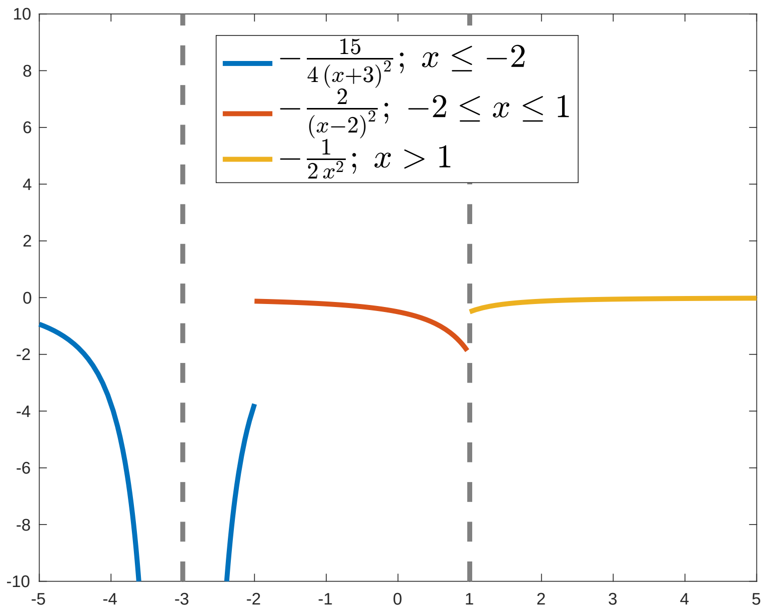

Figura 3: Derivada de la funció problema per als valors $h = 4$ i $k = -\dfrac{5}{4}$.

■

3. (2 Punts) Donada la funció $f(x, y) = 1 + \sin(3x + y)$:

1. Trobar els vectors unitaris $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^2$ per als quals la derivada direccional de la funció en la direcció de $\mathbf{u}$ a partir del punt $(0, 0)$ és igual a 1. *(1p)*

2. Calcular l'equació del pla tangent a la gràfica de la funció en el punt $(\pi/2, -\pi/2, 1)$. *(1p)*

Resposta:

1. Trobar els vectors unitaris $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^2$ per als quals la derivada direccional de la funció en la direcció de $\mathbf{u}$ a partir del punt $(0,0)$ és igual a 1.

   La derivada direccional en un punt es calcula a partir del gradient i del vector unitari en la direcció demanada.

   Calculem primer el vector gradient:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos(3x+y) \\ \cos(3x+y) \end{pmatrix}$$

   Per tant, $\nabla f(0,0) = (3,1)$. Al punt $(x,y) = (0,0)$ tindrem:

$$D_{\mathbf{u}} f(0,0) = \nabla f(0,0) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 3u_1 + u_2$$

   Així, es complirà que, per als vectors buscats:

$$D_{\mathbf{u}} f(0,0) = 1 = 3u_1 + u_2$$

   o, el que és el mateix, estem buscant vectors amb coordenades $\mathbf{u} = (u_1, 1 - 3u_1)$. A més, els vectors buscats han de ser unitaris, la qual cosa vol dir que

$$u_1^2 + (1-3u_1)^2 = 1 \Rightarrow 10u_1^2 - 6u_1 = 0 \Rightarrow 2u_1^2(5u_1 - 3) = 0$$

   Solucionant l'equació obtenim dos vectors: $\{(0,1), (3/5, -4/5)\}$.

2. Calcular l'equació del pla tangent a la gràfica de la funció en el punt $(\pi/2, -\pi/2, 1)$.

   Apliquem l'expressió del pla tangent a (x_0, y_0):

$$z - f(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} (y - y_0)$$

$$z - f(\pi/2, -\pi/2) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\pi/2,-\pi/2)} (x - \pi/2) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(\pi/2,-\pi/2)} (y + \pi/2)$$

   En el nostre cas, el gradient en el punt demanat és $\nabla f(\pi/2, -\pi/2) = (-3, -1)$, i la funció en el mateix punt és $f(\pi/2, -\pi/2) = 1 + \sin(3\pi/2 - \pi/2) = 1$. Per tant, el pla tangent buscat és:

$$3x + y + z = 1 + \pi$$

   La Figura 4 mostra la funció i el pla tangent en el punt $(\pi/2, -\pi/2, 1)$.

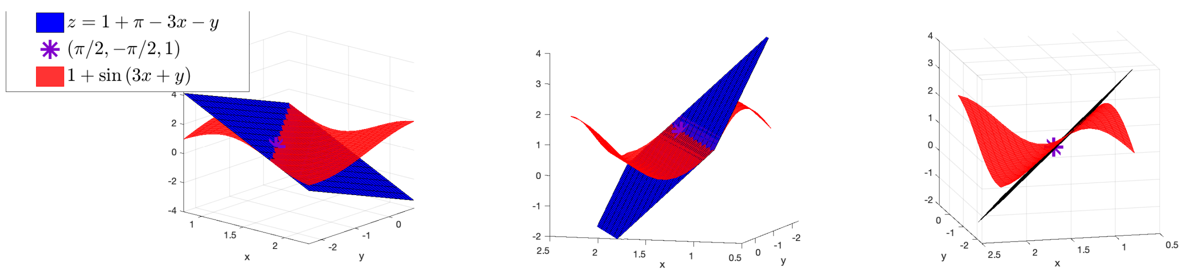

Figura 4: Funció $f(x,y) = 1 + \sin(3x + y)$ i el seu pla tangent al punt $(\pi/2, -\pi/2, 1)$ (identificat amb un asterisc), $3x + y + z = 1 + \pi$ des de diferents perspectives.

■

4. (3 Punts) Troba els punts crítics de la funció $f(x,y) = e^{x\cos y}$, i determina de quin tipus són.

Resposta:

Es tracta d'una funció definida a tot el pla (x, y). Per trobar els punts crítics solucionem el sistema generat per:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} e^{x\cos y}\cos y \\ -xe^{x\cos y}\sin y \end{pmatrix}$$

La primera equació es compleix si

$$y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Per a aquests valors, la segona equació només es fa zero si $x = 0$. Per tant, els punts crítics que estem buscant són

$$(x,y)_c = \left(0, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Construim la matriu Hessiana fent les segones derivades de la funció:

$$\mathbf{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 x & -\sin y - x\sin y\cos y \\ -\sin y - x\sin y\cos y & -x\cos y + x^2\sin^2 y \end{pmatrix}$$

(1) hem usat que les derivades primeres són contínues a tot $\mathbb{R}^2$ i podem aplicar el teorema de Schwarz: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = C$.

Com hem vist, als punts crítics serà sempre zero qualsevol terme del hessià que inclogui un producte per x o per $\cos y$. Per tant, el Hessià, determinant de la matriu Hessiana, queda, en aquests punts, com:

$$H_f(x,y)_c = \det(\mathbf{H}_f(x,y)_c) = \begin{vmatrix} 0 & -\sin y_c \\ -\sin y_c & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Per tant, tots els punts crítics són punt sella, com es pot apreciar a la Figura 5.

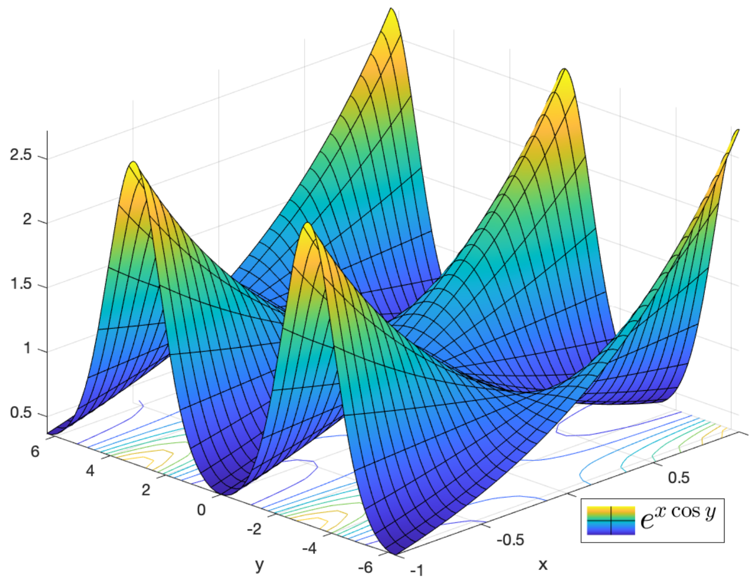

Figura 5: Representació de la funció $f(x,y) = e^{x\cos y}$, on s'aprecia que només compta amb punts sella, sense màxims ni mínims.

■