Vectors i Valors propis

Jordi Villà i Freixa

Universitat de Vic - Universitat Central de Catalunya
Grau en Enginyeria Mecatrònica

jordi.villa@uvic.cat

curs 2023-2024

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC-UCC

Índex

Referències

El material d'aquestes presentacions està basat en anteriors presentacions i apunts d'altres professors [García, Corbera, Calle] de la UVic-UCC, pàgines web diverses (normalment enllaçades des del text), així com monografies.

Valors i vectors propis

Definició

Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; és a dir, unja matriu quadrada amb elements complexos. Direm que $\lambda \in \mathbb{C}$ és un **valor propi (vap)** *d'A si existeix algun vector no nul $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}$ tal que $A\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u}$. Aquest vector $\boldsymbol{u}$ s'anomena* **vector propi (vep) associat al valor propi λ.**

Exercici 1 Demostra que els valors propis d'$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ són $\alpha_1 = 2$ i $\alpha_2 = 3$ i troba els corresponents vectors propis.

Càlcul de vectors i valors propis

El que acabem de descriure ens mostra també com calcular els vectors i valors propis. Si I és la matriu identitat d'ordre n:

1. $A\mathbf{u} - \alpha\mathbf{u} = \mathbf{0}$
2. $(A - \alpha I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$
3. $\det(A - \alpha I) = 0$, que genera l'anomenat **polinomi característic** de la matriu A.

I deduïm també que el vector $\mathbf{v}$ pertany al nucli de l'aplicació $(A - \alpha I)$. Els valors propis seran les arrels del polinomi característic i per trobar el vector propi associat a cada arrel caldrà resoldre els sistemes $A\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}$ o, equivalentment, $(A - \alpha I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Exercici 2 Trobar els valors i vectors propis de les matris $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ i

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrius semblants i diagonalització

Dues matrius A i B són semblants si existeix una matriu P no singular ($\det(P) \neq 0$) tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Exercici 3 Comprova que les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ són semblants amb $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Les matrius semblants representen la mateixa aplicació lineal en dues bases diferents, essent P la matriu de canvi de base.

Diagonalització

Definició

Direm que la matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ és **diagonalitzable** *si existeix una matriu inversible $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ i una matriu diagonal $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = C \cdot D \cdot C^{-1}$ (o bé $D = C^{-1} \cdot A \cdot C$). La matriu C s'anomena* **matriu de canvi de base**.

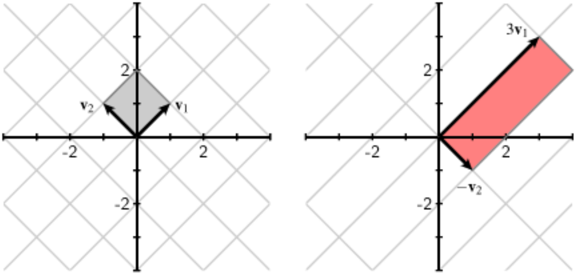
Teorema

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ té n valors propis diferents $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, llavors A diagonalitza; és a dir, existeix una matriu inversible C i una matriu diagonal D tal que $A = C \cdot D \cdot C^{-1}$. A més,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

i la matriu C està formada per n vectors propis de valors propis respectius $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (en columnes).

Exercici 4iagonalitza la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ i interpreta aquesta imatge en termes de l'efecte de la matriu sobre els seus vep.



1. Si A i B són semblants, tenen els mateixos valors propis
2. Respecte els vectors propis:
   - si $\mathbf{v}$ és vector propi d'A, $\mathbf{v'} = P^{-1}\mathbf{v}$ ho és de B.
   - si $\mathbf{v'}$ és vector propi de B, $\mathbf{v} = P\mathbf{v'}$ ho és d'A.
3. A és invertible (no singular) $\Leftrightarrow$ 0 no és un valor propi d'A.
4. $\alpha \neq 0$ és un valor propi d'A de vector propi $\mathbf{v} \Rightarrow \frac{1}{\alpha}$ és un valor propi d'A^{-1} de vector propi $\mathbf{v}$
5. si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ són valors propis d'A,
   $$\Rightarrow \begin{cases} tr(A) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \\ \det(A) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n \end{cases}$$
6. A és diagonalitzable si és semblant a una matriu diagonal: $D = P^{-1}AP$.
7. Tota matriu simètrica de coeficients reals és diagonalitzable i té valors propis reals.

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC-UCC

Exercici 5 Calcula $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^6$

Exercici 6 Estudia si aquestes matrius són diagonalitzables:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercici 7 Té valors propis reals una matriu de rotació?

References

James M. Van Verth, Lars M. Bishop (2015)
Essential Mathematics for Games and Interactive Applications
Elsevier.

K.F. Riley, M.P. Hobson, S.J. Bence (2002)
Mathematical Methods for Physics and Engineering (2nd Ed)
McGraw Hill.

Seymour Lipschutz, Marc Lipson (2001)
Schaum's outlines: Linear Algebra (3rd Ed)
McGraw Hill.

Josep Lluís García
Presentacions Matemàtiques Grau en Multimèdia, Aplicacions i Videojocs
UVic-UCC.

Montserrat Corbera, Vladimir Zaiats
Apunts d'Àlgebra Lineal
UVic-UCC.

Malu Calle
Apunts d'Àlgebra Lineal
UVic-UCC.