FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC·UCC

Enginyeria Mecatrònica

Examen Parcial
Matemàtiques I GEMEC-09UV
Professor: Jordi Villà i Freixa
RESPOSTES

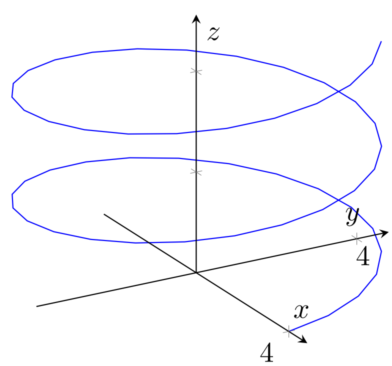
24 de Gener de 2023

1. (2 Punts) Un fragment d'una molla està descrit per la corba $\mathcal{L} : \mathbf{r}(t) = \sigma(t) = a\cos t\hat{\mathbf{i}} + a\sin t\hat{\mathbf{j}} + bt\hat{\mathbf{k}}$ entre els punts corresponents a $t = 0$ i $t = 4\pi$, on $a = 4$ i $b = 3$

1. Dibuixa la corba. *(1p)*
2. Troba la seva longitud. *(1p)*

Resposta:

1. Dibuixa la corba. Per a $a = 4$ i $b = 3$



2. Troba la seva longitud en funció d'a i b.

   El vector posició de la corba a cada valor del paràmetre t ve donat pel camí:

$$\mathbf{r}(t) = \sigma(t) = a\cos t\hat{\mathbf{i}} + a\sin t\hat{\mathbf{j}} + bt\hat{\mathbf{k}}$$

Podem calcular la longitud de la corba a partir del mòdul de la derivada del vector posició

$$L(\mathcal{L}) = \int_{\mathcal{L}} \|\mathbf{dr}\| = \int_0^{4\pi} \|\sigma'(t)\| dt$$

Primer ens cal trobar, doncs, $\sigma'(t)$, calcular-ne el mòdul i substituir-lo a l'expressió:

$$\sigma'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$$

$$\begin{aligned} \|\sigma'(t)\|^2 &= (-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2 \\ &= a^2[(\sin t)^2 + (\cos t)^2] + b^2 = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

D'on,

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Integrant respecte t:

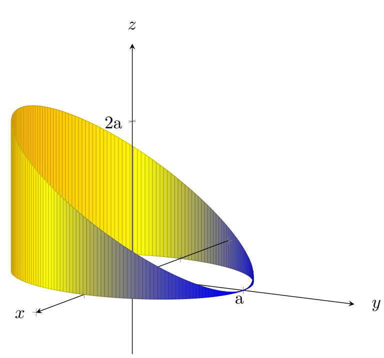
$$L(\mathcal{L}) = \int_0^{4\pi} \|\sigma'(t)\| dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{a^2+b^2} dt = \sqrt{a^2+b^2} \int_0^{4\pi} dt = 4\pi\sqrt{a^2+b^2}$$

Si $a = 4$ i $b = 3$

$$\boxed{L(\mathcal{L}) = 20\pi}$$

■

2. (2 Punts) La superfície lateral de la porció cilíndrica de la imatge està delimitada per un cilindre donat per l'expressió $x^2 + y^2 = a^2$ i dos plans, $z = 0$ i $z = a - y$, amb $z > 0$:



1. Expressa la parametrització de la superfície, inclosos els intèrvals entre els quals es mou cada paràmetre. *(0.5p)*

2. Troba l'expressió del vector superfície i del seu mòdul. *(0.5p)*

3. Calcula l'àrea de la superfície donada. *(1p)*

Resposta:

1. Expressa la parametrització de la superfície en superfícies polars, inclosos els intèrvals entre els quals es mou cada paràmetre.

   La parametrització de la superfície $\mathbf{X}$ d'un cilindre $x^2 + y^2 = a^2$ en coordenades polars ve donada per

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\theta \\ y &= a\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}\right\} \to \mathbf{X}(\theta, z) = (a\cos\theta, a\sin\theta, z)$$

   amb $(\theta, z) \in D$, essent

$$D = \left\{(\theta, z) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq a - a\sin\theta\right\}$$

2. Troba l'expressió del vector superfície.

   El vector de superfície vindrà donat per

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z} \overset{*}{=} \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -a\sin\theta & a\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a\cos\theta, a\sin\theta, 0)$$

   (*) On hem trobat les derivades parcials fent:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta} &= (-a\sin\theta, a\cos\theta, 0) \\ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z} &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

   És fàcil també veure que

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z} \right\| = a$$

3. Calcula l'àrea de la superfície donada.

   Ara només cal fer el càlcul

$$A(S) = \int\int_S \|\mathbf{dS}\| = \int\int_S \|\mathbf{dl}_\theta \times \mathbf{dl_z}\| = \int\int_S \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z} \right\| \mathrm{d}z \ \mathrm{d}\theta$$

Substituint tota la informació trobada a l'expressió de l'àrea obtenim:

$$\begin{aligned} A(S) &= \int\int_{[0,2\pi]\times[0,a-a\sin\theta]} \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z} \right\| \mathrm{d}z \ \mathrm{d}\theta = a \int_0^{2\pi} \int_0^{a-a\sin\theta} \mathrm{d}z \ \mathrm{d}\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \sin\theta) \ \mathrm{d}\theta \\ &= a^2 \left[\theta + \cos\theta\right]_0^{2\pi} \end{aligned}$$

Finalment,

$$\boxed{A(S) = 2a^2\pi}$$

NOTA: El resultat també es podria haver trobat considerant la superfície del cilindre sencer, entre els plans $z = 0$ i $z = 2a$ i dividint-la per dos. Comprova-ho!

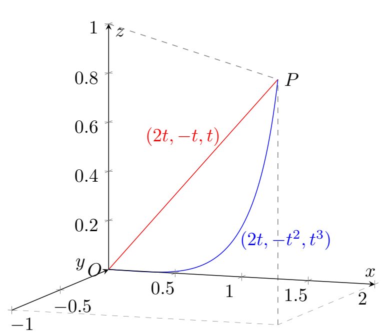
■

3. (3 Punts) Donat el camp vectorial $\mathbf{A} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2yz\hat{\mathbf{j}} + y^2\hat{\mathbf{k}}$:

1. Calcula la seva integral de línea al llarg de la recta que uneix els punts $O(0,0,0)$ i $P(2,-1,1)$. *(1p)*
2. Calcula la seva integral de línea entre els mateixos punts al llarg de la corba definida paramètricament per $(2t, -t^2, t^3)$ *(1p)*
3. Comprova si es tracta d'un camp conservatiu i, en cas afirmatiu, troba el camp escalar del qual deriva $\mathbf{A}$. *(1p)*

Resposta:

Dibuixem primer els camins que descriu l'enunciat



1. Calcula la seva integral de línea al llarg de la recta que uneix els punts $O(0,0,0)$ i $P(2,-1,1)$

   Per a qualsevol corba parametritzada C, podem calcular la integral de línea fent:

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{dr} = \int_C \mathbf{A}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) \text{ d}t$$

   En el cas de la recta que uneix els dos punts, la podem representar paramètricament com

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   És a dir:

$$\sigma(t) = (2t, -t, t)$$

   i

$$\sigma'(t) = (2, -1, 1)$$

   amb $t \in [0,1]$. A més,

$$\mathbf{A}(\sigma(t)) = (3, -2t^2, t^2)$$

   Per tant:

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{dr} = \int_0^1 (3, -2t^2, t^2) \cdot (2, -1, 1) \text{ d}t = \int_0^1 (6 + 3t^2) \text{ d}t = [6t + t^3]_0^1 = \boxed{7}$$

2. Calcula la seva integral de línea entre els mateixos punts al llarg de la corba definida paramètricament per $(2t, -t^2, t^3)$

   En aquest cas, $\sigma(t) = (2t, -t^2, t^3)$ i, per tant:

$$\sigma'(t) = (2, -2t, 3t^2)$$

   i

$$\mathbf{A}(\sigma(\mathbf{t})) = (3, -2t^5, t^4)$$

   Per tant:

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{dr} = \int_0^1 (3, -2t^5, t^4) \cdot (2, -2t, 3t^2) \text{ d}t = \int_0^1 (6 + 7t^6) \text{ d}t = [6t + t^7]_0^1 = \boxed{7}$$

3. Comprova si es tracta d'un camp conservatiu i, en cas afirmatiu, troba el camp escalar del qual deriva $\mathbf{A}$

Hem de comprovar si el vector rotacional és zero a cada punt del camp:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

En el nostre cas:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3 & 2yz & y^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}y^2 - \frac{\partial}{\partial z}2yz\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial}{\partial z}3 - \frac{\partial}{\partial x}y^2\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial}{\partial x}2yz - \frac{\partial}{\partial y}3\right)\hat{k} = \mathbf{0}$$

Per tant, el camp és conservatiu. Òbviament, saber que el camp és conservatiu ens obre les portes a solucionar-lo d'una altra manera. Així, com que el rotacional és zero (camp conservatiu) podem trobar la funció potencial $\Phi(x, y, z)$ que compleix:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi = \mathbf{A}$$

D'aquí:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = A_x = 3 \Rightarrow \Phi(x, y, z) = \int A_x \ \mathrm{d}x = 3x + f(y, z)$$

on $f(y, z)$ és una funció que no depèn de x i que, per tant, actua com una constant respecte a la integració. Per trobar aquesta funció estudiem la component y del gradient:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = A_y = 2yz \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 2yz \Rightarrow f(y, z) = \int 2yz \ \mathrm{d}y = y^2 z + g(z)$$

Finalment, per trobar $g(z)$ usem la tercera component del gradient:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = A_z = y^2 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \Rightarrow g(z) = C$$

amb la qual cosa obtenim l'expressió del potencial

$$\Phi(x, y, z) = 3x + y^2 z + C$$

Avaluant la diferència de potencial entre els punts inicial i final de les corbes, obtenim:

$$\Delta\Phi(x, y, z) = \Phi(2, -1, 1) - \Phi(0, 0, 0) = \boxed{7}$$

com esperàvem pel fet que $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

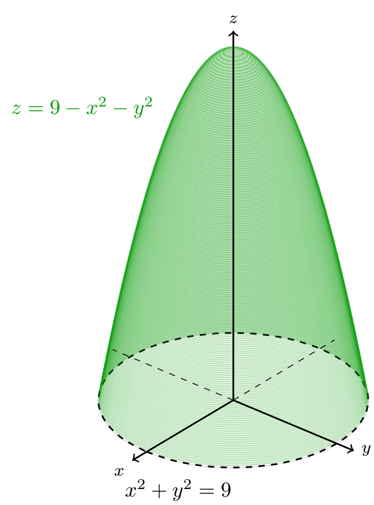
■

4. (3 Punts) Donada la superfície del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ sobre el plànol xy i el camp vectorial $F(x, y, z) = 3y\hat{\mathbf{i}} + 4z\hat{\mathbf{j}} - 6x\hat{\mathbf{k}}$,

1. Dibuixa l'objecte i parametritza la corba que el delimita. *(1p)*
2. Verifica que el teorema d'Stokes es compleix. *(2p)*

Resposta:

1. Dibuixa l'objecte i parametritza la corba que el delimita.



El paraboloide està delimitat per la corba $x^2 + y^2 = 9$, dibuxada a la base de figura. Aquesta corba es pot parametritzar en coordenades polars fent:

$$\sigma(t) = (3\cos(\theta), 3\sin(\theta), 0)$$

amb $t \in [0, 2\pi]$.

2. Verifica que el teorema d'Stokes es compleix.

El teorema d'Stokes estableix que el flux del rotacional en una superfície és igual a la circulació del camp que el genera al voltant de la corba que delimita la superfícia. És a dir:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_S \mathbf{rotF} \cdot \mathbf{dS}$$

Mirem de solucionar cada terme de la igualtat per separat:

(a) Calculem la circulació al llarg de la corba que delimita la superfície.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \int_C \mathbf{F}(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\ \mathrm{d}t$$

Sabent que

$$\sigma(\theta) = (3\cos\theta, 3\sin\theta, 0)$$

obtenim

$$\sigma'(\theta) = (-3\sin\theta, 3\cos\theta, 0)$$

$$\mathbf{F}(\sigma(t)) = (9\sin\theta, 0, -18\cos\theta)$$

amb $\theta \in [0, 2\pi]$.

D'aquí:

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}(\sigma(\theta))\cdot\sigma'(\theta)\ \mathrm{d}\theta &= (9\sin(\theta), 0, -18\cos(\theta))\cdot(-3\sin\theta, 3\cos\theta, 0)\ \mathrm{d}\theta = \\ &= -27\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta = -27\int_0^{2\pi}\left[\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right]\mathrm{d}\theta = -27\pi\end{aligned}$$

(b) Seguidament avaluem el flux del rotacional. Comencem per parametritzar la superfície del paraboloide:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= 9-r^2\end{aligned}\right\} \to \mathbf{X}(\theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 9-r^2)$$

Ara calculem l'element de superfície:

$$\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial r}\times\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\theta} \stackrel{*}{=} \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & -2r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0\end{vmatrix} = (2r^2\cos\theta, 2r^2\sin\theta, r)$$

(*) On hem trobat les derivades parcials fent:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial r} &= (\cos\theta, \sin\theta, -2r) \\ \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\theta} &= (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)\end{aligned}$$

A continuació avaluem el rotacional:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \right) \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

En el nostre cas:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & 4z & -6x \end{vmatrix} = -4\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

NOTA: el rotacional trobat no depèn de la posició. Si en depengués, les hauríem de substituir també les coordinades cartesianes per la parametrització utilitzada.

Finalment calculem el terme de la dreta del teorema d'Stokes:

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{rotF} \cdot \mathbf{dS} &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} (-4, 6, -3) \cdot (2r^2 \cos\theta, 2r^2 \sin\theta, r)\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}r \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} (-8r^2 \cos\theta + 12r^2 \sin\theta - 3r)\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}r \\ &= -6\pi \int_0^3 r\ \mathrm{d}r = -6\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^3 = -27\pi \end{aligned}$$

■