FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC·UCC

Enginyeria Mecatrònica

Examen Parcial Matemàtiques I GEMEC-09UV
RESPOSTES

3 de Novembre de 2023

1. (2 Punts) Siguin $w = 2e^{j4\pi/3}$ i $z = \sqrt{3} + j$. Efectueu les següents operacions i expresseu el resultat en la forma demanada entre parèntesi.
IMPORTANT: escolliu apartats per valor de 2 punts.

1. $z + w$ (resultat en forma exponencial) *(0.5p)*
2. z/w (resultat en forma binòmica) *(0.5p)*
3. $\overline{z}w + \overline{w}z$ (resultat en forma exponencial) *(0.5p)*
4. w^2 (resultat en forma exponencial) *(0.5p)*
5. $\ln z$ (resultat en forma exponencial) *(0.5p)*
6. $\sin w$ (resultat en forma exponencial) *(0.5p)*

Resposta:

Abans que res és convenient trobar la forma binòmica i exponencial de tots dos nombres complexos:

	z	w
exponencial	$r = \sqrt{3+1} = 2$ $\theta = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ $z = 2e^{j\frac{\pi}{6}}$	$w = 2e^{j4\pi/3}$
binòmica	$z = \sqrt{3} + j$	$w = 2\cos(4\pi/3) + 2j\sin(4\pi/3)$ $= -1 - j\sqrt{3}$

on hem usat els valors de sinus i cosinus dels angles que apareixen a la Figura 1.

1. $z + w$ (resultat en forma exponencial)

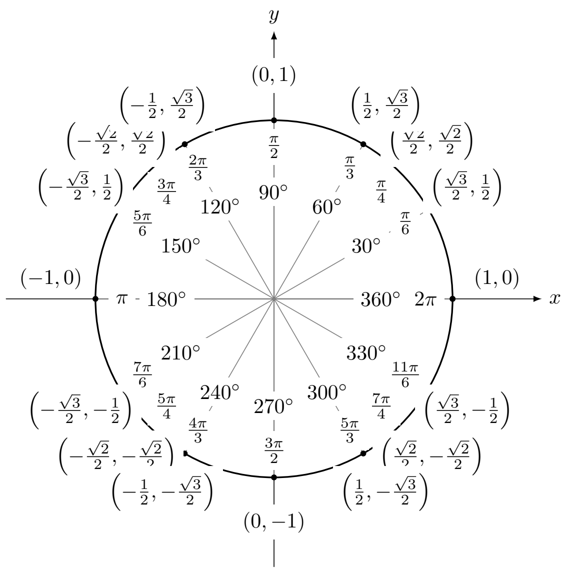

Figura 1: Esquema dels valors de $\sin x$ i $\cos x$ per a alguns valors d'angles

$$z + w = (\sqrt{3} + j) + (-1 - j\sqrt{3}) = (\sqrt{3} - 1) + j(1 - \sqrt{3})$$

i ara passem el resultat a forma exponencial tenint que

$$r = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 + (1 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{3 + 1 - 2\sqrt{3} + 1 + 3 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

i

$$\theta = \arctan\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}\right) = \arctan(-1) \overset{[*]}{=} \frac{7\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

on a [∗] hem tingut en compte que el resultat de la suma dels dos vectors serà al quart quadrant.

$$z + w = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

2. z/w (resultat en forma binòmica)

$$\frac{z}{w} = \frac{\sqrt{3} + j}{-1 - j\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} + j)(-1 + j\sqrt{3})}{(-1 - j\sqrt{3})(-1 + j\sqrt{3})} = \frac{-2\sqrt{3} + 2j}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j$$

3. $\overline{z}w + \overline{w}z$ (resultat en forma exponencial)

$$
\begin{aligned}
\overline{z}w + \overline{w}z &= (\sqrt{3} - j)(-1 - j\sqrt{3}) + (-1 + j\sqrt{3})(\sqrt{3} + j) \\
&= (-2\sqrt{3} - 2j) + (-2\sqrt{3} + 2j) = -4\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

En forma exponencial:

$$\overline{z}w + \overline{w}z = -4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}e^{j\pi}$$

4. w^2 (resultat en forma exponencial)

$$(w)^2 = (2e^{j4\pi/3})^2 = 4e^{j8\pi/3} = 4e^{j2\pi/3}$$

5. $\ln z$ (resultat en forma exponencial)

$$\ln z = \ln 2e^{j\frac{\pi}{6}} = \ln 2 + j(\frac{\pi}{6} + k2\pi)$$

i en forma exponencial, només ens caldria trobar, altre cop, els valors del mòdul i de l'angle, ara per al resultat (queda ben lleig, admès):

$$r = \sqrt{(\ln 2)^2 + \left(\frac{\pi}{6}\right)^2}; \qquad \theta = \arctan\frac{\pi/6}{\ln 2}$$

$$\ln z = \sqrt{(\ln 2)^2 + \left(\frac{\pi}{6}\right)^2}e^{j\arctan\frac{\pi/6}{\ln 2}}$$

6. $\sin w$ (resultat en forma exponencial)

$$\sin w = \frac{e^{jw} - e^{-jw}}{2j} = \frac{e^{jw} - e^{-jw}}{2j} = \frac{e^{j(-1-j\sqrt{3})} - e^{-j(-1-j\sqrt{3})}}{2j} = \frac{e^{\sqrt{3}-j} - e^{-\sqrt{3}+j}}{2j}$$

I poca cosa podem fer més sense embolicar-nos massa.

2. (1 Punts) Donada l'expressió matricial:

$$AXA^T = \sqrt{5}A$$

1. Doneu l'expressió de X. *(0.5p)*

2. Resoleu l'expressió matricial si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *(0.5p)*

Resposta:

1. Doneu l'expressió de X.

$$\begin{aligned} AXA^T &= \sqrt{5}A \\ A^{-1}AXA^T(A^T)^{-1} &= \sqrt{5}A^{-1}A(A^T)^{-1} \\ X &= \sqrt{5}(A^T)^{-1} \end{aligned}$$

2. Resoleu l'expressió matricial si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{5}(A^T)^{-1} = \sqrt{5}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T\right]^{-1} \\ &= \sqrt{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\sqrt{5}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T \\ &= \sqrt{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. (1 Punts) Dona els valors reals del paràmetre a que fan invertible la matriu A:

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & 1 \\ -a & 0 & a & a \\ a & -a & a & 0 \\ a & -a & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Resposta:

Per solucionar el problema només ens cal saber per a quins valors d'a el determinant de la matriu és zero. Podem trobar aquest determinant de diverses maneres, però per fer-ho simple aquí usarem una eliminació de Gauss-Jordan, tot recordant que fer combinacions lineals de files i columnes no modifica el valor del determinant (només canviar-ne l'ordre, que faria que el determinant canvies de signe):

$$\begin{vmatrix} a & a & a & 1 \\ -a & 0 & a & a \\ a & -a & a & 0 \\ a & -a & 2 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} a & a & a & 1 \\ 0 & a & 2a & a+1 \\ 0 & -2a & 0 & -1 \\ 0 & -2a & -a+2 & -1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} a & a & a & 1 \\ 0 & a & 2a & a+1 \\ 0 & 0 & 4a & 2a+1 \\ 0 & 0 & 3a+2 & 2a+1 \end{vmatrix}$$
$$\sim \begin{vmatrix} a & a & a & 1 \\ 0 & a & 2a & a+1 \\ 0 & 0 & 4a & 2a+1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2a^2-3a-2}{4a} \end{vmatrix} = 2a^4 - 3a^3 - 2a^2 = a^2(2a^2 - 3a - 2) = 0$$

L'expressió serà zero a $a = 0$ i

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

Per tant, la matriu serà invertible quan $a \neq \{-\frac{1}{2}, 0, 2\}$.

4. (2 Punts) Donat el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + 3y - az = 4 \\ -ax + y + az = 0 \\ -x + 2ay = a + 2 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

1. Discuteix les seves possibles solucions en funció del paràmetre a. *(1p)*
2. Troba'n les solucions en els casos que sigui compatible. *(1p)*

Resposta:

1. Discuteix les seves possibles solucions en funció del paràmetre a.

   Caldrà analitzar el rang de la matriu de coeficients i el rang de la matriu ampliada. Comencem per analitzar la matriu de coeficients:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -a & 4 \\ -a & 1 & a & 0 \\ -1 & 2a & 0 & a+2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -a & 4 \\ 0 & 3a+1 & -a^2+a & 4a \\ 0 & 2a+3 & -a & a+6 \\ 0 & -7 & 2a-2 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -a & 4 \\ 0 & -7 & 2a-2 & -8 \\ 0 & 2a+3 & -a & a+6 \\ 0 & 3a+1 & -a^2+a & 4a \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -a & 4 \\ 0 & -7 & 2a-2 & -8 \\ 0 & 0 & \frac{4a^2-5a-6}{7} & \frac{-9a+18}{7} \\ 0 & 0 & \frac{-a^2+3a-2}{7} & \frac{4a-8}{7} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -a & 4 \\ 0 & -7 & 2a-2 & -8 \\ 0 & 0 & 4a^2-5a-6 & -9a+18 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a^2+a-6}{4a+3} \end{pmatrix}$$

   A partir d'aquest resultat se'n pot extreure:

   (a) Si $a^2+a-6=0$, és a dir, si $a=-3$ o $a=2$, la darrera fila es fa zero.

   (b) Si $4a^2-5a-6=0$, és a dir, si $a=2$ o $a=-\frac{3}{4}$, el coeficient $ab_{3,3}$ de la matriu $A|B$ es fa zero.

   (c) El valor $a=-\frac{3}{4}$ donaria una operació impossible per al coeficient $ab_{4,4}$ de la matriu $A|B$.

   (d) Si $-9a+18=0$, és a dir, si si $a=2$, el coeficient $ab_{3,4}$ de la matriu $A|B$ es fa zero.

   Per tant,

   (a) Si $a=2$, el sistema és compatible indeterminat, amb un grau de llibertat, ja que $rang(A)=rang(A|B)=2$ i hi ha 3 incògnites.

   (b) Si $a=-3$, el sistema és compatible determinat, $rang(A)=rang(A|B)=3$.

   (c) En qualsevol altra situació, el sistema és incompatible, ja que la quarta fila de la matriu obtinguda després de la reducció per Gauss donaria un resultat impossible.

2. Troba'n les solucions en els casos que sigui compatible.

   cas $a=2$

$$\begin{cases} x+3y-2z=4 \\ \quad -7y+2z=-8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8\alpha+4}{7} \\ \frac{2\alpha+8}{7} \\ \alpha \end{pmatrix}$$

cas $a = -3$

$$\begin{cases} x + 3y + \;\; 3z = 4 \\ \quad - 7y - \;\; 8z = -8 \\ \qquad\qquad 45z = 45 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. (1 Punts) Considirem les bases de $\mathbb{R}^3$,

$$B = \{(1,0,2),(0,1,3),(1,1,1)\}$$
$$B' = \{(2,1,1),(1,0,0),(0,2,1)\}$$

1. Doneu les matrius $P_{B'}^{B}$, del canvi de la base B a la base B' i la matriu $P_{B}^{B'}$, del canvi de la base B' a la base B. *(0.5p)*
2. Trobeu les coordenades del vector $v \in \mathbb{R}^3$ de la base B, sabent que $v_{B'} = (1,2,-1)$. *(0.5p)*

NOTA: podeu deixar indicades les operacions matricials.

Resposta:

1. Doneu les matrius $P_{B'}^{B}$, del canvi de la base B a la base B' i la matriu $P_{B}^{B'}$, del canvi de la base B' a la base B.

   Considerem un vector $\mathbf{v}$ donat en les dues bases B i B' per $\mathbf{v} = (x,y,z)_B = (x',y',z')_{B'}$. Com que es tracta del mateix vector donat en dues bases diferents, hem de notar que les seves coordenades en aquestes bases descriuen la combinació lineal dels vectors de les dites bases que representen $\mathbf{v}$. És a dir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'}$$

   Notar que els vectors de les dues bases de l'exercici ens venen donats en funció de la base canònica. Per tant,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{P_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -7 & -10 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

i

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_{B}^{B'} = \left(P_{B'}^{B}\right)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ -2 & -2 & 3 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

2. Trobeu les coordenades del vector $v \in \mathbb{R}^3$ de la base B, sabent que $v_{B'} = (1, 2, -1)$.

   Usant la matriu $P_{B}^{B'}$ trobada més amunt,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ -2 & -2 & 3 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

6. (1 Punts) Doneu la dimensió i una base del subespai vectorial: *(1p)*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - y + z = 0, x - 2y = 0\}.$$

Resposta:

Es tracta de solucionar el sistema d'equacions donades, per tal de veure quina forma paramètrica tenen els vectors que constitueixen el subespai vectorial:

$$\begin{cases} x - \ \ y + z = 0 \\ x - 2y \qquad = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \qquad y + z = 0 \\ x - 2y \qquad = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = -2\alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, la base està formada per un sol vector i, per tant, el supespai és de dimensió 1. Es tracta d'una recta a l'espai $\mathbb{R}^3$.

7. (2 Punts) Sigui A una matriu 3×3 definida per:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -3/2 \\ 1 & 3/2 & 3/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Diagonalitza A i troba la matriu invertible que ens permet fer-ho.

Resposta:

Comencem per trobar el polinomi característic de la matriu $det(A - \lambda I) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & -1/2 & -3/2 \\ 1 & 3/2 - \lambda & 3/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

Per Ruffini,

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & -1 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

d'on

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

Per tant, els valors propis són $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$. De cadascun podem obtenir els vectors propis associats:

$\lambda_1 = 1$ Hem de solucionar

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1$$

Per tant, es tracta de solucionar el sistema homogeni:

$$\begin{cases} -x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z = 0 \\ x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z = 0 \\ -x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x \quad + z = 0 \\ \quad y + z = 0 \end{cases}$$

d'aquí, extraiem que els vectors propis associats al primer valor propi són: $\mathbf{v}_1 = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -1$ Hem de solucionar

$$A\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2$$

Per tant, es tracta de solucionar el sistema homogeni:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z = 0 \\ x + \frac{5}{2}y + \frac{3}{2}z = 0 \\ -x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x \quad - z = 0 \\ \quad y + z = 0 \end{cases}$$

d'aquí, extraiem que els vectors propis associats al primer valor propi són: $\mathbf{v}_1 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 2$ Hem de solucionar

$$A\mathbf{v}_3 = \lambda_3 \mathbf{v}_3$$

Per tant, es tracta de solucionar el sistema homogeni:

$$\begin{cases} -2x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z = 0 \\ x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z = 0 \\ -x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x \quad + z = 0 \\ \quad y - z = 0 \end{cases}$$

d'aquí, extraiem que els vectors propis associats al primer valor propi són: $\mathbf{v}_1 = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Per tant, la matriu P que busquem és la formada pels vectors propis associats als valors propis, en el mateix ordre en que els hem determinat (millor encara si els expresséssim ordenats segons el valor del valor propi, però el resultat del producte seria idèntic):

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -3/2 \\ 1 & 3/2 & 3/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$