FACULTAT
DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA
I ENGINYERIES
UVIC | UVIC·UCC

Enginyeria Mecatrònica

Examen Parcial
Matemàtiques I GEMEC-09UV
RESPOSTES

2 de Desembre de 2022

1. (4 Punts) Calcula les següents integrals:

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2-4}$ *(1p)*
2. $\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\ \mathrm{d}x$ *(1p)*
3. $\int \frac{x^2+x+6}{x^2-4}\ \mathrm{d}x$ *(1p)*
4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$ *(1p)*

Resposta:

1. Es tracta d'una integral immediata tabulada:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2-4} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + C$$

2. Integral impròpia de 1^a espècie, ja que està definida per a tot l'intèrval d'integració.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\ \mathrm{d}x &= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} x5^{-x^2}\ \mathrm{d}x \overset{(1,2)}{=} \lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}\int_{-a^2}^{0} 5^u\ \mathrm{d}u\right] \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{5^u}{\ln 5}\right]_{-a^2}^{0} = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{5^0}{\ln 5}-\frac{5^{-a^2}}{\ln 5}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{\ln 5}-\frac{1}{5^{a^2}\ln 5}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln 5}-0\right) = -\frac{1}{2\ln 5}
\end{aligned}$$

(1) fem el canvi $u=-x^2$, d'on $du=-2xdx$;

(2) observem que el canvi modifica també els límits d'integració. Així,

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0 \\ x=a \Rightarrow u=-a^2 \end{cases}$$

3. Es tracta d'una integral racional. Observem que el grau de dalt és igual que el d'abaix. Per tant, primer dividim els dos polinomis. Això és pot fer també així:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+x+6}{x^2-4}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2-4+4+x+6}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \int \left[1+\frac{x+10}{x^2-4}\right]\mathrm{d}x \\
&\overset{(1)}{=} \int \left[1+\frac{-2}{x+2}+\frac{3}{x-2}\right]\mathrm{d}x \\
&= x-2\ln|x+2|+3\ln|x-2|+C = x+\ln\left|\frac{(x-2)^3}{(x+2)^2}\right|+C
\end{aligned}$$

(1) Descomposem la fracció segons:

$$\frac{x+10}{x^2-4} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2} \overset{(2)}{=} \frac{-2}{x+2}+\frac{3}{x-2}$$

(2) On:

$$A(x-2)+B(x+2) = x+10$$

i

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A + 2B = 10 \end{cases}$$

Solucionant el sistema trobem que $A=-2$ i $B=3$.

4. Es tracta d'una integral racional amb variables trigonomètriques $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$. En aquests casos, cal usar el canvi de variable $t=\tan\frac{x}{2}$ i:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

Així,

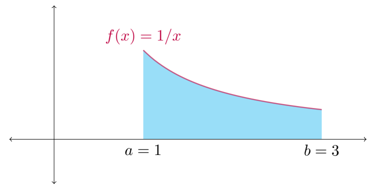
$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x} &= \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+2t+1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{2t+2} \\
&= \ln|t+1|+C = \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C
\end{aligned}$$

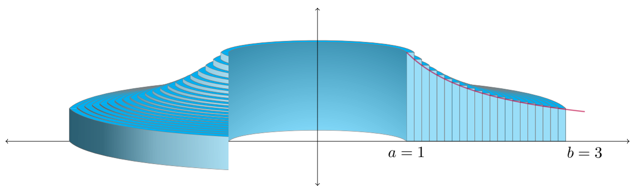
■

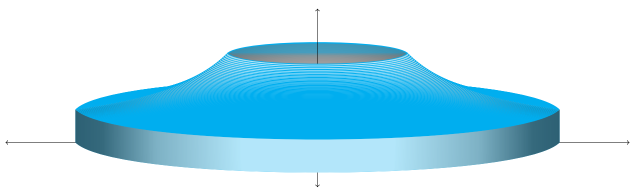
2. (2 Punts) Donada la funció $f(x)=\frac{1}{x}$, troba el volum de revolució que genera al voltant de l'eix de les ordenades la regió que es troba entre aquesta corba i l'eix de les abcisses en l'intèrval $x=[1,3]$ *(2p)*

Resposta:

Dibuixem primer el problema:







El volum de revolució de qualsevol corba al voltant de l'eix de les ordenades es pot calcular fent $V = 2\pi \int_a^b x f(x)\ \mathrm{d}x$. Per tant:

$$V \quad = \quad 2\pi \int_1^3 x \cdot \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = 2\pi\,[x]_1^3 = \boxed{4\pi}$$

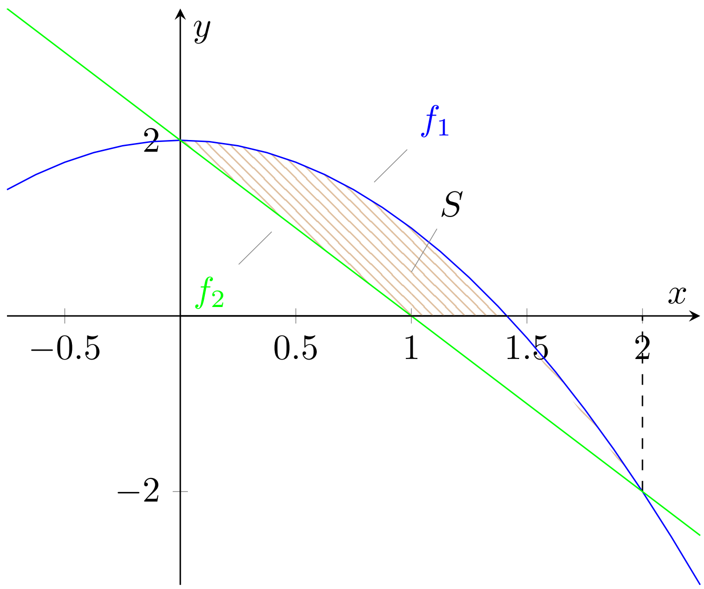
■ **3. (2 Punts)** Sigui S la regió delimitada per les corbes $f_1(x) = 2 - x^2$, $f_2(x) = 2 - 2x$ i l'eix de les abcisses en el primer quadrant del pla XY.

1. Representa gràficament la regió S *(0.5p)*
2. Troba l'àrea d'aquesta superfície. *(0.5p)*
3. Calculeu $\int\int_S xy\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$. *(1p)*

Resposta:

1. Representa gràficament la regió S

   La Figura mostra les diferents corbes i la superfície S que delimiten.



   Podem observar com la regió es divideix en dues subregions, les que incloeun l'àrea ombrejada en els intèrvals $[0,1] \cup [1,\sqrt{2}]$, i usarem aquesta informació per als següents apartats. ■

2. Troba l'àrea d'aquesta superfície.

   Per trobar l'àrea usem com a límits d'integració els tres punts de tall entre les dues corbes i l'eix OX:

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 [f_1(x) - f_2(x)]\,\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{2}} f_1(x)\,\mathrm{d}x && (1)\\
&= \int_0^1 \Big[(2-x^2)-(2-2x)\Big]\,\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{2}} (2-x^2)\,\mathrm{d}x && (2)\\
&= \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} = \left[1-\frac{1}{3}\right] + \left[\left(2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \left(2-\frac{1}{3}\right)\right] && (3)\\
&= \boxed{\frac{4\sqrt{2}}{3} - 1} && (4)
\end{aligned}
$$

■

3. Calculeu $\int\int_S xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

Novament dividirem el problema en les dues regions:

$$
\begin{aligned}
\int\int_S xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_0^1 x\left[\int_{2-2x}^{2-x^2} y \, \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{2}} x\left[\int_0^{2-x^2} y \, \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{2-2x}^{2-x^2} \mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{2}} x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{2-x^2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 x\left[(2-x^2)^2-(2-2x)^2\right] \mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{2}} x(2-x^2)^2 \, \mathrm{d}x\right] \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\left[-\int_0^1 x(2-2x)^2 \, \mathrm{d}x + \int_0^{\sqrt{2}} x(2-x^2)^2 \, \mathrm{d}x\right] \\
&\overset{(**)}{=} \frac{1}{2}\left[-\int_0^1 (-4x^3+8x^2-4x) \, \mathrm{d}x - \int_2^0 \frac{1}{2}t^2 \, \mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{4x^4}{4}+\frac{8x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{2}\frac{t^3}{3}\right]_2^0\right\} \\
&= \boxed{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

($*$) hem usat que, $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x$, per a tot $c \in (a,b)$

($**$) En el segon terme hem usat el canvi de variable $t = 2 - x^2$ i hem modificat els límits d'integració d'acord amb aquest canvi.

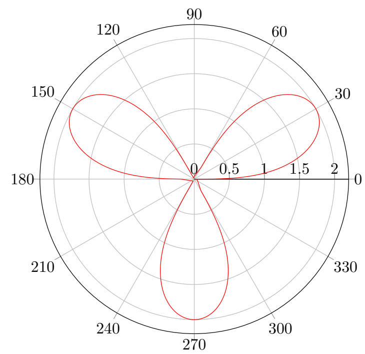
■

4. (2 Punts) Una funció ve donada, en coordenades polars, per l'expressió $r = 2\sin(3\theta)$.

1. Dibuixa la funció. *(1p)*
2. Troba l'àrea de la regió delimitada per la funció. *(1p)*

Resposta:

1. Dibuixa la funció.



■

2. Troba l'àrea de la regió delimitada per la funció.

Per trobar la superfície d'una regió donada R només cal sumar els diferencials de superfície, $dA = \, dx\, dy$. En aquest cas, però, és més convenient fer l'operació en polars: $A = \frac{1}{2}\int_a^b r(\theta)^2\, d\theta$. Substituint:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (2\sin(3\theta))^2 \;\, \mathrm{d}\theta \overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi} (1-\cos(6\theta)) \;\mathrm{d}\theta \\ &= \left[\theta - \frac{\sin(6\theta)}{6}\right]_0^{2\pi} = \left(2\pi - \frac{\sin(12\pi)}{6}\right) - \left(0 - \frac{\sin 0}{6}\right) = \boxed{2\pi} \end{aligned}$$

On:

$(*)$ hem usat que $\sin^2 x = \frac{1}{2}\,(1-\cos(2x))$

■