Exercicis Resolts

MATEMÀTIQUES I

Grau en Enginyeria Mecatrònica *

FACULTAT
DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA
I ENGINYERIES
UVIC | UVIC·UCC

Jordi Villà i Freixa

Darrera modificació: 31 d'agost de 2023

Índex

*Adreça electrònica: jordi.villa@uvic.cat

Aquest és un llistat d'exercicis recollits de diverses fonts. Si hi detecteu algun error feu-me'l arribar i corregiré el document.

1 Càlcul Integral

1.1 Integral indefinida

Ex. 1 — **Substitució** $\int \frac{x}{\sqrt[5]{x^2+2}} dx$ (pista: usa la substició $t = x^2 + 2$)

Answer (Ex. 1) — Ens hem d'adonar que el numerador és proper a la derivada de l'argument de l'arrel del denominador. Això ens mostra que la funció primitiva tindrà l'aspecte d'una arrel, justament. Per mostrar-ho, la substitució a realitzar pot ser

$$t = x^2 + 2;\ dt = 2xdx;\ xdx = \frac{dt}{2}$$

Quedant:

$$\int \frac{x}{\sqrt[5]{x^2+2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt[5]{t}} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{-5} dt = \frac{1}{2} \frac{t^{-4}}{(-4)} = -\frac{1}{8t^4}$$

Ex. 2 — **Substitució** $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}} dx$ (pista: usa dues substitucions consecutives)

Answer (Ex. 2) — Ens hem d'adonar que tenim una arrel de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$. En aquests casos podem mirar de transformar l'arrel en quelcom del tipus $\sqrt{1 - \sin^2 x}$. Per tant, comencem plantejant el canvi

$$x = 2\cos t;\ dx = -2\sin t dt$$

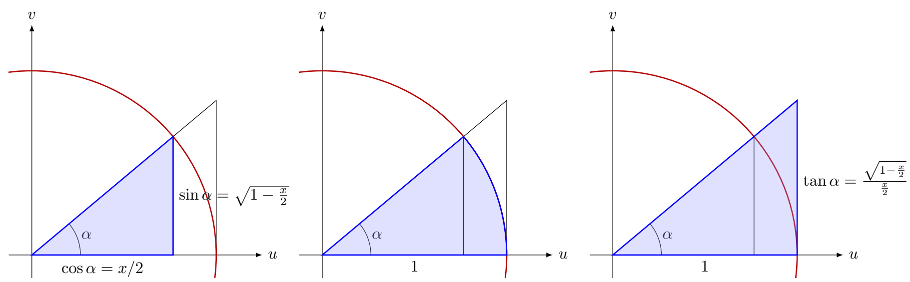
I per tant:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}} dx &= \int \frac{-2\sin t}{4\cos^2 t\sqrt{4 - 4\cos^2 t}} dt = \int \frac{-2\sin t}{8\cos^2 t\sqrt{1-\cos^2 t}} dt \\ &= \int \frac{-2\sin t}{8\cos^2 t\sqrt{\sin^2 t}} dt = -\frac{1}{4} \int \frac{dt}{\cos^2 t} dt = -\frac{1}{4} \tan t \end{aligned}$$

Ara podem desfer el canvi de variable fent $x = 2\cos t \Rightarrow t = \arccos \frac{x}{2}$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}} dx = -\frac{1}{4} \tan \arccos \frac{x}{2}$$

Ho podem deixar així o podem pensar en que si $\alpha = \arccos\frac{x}{2}$, segons el dibuix $\tan\arccos\frac{x}{2} = \tan\alpha = \frac{\sqrt{1-\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}$.



Per tant, per a $x = 2\cos t$:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx = -\frac{1}{4}\tan t = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{1-\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}$$

Ex. 3 — $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$**, amb denominador sense arrels reals (arctangent)**$\int \frac{3}{x^2+2x+4}dx$

Answer (Ex. 3) — En no haver zeros reals del polinoni del denominador ens cal usar l'estratègia de completar quadrats. Aquesta tècnica ens permet acostar l'expressió de la integral a la que tindria una primitiva arctangent. En general,

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left((x+r)^2+s^2\right)$$

on es pot veure fàcilment que $r = \frac{b}{2a}$ i $s = \sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}$.En aquest cas, $r = 1$ i $s = \sqrt{3}$. Per tant:

$$\int \frac{3}{x^2+2x+4}dx = 3\int \frac{1}{(x+1)^2+(\sqrt{3})^2}dx \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$$

$(*)$Immediata, ja que $\int \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{1}{s}\arctan\frac{x+r}{s} + C$:

■

Ex. 4 — $\int \sin^m x \cos^n x dx$ **amb** $m, n \in Z^+$ **i** m **o** n **senar**$\int \sin^5 x dx$

Answer (Ex. 4) — Usarem que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ i l'expressió quedarà:

$$I = \int \sin^5 x dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \sin x dx$$

Veiem que, d'aquesta manera, ens queda una expressió que barreja sinus i cosinus, i sabem que un és la derivada de l'altre. Per tant, una bona substició és $t = \cos x;\ dt = -\sin x dx$

$$I = \int \sin^5 x dx = -\int \left(1 - t^2\right)^2 dt = -\frac{t^5}{5} + 2\frac{t^3}{3} - t + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + 2\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$$

Ex. 5 — $\int \sin^m x \cos^n x dx$ **amb** $m, n \in Z^+$ **i** m, n **parells**Avalúa la integral $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Answer (Ex. 5) — Considerem el canvi de variable

$$x = \sin u;\ dx = \cos u du$$

. Per tant:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 u}} \cos u du = \int \frac{1}{\sqrt{\cos^2 u}} \cos u du = \int du = u + C$$

si desfem la substitució:

$$I = \arcsin x + C$$

Ex. 6 — **Racional trigonomètrica** $\int R(sinx, cosx)dx$Avalúa la integral $I = \int \frac{2}{1 + 3\cos x} dx$

(Pista: si $t = \tan \theta/2$, per raons trigonomètriques obtenim:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos\theta &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan\theta &= \frac{2t}{1-t^2} \end{aligned}$$

)

Answer (Ex. 6) — En els casos en que tenim $I = \int \frac{1}{a+b\cos x}dx$ o bé $I = \int \frac{1}{a+b\sin x}dx$ és pràctic usar la substitució $t = \tan x/2$. Aleshores tenim:

$$dt = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1+t^2}{2}dx$$

i, per tant, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2}{1+3\cos x}dx = \int \frac{2}{(1+3\frac{1-t^2}{1+t^2})}\frac{2}{(1+t^2)}dt \\ &= 4\int \frac{1}{1+t^2+3-3t^2}dt = 4\int \frac{1}{4-2t^2}dt = \int \frac{1}{1-\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}dt \end{aligned}$$

i ara fem la substitució $u = \frac{t}{\sqrt{2}}$ i $du = \frac{dt}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{1-\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{1-u^2}du = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctanh} u + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctanh}\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctanh}\frac{\tan x/2}{\sqrt{2}} + C \end{aligned}$$

Ex. 7 — $\int \sin^m x \cos^n x dx$ **amb** $m, n \in Z^+$ **i** m, n **parells**$\int \cos^4 x dx$ (pista: per a funcions sinusoidals d'exponent parell, usa les expressions $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ o bé $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ per reduir l'exponent.)

Answer (Ex. 7) — Usant

$$\cos^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+\cos^2 2x + 2\cos 2x\right)$$

Altre cop:

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x)$$

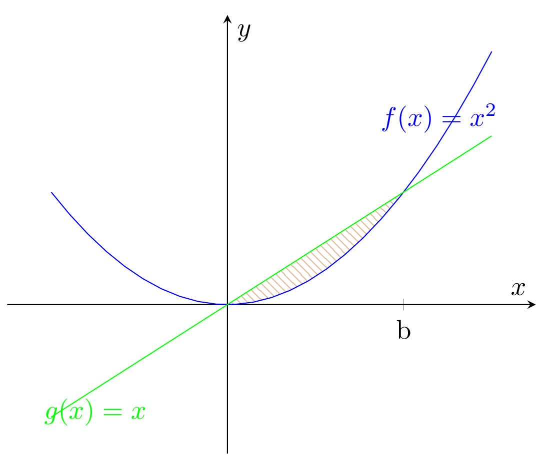
Per tant:

$$\begin{aligned} I &= \int \cos^4 x dx \\ &= \frac{1}{4}\int \left(1+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)+2\cos 2x\right)dx \\ &= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x+2\cos 2x\right)dx \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x+\sin 2x\right)+C \end{aligned}$$

1.2 Integral definida

Ex. 8 — Integral delimitada entre funcions 1. Sigui S la regió delimitada per les corbes $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=x$. Calculeu $\int\int_S (x+1)ydxdy$

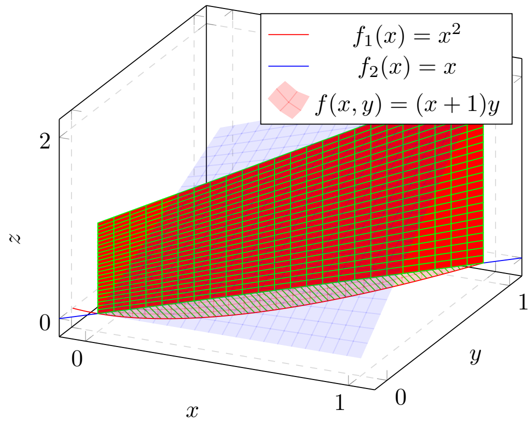
Answer (Ex. 8) — Comencem per dibuixar les dues funcions.



Es tallen en els punts $(0,0)$ i $(1,1)$, ja que

$$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$$

La integració haurà de tenir en compte que la variable x depèn de la y i viceversa, per trobar el volum de l'objecte de la figura:



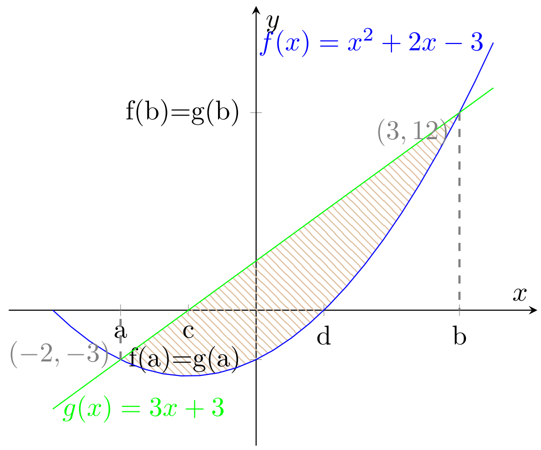
Per tant, una manera de solucionar el problema és:

$$
\begin{aligned}
V = \int\int_S (x+1)ydxdy &= \int_{x=0}^{x=1} \left[\int_{y=x^2}^{y=x} (x+1)ydy \right] dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \left[\frac{(x+1)y^2}{2} \right]_{x^2}^{x} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=1} \left[(x+1)x^2 - (x+1)x^4 \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=1} \left[-x^5 - x^4 + x^3 + x^2 \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \left[-\frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) - (0) \right] = \frac{13}{120}
\end{aligned}
$$

Ex. 9 — **Integral delimitada entre funcions**Sigui R la regió delimitada per les corbes $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $g(x) = 3x + 3$.

- Representeu gràficament la regió R.
- Determineu l'àrea $A(R)$ de la regió R.
- Calculeu $\int\int_R xdxdy$.

Answer (Ex. 9) — • Comencem per dibuixar les dues funcions.



A partir de solucionar

$$x^2 + 2x - 3 = 3x + 3$$

trobem que es tallen en els punts $(-2, -3)$ i $(3, 12)$.

- Per trobar l'àrea podem pensar en dividir el càlcul en tres parts, si ens fan dubtar els signes de les funcions:

$$A(R) = \int_a^c [f(x) - g(x)]dx + \int_c^d [g(x) + f(x)]dx + \int_d^b [g(x) - f(x)]dx$$

o bé, més pràctic, podem sumar un valor superior a 4 a les dues funcions per tal que ens quedin les dues damunt de l'eix de les abscisses.[1] Per tant, l'àrea serà igual a

$$A(R) = \int_a^b [(g(x) + 4) - (f(x) + 4)]dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$

$$A(R) = \int_{-2}^{3} [(3x+3) - (x^2+2x-3)]dx = \int_{-2}^{3} [-x^2+x+6]dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^{3} = \frac{125}{6}$$

- Com que ens donen dues funcions de la variable x, el més pràctic és integrar primer respecte y i després respecte x:

[1] Només cal trobar el mínim de la funció parabòlica que es dona quan $f'(x) = 2x + 2 = 0$, que passa a $x = -1$, on $f(x) = -4$.

$$
\begin{aligned}
V = \int\int_R x dx dy &= \int\int_R x dy dx \\
&= \int_{x=-2}^{x=3} \left[\int_{x^2+2x-3}^{3x+3} x dy \right] dx \\
&= \int_{x=-2}^{x=3} x[(3x+3) - (x^2+2x-3)] dx \\
&= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_{-2}^{3} \\
&= \left(-\frac{3^4}{4} + \frac{3^3}{3} + 3^3 \right) - \left(-\frac{(-2)^4}{4} + \frac{(-2)^3}{3} + 3(-2)^2 \right) = \frac{125}{12}
\end{aligned}
$$

1.3 Integració de moltes variables

Ex. 10 — **Volum esfera**Calcula el volum d'una esfera de radi a usant una integral triple.

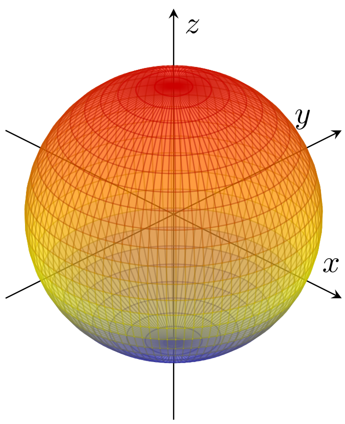
Answer (Ex. 10) — El volum de l'esfera ve donat per l'expressió:

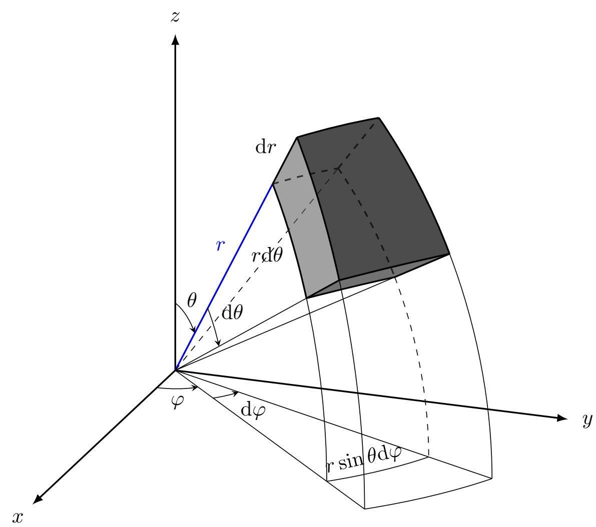
$$V = \int\int\int_\Omega dV$$

Si explorem el problema usant coordenades cartesianes, l'element de volum és $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ i els límits d'integració quedarien com:

$$V = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$$

Alternativament, podem observar que la simetria de l'objecte ens permet usar coordenades esfèriques:





Ara l'element de volum vindrà donat per $\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi$ i els límits d'integració canviaran de forma molt favorable, ja que:

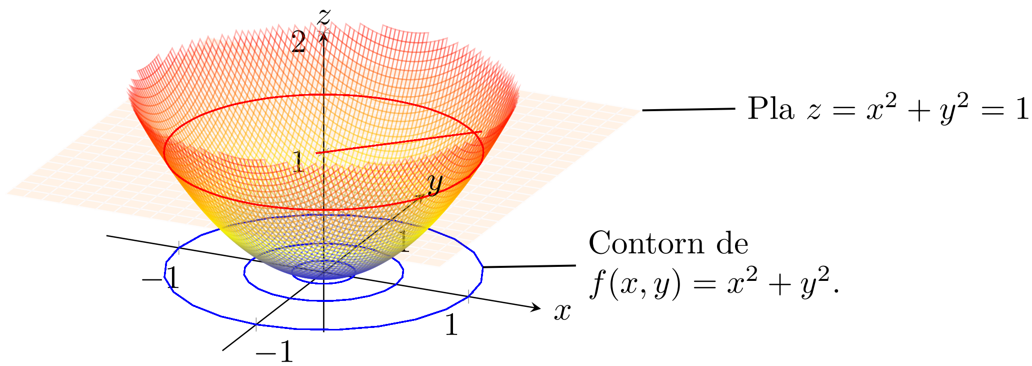
$$\begin{cases} -a \leq x \leq a \\ -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \\ 0 \leq z \leq a^2 - x^2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

Així:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{a} r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^{a} r^2 \, \mathrm{d}r \\ &= [\varphi]_0^{2\pi} \, [-\cos\theta]_0^{\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a = \boxed{\frac{4}{3}\pi a^3} \end{aligned}$$

Ex. 11 — **Volum paraboloide**Calcula el volum delimitat pel paraboloide $z = x^2 + y^2$. i el pla $z = 1$.

Answer (Ex. 11) — Dibuixem primer el gràfic:



El volum del paraboloide vindria donat per l'expressió:

$$V = \int \int \int_{\Omega} dV$$

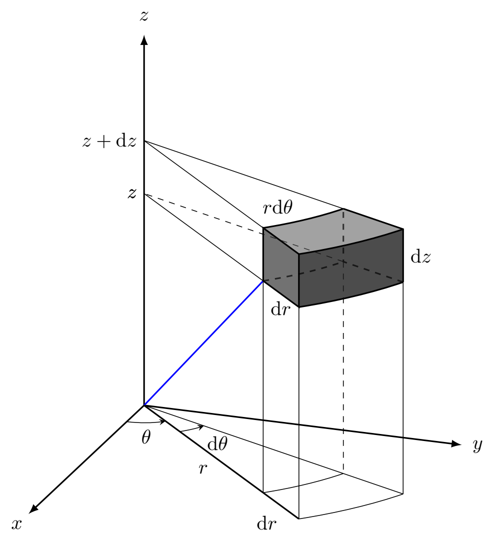
Si explorem el problema usant coordenades cartesianes, l'element de volum és $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ i els límits d'integració quedarien com:

$$V = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{x^2+y^2} \mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$$

Podem intentar fer aquesta integral, però clarament el fet que apareguin arrels en els límits d'integració no facilita gens la feina (tot i que la integral no és pas molt complicada). Pots solucionar-la amb `Matlab` usant aquest breu codi:

```
syms x y z
intZ = int(1,z,0,x^2+y^2)
intY = int(intZ,y,-sqrt(1-x^2),sqrt(1-x^2))
intX=int(intY)
volum = int(intY,x,-1,1)
```

Alternativament, podem observar que la simetria de l'objecte ens permet usar coordenades cilíndriques, molt més pràctiques:



Ara l'element de volum vindrà donat per $\mathrm{d}V = r\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta$ i els límits d'integració canviaran de forma molt favorable, ja que:

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0 \leq z \leq x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq z \leq x^2+y^2 = r^2 \end{cases}$$

Així:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{r^2} r\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^1 r\left[\int_0^{r^2}\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}r \\ &= \theta\Big]_0^{2\pi}\int_0^1 rz\Big]_0^{r^2}\ \mathrm{d}r = 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$