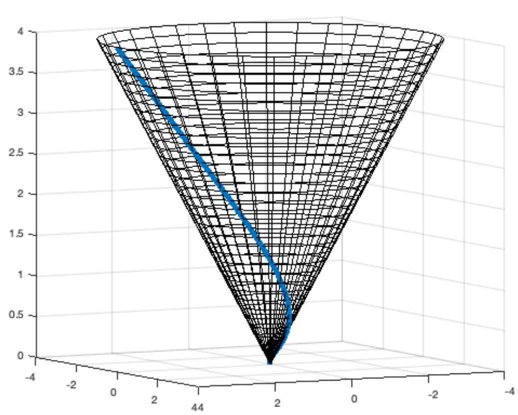
FACULTAT
DE CIÈNCIES I TECNOLOGIA
UVIC | UVIC·UCC

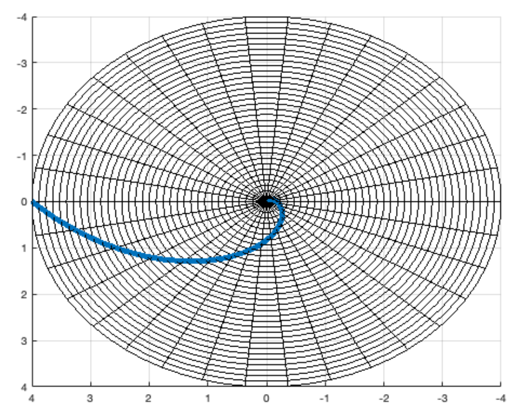
Enginyeria Mecatrònica

Examen Parcial
Matemàtiques I GEMEC-09UV
RESPOSTES

25 de Gener de 2022

1. (2 Punts) Una espiral concoide és una corba $\mathcal{L}$ amb una parametrització $\mathbf{r}(t) = \sigma(t) = ae^{-\mu t}\cos t\hat{\imath} + ae^{-\mu t}\sin t\hat{\jmath} + be^{-\mu t}\hat{k}$ per a $t \geq 0$, on $a, b, \mu > 0$ són constants. Troba la longitud de $\mathcal{L}$ entre els punts amb $t = 0$ i $t = \infty$, en el cas que $a = b = 4$ i $\mu = 1$. (Les imatges representen dues perspectives de la corba, que es mostra damunt la superfície d'un conus invertit) *(2p)*





Resposta:

La corba $\mathcal{L}$ té com a equacions paramètriques

$$x = ae^{-\mu t}\cos t,\ y = ae^{-\mu t}\sin t,\ z = be^{-\mu t}$$

per a $t > 0$.

Podem calcular la longitud de la corba a partir del mòdul de la derivada del vector posició

$$L(\mathcal{L}) = \int_{\mathcal{L}} \|\mathbf{dr}\| = \int_0^{\infty} \|\sigma'(t)\| dt$$

Primer ens cal trobar, doncs, $\sigma'(t)$, calcular-ne el mòdul i substituir-lo a l'expressió:

$$\sigma'(t) = \left(-a\mu e^{-\mu t}\cos t - ae^{-\mu t}\sin t, -a\mu e^{-\mu t}\sin t + ae^{-\mu t}\cos t, -b\mu e^{-\mu t}\right)$$

$$\begin{aligned}
\|\sigma'(t)\|^2 &= (-a\mu e^{-\mu t}\cos t - ae^{-\mu t}\sin t)^2 + (-a\mu e^{-\mu t}\sin t + ae^{-\mu t}\cos t)^2 + (-b\mu e^{-\mu t})^2 \\
&= a^2 e^{-2\mu t}\left((-\mu\cos t - \sin t)^2 + (-\mu\sin t + \cos t)^2\right) + b^2\mu^2 e^{-2\mu t} \\
&= e^{-2\mu t}\left(a^2(1+\mu^2) + b^2\mu^2\right)
\end{aligned}$$

D'on,

$$\|\sigma'(t)\| = e^{-\mu t}\sqrt{a^2(1+\mu^2) + b^2\mu^2}$$

Integrant respecte t:

$$\begin{aligned}
L(\mathcal{L}) &= \int_0^\infty \|\sigma'(t)\| dt = \int_0^\infty e^{-\mu t}\sqrt{a^2(1+\mu^2) + b^2\mu^2} dt \\
&= \sqrt{a^2(1+\mu^2) + b^2\mu^2}\int_0^\infty e^{-\mu t} dt = -\frac{\sqrt{a^2(1+\mu^2) + b^2\mu^2}}{\mu}\left[e^{-\mu t}\right]_0^\infty \\
&= -\frac{\sqrt{a^2(1+\mu^2) + b^2\mu^2}}{\mu}[0-1] = \frac{\sqrt{a^2(1+\mu^2) + b^2\mu^2}}{\mu}
\end{aligned}$$

Si $a = b = 4$ i $\mu = 1$

$$\boxed{L(\mathcal{L}) = 4\sqrt{3}}$$

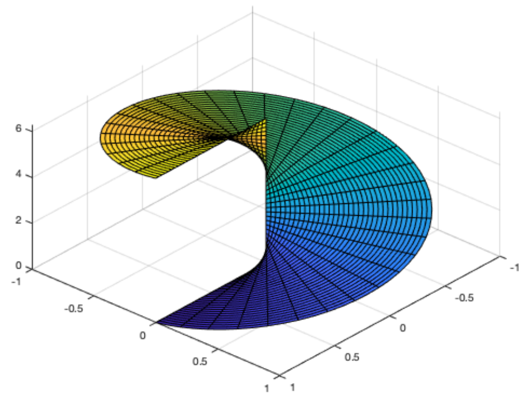
■

2. (2 Punts) Calcula l'àrea $A(S) = \int\int_S \|\mathbf{dS}\|$ d'un helicoïde de radi 1 i alçada 2π donat per:

$$\mathbf{X} : [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3$$

$$\mathbf{X}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$$

(2p)



Resposta:

L'àrea d'una superfície en coordenades polars ve donada per

$$A(S) = \int\int_S \|\mathbf{dS}\| = \int\int_S \|\mathbf{dl_r} \times \mathbf{dl}_\theta\| = \int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta} \right\| dr d\theta$$

Calculem primer les derivades parcials:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 1)$$

L'element de superfície ve donat per

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 1 \end{vmatrix} = (\sin\theta, -\cos\theta, r)$$

Substituint aquest resultat a l'expressió de l'àrea obtenim:

$$\begin{aligned} A(S) &= \int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta} \right\| dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta + r^2}\, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+r^2}\, dr d\theta = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+r^2}\, dr \\ &= 2\pi \left[\frac{r}{2}\sqrt{1+r^2} + \frac{\ln\left(r + \sqrt{1+r^2}\right)}{2} \right]_0^1 \end{aligned}$$

$$\boxed{A(S) = \pi\left(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right)}$$

■

3. (3 Punts) Donat el camp vectorial $\mathbf{A} = 6xy\hat{\imath} + 3x^2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$:

1. Comprova si el camp vectorial **A** és solenoïdal i si és conservatiu. *(1p)*
2. Calcula la seva circulació des del punt $O(0,0,0)$ fins al punt $P(1,1,1)$ per la recta que uneix els punts. *(1p)*
3. Calcula la seva circulació per la corba OM definida paramètricament per (t, t^2, t^3) *(1p)*

Resposta:

1. Comprova si el camp vectorial **A** és solenoïdal i si és conservatiu. *(1p)*

   Solenoidal? Només ens cal comprovar si la divergència del camp és zero:

   $$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z$$

   En el nostre cas:
   $$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}6xy + \frac{\partial}{\partial y}3x^2 + \frac{\partial}{\partial z}2 = 6y \neq 0$$

   Per tant, el camp no és solenoidal.

   Conservatiu? En aquest cas hem de comprovar si el vector rotacional és zero a cada punt del camp:

   $$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

   En el nostre cas:

   $$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6xy & 3x^2 & 2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}2 - \frac{\partial}{\partial z}3x^2\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial}{\partial z}6xy - \frac{\partial}{\partial x}2\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial}{\partial x}3x^2 - \frac{\partial}{\partial y}6xy\right)\hat{k} = \mathbf{0}$$

   Per tant, el camp és conservatiu.

2. Calcula la seva circulació des del punt $O(0,0,0)$ fins al punt $P(1,1,1)$ per la recta que uneix els punts. *(1p)*

Per a qualsevol corba C, podem calcular la circulació fent:

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{dr} = \int_C \Big(6xy\,dx + 3x^2\,dy + 2\,dz\Big)$$

En el cas de la recta que uneix els dos punts, la podem representar paramètricament com $x = y = z = t$ per a $t \in [0, 1]$. També veiem que $dx = dy = dz = dt$. Per tant:

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{dr} = \int_0^1 \Big(9t^2 + 2\Big)\; dt = \boxed{5}$$

3. Calcula la seva circulació per la corba OM definida paramètricament per (t, t^2, t^3) *(1p)*

En aquest cas, $x = t$, $y = t^2$ i $z = t^3$ per a $t \in [0, 1]$. Per tant: $dx = dt$, $dy = 2tdt$ i $dz = 3t^2dt$. Per tant:

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{dr} = \int_0^1 \Big(12t^3 + 6t^2\Big)\; dt = \boxed{5}$$

Òbviament, sabent que el camp és conservatiu ens podríem haver estalviat aquesta segona operació un cop sabut el resultat de l'apartat 2).

Alternativa a apartats 2) i 3):

Alternativament, podríem haver trobat el mateix resultat a partir de saber que el rotacional era zero (camp conservatiu) trobant la funció potencial $\Phi(x, y, z)$ quin gradient iguala $\mathbf{A}$:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi = \mathbf{A}$$

D'aquí:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = A_x = 6xy \Rightarrow \Phi(x, y, z) = 3x^2y + f(y, z)$$

on $f(y, z)$ és una funció que no depèn de x i que, per tant, actua com una constant respecte a la integració. Per trobar aquesta funció estudiem la component y del gradient:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = A_y = 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow f(y, z) = g(z)$$

Finalment, per trobar $g(z)$ usem la tercera component del gradient:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = A_z = 2 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial z} = 2 \Rightarrow g(z) = 2z + C$$

amb la qual cosa obtenim l'expressió del potencial

$$\Phi(x, y, z) = 3x^2y + 2z + C$$

Avaluant la diferència de potencial entre els punts inicial i final de les corbes, obtenim:

$$\Delta\Phi(x, y, z) = \Phi(1, 1, 1) - \Phi(0, 0, 0) = \boxed{5}$$

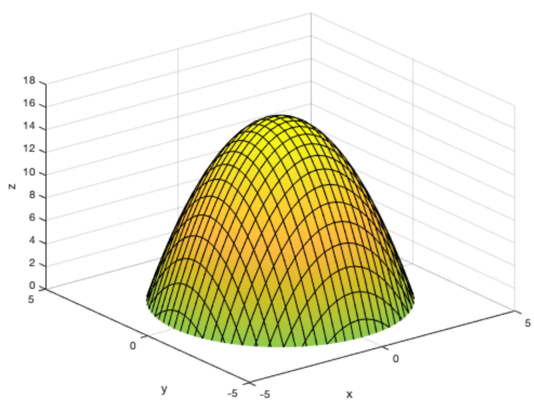
com esperàvem pel fet que $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$. ■

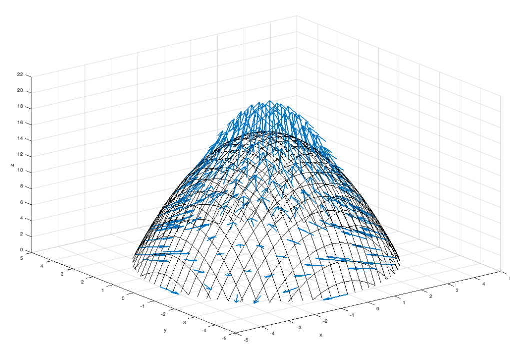
4. (3 Punts) Donat el camp vectorial $\mathbf{F} = y\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + z\hat{k}$ i la superfície S donada per la funció $z = g(x, y) = 16 - x^2 - y^2$ que està per damunt del pla xy

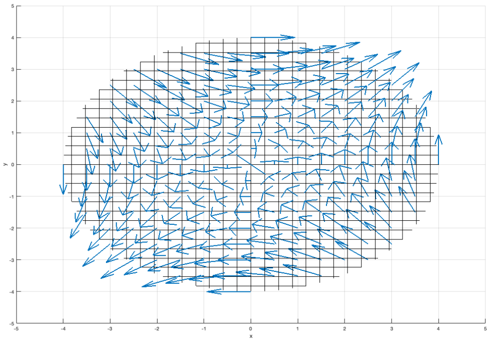
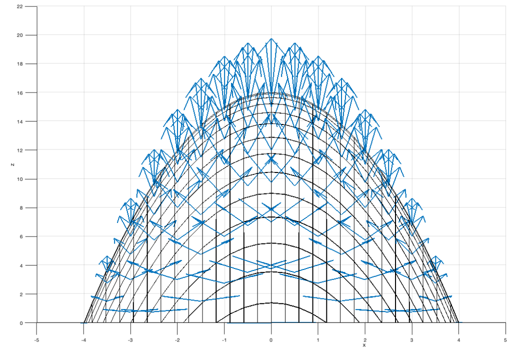
1. Comprova si el camp vectorial $\mathbf{F}$ és solenoïdal i si és conservatiu. *(1p)*
2. Determina el flux, $\int\int_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS}$ del camp vectorial $\mathbf{F}$ que travessa la superfície S. *(2p)*

Resposta:

Les figures mostren la forma de la superfície i del camp vectorial al seu damunt des de diverses perspectives:





1. Comprova si el camp vectorial $\mathbf{F}$ és solenoïdal i si és conservatiu. *(1p)*

   Solenoidal? Només ens cal comprovar si la divergència del camp és zero:

   $$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{\partial z} F_z$$

   En el nostre cas:

   $$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} y + \frac{\partial}{\partial y} x + \frac{\partial}{\partial z} z = 1 \neq 0$$

   Per tant, el camp no és solenoidal.

   Conservatiu? En aquest cas hem de comprovar si el vector rotacional és zero a cada punt del camp:

   $$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

   En el nostre cas:

   $$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y} z - \frac{\partial}{\partial z} x \right) \hat{\imath} + \left(\frac{\partial}{\partial z} y - \frac{\partial}{\partial x} z \right) \hat{\jmath} + \left(\frac{\partial}{\partial x} y - \frac{\partial}{\partial y} x \right) \hat{k} = \mathbf{0}$$

   Per tant, el camp és conservatiu.

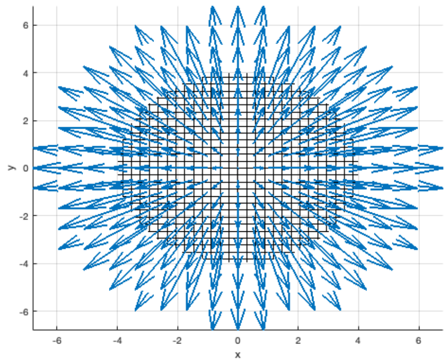
2. Determina el flux, $\int\int_D \vec{F} d\vec{S}$ del camp vectorial $\vec{F}$ que travessa la superfície S. *(2p)*

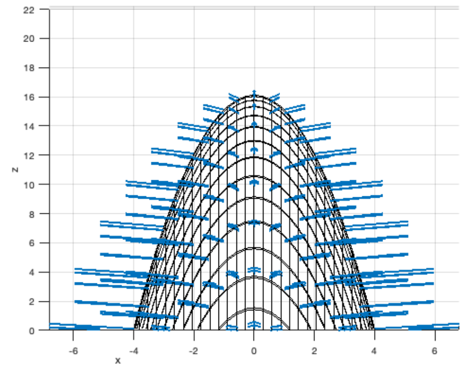
   En coordenades cartesianes tenim que la superfície està definida com:

   $$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / z = 16 - x^2 - y^2, z \geq 0 \right\}$$

   El flux es calcularà fent $\int\int_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS}$ on D és el domini de les variables (x, y). El diferencial de superfície ve donat pel vector normal a la superfície en cada punt, que podem calcular fent:

$$\mathbf{dS} = \mathbf{dl_x} \times \mathbf{dl_y} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} dxdy = (2x\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath} + \hat{k})\, dxdy$$





Es pot veure que, tal i com l'hem calculat, aquest differencial de superfície apunta en la direcció exterior de la superfície dibuixada. Si haguéssim considerat $\mathbf{dS} = \mathbf{dl_y} \times \mathbf{dl_x}$ el diferencial de superfície hauria apuntat cap a l'interior de la superfície.

Ara calculem el flux elemental a través de la superfície donada:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = (y, x, 16 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1)\, dxdy = (4xy + 16 - x^2 - y^2)\, dxdy$$

La integral queda, doncs:

$$\text{Flux} = \int\int_D \vec{F} d\vec{S} = \int\int_D (4xy + 16 - x^2 - y^2)\, dxdy$$

A continuació podem seguir el problema usant coordenades cartesianes, segons les quals els límits d'integració queden:

$$\text{Flux} = \int_{-4}^{4} \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} (4xy + 16 - x^2 - y^2)\, dydx =$$

Es tracta d'una integral en cartesianes no massa difícil, però hem de fer alguns canvis de variable que allarguen la resolució. Enlloc d'això, podem usar el canvi de variables a priori i passar a coordenades cilíndriques. En aquest cas tindrem que si $x = r\cos\theta$ i $y = r\sin\theta$

(notar que, aleshores, $x^2 + y^2 = r^2$) obtenim

$$\begin{aligned}
\text{Flux} &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^4 (4r^2 \cos\theta \sin\theta + 16 - r^2)\, r dr \right] d\theta = \\
&\int_0^{2\pi} \left[r^4 \cos\theta \sin\theta + 8r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^4 d\theta = \\
&\int_0^{2\pi} (256 \cos\theta \sin\theta + 64)\ d\theta = \boxed{128\pi}
\end{aligned}$$

Per tant, el flux cap enfora de la superfície és 128π. El flux cap endins serà, òbviament, -128π.

■