Apèndix: vectors i valors propis d'una matriu

Jordi Villà i Freixa

Universitat de Vic - Universitat Central de Catalunya
Matemàtiques
Troc comú en Biologia i Biotecnologia

jordi.villa@uvic.cat

darrera actualització 8 d'octubre de 2025

curs 2025-2026

Índex

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC-UCC

Conceptes bàsics

El producte d'una matriu $A_{n\times n}$ per un vector $v \in \mathbb{R}^n$ dona com a resultat un altre vector Av de la mateixa dimensió.

Vectors privilegiats

Hi ha vectors v tals que:

$$Av = \lambda v$$

on λ és un escalar real o complex. Aquests vectors v mantenen la mateixa direcció que l'original, encara que poden canviar de longitud.

$\Rightarrow$ v és un **autovector** i λ és el seu **autovalor**.

Definició formal

Definició

Siguin A una matriu $n \times n$ i $v \neq 0$ un vector. Si existeix un nombre λ tal que:

$$Av = \lambda v$$

aleshores:

- v és un **autovector** o **vector propi** de A.
- λ és el seu **autovalor** o **valor propi associat**.

Nota: El càlcul d'autovalors i autovectors no és senzill en general, excepte per a matrius de dimensions 2 o 3.

Càlcul dels autovalors

Definició

Els autovalors λ d'una matriu A són les solucions de:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

on I és la matriu identitat i det denota el determinant.

Observació: Una matriu real pot tenir autovalors complexos.
El determinant d'una matriu quadrada és un nombre real que permet estudiar el nombre de solucions d'un sistema lineal.

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC-UCC

Determinants de matrius petites

Per a una matriu 2×2**:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Per a una matriu 3×3**:**

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Aquesta fórmula es pot recordar gràcies a la **Regla de Sarrus**.

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 5 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 10 - 3 = 7$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 5(2)(2) + 1(1)(1) + 3(0)(0) - 0(2)(1) - 3(1)(2) - 5(1)(0)$$

$$\Rightarrow \det(A) = 20 - 1 + 0 - 0 - 6 - 0 = 13$$

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC-UCC

Exemple - Autovalors d'una matriu 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 1 \\ 6 & -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = (5 - \lambda)(-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm 2i$$

Conclusió: Els autovalors poden ser complexos, fins i tot si A és real.

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES UVIC | UVIC-UCC

Càlcul dels autovectors

Si λ és un autovalor de A, aleshores el seu autovector v compleix:

$$(A - \lambda I)v = 0$$

És un sistema lineal homogeni en les components de v. Per tant, conegut λ, podem trobar v resolent aquest sistema.

- Hi ha **infinites** solucions per a cada autovalor: qualsevol múltiple escalar d'un autovector també ho és.
- Per a matrius grans, és pràctic fer servir programes com **MATLAB**, **Python (NumPy)** o **Octave**.

Exemple - Autovectors

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Els autovalors són $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = 2$.

Per a $\lambda_1 = 3$:

$$(A - 3I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v_2 = -2v_1 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Per a $\lambda_2 = 2$:

$$(A - 2I)w = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow w_2 = -3w_1 \Rightarrow w = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Bibliografia

El material d'aquestes presentacions està basat en anteriors presentacions i apunts d'altres professors [Corbera(2019)] de la UVic-UCC i d'altres universitats [de Souza(2025)], i pàgines web diverses (normalment enllaçades des del text).

Montserrat Corbera.
Unitat 2. Càlcul integral.
Universitat de Vic - Universitat Central de Catalunya, Facultat de Ciències i Tecnologia, Vic, Barcelona, 2019.
Drets reservats. No es pot copiar sense permís de l'autora.

Diego Araújo de Souza.
Matemáticas aplicadas a la biología.
Apuntes de classe; grado en Biología, asignatura de matemáticas, 2025.
Departamento de Ecuaciones diferenciales y Análsis Numérico; Universidad de Sevilla.