Exercicis Resolts

MATEMÀTIQUES

Graus en Biologia i Biotecnologia

FACULTAT
DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA
I ENGINYERIES
UVIC | UVIC·UCC *

Jordi Villà i Freixa

Darrera modificació: 30 de setembre de 2025

Taula de continguts

*Adreça electrònica: `jordi.villa@uvic.cat`

Índex d'Exercicis

1 Models matemàtics

1.1 Models discrets

Ex. 1 — Creixement exponencial de bacteris: Estem estudiant una població de bacteris que es divideixen cada 20 minuts i que a l'inici de l'experiment es redueix a dos bacteris. En quin moment el nombre de bacteris supera les 60 unitats? Què li ocorre al tamany de la població en el futur?

Solució (Ex. 1) — Si x_k és el nombre de bacteris després de k períodes de divisió ($20k$ minuts), es té

$$x_k = 2^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Volem el valor més petit de k tal que $x_k \geq 60$:

$$2^{k+1} \geq 60 \iff (k+1)\ln 2 \geq \ln 60 \iff k \geq \frac{\ln 60}{\ln 2} - 1 \approx 4.91$$

Per tant, el primer valor enter és $k = 5$, és a dir, als 100 minuts:

$$x_4 = 2^5 = 32 < 60, \quad x_5 = 2^6 = 64 \geq 60$$

Així, el nombre de bacteris supera les 60 unitats als 100 minuts. A més, com que $x_k = 2^{k+1}$, quan $k \to \infty$, $x_k \to \infty$ i la població creix sense límit. ■

Ex. 2 — Model Malthus amb i sense aportacions: (*CGPT*) Considerem una població de ratolins que es troba en una illa deserta. La població inicial de ratolins és de 100 individus. La taxa de creixement natural anual és del 30% ($r = 0.30$).
Es vol determinar el temps necessari perquè la població arribi a 1 milió de ratolins en dos casos:

- **Sense aportacions externes:** Només es considera el creixement natural de la població.
- **Amb aportacions externes:** Cada any arriben 20 ratolins nous a més del creixement natural.

Solució (Ex. 2) — Sense Aportacions Externes
La població en temps t es modela amb l'equació de creixement exponencial:

$$P(t) = P_0 \cdot (1 + r)^t$$

ja que cada pas implica:

$$P(t+1) = P(t) \cdot (1+r)$$

On:

- $P_0 = 100$ (població inicial)
- $r = 0.30$ (taxa de creixement)
- $P(t) = 1{,}000{,}000$ (població objectiu)

Per trobar el temps t necessari per arribar a 1 milió de ratolins, resolem:

$$1{,}000{,}000 = 100 \cdot (1.30)^t$$

$$10{,}000 = (1.30)^t$$

Aplicant logaritmes:

$$\ln(10{,}000) = t \cdot \ln(1.30)$$

$$t = \frac{\ln(10{,}000)}{\ln(1.30)} \approx \frac{9.21034}{0.26236} \approx 35.11$$

Per tant, el temps necessari és aproximadament **35 anys**.

Amb Aportacions Externes

Amb aportacions externes, la població es modela amb l'equació:

$$P(t+1) = P(t) \cdot (1+r) + A$$

o bé

$$P(t) = P_0 \cdot (1+r)^t + A \cdot \frac{(1+r)^t - 1}{r}$$

On:

- $P_0 = 100$ (població inicial)
- $r = 0.30$ (taxa de creixement)
- $A = 20$ (aportacions externes)
- $P(t) = 1{,}000{,}000$ (població objectiu)

Utilitzant un enfocament iteratiu, s'ha de trobar el temps t per al qual la població supera 1 milió de ratolins. En aquest cas, el càlcul és:

$$P(t) = 100 \cdot (1.30)^t + 20 \cdot \frac{(1.30)^t - 1}{0.30}$$

Després de calcular iterativament, es troba que el temps necessari és aproximadament **34 anys**.
El següent gràfic mostra l'evolució de la població amb i sense aportacions externes al llarg del temps:

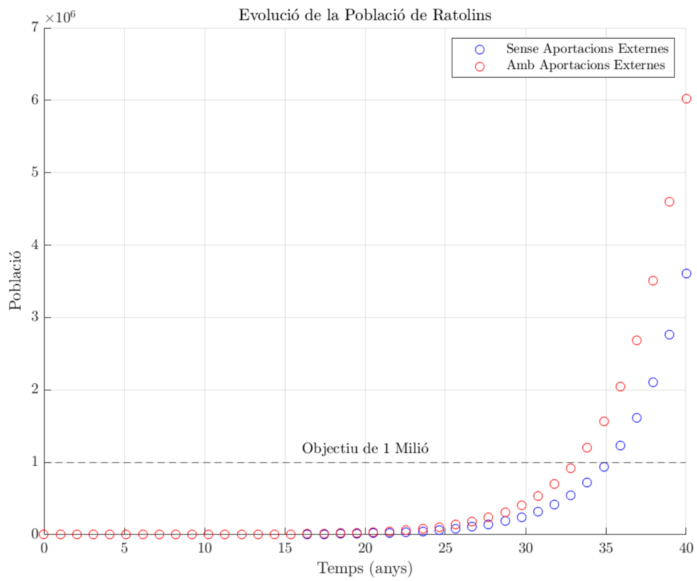


Figura 1: Evolució de la població de ratolins amb i sense aportacions externes. La línia horitzontal indica l'objectiu de 1 milió de ratolins.
■

Ex. 3 — Comparativa de models de creixement poblacional: Compara els models de creixement poblacional vistos (exponencial, logístic, Beverton-Holt i Ricker). Quines són les seves principals característiques? Quins són els seus punts forts i febles? En quines situacions es poden aplicar? Nota: t'encoratjo a que facis els gràfics amb Matlab.

Solució (Ex. 3) — Per començar, hem vist que els tres models amb restriccions (logístic, Beverton-Holt i Ricker), mostrats a la figura següent, tenen un comportament similar a l'exponencial per a valors petits de x, però divergeixen quan x s'aproxima a la capacitat de càrrega K.

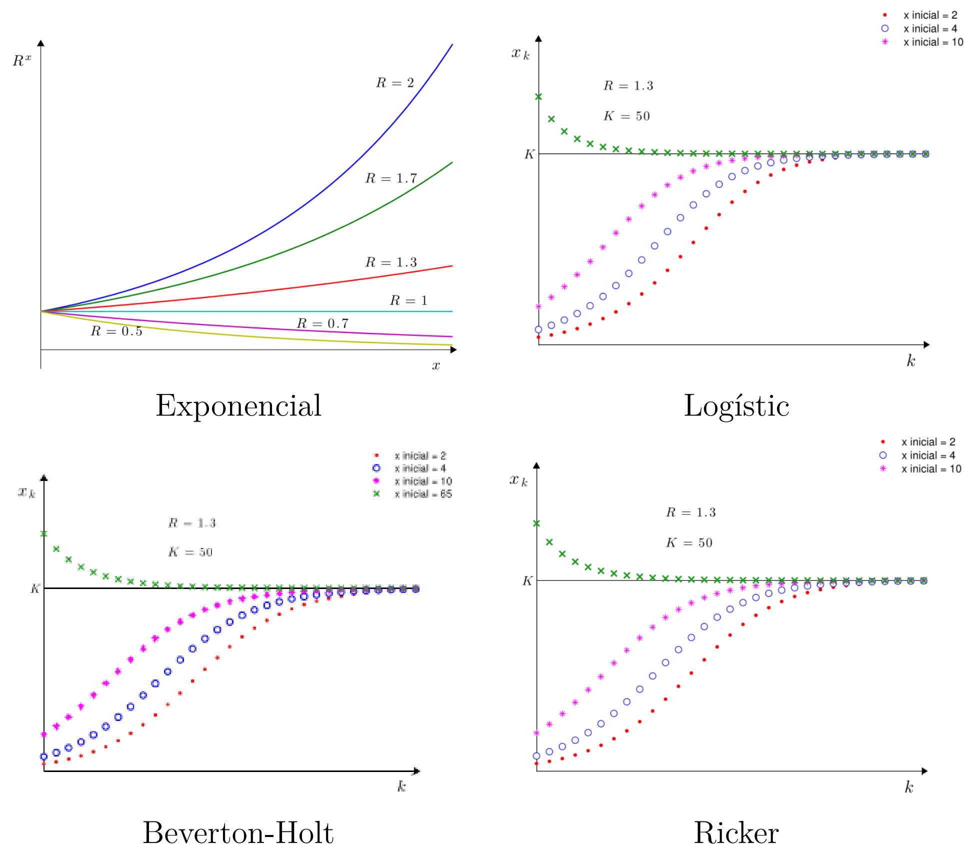


Figura 2: Exemples de l'evolució temporal de cada model discret de creixement poblacional (per facilitar la visió dels gràfics, el gràfic exponencial es veu en format continu).

Si ara ens centrem en les diferències dels models amb restricció, i seguint el material mostrat a les sessions, els quatre models de creixement poblacional es poden expressar en la forma recursiva:

$$x_k = f(x_{k-1}), \quad k \geq 1,$$

on x_k és la població en el període k i $f(x)$ és la funció que defineix el model. Les funcions de creixement poblacional expressades com $f(x)$ són:

- **Model Exponencial:**

$$f(x) = Rx$$

- **Model Logístic:**

$$f(x) = Rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

- **Model Beverton-Holt:**

$$f(x) = \frac{Rx}{1 + \frac{x}{K}}$$

- **Model Ricker:**

$$f(x) = xe^{r\left(1 - \frac{x}{K}\right)}$$

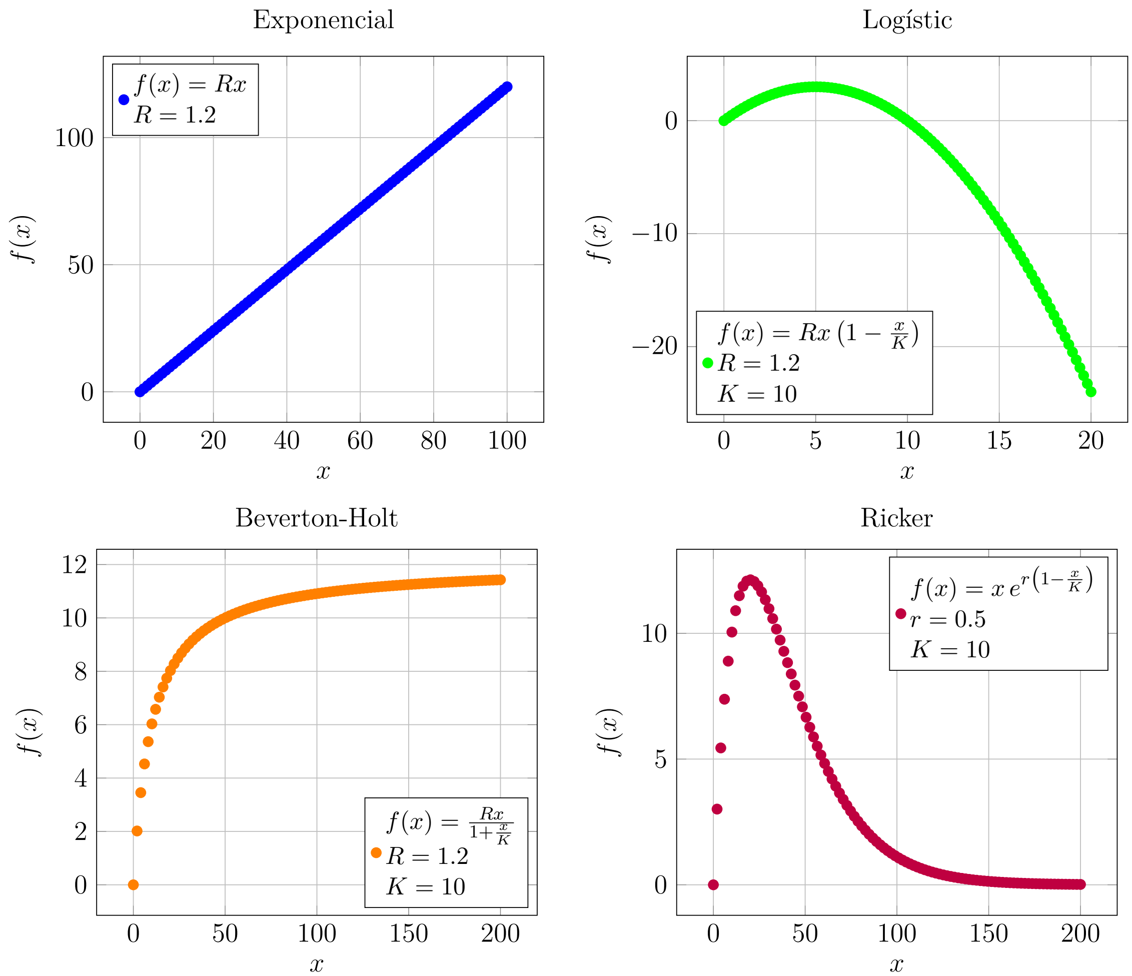


Figura 3: Comparativa de les funcions $f(x)$ dels quatre models de creixement poblacional.

Pel que fa al codi matlab, a continuació es mostra un exemple per comparar els quatre models de creixement poblacional:

Code 1: Codi Matlab per comparar els models de creixement poblacional

```
x = linspace(0, 20, 200);
R = 1.2;
K = 10;
r = 0.5;

f_exp = R * x;
f_log = R * x .* (1 - x / K);
f_bh  = R * x ./ (1 + x / K);
f_rick = x .* exp(r * (1 - x / K));

figure;
plot(x, f_exp, 'b', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(x, f_log, 'g', 'LineWidth', 2);
plot(x, f_bh, 'orange', 'LineWidth', 2);
plot(x, f_rick, 'm', 'LineWidth', 2);
xlabel('x');
ylabel('f(x)');
legend('Exponencial', 'Logístic', 'Beverton-Holt', 'Ricker');
title('Comparativa de models de creixement poblacional');
grid on;
```

■

Ex. 4 — Població país europeu (adaptat de [3]): Escriu un model senzill de naixements i defuncions discret que descrigui la situació següent: Els individus moren amb una taxa δ i neixen amb una taxa μ.
A 31 de desembre de 2023, el país tenia una població de 82 037 000 habitants. L'any 2024 hi va haver 770 748 naixements vius i 846 330 defuncions.

- Troba les taxes δ i μ.
- Què passarà amb la població del país en el futur segons aquest model?
- Com s'hauria d'alterar el model perquè fos més realista?

Solució (Ex. 4) — El model discret és

$$x_{k+1} = (1 + \mu - \delta)\, x_k,$$

on μ és la taxa de natalitat i δ la taxa de mortalitat.

Les taxes són

$$\mu = \frac{770\,748}{82\,037\,000} \approx 0.009395 \quad (0.94\%),$$
$$\delta = \frac{846\,330}{82\,037\,000} \approx 0.010316 \quad (1.03\%).$$

Per tant, $\mu - \delta \approx -0.000921$ i

$$R = 1 + \mu - \delta \approx 0.99908 < 1,$$

de manera que la població decreix molt lentament (aprox. -0.092% anual).

Per fer el model més realista caldria introduir:

- migració neta (M_k) afegida a l'equació,
- estructura per edats (model de Leslie),
- taxes variables en el temps ($\mu(t), \delta(t)$),
- factors socioeconòmics i estocàstics.

■

1.2 Models continus

Ex. 5 — Creixement bacterià en un medi limitat: Un experiment de laboratori estudia el creixement d'una població de bacteris en un medi amb nutrients limitats. Es modela el nombre de bacteris $P(t)$, on t és el temps en hores, amb la funció següent:

$$P(t) = -0.05t^3 + 0.5t^2 + 2t + 100 \tag{1}$$

Respon als següents apartats:

1. Calcula el nombre inicial de bacteris en el medi ($t = 0$).
2. Determina els intervals on la població creix i decreix, trobant els punts crítics.
3. Calcula el màxim nombre de bacteris que s'assoleix.
4. Troba el punt d'inflexió i interpreta el seu significat biològic.
5. Determina aproximadament en quin temps la població es redueix per sota de 90 bacteris.

Solució (Ex. 5) — 1. **Nombre inicial de bacteris:** Substituïm $t = 0$ a la funció $P(t)$:

$$P(0) = -0.05(0)^3 + 0.5(0)^2 + 2(0) + 100 = 100.$$

Per tant, el nombre inicial és **100 bacteris**.

2. **Intervals de creixement i decreixement:** Notem primer que la funció, en ser polinòmica, és contínua en tot $\mathbb{R}$. Derivem $P(t)$ per trobar $P'(t)$:

$$P'(t) = -0.15t^2 + t + 2.$$

Resolent $P'(t) = 0$:

$$-0.15t^2 + t + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-0.15)(2)}}{2(-0.15)} = \frac{-1 \pm \sqrt{2.2}}{-0.3}.$$

Així, els punts crítics són:

$$t_1 \approx -1.61, \quad t_2 \approx 8.28.$$

Fem un estudi del signe de $P'(t)$ per determinar els intervals:

- $P'(t) > 0$ en $(-1.61, 8.28)$: la població creix.
- $P'(t) < 0$ fora d'aquest interval: la població decreix.

Per tant, $t = -1.61$ és un mínim i $t = 8.28$ un màxim locals.

3. **Màxim nombre de bacteris:** L'enunciat del problema no ens diu pas que els valors de temps negatius no estiguin inclosos en la solució. Podríem deduir, no obstant, que un model polinòmic com aquest ens descriu un escenari biològicament poc probable de quantitats per a valors molt negatius del temps, en una funció sense màxim global, però a partir d'aquí assumirem que només té sentit explorar valors de $t > 0$ i $P(t) \geq 0$. El màxim local ocorre en $t = 8.28$ (dins del domini rellevant, $t \geq 0$):

$$P(9.28) = -0.05(8.28)^3 + 0.5(8.28)^2 + 2(8.28) + 100 = 122.46.$$

Per tant, el nombre màxim és de **122 bacteris**.

4. **Punt d'inflexió:** Calculem la segona derivada $P''(t)$:

$$P''(t) = -0.3t + 1.$$

Resolent $P''(t) = 0$:

$$-0.3t + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{0.3} = 3.\overline{3}.$$

Per a comprovar que es tracta d'un punt d'inflexió podem veure que a valors més alts de $t = 3.\overline{3}$ la segona derivada esdevé negativa (interval de la funció convexa), mentre que a valors més baixos és positiva (funció còncava). També podem veure que el valor de la tercera derivada a $t = 3.\overline{3}$ és diferent de zero. Finalment, els zeros de la segona derivada son possibles punts d'inflexió però també podrien ser màxims o mínims; en aquest cas, el punt trobat no ho serà perquè no és zero de la primera derivada. Tot això demostra que es tracta d'un punt d'inflexó.

Aixó significa que la velocitat de creixement canvia en $t = 3.\overline{3}$. Biològicament, aquest punt indica el moment en que el creixement deixa d'accelerar-se i comença a decelerar.

5. **Temps en que la població es redueix per sota de 90 bacteris:** Resolent l'Eq. 1 per a $P(t) = 90$:

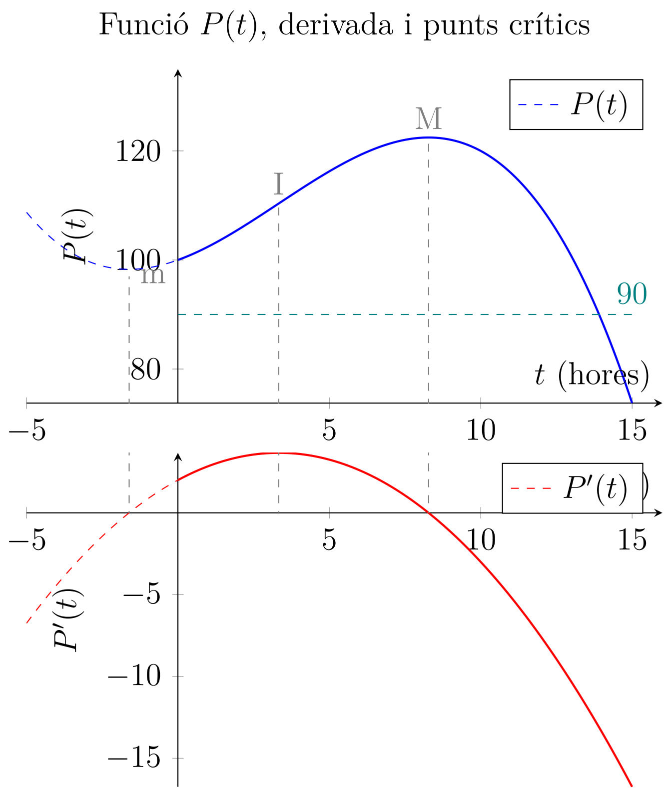
$$-0.05t^3+0.5t^2+2t+100 = 90 \quad \Rightarrow \quad -0.05t^3+0.5t^2+2t+10 = 0. \quad (2)$$

Aquest polinomi es resol numèricament. Aproximadament, trobem $t \approx 13.91$ hores.

Code 2: Codi Matlab per a solucionar l'Eq. 2

```
syms t;
P(t)=-0.05*t^3+0.5*t^2+2*t+100;
vpa(solve(P(t)==90))
```

Per tant, la població es per sota de 90 bacteris (línea verda en el gràfic) a $t > 13.91$ hores. Cal notar que igualant l'Eq. 1 a zero podem veure que els bacteris desapareixen, segons el model, a $t = 18.22 hores$. Cal notar també que la funció té un mínim relatiu a $t = -1.61$, com hem vist abans, però en aquest punt el valor de la funció és de $P(t = -1.61) = 98.28$, més gran que 90 bacteris.



■

Ex. 6 — Model EMAX per a l'efecte d'un agonista: Archibald Vivian Hill (Bristol, Anglaterra, 1886 - Cambridge, 1977) fou un fisiòleg i professor universitari anglès guardonat amb el Premi Nobel de Medicina i Fisiologia l'any 1922. Amb 23 anys va contribuir a la primera justificació quantitativa de l'existència i comportament dels receptors celůlulars. Treballant en la caracterització de la naturalesa de la contracció muscular mediada per la nicotina, Hill va descobrir que la magnitud de l'efecte contràctil es podia predir matemàticament mitjançant l'expressió:[1]

$$y(N) = \frac{N}{k' + kN} - M \tag{3}$$

on y és la magnitud de la resposta, N és la concentració de nicotina, k, k' i M són constants ($k, k' > 0$, $M \geq 0$).

[1] V. Hill. *The mode of action of nicotine and curari, determined by the form of the contraction curve and the method of temperature coefficients.* J Physiol, 39(5):361373, 1909.

(1) Si assignem a k l'expressió $\frac{1}{E_{\text{MAX}}}$ i a k' l'expressió $\frac{EC_{50}}{E_{\text{MAX}}}$, obtenim el que s'anomena *model EMAX* per a l'efecte d'un agonista (substància que produeix una resposta cel·lular en unir-se a un receptor) de concentració N. Escriu la funció resultant.

(2) Estudia el creixement/decreixement de la funció $y(N)$.

(3) Assumint que tenim $M = 0$, quin és el comportament de $y(N)$ a valors molt grans de N?

(4) També en el cas que $M = 0$, per a quins valors de N la contracció del múscul serà la meitat del valor màxim que aquesta pot tenir?

(5) Discuteix quin efecte tenen els termes E_{MAX}, EC_{50} i M en el model general.

Solució (Ex. 6) — Responem els diferents apartats de la pregunta:

(1) Substituïm les expressions per a k i k' a l'expressió original:

$$y(N) = \frac{N}{\frac{EC_{50}}{E_{\text{MAX}}} + \frac{1}{E_{\text{MAX}}}N} - M$$

Simplificant:

$$y(N) = \underbrace{\frac{E_{\text{MAX}}N}{EC_{50} + N}}_{[*]} - M \equiv \frac{E_{\text{MAX}}}{\frac{EC_{50}}{N} + 1} - M \tag{4}$$

Aquesta és la funció resultant del model EMAX.

(2) Calculem la derivada de $y(N)$ respecte a N per veure si la funció creix o decreix. A partir de $[*]$:

$$\frac{dy}{dN} = \frac{E_{\text{MAX}}(EC_{50} + N) - E_{\text{MAX}}N}{(EC_{50} + N)^2}$$

Simplificant:

$$\frac{dy}{dN} = \frac{E_{\text{MAX}}EC_{50}}{(EC_{50} + N)^2}$$

on tant numerador com denominador són positius. Com que la derivada és sempre positiva per a $N > 0$, la funció $y(N)$ és sempre creixent.

(3) Quan N és molt gran, el terme EC_{50} és insignificant en comparació amb N, i la funció, si $M = 0$, tendeix a E_{MAX}. Més formalment:

$$\lim_{N\to\infty} y(N) = \lim_{N\to\infty} \left\{ \frac{E_{\mathrm{MAX}}}{\frac{EC_{50}}{N} + 1} \right\} = \frac{E_{\mathrm{MAX}}}{0+1} = E_{\mathrm{MAX}}$$

o bé, a partir de l'Eq. 3:

$$\lim_{N\to\infty} y(N) = \lim_{N\to\infty} \left\{ \frac{N}{k' + kN} \right\} = \frac{1}{k} = E_{\mathrm{MAX}}$$

És a dir, la màxima contracció possible (quan $N \to \infty$) és E_{MAX}.

(4) Quan $M = 0$, la funció es redueix a:

$$y(N) = \frac{E_{\mathrm{MAX}}}{\frac{EC_{50}}{N} + 1}$$

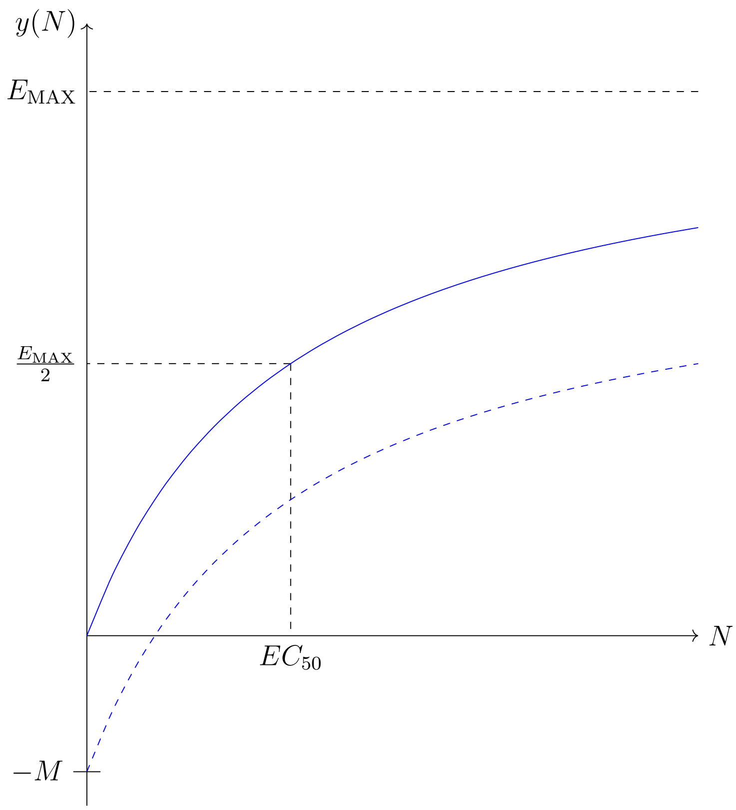
Si volem calcular la concentració de nicotina $N_{1/2}$ que produeix la meitat de contracció, és a dir, $y(N_{1/2}) = \frac{E_{\mathrm{MAX}}}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{E_{\mathrm{MAX}}}{2} &= \frac{E_{\mathrm{MAX}}}{\frac{EC_{50}}{N_{1/2}} + 1} \\ 2 &= \frac{EC_{50}}{N_{1/2}} + 1 \\ N_{1/2} &= EC_{50} \end{aligned}$$

(5) Expliquem el significant de cada paràmetre:

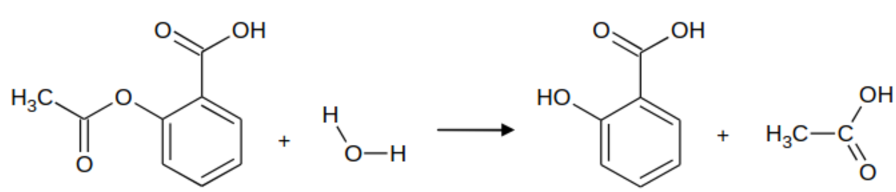
- E_{MAX}: Determina el valor màxim de la resposta $y(N)$. Si augmentem E_{MAX}, augmenta el valor màxim de la resposta.
- EC_{50}: És la concentració de nicotina per la qual la resposta és la meitat del màxim. Si augmentem EC_{50}, la concentració de nicotina per obtenir una resposta determinada augmenta, la qual cosa redueix l'efecte de la nicotina per una concentració donada.
- M: Representa un desplaçament vertical de la funció. Si M augmenta, la resposta general es desplaça cap avall, mentre que si $M = 0$, la resposta depèn només de la concentració de nicotina.

La figura mostra els tres paràmetres en acció:



■

Ex. 7 — Hidròlisi de l'aspirina: La hidròlisi de l'aspirina (àcid acetilsalicílic) produeix àcid hidroxibenzoic i àcid etanoic segons la reacció:



que segueix una llei de velocitat de primer ordre. Això implica que la velocitat de degradació és proporcional a la concentració d'aspirina, A, segons:

$$A' = kA$$

(1) Soluciona l'equació diferencial i dona una expressió de la concentració de l'aspirina en funció del temps, assumint-ne una concentració inicial d'A_0.

(2) S'ha mesurat una constant de velocitat k, a pH 7 i temperatura 40°, de -0.132 s^{-1}. Si la concentració inicial d'aspirina és 3 molar (3M), quant temps tardarà en hidrolitzar-se'n el 75%? Acabarà hidrolitzant-se totalment?

Solució (Ex. 7) — Responem les dues qüestions:

(1) Resolent l'equació diferencial de primer ordre:

$$A' = kA \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}A}{A} = k\,\mathrm{d}t$$

Integrant amb les condicions inicials $A(0) = A_0$:

$$\int_{A_0}^{A} \frac{\mathrm{d}A}{A} = \int_0^t k\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = kt \quad \Rightarrow \quad A(t) = A_0 e^{kt}.$$

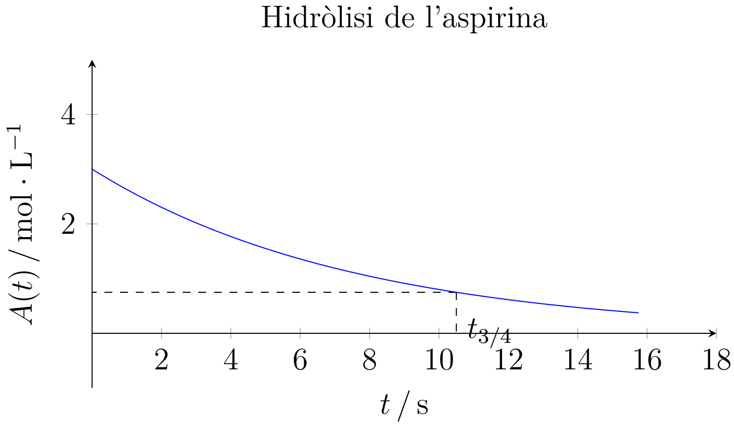
(2) Per saber quant temps trigarà en hidrolitzar-se'n el 75%, volem que la concentració final sigui el 25% de A_0. Així, $A(t_{3/4}) = 0.25A_0$. Substituïm a l'expressió general:

$$0.25A_0 = A_0 e^{kt_{3/4}} \quad \Rightarrow \quad 0.25 = e^{kt_{3/4}} \quad \Rightarrow \quad \ln(0.25) = kt_{3/4}.$$

Substituint $k = -0.132\,\mathrm{s}^{-1}$:

$$t_{3/4} = \frac{\ln(0.25)}{-0.132} = \frac{-1.386}{-0.132} \approx 10.5\,\mathrm{s}.$$

Quant a si s'acabarà hidrolitzant totalment: no, la concentració $A(t)$ s'aproxima asimptòticament a zero quan $t \to \infty$, però mai arriba exactament a zero, com es pot veure al gràfic:



En termes pràctics, es considerarà hidrolitzada totalment quan la concentració sigui negligible, paràmetre que caldria definir.

■

Ex. 8 — Desenvolupament de Drosophila melanogaster en funció de la temperat
El factor ambiental que més afecta el creixement dels insectes és probablement la temperatura. S'ha vist en diversos estudis que la taxa de desenvolupament[2] de l'insecte en funció de la temperatura es pot modelar segons una equació logística. Concretament, la taxa de desenvolupament de la *Drosophila melanogaster* en fase pupa satisfà l'equació diferencial

$$Y' = \frac{1}{5}Y\left(1 - \frac{1}{36}Y\right),$$

on $Y(T)$ és la taxa de desenvolupament en dies^{-1} en funció de la temperatura T, donada en graus. Sabem que quan la temperatura és de 15°, la taxa de desenvolupament és igual a 7 dies^{-1}. Es demana:

(1) Calculeu la taxa de desenvolupament de la pupa en funció de la temperatura.

(2) Doneu la taxa de desenvolupament de la pupa quan la temperatura és de 25°.

[2] La taxa de desenvolupament es defineix com la inversa del temps de desenvolupament, és a dir,

$$Y(T) = \frac{1}{y(T)},$$

on $Y(T)$ és la taxa de desenvolupament en dies^{-1} i $y(T)$ és el temps de desenvolupament en dies.

(3) Quin serà el temps de desenvolupament de la pupa quan la temperatura és de 25°?

(4) Escriviu les instruccions de Matlab que s'haurien de fer servir per dibuixar la funció $Y(T)$ per a valors de la temperatura entre 14° i 30°.

Solució (Ex. 8) — Responem punt per punt les qüestions plantejades:

(1) Taxa de desenvolupament de la pupa en funció de la temperatura:

L'equació diferencial logística es pot resoldre mitjançant separació de variables:

$$\int_7^Y \frac{1}{Y\left(1-\frac{1}{36}Y\right)}\,dY = \int_{15}^T \frac{1}{5}\,dT. \tag{5}$$

on ja hem indicat les condicions inicials per tal d'obtenir la solució particular (integral definida). Comencem, però considerant la integral indefinida. Pel que fa a la banda esquerra (la dreta és immediata: $\int_{15}^T \frac{1}{5}\,dT = \frac{T-15}{5}$), és de la forma:

$$\int \frac{1}{Y\left(1-\frac{1}{36}Y\right)}\,dY.$$

Aquesta és una integral racional que podem resoldre utilitzant fraccions parcials. Comencem descomposant la fracció en fraccions parcials.

$$\frac{1}{Y\left(1-\frac{1}{36}Y\right)} = \frac{36}{Y(36-Y)} = \frac{A}{Y} + \frac{B}{36-Y}. \tag{6}$$

Usant el denominador comú $Y(36-Y)$, obtenim:

$$\begin{aligned} 36 &= A(36-Y) + BY \\ 36 &= A(36) + (B-A)Y \end{aligned}$$

Així que $A = 1$ i $B = 1$ a l'Eq. 6. Per tant, podem escriure:

$$\int \frac{36}{Y(36-Y)}\,dY = \int \frac{1}{Y}\,dY + \int \frac{1}{36-Y}\,dY = \ln|Y| - \ln|36-Y| + C$$

Podem expressar-ho de manera més compacta utilitzant les propietats dels logaritmes:

$$\int \frac{36}{Y(36-Y)}\, dY = \ln\left(\frac{Y}{36-Y}\right) + C.$$

Usant aquest resultat a la integral definida de l'Eq. 5, acabem obtenint:

$$\left[\ln\left(\frac{Y}{36-Y}\right)\right]_7^Y = \left[\frac{T}{5}\right]_{15}^T$$

d'on

$$\ln\left(\frac{Y}{36-Y}\frac{29}{7}\right) = \frac{T-15}{5}$$

o bé:

$$\left(\frac{Y}{36-Y}\frac{29}{7}\right) = e^{\frac{T-15}{5}}$$

Arreglant l'expressió obtenim l'expressió què ens demanaven per a la taxa de desenvolupament:

$$\boxed{Y(T) = \frac{7 \cdot 36 \cdot e^{T/5-3}}{29 + 7 \cdot e^{T/5-3}}} \tag{7}$$

(2) Taxa de desenvolupament a $T = 25°$:
Substituïm $T = 25$ a l'Eq. 7:

$$Y(25) = \frac{7 \cdot 36 \cdot e^{25/5-3}}{29 + 7 \cdot e^{25/5-3}} = 23.07\,\text{dies}^{-1}.$$

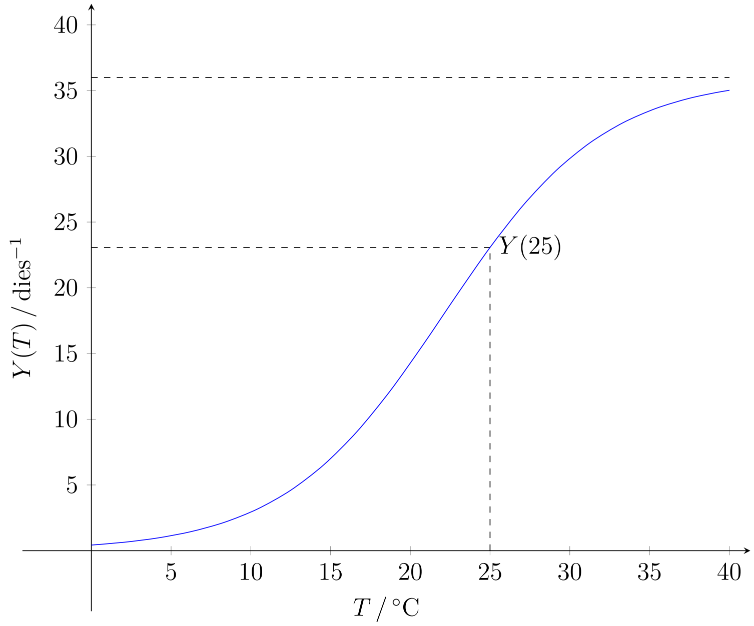
(3) Temps de desenvolupament a $T = 25°$:
El temps de desenvolupament es calcula com:

$$y(T) = \frac{1}{Y(T)}.$$

Per a $T = 25$:

$$y(25) = \frac{1}{23.07} = 0.04\,\text{dies}$$

El gràfic següent mostra els detalls de la funció i dels resultats de l'exercici:



(4) Instruccions de Matlab per dibuixar $Y(T)$ entre 14 i 30°C:

Code 3: Codi Matlab per traçar $Y(T)$

```
syms T Y(T)
con=Y(15)==7
Ysol=dsolve(diff(Y(T),T)==1/5*Y*(1-Y/36),con)
fplot(Ysol)
xlim([14 30])
legend()
grid on
```

■

Ex. 9 — Model de Melica et al.: Melica et al.[3] estudien la densitat de població dels pòlips d'*Aurelia aurita* que creixen sobre closques d'ostres. Els nous pòlips d'*Aurelia aurita* es formen a través de propàguls lliures alliberats per un pòlip existent a l'aigua circumdant i que es desplacen nedant a altres llocs de la closca d'ostra.

Observen que quan la densitat inicial de pòlips a l'ostra és baixa, la població

[3]Melica et al. *Logistic density-dependent growth of an* Aurelia aurita *polyps population.* Ecol. Modell 291 (2014) 15.

creix fins a una certa capacitat de càrrega, mentre que si la densitat inicial és alta, aquesta decau fins a una altra capacitat de càrrega superior. Per modelar aquest comportament utilitzen el següent model de creixement de poblacions amb un efecte "Hyper-Allee":

$$N' = r\left(\frac{N}{A} - 1\right)\left(\frac{N}{B} - 1\right)\left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

on $N(t)$ és la densitat dels pòlips (pòlips per cm^2) i t és el temps en dies.
A partir de les dades experimentals s'observa que els valors dels paràmetres són: $A = 2.24$, $B = 4.69$, $K = 5.16$ i $r = 0.161$.
Es demana:

i) Determineu els punts d'equilibri del model.

ii) Estudieu l'estabilitat del punt d'equilibri més petit.

iii) A quin valor tendeix la densitat de pòlips quan la densitat inicial de pòlips és molt petita?

Solució (Ex. 9) — Resolem els diferents apartats:

i) Els punts d'equilibri es troben quan $N' = 0$, és a dir:

$$f(N) = r\left(\frac{N}{A} - 1\right)\left(\frac{N}{B} - 1\right)\left(1 - \frac{N}{K}\right) = 0.$$

Això implica que algun dels termes del producte ha de ser zero, i ens dona la solució per als valors dels punts d'equilibri:

$$\frac{N}{A} - 1 = 0 \implies N = A = 2.24,$$

$$\frac{N}{B} - 1 = 0 \implies N = B = 4.69,$$

$$1 - \frac{N}{K} = 0 \implies N = K = 5.16.$$

Per tant, els punts d'equilibri són:

$$N = 2.24,\ N = 4.69,\ N = 5.16.$$

Cal notar que $N = 0$ no és un punt d'equilibri en aquest cas.

ii) Per estudiar l'estabilitat del punt d'equilibri més petit ($N = A$), calculem la derivada $f'(N)$:

$$\begin{aligned} f'(N) &= r\frac{d}{dN}\left[\left(\frac{N}{A}-1\right)\left(\frac{N}{B}-1\right)\left(1-\frac{N}{K}\right)\right] \\ &= r\left[\frac{1}{A}\left(\frac{N}{B}-1\right)\left(1-\frac{N}{K}\right)+\left(\frac{N}{A}-1\right)\frac{1}{B}\left(1-\frac{N}{K}\right)+\left(\frac{N}{A}-1\right)\left(\frac{N}{B}-1\right)\left(-\frac{1}{K}\right)\right] \end{aligned}$$

Per $N = A$, substituint en $f'(N)$ obtenim:

$$f'(A) = r\cdot\frac{1}{A}\underbrace{\left(\frac{A}{B}-1\right)}_{<0}\underbrace{\left(1-\frac{A}{K}\right)}_{>0} < 0.$$

Com que $f'(A) < 0$, el punt $N = A$ és un punt d'equilibri estable.

iii) Si la densitat inicial $N(0)$ és molt petita ($N(0) \to 0^+$), el model prediu que la densitat de pòlips augmentarà:

$$\lim_{N\to 0^+} f(N) = \lim_{N\to 0^+} r\left(\frac{N}{A}-1\right)\left(\frac{N}{B}-1\right)\left(1-\frac{N}{K}\right) = r\,(-1)\,(-1)\,(1) = r > 0$$

Per tant, $N(t)$ creixerà fins arribar al primer punt d'equilibri $N = A = 2.24$, que és estable. Per tant, la densitat de pòlips tendeix a:

$$\boxed{N = 2.24 \text{ pòlips/cm}^2.}$$

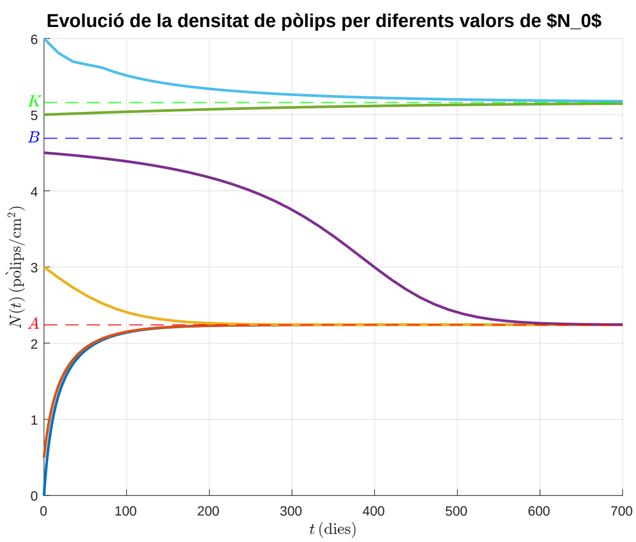
El següent codi matlab integra numèricament l'EDO per mostrar el comportament de les poblacions a partir de diversos valors inicials, tot demostrant l'estabilitat dels punts d'equilibri del sistema.

Code 4: Codi Matlab per traçar $N(t)$

```
% Paràmetres
A = 2.24; B = 4.69; K = 5.16; r = 0.161;

% Equació diferencial com a funció
dNdt = @(t, N) r * ((N / A) - 1) * ((N / B) - 1) * (1 - (N / K));
tspan = [0, 700]; % De 0 a 100 dies
N0_values = [0, 0.5, 3, 4.5, 5., 6.]; % Valors inicials per comparar

% Crear la figura
figure; hold on;

% Iterar sobre cada valor inicial de N0
```

```
for i = 1:length(N0_values)
    N0 = N0_values(i); % Valor inicial actual
    [t, N] = ode45(dNdt, tspan, N0); % Integració numèrica
    plot(t, N, 'LineWidth', 2, 'DisplayName', sprintf('N0 = %.1f', N0)); % Gràfic amb etiqueta
end

hold off;
```

El gràfic mostra el comportament de la poblaciuó de pòlips en funció de les condicions inicials (notar que $N = 0$ no és pas un punt d'equilibri en aquest exemple, a diferència d'altres vistos a classe):



■

Ex. 10 — Població Mundial: Suposem que la població mundial actual és de $p_0 = 8 \times 10^9$ habitants i que la població dins de t anys està donada per la llei de creixement exponencial:

$$p(t) = p_0\, e^{0.023t}.$$

Trobeu la població mitjana de la Terra en els pròxims 30 anys segons aquest model.

Solució (Ex. 10) — La població mitjana en un interval de temps $[a, b]$ es calcula com:

$$< p >= \frac{1}{b-a} \int_a^b p(t)\, dt.$$

En aquest cas, $a = 0$ i $b = 30$ anys. Substituïm aquests valors a l'expressió:

$$< p >= \frac{1}{30}\int_0^{30}\left(8\times 10^9\, e^{0.023t}\right) dt.$$

Traiem $p_0 = 8\times 10^9$ fora de la integral, ja que és constant:

$$\begin{aligned} < p > &= \frac{8\times 10^9}{30}\int_0^{30} e^{0.023t}\, dt \\ &= \frac{8\times 10^9}{30}\left[\frac{1}{0.023}e^{0.023t}\right]_0^{30} \\ &= \frac{8\times 10^9}{30}\frac{1}{0.023}\left(e^{0.023\cdot 30} - e^{0.023\cdot 0}\right) = 1.152\times 10^{10} \end{aligned}$$

Per tant, la població mitjana de la Terra en els pròxims 30 anys és:

$$\boxed{1.152\times 10^{10} \text{ habitants.}}$$

Ex. 11 — Model de teoria de biogeografia d'illes: *(JVF,Sem24)*
La teoría de la biogeografía d'illes va ser introduïda per Robert MacArthur i E. O. Wilson[1]. Descriu l'origen i manteniment de la diversitat d'espècies en illes oceàniques, però pot ser extesa a hàbitats isolats, com per exemple masses boscoses emmig de terrenys agrícoles. En la seva expressió més simple, el número d'espècies que una illa pot suportar és funció de la superfície de l'illa i la seva proximitat a altres illes que la nodreixin de forma estable de noves espècies per immigració. El nombre en equlibri d'espècies que la illa podrà suportar és funció del nombre d'espècies que hi poden immigrar i del balanç entre immigració i extinció.
Considera una illa on la dinàmica del nombre d'espècies, $S(t)$, està descrita per l'equació diferencial següent:

$$\frac{dS}{dt} = \underbrace{k_1(P-S)}_{\text{Imm}} - \underbrace{k_2 S}_{Ext},$$

on el temps és donat en anys, P és el nombre total d'espècies en illes properes que poden immigrar a la nostra, $k_1 > 0$ és la taxa d'immigració efectiva i $k_2 > 0$ és la taxa d'extinció efectiva. Si $k_1 = 0.01$ i $k_2 = 0.02$ anys^{-1} i $P = 1000$ espècies potencials:

1. Resol l'equació diferencial per trobar $S(t)$ després d'un fenòmen volcànic que ha exterminat totes les espècies de l'illa. És a dir, donades les condicions inicials $S(0) = S_0$.
2. Estudia l'equilibri del sistema. Racionalitza el valor de l'equilibri trobat respecte les corbes d'immigració i extinció, considerant les expressions separades per les velocitats de canvi d'aquestes dues dinàmiques.
3. Determina el temps $t_{1/4}$ necessari perquè el nombre d'espècies a l'illa sigui una quarta part del seu màxim potencial, $S(t_{1/2}) = \frac{P}{4}$. Pot la població arribar a la meitat del seu valor potencial $S(t_{1/2}) = \frac{P}{2}$?

Solució (Ex. 11) — Resolem els diferents apartats:

1. Resolució de l'equació diferencial:

$$\frac{dS}{dt} = k_1 P - (k_1 + k_2)S.$$

Separem variables:

$$\frac{dS}{k_1 P - (k_1 + k_2)S} = dt.$$

Reescrivim el denominador per simplificar:

$$\frac{dS}{k_1 P - (k_1 + k_2)S} = \frac{1}{k_1 + k_2} \cdot \frac{dS}{\frac{k_1 P}{k_1 + k_2} - S}.$$

Per simplificar la notació, prenem $K = \frac{k_1 P}{k_1 + k_2}$. L'equació queda:

$$\frac{dS}{K - S} = (k_1 + k_2)dt.$$

Integrarem amb els límits inicials $S(0) = 0$ i $S(t)$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{S(t)} \frac{dS}{K - S} &= \int_0^t (k_1 + k_2)dt \\
-\ln|K - S|\Big|_0^{S(t)} &= (k_1 + k_2)t\Big|_0^t \\
-\ln|K - S(t)| + \ln|K| &= (k_1 + k_2)t \\
\ln\left(\frac{K}{K - S(t)}\right) &= (k_1 + k_2)t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{K}{K-S(t)} &= e^{(k_1+k_2)t}\\ S(t) &= K - Ke^{-(k_1+k_2)t}.\end{aligned}$$

La solució final, un cop substituït el valor de K, és:

$$S(t) = \frac{k_1 P}{k_1+k_2}\left(1-e^{-(k_1+k_2)t}\right). \tag{8}$$

Substituïm els valors donats: $k_1 = 0.01$, $k_2 = 0.02$, $P = 1000$:

$$S(t) = \frac{0.01\cdot 1000}{0.01+0.02}\left(1-e^{-(0.01+0.02)t}\right) = 333.\overline{3}\left(1-e^{-0.03t}\right)$$

2.Estudi de l'equilibri del sistema:

En equilibri, $\frac{dS}{dt} = f(S) = 0$. Això implica:

$$f(S) = k_1(P-S) - k_2 S = 0.$$

Resolent per S:

$$S_{\text{eq}} = \frac{k_1 P}{k_1+k_2}.$$

Substituïm els valors donats: $k_1 = 0.01$, $k_2 = 0.02$, $P = 1000$:

$$S_{\text{eq}} = \frac{0.01\cdot 1000}{0.01+0.02} = 333\,\text{espècies}$$

Avaluem si l'equilibri és estable o inestable avaluant la derivada $f'(S)$:

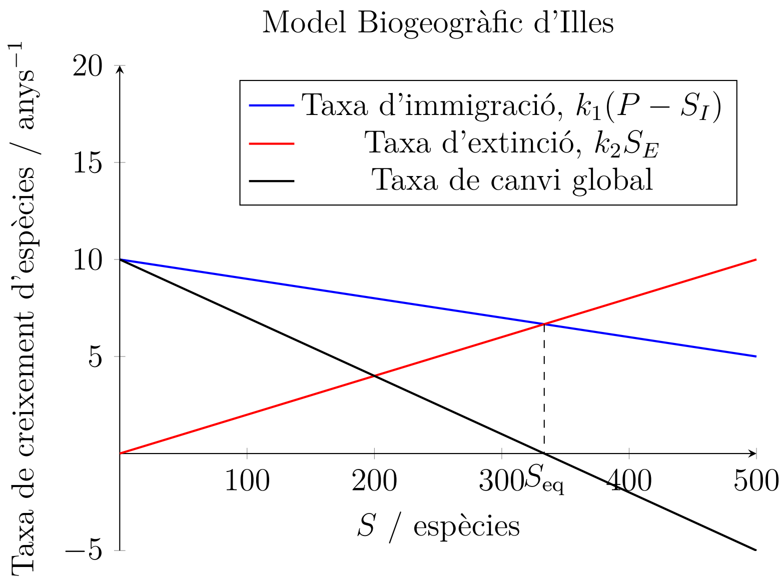
$$f'(S) = -k_1 - k_2 < 0$$

Per tant, l'equilibri és estable.

Una altra manera de veure-ho és analitzant el sentit biològic de l'expressió inicial. L'equilibri S_{eq} es troba quan la taxa d'immigració és igual a la taxa d'extinció:

$$k_1(P - S_{\text{eq}}) = k_2 S_{\text{eq}}.$$

La representació de les dues funcions mostra el significat del valor de l'equilibri, i també l'explicació del perquè es tracta d'un equilibri estable. Com veiem al gràfic, si S es fa més gran que S_{eq}, l'extinció guanya la immigració i la biodiversitat es redueix tornant a aquest valor d'equilibri. De manera anàloga, si la quantitat d'espècies S es fa menor que S_{eq}, la biodiversitat augment per tal de retornar a l'equilibri.



Finalment, també observem que el punt trobat és estable si avaluem la funció $S(t)$ (Eq. 8) per a valors grans del temps:

$$S_{\text{eq}} \lim_{t\to\infty} S(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{k_1 P}{k_1 + k_2}\left(1 - e^{-(k_1+k_2)t}\right) = \frac{k_1 P}{k_1 + k_2}(1 - 0) = \frac{k_1 P}{k_1 + k_2} = S_{\text{eq}}$$

3. Temps per assolir la quarta part del valor màxim:
Substituïm $S(t_{1/4}) = \frac{P}{4}$ a la solució general:

$$\frac{P}{4} = \frac{k_1 P}{k_1 + k_2}\left(1 - e^{-(k_1+k_2)t_{1/4}}\right).$$

Simplifiquem:

$$\frac{1}{4} = \frac{k_1}{k_1 + k_2}\left(1 - e^{-(k_1+k_2)t_{1/4}}\right).$$

Resolent per $t_{1/4}$:

$$1 - e^{-(k_1+k_2)t_{1/4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{k_1 + k_2}{k_1},$$

$$e^{-(k_1+k_2)t_{1/4}} = 1 - \frac{k_1 + k_2}{4k_1},$$

$$t_{1/4} = -\frac{1}{k_1 + k_2} \ln\left(1 - \frac{k_1 + k_2}{4k_1}\right).$$

Substituïm els valors donats: $k_1 = 0.01$, $k_2 = 0.02$, $P = 1000$:

$$t_{1/4} = -\frac{1}{0.01+0.02}\ln\left(1-\frac{0.01+0.02}{4\cdot 0.01}\right) = -\frac{1}{0.03}\ln\left(1-\frac{0.03}{0.04}\right).$$

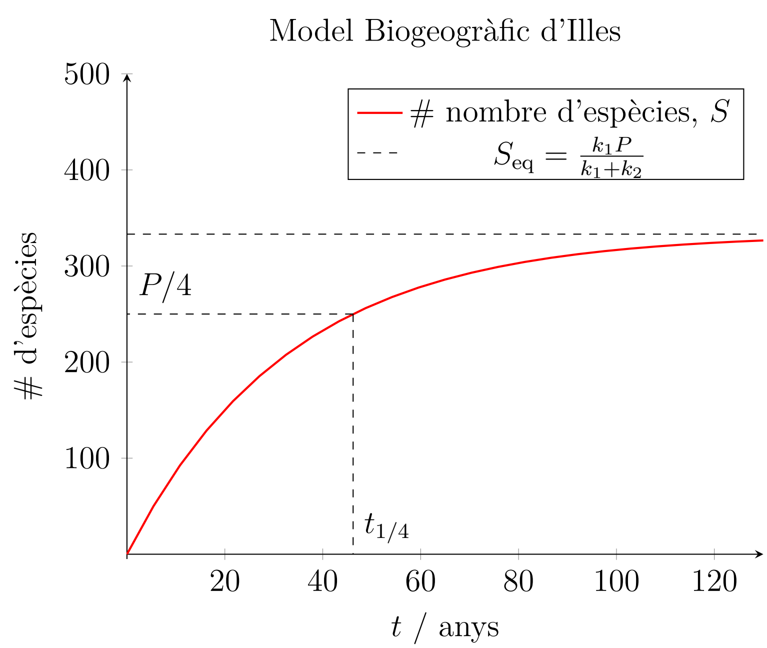
$$t_{1/4} = -\frac{1}{0.03}\ln\left(0.25\right).$$

Calculant:

$$t_{1/4} \approx \frac{1}{0.03}\cdot 1.386 \approx 46.2.$$

Per tant, el temps necessari per assolir una quarta part del valor màxim és aproximadament $t_{1/4} \approx 46.2$ anys.

No és possible arribar a la meitat del seu màxim potencial ($P/2 = 500$ espècies en aquest cas en que partim d'una biodiversitat inicial $S_0 = 0$ i només podem assolir el valor del punt d'equilibri $S_{\text{eq}} = 333$ espècies. Si l'illa hagués partit d'un nombre total d'espècies superior al valor de S_{eq}, hauria també evolucionat cap a aquest valor i, en aquest cas, sí que hagués arribat en algun moment a $S = P/2$. Igualment, és fàcil veure que s'arriba a $S = P$ si no hi hagués taxa d'extinció ($k_2 = 0$).



■

2 Fonaments i espais vectorials

2.1 Els nombres reals

Ex. 12 — Escriu una equació de cada cas:

(1) Escriu equacions polinòmiques amb coeficients enters que tinguin com a solucions nombres naturals, enters, racionals, irracionals (*algebraics*)

(2) Escriu una equació polinòmica amb coeficients enters que tingui com a solució el número π (*transcendent*)

(3) Troba una equació polinòmica amb coeficients constants sense cap nombre real com a solució

Solució (Ex. 12) — (1) Intuitivament, una equació algebraica és aquella en la que es pot trobar la resposta usant operacions algebraiques: addició, multipliació i extracció d'arrel.

$$2x - 1 = 0,\ x = \frac{1}{2}$$

o bé

$$x^2 - 2 = 0,\ x = \pm\sqrt{2}$$

(2) Una equació transcendent, "transcedeix" l'àlgebra i s'han d'usar altres operacions. Per exemple, les funcions exponencials, algorítmiques o trigonomètriques. Per definició, un número real α és transcendent si no és algebraic. És a dir, si no existeix cap polinomi amb coeficients enters de manera que α en sigui una arrel. Per tant, la pregunta no té resposta, ja que no podem construir un polinomi amb solució π. La demostració és complicada i la deixo com a lectura avançada.

(3) Ens passarà sempre que la solució impliqui haver de trobar l'arrel parella d'un número negatiu:

$$x^2 + 1 = 0,\ x = \pm\sqrt{-1}$$

que en el conjunt dels reals no té solució. Caldria resoldre-la en el conjunt dels números complexos:

$$x^2 + 1 = 0,\ x = \pm i$$

■

3 Càlcul Matricial

3.1 Matrius

Ex. 13 — Determineu el valor de m i p, perquè es pugui realitzar el producte següent:

$$(P^t \cdot Q^t) \cdot M^t$$

si $M_{2\times 3}$, $P_{m\times p}$, $Q_{3\times 4}$ i el resultat del producte és una matriu quadrada.

Solució (Ex. 13) — Per resoldre'l primer tenim en compte que:

$$\begin{aligned} M_{2\times 3} &\Rightarrow M^t_{3\times 2} \\ P_{m\times p} &\Rightarrow P^t_{p\times m} \\ Q_{3\times 4} &\Rightarrow Q^t_{4\times 3} \end{aligned}$$

Amb la qual cosa:

$$(P^t_{p\times m} \cdot Q^t_{4\times 3}) \cdot M^t_{3\times 2} = A_{p\times 2}$$

Com que ens diuen que A és quadrada, obtenim $p = 2$ i, a més, és fàcil veure que perquè el producte es pugui realitzar $m = 4$. ■

Ex. 14 — Aïlleu X, si és possible, en les equancions següents, suposant que totes les matrius són quadrades del mateix ordre i invertibles:

(a) $3X^t + (XA)^t + I = B$

(b) $(XA)^{-1} = 2I + B$

(c) $AX + C = BX$

Solució (Ex. 14) — Usant les propietats de les operacions amb matrius:

(a) $3X^t + (XA)^t + I = B$

$$\begin{aligned} 3X^t + (XA)^t + I &= B \\ (3X)^t + (XA)^t &= B - I \\ (3X + XA)^t &= B - I \\ 3X + XA &= (B - I)^t \\ 3XI + XA &= (B - I)^t \\ X(3I + A) &= (B - I)^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X\underbrace{(3I+A)(3I+A)^{-1}}_{I} &= (B-I)^t(3I+A)^{-1} \\ X &= (B-I)^t(3I+A)^{-1} \end{aligned}$$

■

(b) $(XA)^{-1} = 2I + B$

$$\begin{aligned} (XA)^{-1} &= 2I+B \\ XA &= (2I+B)^{-1} \\ X &= (2I+B)^{-1}A^{-1} \end{aligned}$$

■

(c) $AX + C = BX$

$$\begin{aligned} AX + C &= BX \\ AX - BX &= C \\ (A-B)X &= C \\ X &= (A-B)^{-1}C \end{aligned}$$

■

3.2 Valors i Vectors propis

Ex. 15 — Vectors i valors propis en una matriu 2×2: Trobar els valors i vectors propis de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Solució (Ex. 15) — Trobem primer el polinomi característic de la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Perquè això tingui solució diferent de la trivial ($(x,y) = (0,0)$) cal que el determinant secular sigui igual a zero:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, cal solucionar el polinomi característic de la matriu:

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

que té per solució els valors propis $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -2$. Calculem ara els vectors propis:

$\boxed{\lambda_1 = 2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2x \\ 3x - y = \qquad 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + \;\; y = 0 \\ \;3x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} * \; x = \alpha, y = \alpha \end{cases}$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_1 = 2$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_2 = -2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x + y = -2x \\ 3x - y = \qquad -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} * \; x = \alpha, y = -3\alpha \end{cases}$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_2 = -2$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

■

Ex. 16 — Vectors i valors propis en una matriu 3×3: Calcula els valors propis i vectors propis de la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solució (Ex. 16) — Trobem primer el polinomi característic de la matriu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Perquè això tingui solució diferent de la trivial ($(x, y, z) = (0, 0, 0)$) cal que el determinant secular sigui igual a zero:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, cal solucionar el polinomi característic de la matriu:

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 3 = 0$$

Per Ruffini obtenim el primer dels coeficients:

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 6 & -10 & 3 \\ 3 & & -3 & 9 & -3 \\ \hline & -1 & 3 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Per tant:

$$-\lambda^3+6\lambda^2-10\lambda+3 = 0-(\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda+1) = (\lambda-3)(\lambda-\frac{3-\sqrt{5}}{2})(\lambda-\frac{\sqrt{5}+3}{2}) = 0$$

Per a cada valor propi, trobem els vectors propis associats:

$\boxed{\lambda_1 = 3}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3x \\ x + 2y = 3y \\ -x + y + 2z = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \{* \; x = \alpha, y = \alpha, z = 0$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_1 = 3$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x - y + 4z = 3x \\ 3x + 2y - z = 3y \\ 2x + y - z = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 4z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 4z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{ * \; x = \alpha, y =$$

Així doncs, un vector propi associat a $\lambda_2 = 3$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_3 = -2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x - y + 4z = -2x \\ 3x + 2y - z = -2y \\ 2x + y - z = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y + 4z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y + 4z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{ * \; x = -\alpha, y$$

Finalment, doncs, un vector propi associat a $\lambda_3 = -2$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El determinant de la matriu original és justament el producte dels tres valors propis:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -6 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

i la traça de la matriu és la suma dels tres valors propis:

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2$$

Els tres vectors són L.I., ja que

$$\det\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 4 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = -6 \neq 0$$

De fet, en no haver cap valor propi igual a 0, la matriu formada pels tres vectors propis ha de ser per força invertible i, per tant, el seu determinant diferent de zero o, el que és el mateix, els vectors propis són L.I.
■

Ex. 17 — Calcula $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}^6$ usant el concepte de valors i vectors propis de la matriu.

Solució (Ex. 17) — Sabem que si una matriu A és diagonalitzable, podem expressar-la com

$$D = P^{-1}AP$$

on D és una matriu diagonal amb els valors propis de la matriu A i P és una matriu quines columnes representen els vectors propis associats a cada valor propi.
Si usem aquesta expressió, fer l'operació és senzilla. Efectivament:

$$\left(PDP^{-1}\right)^6 = A^6$$

o, el que és el mateix:

$$\begin{aligned} PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} &= A^6\\ PD^6P^{-1} &= A^6 \end{aligned} \tag{9}$$

Anem, doncs, a cercar els valors i vectors propis de la matriu. Aquests seran els valors que compleixin:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

Perquè això tingui solució diferent de la trivial ($(x,y) = (0,0)$) cal que el determinant secular sigui igual a zero:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 3 & -1-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

Per tant, cal solucionar el polinomi característic de la matriu:

$$(1-\lambda)(-1-\lambda)-3=0$$

d'on $\lambda = \pm 2$.
Un cop tenim els valors propis, trobem els vectors propis que hi estan vinculats:

$\boxed{\lambda_1 = 2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\{* \ x+y=2x, 3x-y=2y \Rightarrow \{* \ -x+y=0, x-y=0 \Rightarrow x=y$$

Per tant, un vector propi[4] associat a $\lambda_1 = 2$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_1 = -2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\{* \ x+y=-2x, 3x-y=-2y \Rightarrow 3x+y=0$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_2 = 2$ és $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Construïm ara l'expressió de l'Eq. 9:

$$\begin{aligned} A^6 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^6 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[4] De fet, el conjunt de vectors propis associats a un determinat valor propi forma un subespai vectorial.

Sabries dir d'on prové el fet que, en aquest cas particular, la potència de la matriu sigui idèntica a la potència de la seva matriu semblant diagonal?
■

Ex. 18 — Vectors i valors propis en una matriu 3×3: Calcula els valors propis i vectors propis de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Quina relació hi ha entre els valors propis i el determinant i la traça de la matriu original? Comprova que els tres vectors propis són L.I.

Solució (Ex. 18) — Trobem primer el polinomi característic de la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Perquè això tingui solució diferent de la trivial ($(x, y, z) = (0, 0, 0)$) cal que el determinant secular sigui igual a zero:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, cal solucionar el polinomi característic de la matriu:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

Per Ruffini obtenim el primer dels coeficients:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

Per tant:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 6) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

Un cop tenim els valors propis $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ i $\lambda_3 = -2$, trobem els vectors propis que hi estan vinculats:

$\boxed{\lambda_1 = 1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x - \ y + 4z = x \\ 3x + 2y - \ z = \ y \\ 2x + \ y - \ z = \ z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 4z = 0 \\ 3x + y - \ z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 4z = 0 \\ 3x \quad + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{ * \ x = -\alpha, y = 4\alpha,$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_1 = 1$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_2 = 3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x - \ y + 4z = 3x \\ 3x + 2y - \ z = \ 3y \\ 2x + \ y - \ z = \ 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 4z = 0 \\ 3x - y - \ z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 4z = 0 \\ 3x - y - \ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{ * \ x = \alpha, y =$$

Així doncs, un vector propi associat a $\lambda_2 = 3$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_3 = -2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x - \ y + 4z = -2x \\ 3x + 2y - \ z = \ -2y \\ 2x + \ y - \ z = \ -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - \ y + 4z = 0 \\ 3x + 4y - \ z = 0 \\ 2x + \ y + \ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y + 4z = 0 \\ -y + \ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{ * \ x = -\alpha, y$$

Finalment, doncs, un vector propi associat a $\lambda_3 = -2$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El determinant de la matriu original és justament el producte dels tres valors propis:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -6 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

i la traça de la matriu és la suma dels tres valors propis:

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2$$

Els tres vectors són L.I., ja que

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -6 \neq 0$$

De fet, en no haver cap valor propi igual a 0, la matriu formada pels tres vectors propis ha de ser per força invertible i, per tant, el seu determinant diferent de zero o, el que és el mateix, els vectors propis són L.I.

■

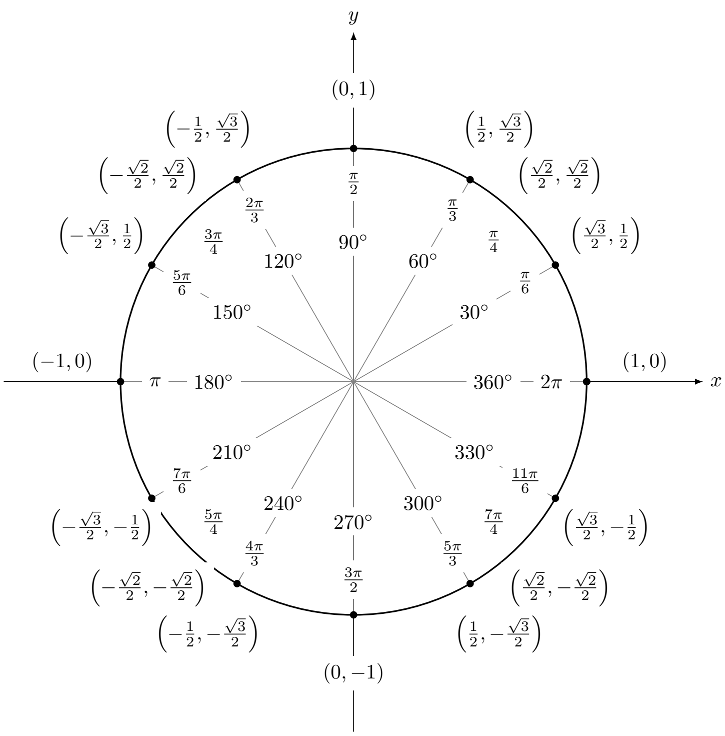


Figura 4: Esquema dels valors de $\sin x$ i $\cos x$ per a alguns valors d'angles.

4 Material pràctic

- La Figura 4 conté informació sobre els sinus i cosinus d'alguns dels valors d'angles més comuns en els exercicis de l'assignatura.

5 Origen dels exercicis

Els exercicis d'aquesta recopilació tenen oígens diversos. Alguns estan identificats a l'enunciat amb unes sigles que indiquen:

Autors:

MC Montserrat Corbera.

JVF Jordi Villà-Freixa.

CGPT Adaptats de Chat GPT[2].

Exàmens:

2on24 2on Examen parcial de models continus, curs 2024-2025.

Sem24 Examen semestral, curs 2024-2025.

recu24 Examen recuperació, curs 2024-2025.

Si no hi ha orígen explícit implica que s'ha perdut. En cas de detectar alguna errada o mala informació es prega que contacteu l'autor.

Referències

[1] Robert H. MacArthur and Edward O. Wilson. An equilibrium theory of insular zoogeography. *Evolution*, 17(4):373–387, December 1963.

[2] OpenAI. Chatgpt: Language model by openai, 2023.

[3] Gerda de Vries, Thomas Hillen, Mark Lewis, Johannes Müller, and Birgitt Schönfisch. *A course in mathematical biology: quantitative modeling with mathematical and computational methods*. Number 12 in Mathematical modeling and computation. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa, 2006.