

Exercicis Resolts

MATEMÀTIQUES

Graus en Biologia i Biotecnologia



*

Jordi Villà i Freixa

Darrera modificació: 3 de novembre de 2025

Taula de continguts

1	Models matemàtics	4
1.1	Models discrets	4
1.1.1	Models unidimensionals	4
	Exercici 1 <i>Creixement exponencial de bacteris</i>	4
	Exercici 2 <i>Model Malthus amb i sense aportacions</i>	4
	Exercici 3 <i>Corfú</i>	6
	Exercici 4 <i>Població país europeu (adaptat de [3])</i>	9
	Exercici 5 <i>Extinció i recuperació de la població de girafes</i>	10
	Exercici 6 <i>Població que triplica cada 5 mesos</i>	11
	Exercici 7 <i>Model de Beverton-Holt amb protozous</i>	12
	Exercici 8 <i>Comparativa de models de creixement poblacional</i>	14
	Exercici 9 <i>Model de Ricker (Salmons del Pacífic)</i>	17
	Exercici 10 <i>Evolució de la població de la Xina</i>	20

*En cas de detectar una errada o fer un suggeriment, si us plau, contacteu-me: jordi.villa@uvic.cat

Exercici 11	<i>Model discret d'una població animal</i>	21
Exercici 12	<i>Prescripció de medicaments</i>	22
Exercici 13	<i>Dinàmica de poblacions segons Beverton–Holt</i>	23
Exercici 14	<i>Culti bacterians - creixement i antibiòtic</i>	25
Exercici 15	<i>Model logístic discret</i>	27
Exercici 16	<i>Model de Ricker per peixos</i>	28
1.1.2	Models multidimensionals	29
Exercici 17	<i>Població d'isards (Leslie)</i>	29
Exercici 18	<i>Població de rosegadors (Leslie)</i>	31
Exercici 19	<i>Experiència de tria de camins per ratolins</i>	33
Exercici 20	<i>Leslie 3 classes</i>	35
Exercici 21	<i>Leslie 3 classes - rossegadors origin</i>	36
Exercici 22	<i>Desplaçament de lèmurs entre tres boscos</i>	38
1.2	Models continus	39
Exercici 23	<i>Modelització de la cria de truites</i>	39
Exercici 24	<i>Modelització del creixement microbiana segons Monod</i>	40
Exercici 25	<i>Modelització de la concentració dun fàrmac en sang</i>	44
Exercici 26	<i>Modelització del creixement de bacteris en un cultiu de laboratori</i>	46
Exercici 27	<i>Modelització de la temperatura de la superfície del mar</i>	48
Exercici 28	<i>Creixement bacterià en un medi limitat</i>	51
Exercici 29	<i>Model EMAX per a l'efecte d'un agonista</i>	54
Exercici 30	<i>Hidròlisi de l'aspirina</i>	57
Exercici 31	<i>Desenvolupament de Drosophila melanogaster en funció de la temperatura</i>	59
Exercici 32	<i>Model de Melica et al.</i>	62
Exercici 33	<i>Població Mundial</i>	65
Exercici 34	<i>Model de teoria de biogeografia d'illes</i>	66
2	Fonaments i espais vectorials	71
2.1	Els nombres reals	71
	Exercici 35 <i>Equacions algebraiques, transcendents i sense solució real</i>	71

3	Càlcul Matricial	72
3.1	Matrius	72
	Exercici 36 <i>Producte de matrius</i>	72
	Exercici 37 <i>Equacions matricials</i>	72
3.2	Valors i Vectors propis	73
	Exercici 38 <i>Vectors i valors propis en una matriu 2×2</i> . . .	73
	Exercici 39 <i>Vectors i valors propis en una matriu 3×3</i> . . .	74
	Exercici 40 <i>Potència d'una matriu</i>	77
	Exercici 41 <i>Vectors i valors propis en una matriu 3×3</i> . . .	79
4	Material pràctic	82
5	Origen dels exercicis	82

1 Models matemàtics

1.1 Models discrets

1.1.1 Models unidimensionals

Ex. 1 — Creixement exponencial de bacteris: Estem estudiant una població de bacteris que es divideixen cada 20 minuts i que a l'inici de l'experiment es redueix a dos bacteris. En quin moment el nombre de bacteris supera les 60 unitats? Què li ocorre al tamany de la població en el futur?

Solució (Ex. 1) — Si x_k és el nombre de bacteris després de k períodes de divisió ($20k$ minuts), es té

$$x_k = 2^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Volem el valor més petit de k tal que $x_k \geq 60$:

$$2^{k+1} \geq 60 \iff (k+1) \ln 2 \geq \ln 60 \iff k \geq \frac{\ln 60}{\ln 2} - 1 \approx 4.91$$

Per tant, el primer valor enter és $k = 5$, és a dir, als 100 minuts:

$$x_4 = 2^5 = 32 < 60, \quad x_5 = 2^6 = 64 \geq 60$$

Així, el nombre de bacteris supera les 60 unitats als 100 minuts. A més, com que $x_k = 2^{k+1}$, quan $k \rightarrow \infty$, $x_k \rightarrow \infty$ i la població creix sense límit. ■

Ex. 2 — Model Malthus amb i sense aportacions: (CGPT)

Considerem una població de ratolins que es troba en una illa deserta. La població inicial de ratolins és de 100 individus. La taxa de creixement natural anual és del 30% ($r = 0.30$).

Es vol determinar el temps necessari perquè la població arribi a 1 milió de ratolins en dos casos:

- **Sense aportacions externes:** Només es considera el creixement natural de la població.
- **Amb aportacions externes:** Cada any arriben 20 ratolins nous a més del creixement natural.

Solució (Ex. 2) — Sense Aportacions Externes

La població en temps t es modela amb l'equació de creixement exponencial:

$$P(t) = P_0 \cdot (1 + r)^t$$

ja que cada pas implica:

$$P(t + 1) = P(t) \cdot (1 + r)$$

On:

- $P_0 = 100$ (població inicial)
- $r = 0.30$ (taxa de creixement)
- $P(t) = 1,000,000$ (població objectiu)

Per trobar el temps t necessari per arribar a 1 milió de ratolins, resollem:

$$1,000,000 = 100 \cdot (1.30)^t$$

$$10,000 = (1.30)^t$$

Aplicant logaritmes:

$$\ln(10,000) = t \cdot \ln(1.30)$$

$$t = \frac{\ln(10,000)}{\ln(1.30)} \approx \frac{9.21034}{0.26236} \approx 35.11$$

Per tant, el temps necessari és aproximadament **35 anys**.

Amb Aportacions Externes

Amb aportacions externes, la població es modela amb l'equació:

$$P(t + 1) = P(t) \cdot (1 + r) + A$$

o bé

$$P(t) = P_0 \cdot (1 + r)^t + A \cdot \frac{(1 + r)^t - 1}{r}$$

On:

- $P_0 = 100$ (població inicial)
- $r = 0.30$ (taxa de creixement)
- $A = 20$ (aportacions externes)
- $P(t) = 1,000,000$ (població objectiu)

Utilitzant un enfocament iteratiu, s'ha de trobar el temps t per al qual la població supera 1 milió de ratolins. En aquest cas, el càlcul és:

$$P(t) = 100 \cdot (1.30)^t + 20 \cdot \frac{(1.30)^t - 1}{0.30}$$

Després de calcular iterativament, es troba que el temps necessari és aproximadament **34 anys**.

El següent gràfic mostra l'evolució de la població amb i sense aportacions externes al llarg del temps:

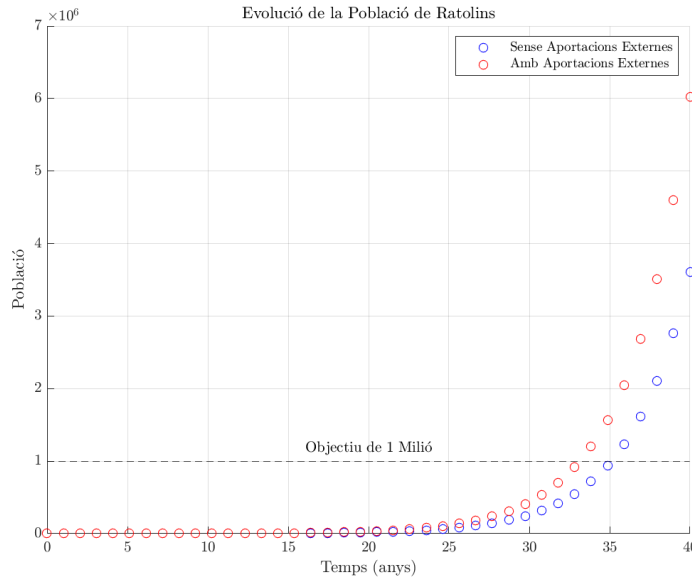


Figura 1: Evolució de la població de ratolins amb i sense aportacions externes. La línia horitzontal indica l'objectiu de 1 milió de ratolins.



Ex. 3 — Corfú: (*JVF, 1er25*) L'any 1930, l'illa grega de Corfú tenia una població estimada de 18654 habitants i un creixement cada 10 anys del 15.6%.

1. Quina hauria estat la població estimada el 1970 si s'hagués mantingut aquest creixement cada dècada?
2. Dècades després, el famós naturalista Gerald Durrell, qui havia viscut a l'illa quan era petit, va observar que la població real era inferior a la

prevista inicialment:

Any	Població real
1930	18654
1940	22172
1950	23868
1960	27202
1970	29669

En Gerald va proposar un nou model segons el qual hi havia un flux d'emigració des de l'illa cap a la Grècia continental de $m = 500$ habitants per dècada. Troba la població estimada el 1970 segons aquest nou model.

3. Troba l'equilibri per al model amb emigració i interpreta el resultat respecte el model sense emigració.

Nota: en Gerald Durrell va viure, certament, a Corfú en la dècada dels anys 30, però el suggeriment de que va fer aquest model és fictici.

Solució (Ex. 3) — 1. Sense migració:

El model discret maltusià és

$$N_{t+1} = aN_t, \quad \text{amb } a = 1 + r = 1.156.$$

Per a $N_0 = 18654$ i $t = 4$ (de 1930 a 1970):

$$N_t = a^t N_0 = 1.156^4 \cdot 18654 \approx 33312.$$

Per tant, la població estimada el 1970 seria d'uns **33 312 habitants**.

2. Amb emigració constant:

$$N_{t+1} = aN_t + m, \quad m = -500.$$

La solució general és

$$N_t = a^t \left(N_0 - \frac{m}{1-a} \right) + \frac{m}{1-a}.$$

Substituint els valors:

$$N_t = 1.156^t \left(18654 - \frac{-500}{1-1.156} \right) + \frac{-500}{1-1.156}.$$

Com que $\frac{m}{1-a} = \frac{-500}{-0.156} = 3205.13$, resulta:

$$N_t = 1.156^t(18654 - 3205.13) + 3205.13.$$

Per a $t = 4$:

$$N_4 = 1.156^4(15448.87) + 3205.13 \approx 30794.$$

Així, el model amb emigració dona una població estimada d'uns **30 794 habitants** el 1970.

Any	Dades reals	Model sense migració	Model amb emigració
1930	18654	18654	18654
1940	22172	21564	21064
1950	23868	24928	23850
1960	27202	28817	27071
1970	29669	33312	30794

Es pot observar que el model amb emigració s'ajusta millor a la tendència observada.

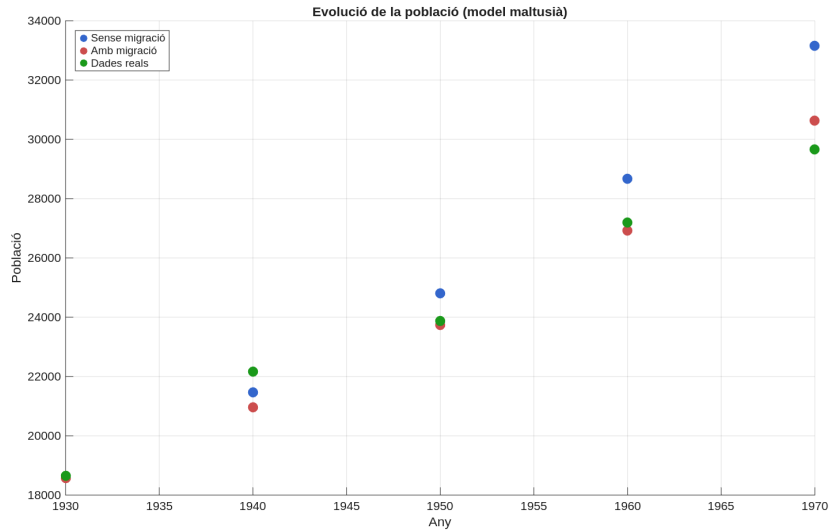


Figura 2: Comparació entre dades reals i models de creixement poblacional a Corfú (Exercici 3).

3.Punt d'equilibri:

$$N^* = \frac{m}{1-a} = \frac{-500}{1-1.156} = 3205.13.$$

Cal notar que l'equilibri depèn no només de la taxa de creixement a , sinó també del flux migratori m . En aquest cas, l'equilibri és positiu, indicant que la població es mantindria en uns 3205 habitants a llarg termini si les condicions del model es mantinguessin. En canvi, en el model sense emigració, la població creixeria indefinidament sense arribar a un equilibri finit.



Ex. 4 — Població país europeu (adaptat de [3]): Escriu un model senzill de naixements i defuncions discret que descrigui la situació següent: Els individus moren amb una taxa δ i neixen amb una taxa μ . A 31 de desembre de 2023, el país tenia una població de 82 037 000 habitants. L'any 2024 hi va haver 770 748 naixements vius i 846 330 defuncions.

- Troba les taxes δ i μ .
- Què passarà amb la població del país en el futur segons aquest model?
- Com s'hauria d'alterar el model perquè fos més realista?

Solució (Ex. 4) — El model discret és

$$x_{k+1} = (1 + \mu - \delta) x_k,$$

on μ és la taxa de natalitat i δ la taxa de mortalitat.

Les taxes són

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{770\,748}{82\,037\,000} \approx 0.009395 \quad (0.94\%), \\ \delta &= \frac{846\,330}{82\,037\,000} \approx 0.010316 \quad (1.03\%).\end{aligned}$$

Per tant, $\mu - \delta \approx -0.000921$ i

$$R = 1 + \mu - \delta \approx 0.99908 < 1,$$

de manera que la població decreix molt lentament (aprox. -0.092% anual).

Per fer el model més realista caldria introduir:

- migració neta (M_k) afegida a l'equació,
- estructura per edats (model de Leslie),
- taxes variables en el temps ($\mu(t), \delta(t)$),
- factors socioeconòmics i estocàstics.



Ex. 5 — Extinció i recuperació de la població de girafes:

L'any 1980 s'estima que hi havia uns $N_{1980} = 155\,000$ exemplars de girafes a l'Àfrica. Vint anys més tard (any 2000), la població havia disminuït fins a $N_{2000} = 80\,000$.

1. Suposant que aquest ritme de decreixement es manté, calculeu el nombre esperat de girafes l'any 2020.
2. Gràcies a tasques de conservació, la població el 2020 és de $N_{2020} = 115\,000$. Suposant que aquest nou ritme de creixement es manté, en quin any s'arribarà als 200 000 exemplars?
3. Si a més s'hi reintrodueixen M girafes cada 20 anys, escriviu el nou model discret de població.

Solució (Ex. 5) —

- Ritme d'extinció: $r_{\text{decline}} = N_{2000}/N_{1980} \approx 0.516$. Població esperada el 2020: $N_{2020}^{(a)} = N_{2000} \cdot r_{\text{decline}} \approx 41\,300$.
- Ritme de creixement observat: $r_{\text{growth}} = N_{2020}/N_{2000} \approx 1.4375$. Per assolir 200 000: $200\,000 = N_{2020} \cdot r_{\text{growth}}^k \Rightarrow k \approx 2.9$. Cada pas són 20 anys any $2020 + 3 \times 20 = 2080$.
- Nou model: $P_{k+1} = r_{\text{growth}} P_k + M$.

Un exemple de codi MATLAB per generar els resultats és el següent:

```
% GirafesModel.m
% Model d'extinció i recuperació de la població de girafes

clear; clc;

% Dades
N1980 = 155000;
N2000 = 80000;
N2020_real = 115000;
```

```

target = 200000;

% a) Ritme d'extinció i estimació per 2020
r_decline = N2000 / N1980;
N2020_pred = N2000 * r_decline;

fprintf('--- Extinció ---\n');
fprintf('Ritme d\'extinció r = %.3f\n', r_decline);
fprintf('Població esperada el 2020: %.0f girafes\n\n', N2020_pred);

% b) Nou ritme de creixement i any objectiu
r_growth = N2020_real / N2000;
steps_needed = log(target / N2020_real) / log(r_growth);
steps_needed_ceil = ceil(steps_needed);
year_reach = 2020 + 20 * steps_needed_ceil;

fprintf('--- Recuperació ---\n');
fprintf('Ritme de creixement r = %.3f\n', r_growth);
fprintf('S\'arribarà als 200.000 exemplars cap a l\'any %d.\n\n', year_reach);

% c) Nou model amb reintroducció
syms Pk M
Pk1 = r_growth * Pk + M;
fprintf('Model discret: P_{k+1} = %.3f * P_k + M\n', r_growth);

```



Ex. 6 — Població que triplica cada 5 mesos: Una determinada població triplica la seva dimensió cada 5 mesos i inicialment està formada per $P_0 = 60$ individus.

1. Calculeu quants individus hi haurà al cap d'1,5 anys i al cap de 2,5 anys.
2. Determineu quant temps ha de passar perquè la població superi 1 milió d'individus.

Solució (Ex. 6) —

- Cada 5 mesos la població es multiplica per 3: $P_n = P_0 \cdot 3^n$. 1,5 anys = 18 mesos $n = 3$: $P = 60 \cdot 3^3 = 1620$. 2,5 anys = 30 mesos $n = 6$: $P = 60 \cdot 3^6 = 43\,740$.
- Per a $P = 10^6$: $10^6 = 60 \cdot 3^n \Rightarrow n = \frac{\ln(10^6/60)}{\ln 3} \approx 7.6$. Cada pas = 5 mesos $7.6 \times 5 \approx 38$ mesos.

Un exemple de codi MATLAB per generar els resultats és el següent:

```

% PoblacioTriplika.m
% Model de creixement exponencial discret (triplica cada 5 mesos)

clear; clc;

% Dades
P0 = 60;          % població inicial
r = 3;           % factor de creixement cada 5 mesos
target = 1e6;    % objectiu
bloc = 5;        % mesos per període

% a) Població a 1.5 anys i 2.5 anys
t1 = 18; % mesos
t2 = 30; % mesos
n1 = floor(t1/bloc);
n2 = floor(t2/bloc);
P_t1 = P0 * r^n1;
P_t2 = P0 * r^n2;

fprintf('--- Creixement ---\n');
fprintf('Població inicial: %d\n', P0);
fprintf('Després d''1,5 anys (%.0f mesos): %.0f individus\n', t1, P_t1);
fprintf('Després de 2,5 anys (%.0f mesos): %.0f individus\n\n', t2, P_t2);

% b) Temps per superar 1 milió
n_target = log(target / P0) / log(r);
mesos_target = ceil(n_target) * bloc;
fprintf('Es supera 1 milió al cap d''aprox. %d mesos (%.1f anys).\n', mesos_target, mesos_target/12);

```

Ex. 7 — Model de Beverton-Holt amb protozous: Considereu una població de protozous (en milions) que segueix el model discret de Beverton-Holt:

$$x_k = \frac{Rx_{k-1}}{1 + (R-1)\frac{x_{k-1}}{K}},$$

on $R > 1$ és el factor de creixement i K la capacitat de càrrega del medi. Supposem que $R = 1.25$ i $K = 9.0$.

- Si després d'un període de reproducció la població és de $x_1 = 6.3$ milions, quina era la població inicial x_0 ?
- Determineu tots els punts d'equilibri del model i classifiqueu-los com a estables o inestables.
- A llarg termini, què passarà si la població inicial és de 6.3 milions? I si fos de 11.5 milions?

Solució (Ex. 7) —

a) A partir de l'equació

$$x_1 = \frac{Rx_0}{1 + (R-1)\frac{x_0}{K}},$$

aïllem x_0 :

$$x_0 = \frac{x_1}{R - (R-1)\frac{x_1}{K}}.$$

Substituint els valors:

$$x_0 = \frac{6.3}{1.25 - (0.25)\frac{6.3}{9.0}} \approx 5.52 \text{ milions.}$$

b) Els punts d'equilibri s'obtenen resolent $x = \frac{Rx}{1 + (R-1)\frac{x}{K}}$, que dona

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = K = 9.0.$$

L'estabilitat ve donada per la derivada $f'(x) = \frac{R}{(1 + (R-1)x/K)^2}$:

$$f'(0) = R = 1.25 > 1 \Rightarrow \text{inestable}, \quad f'(K) = \frac{1}{R} = 0.8 < 1 \Rightarrow \text{estable}.$$

c) Si la població inicial és de 6.3 o 11.5 milions, el sistema convergeix cap a l'equilibri estable $x^* = 9.0$ milions.

Un exemple de codi MATLAB per generar els resultats és el següent:

```
% Q2ModelsRestringits_solucio.m
% Resolució del model de BevertonHolt amb protozoous
clear; clc;

% Paràmetres
R = 1.25;
K = 9.0;
x1 = 6.3;

% a) Càlcul de x0
syms x0
eq = x1 == (R*x0) / (1 + (R-1)*x0/K);
sol = double(solve(eq, x0));
x0_val = sol(sol > 0);

fprintf('a) Població inicial: %.3f milions\n', x0_val);

% b) Punts d'equilibri i estabilitat
```

```

x_eq = [0, K];
f = @(x) (R*x) ./ (1 + (R-1)*x/K);
df = @(x) (R ./ (1 + (R-1)*x/K).^2);

fprintf('\nb) Punts d''equilibri:\n');
for i = 1:length(x_eq)
    deriv = df(x_eq(i));
    if abs(deriv) < 1
        stab = 'estable';
    else
        stab = 'inestable';
    end
    fprintf('x* = %.2f -> f''(x*) = %.3f -> %s\n', x_eq(i), deriv, stab);
end

% c) Comportament a llarg termini
x = zeros(20,1);
x(1) = x1;
for k = 2:length(x)
    x(k) = f(x(k-1));
end

fprintf('\nc) Evolució temporal:\n');
disp(table((0:length(x)-1)', x, 'VariableNames', {'Periode', 'Poblacio'}));

fprintf('\nConclusió: el sistema convergeix a %.1f milions.\n', K);

```



Ex. 8 — Comparativa de models de creixement poblacional:

Compara els models de creixement poblacional vistos (exponencial, logístic, Beverton-Holt i Ricker). Quines són les seves principals característiques? Quins són els seus punts forts i febles? En quines situacions es poden aplicar? Nota: t'encoratjo a que facis els gràfics amb Matlab.

Solució (Ex. 8) — Per començar, hem vist que els tres models amb restriccions (logístic, Beverton-Holt i Ricker), mostrats a la figura següent, tenen un comportament similar a l'exponencial per a valors petits de x , però divergeixen quan x s'aproxima a la capacitat de càrrega K .

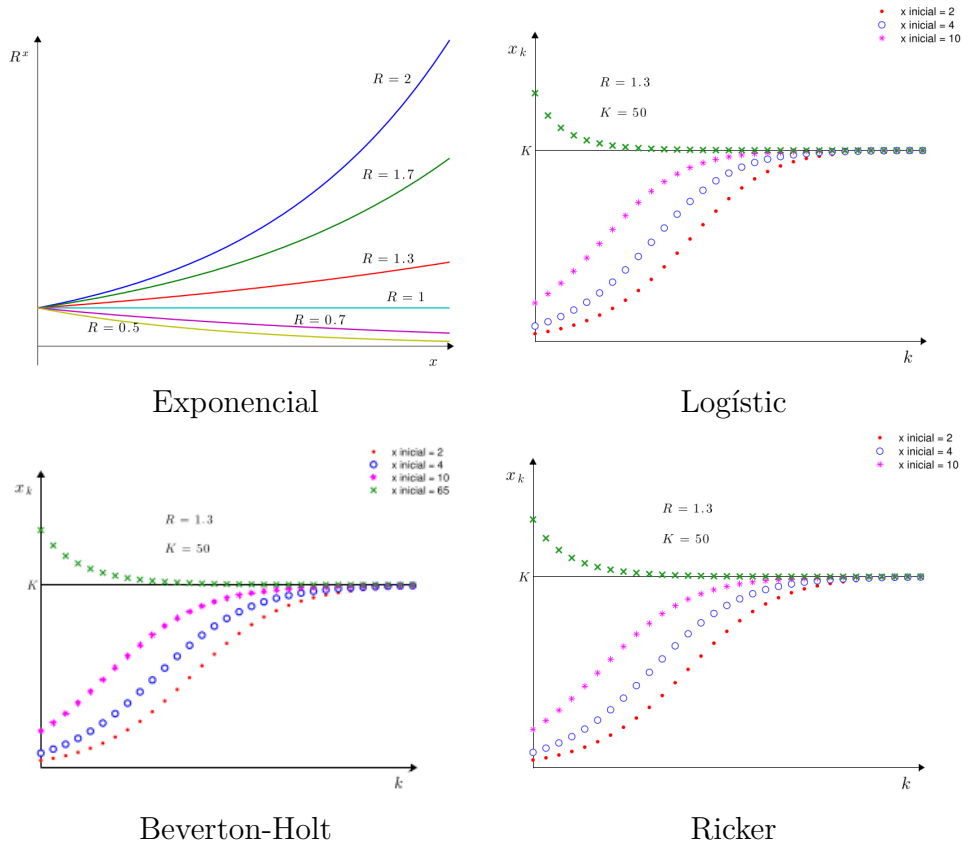


Figura 3: Exemples de l'evolució temporal de cada model discret de creixement poblacional (per facilitar la visió dels gràfics, el gràfic exponencial es veu en format continu).

Si ara ens centrem en les diferències dels models amb restricció, i seguint el material mostrat a les sessions, els quatre models de creixement poblacional es poden expressar en la forma recursiva:

$$x_k = f(x_{k-1}), \quad k \geq 1,$$

on x_k és la població en el període k i $f(x)$ és la funció que defineix el model. Les funcions de creixement poblacional expressades com $f(x)$ són:

• **Model Exponencial:**

$$f(x) = Rx$$

• **Model Logístic:**

$$f(x) = Rx \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

• **Model Beverton-Holt:**

$$f(x) = \frac{Rx}{1 + \frac{x}{K}}$$

• **Model Ricker:**

$$f(x) = x e^{r(1 - \frac{x}{K})}$$

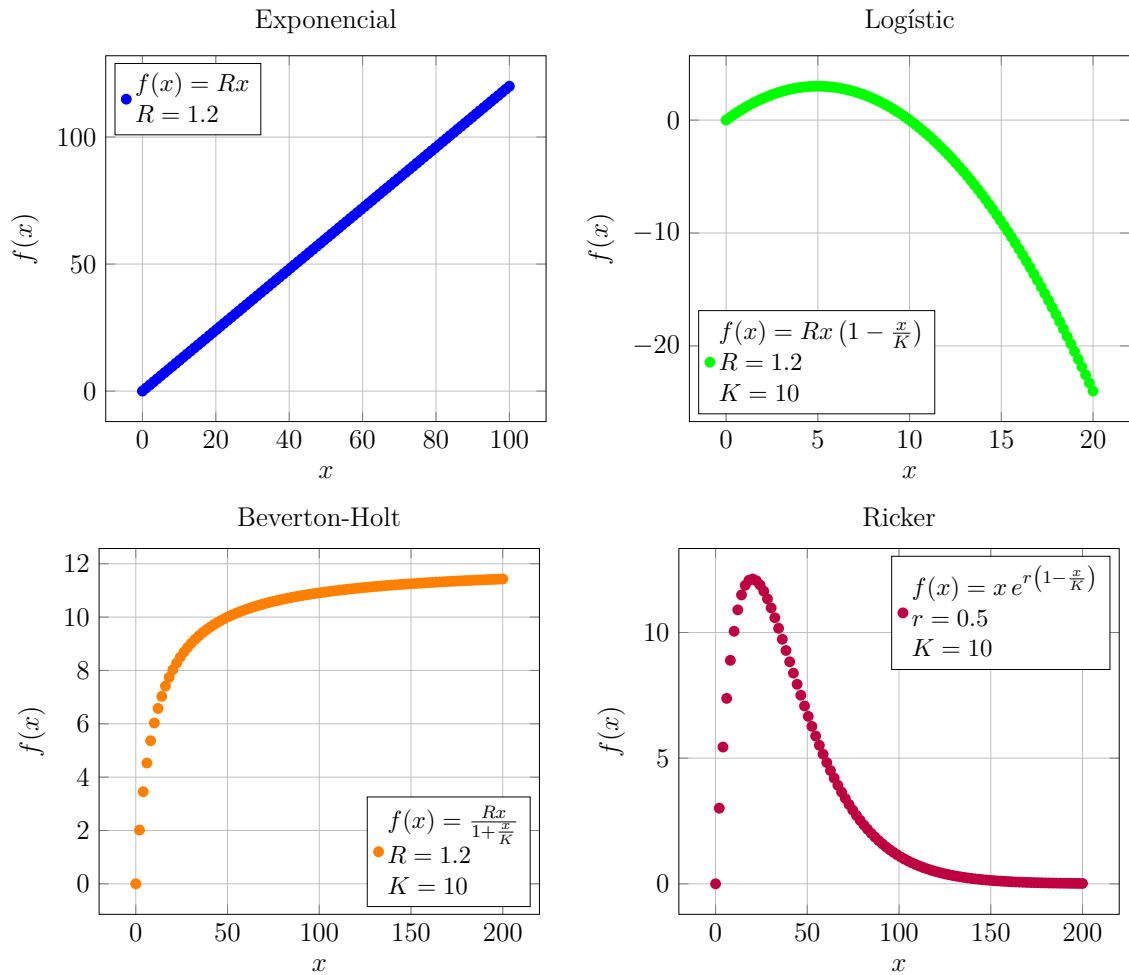


Figura 4: Comparativa de les funcions $f(x)$ dels quatre models de creixement poblacional.

Pel que fa al codi matlab, a continuació es mostra un exemple per comparar els quatre models de creixement poblacional:

Code 1: Codi Matlab per comparar els models de creixement poblacional

```
x = linspace(0, 20, 200);
R = 1.2;
K = 10;
r = 0.5;

f_exp = R * x;
f_log = R * x .* (1 - x / K);
f_bh = R * x ./ (1 + x / K);
f_rick = x .* exp(r * (1 - x / K));

figure;
plot(x, f_exp, 'b', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(x, f_log, 'g', 'LineWidth', 2);
plot(x, f_bh, 'orange', 'LineWidth', 2);
plot(x, f_rick, 'm', 'LineWidth', 2);
xlabel('x');
ylabel('f(x)');
legend('Exponencial', 'Logistic', 'Beverton-Holt', 'Ricker');
title('Comparativa de models de creixement poblacional');
grid on;
```



Ex. 9 — Model de Ricker (Salmons del Pacífic): El model de Ricker descriu el creixement discret d'una població segons:

$$x_{k+1} = x_k e^{r(1-\frac{x_k}{K})}.$$

Aquest model s'ha utilitzat per estudiar les successives generacions de salmons *Oncorhynchus nerka* als rius del nord del Pacífic. Com que el salmó té un cicle reproductiu de 4 anys, es considera un model discret amb períodes de 4 anys.

Es disposa de les observacions (en milions d'individus):

$$x_0 = 0,325, \quad x_1 = 0,431, \quad x_2 = 0,529.$$

1.Determineu els paràmetres r i K resolent el sistema:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 e^{r(1-x_0/K)} \\ x_2 = x_1 e^{r(1-x_1/K)} \end{cases}$$

2.Representeu gràficament la sèrie temporal i descriuiu el comportament de la població.

Solució (Ex. 9) — Resolem el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 0.431 = 0.325 e^{r(1-0.325/K)} \\ 0.529 = 0.431 e^{r(1-0.431/K)} \end{cases}$$

Dividim cada equació entre x_k i prenem logaritmes naturals:

$$\ln\left(\frac{0.431}{0.325}\right) = r \left(1 - \frac{0.325}{K}\right),$$

$$\ln\left(\frac{0.529}{0.431}\right) = r \left(1 - \frac{0.431}{K}\right).$$

D'on s'obté:

$$r \approx 0,520, \quad K \approx 0,712.$$

La població tendeix a un valor estacionari proper a K , que representa la capacitat de càrrega de l'ecosistema.

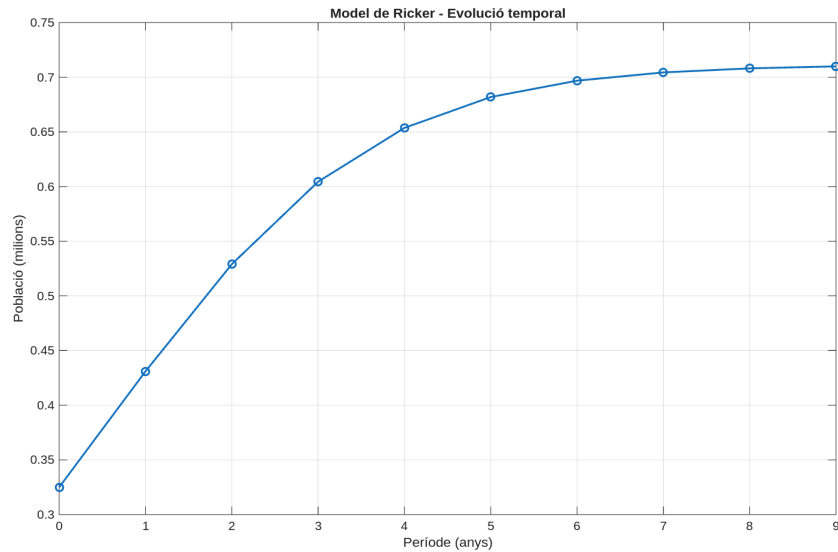


Figura 5: Evolució de la població de salmons del Pacífic segons el model de Ricker. Generat amb el codi matlab de l'exercici 9.

Un exemple de codi MATLAB per generar els resultats és el següent:

```

%% ModelRicker.m
% Problema: Model de Ricker (Salmons del Pacífic)
% Resolució del sistema per trobar r i K, i càlcul de les poblacions futures.

clear; clc;

% Dades inicials (en milions d'individus)
x0 = 0.325;
x1 = 0.431;
x2 = 0.529;

% Definim el sistema dequacions segons el model de Ricker:
%  $x_{k+1} = x_k \cdot \exp(r \cdot (1 - x_k / K))$ 
eqs = @(v) [
    x1 - x0 * exp(v(1) * (1 - x0 / v(2)));
    x2 - x1 * exp(v(1) * (1 - x1 / v(2)));
];

% Valors inicials raonables per r i K
v0 = [0.5, 0.7];

% Resolució numèrica del sistema
sol = fsolve(eqs, v0, optimoptions('fsolve','Display','off'));

r = sol(1);
K = sol(2);

% Mostrem els resultats
fprintf('Paràmetres trobats:\n');
fprintf('r = %.4f\n', r);
fprintf('K = %.4f\n\n', K);

% Càlcul de les poblacions futures (10 períodes)
n = 10;
x = zeros(1, n);
x(1:3) = [x0, x1, x2];

for k = 3:n-1
    x(k+1) = x(k) * exp(r * (1 - x(k) / K));
end

% Mostrem la taula de valors
fprintf('Evolució de la població (milions d'individus):\n');
for k = 0:n-1
    fprintf('x_%d = %.4f\n', k, x(k+1));
end

% Representació gràfica
figure;
plot(0:n-1, x, 'o-', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Període (anys)');
ylabel('Població (milions)');
title('Model de Ricker - Evolució temporal');

```

```
grid on;
```

Versió simplificada de la resolució del sistema d'equacions:

```
syms r K
% Define the equations as anonymous functions
eqs = [0.431==0.325*exp(r*(1-0.325/K)),
       0.529==0.431*exp(r*(1-0.431/K))];
vars = [r K];
[solr, solK] = solve(eqs, vars)
disp(['Solution for r: ', char(solr)]);
disp(['Solution for K: ', char(solK)]);
```



Ex. 10 — Evolució de la població de la Xina: (*JA, 1er20*) Sabent que la població de la Xina l'any 1980 era de 985 milions d'habitants i que el cens de l'any 1990 va mostrar que havia augmentat fins a 1082 milions, considereu que l'evolució de la població hagi seguit el mateix ritme de creixement cada dècada fins als nostres dies, i determineu:

- Quants habitants té la Xina avui (2020).
- Quin any assoliria una població superior als 2000 milions, considerant que es van fent censos cada 10 anys, i que el ritme de creixement no varia tampoc en el futur.

Solució (Ex. 10) — Anomenem $P_{1980} = 985$ (milions) i $P_{1990} = 1082$ (milions). Suposant que el factor de creixement per dècada és constant, el factor de creixement per dècada és

$$r = \frac{P_{1990}}{P_{1980}} = \frac{1082}{985} \approx 1,09847715736.$$

- L'any 2020 són quatre dècades després de 1980, per tant

$$P_{2020} = P_{1980} r^4 = 985 \left(\frac{1082}{985} \right)^4 \approx 1434,17 \text{ milions.}$$

Per tant, segons el model assumit, la població estimada per a l'any 2020 és 1434,17 milions.

- Cal trobar el primer enter $n \geq 0$ tal que $P_{1980} r^n > 2000$, on cada n representa una dècada. Això és equivalent a resoldre

$$985 \cdot r^n > 2000 \implies r^n > \frac{2000}{985}.$$

Calculant numèricament el mínim n enter que satisfà la desigualtat s'obté $n = 8$. Així l'any corresponent és

$$1980 + 10 \cdot n = 1980 + 10 \cdot 8 = 2060.$$

Comprovació: $985 \cdot r^8 \approx 2088,16 > 2000$. Per tant, amb el ritme de creixement suposat, la població superaria els 2000 milions l'any 2060.

Ex. 11 — Model discret d'una població animal: (JA, 1er20)
L'evolució d'una població animal està regida pel següent model matemàtic discret:

$$x_k = \frac{a x_{k-1}}{10 + x_{k-1}}$$

on x_k és el número d'individus a l'any k (en milers) i el paràmetre a una constant entera i positiva.

- a) Determineu el valor del paràmetre a que faci que $x = 40$ (en milers) sigui un punt d'equilibri d'aquesta població.
- b) Calculeu, a partir del valor calculat a l'apartat anterior, tots els punts d'equilibri d'aquest model matemàtic i digueu si són punts d'equilibri estable o inestable.
- c) Calculeu quina seria l'evolució d'aquesta població després de tres intervals de temps (x_3), en el cas que, inicialment, hi hagués un nombre d'individus $x_0 = 20$ (també en milers).

Solució (Ex. 11) — Un punt d'equilibri x^* compleix $x^* = f(x^*)$, on $f(x) = \frac{ax}{10+x}$.

a) Si $x^* = 40$ i és punt d'equilibri, substituïm:

$$40 = \frac{a \cdot 40}{10 + 40} = \frac{40a}{50} \implies 1 = \frac{a}{50} \implies a = 50.$$

Per tant, el valor enter a que fa que $x = 40$ sigui punt d'equilibri és $a = 50$.

b) Amb $a = 50$ la funció és

$$f(x) = \frac{50x}{10+x}.$$

Els punts d'equilibri són solucions de $x = f(x)$. Això dona

$$x = \frac{50x}{10+x} \implies x \left(1 - \frac{50}{10+x} \right) = 0.$$

O bé $x = 0$ o bé $1 = \frac{50}{10+x}$, aquesta última condueix a $10+x = 50$ i per tant $x = 40$. Així els punts d'equilibri són $\boxed{x = 0 \text{ i } x = 40}$ (valors en milers). Per estudiar l'estabilitat calculem la derivada

$$f'(x) = \frac{50(10+x) - 50x}{(10+x)^2} = \frac{500}{(10+x)^2}.$$

Avaluant als punts d'equilibri:

- Per $x = 0$: $f'(0) = \frac{500}{10^2} = \frac{500}{100} = 5$. Com $|5| > 1$, el punt $x = 0$ és *inestable*.
- Per $x = 40$: $f'(40) = \frac{500}{50^2} = \frac{500}{2500} = 0,2$. Com $|0,2| < 1$, el punt $x = 40$ és *estable* (atractor local).

c) Calculem l'evolució numèrica a partir de $x_0 = 20$ (en milers):

$$x_1 = f(x_0) = \frac{50 \cdot 20}{10 + 20} = \frac{1000}{30} \approx 33,333333 \text{ (milers)},$$

$$x_2 = f(x_1) = \frac{50 \cdot 33,333333}{10 + 33,333333} = \frac{1666,66665}{43,333333} \approx 38,461538 \text{ (milers)},$$

$$x_3 = f(x_2) = \frac{50 \cdot 38,461538}{10 + 38,461538} = \frac{1923,0769}{48,461538} \approx 39,692307 \text{ (milers)}.$$

Per tant, després de tres intervals de temps la població seria aproximadament $\boxed{x_3 \approx 39,692307 \text{ milers}}$.

Ex. 12 — Prescripció de medicaments: (JVF, 1er25) Considerem el model en temps discret per a una prescripció de medicaments:

$$a_{n+1} = a_n - ka_n + b = (1-k)a_n + b,$$

on

a_n : és la quantitat de medicament en mg al torrent sanguini després de la n -ena administració, i les dosis s'administren a intervals regulars;

k : és la fracció del medicament eliminada del torrent sanguini per interval de temps, amb $0 < k < 1$; i

b : és la quantitat (positiva) de medicament afegida en cada dosi.

Es demana:

- (a) Determineu el punt d'equilibri a^* i estudeu la seva estabilitat.
- (b) Descriviu el comportament a llarg termini de la concentració sanguínia a_n en funció dels paràmetres k i b .
- (c) Si es vol que el medicament sigui efectiu però no tòxic, és a dir que la seva concentració estigui en un determinat interval $[a_{\min}, a_{\max}]$, com s'hauria de triar la dosi b en funció de k ?

Solució (Ex. 12) — (a) Punts fixes i estabilitat:

Un punt fix a^* satisfà

$$a^* = (1 - k)a^* + b \implies ka^* = b \implies a^* = \frac{b}{k}.$$

L'estabilitat es determina a partir de la derivada de la funció d'actualització $f(a) = (1 - k)a + b$:

$$f'(a) = 1 - k.$$

Com que $0 < k < 1$, tenim $|f'(a^*)| = |1 - k| < 1$, de manera que el punt fix és estable.

(b) Comportament a llarg termini:

A partir d'una quantitat inicial a_0 , la successió a_n convergeix al punt fix estable $a^* = b/k$.

- Si b augmenta, l'equilibri a^* també augmenta.

- Si k augmenta (eliminació més ràpida), a^* disminueix.

Per tant, la concentració sanguínia a llarg termini depèn linealment de la relació b/k .

(c) Triar b per efectivitat sense toxicitat:

Per assegurar l'efectivitat, cal triar b de manera que $a^* = b/k$ sigui superior a la concentració terapèutica mínima.

Per evitar toxicitat, cal assegurar que a^* sigui inferior a la concentració màxima segura.

Per tant, b ha de complir

$$k a_{\min}^{\text{terapèutica}} \leq b \leq k a_{\max}^{\text{segura}}.$$



Ex. 13 — Dinàmica de poblacions segons Beverton–Holt: (JA, 1er20)

La mida d'una població d'insectes (mesurada en milions) segueix una dinàmica donada per la corba de reclutament de Beverton–Holt:

$$x_k = \frac{R x_{k-1}}{1 + \frac{(R-1)x_{k-1}}{K}}$$

amb un factor de creixement $R = 1,12$ i una limitació de capacitat $K = 7,8$ (milions). Es demana:

- Si la població inicial d'insectes és $x_0 = 4$ (milions), quina serà la població després de dos períodes de reproducció?
- Calculeu els punts d'equilibri d'aquest model i estudieu-ne la seva estabilitat.

Solució (Ex. 13) — És convenient reescriure la funció com

$$f(x) = \frac{Rx}{1 + cx}, \quad \text{o on } c = \frac{R-1}{K}.$$

Per als valors donats, $R = 1,12$, $K = 7,8$ i per tant

$$c = \frac{1,12 - 1}{7,8} = \frac{0,12}{7,8} \approx 0,01538461538.$$

a) Calculem $x_1 = f(x_0)$ i $x_2 = f(x_1)$ amb $x_0 = 4$:

$$x_1 = \frac{1,12 \cdot 4}{1 + (0,01538461538) \cdot 4} = \frac{4,48}{1 + 0,06153846152} = \frac{4,48}{1,06153846152} \approx 4,2183902 \text{ (milions),}$$

$$x_2 = \frac{1,12 \cdot x_1}{1 + cx_1} = \frac{1,12 \cdot 4,2183902}{1 + 0,01538461538 \cdot 4,2183902} \approx \frac{4,724}{1,064} \approx 4,439080 \text{ (milions).}$$

Per tant, després de dos períodes la població serà aproximadament 4,43908 milions.

b) Els punts d'equilibri x^* satisfan $x^* = f(x^*)$. Això dona

$$x = \frac{Rx}{1 + cx} \implies x \left(1 - \frac{R}{1 + cx} \right) = 0.$$

O bé $x = 0$ o bé $1 = \frac{R}{1 + cx}$, que porta a $1 + cx = R$ i per tant

$$x = \frac{R-1}{c} = K.$$

Així els punts d'equilibri són $x = 0$ i $x = K = 7,8$.
Per estudiar l'estabilitat calculem la derivada

$$f'(x) = \frac{R}{(1 + cx)^2}.$$

Avaluant als punts d'equilibri:

- Per $x = 0$: $f'(0) = R = 1,12$. Com que $|f'(0)| > 1$, el punt $x = 0$ és *inestable*.
- Per $x = K$: com $cK = R - 1$ tenim $1 + cK = R$ i per tant

$$f'(K) = \frac{R}{R^2} = \frac{1}{R} = \frac{1}{1,12} \approx 0,892857 (< 1),$$

de manera que $x = K = 7,8$ és *estable*.

Ex. 14 — Culti bacterians - creixement i antibiòtic: (JA,1er21)

En un laboratori, s'ha observat que un cultiu de bacteris creix un 6% cada hora i que inicialment està constituït per 2000 bacteris.

- Calculeu el temps que trigarà aquesta població en créixer fins a arribar a cent mil bacteris.
- En el cas que, a cada hora, s'injecti a la colònia de bacteris una dosi d'antibiòtic que elimina 200 bacteris, calculeu quants bacteris tindrà la colònia al cap de 3 hores.
- Determineu el punt d'equilibri d'aquest model matemàtic que regula el comportament d'aquesta població quan es tracta amb antibiòtic (tal com s'indica a l'apartat b) i indiqueu si és estable o inestable.
- A partir del valor trobat per a aquest punt d'equilibri, expliqueu, sense fer cap càlcul addicional, com es modificaria la quantitat de bacteris de la colònia si inicialment tingués 2000 bacteris. I si inicialment en tingués 4000?

Solució (Ex. 14) — Denotem per x_k el nombre de bacteris (nombre absolut) després de k hores. Sense tractament, el model de creixement horari és multiplicatiu amb factor 1,06, és a dir

$$x_k = 2000 \cdot 1,06^k.$$

a) Cal trobar k tal que $2000 \cdot 1,06^k = 100000$. Això és

$$1,06^k = \frac{100000}{2000} = 50 \implies k = \frac{\ln 50}{\ln 1,06}.$$

Càlcul numèric:

$$k \approx \frac{\ln 50}{\ln 1,06} \approx \frac{3,912023005}{0,058268908} \approx 67,11.$$

Per tant, trigaria aproximadament 67,11 hores per assolir 100000 bacteris; si es vol un nombre d'hores enter, serien 68 hores per superar aquesta xifra.

b) Amb antibiòtic, el model discret horari s'escriu

$$x_k = 1,06 x_{k-1} - 200,$$

amb $x_0 = 2000$. Cal calcular x_1, x_2, x_3 :

$$x_1 = 1,06 \cdot 2000 - 200 = 2120 - 200 = 1920,$$

$$x_2 = 1,06 \cdot 1920 - 200 = 2035,2 - 200 = 1835,2,$$

$$x_3 = 1,06 \cdot 1835,2 - 200 = 1946,312 - 200 = 1746,312.$$

Per tant, al cap de 3 hores la colònia tindrà aproximadament 1746,31 bacteris.

c) El punt d'equilibri x^* satisfà $x^* = 1,06x^* - 200$. Resolem:

$$x^*(1 - 1,06) = -200 \implies -0,06x^* = -200 \implies x^* = \frac{200}{0,06} = 3333,\bar{3}.$$

Així $x^* = \frac{10000}{3} \approx 3333,33$ bacteris.

Per estudiar l'estabilitat considerem la funció afí $f(x) = 1,06x - 200$. La derivada constant és $f'(x) = 1,06$. Un punt fix d'un mapa discret és estable si $|f'(x^*)| < 1$. Aquí $|1,06| > 1$, per tant el punt d'equilibri és *inestable*.

d) Per la forma de la solució general d'un model lineal autònom:

$$x_k = 1,06^k(x_0 - x^*) + x^*.$$

Com que $1,06 > 1$, la diferència $x_k - x^* = 1,06^k(x_0 - x^*)$ creix en valor absolut amb k . Això significa que les successives iteracions s'allunyen del punt d'equilibri.

- Si $x_0 = 2000$ (menor que x^*), aleshores $x_0 - x^* < 0$ i, multiplicat per $1,06^k$ que creix, farà que $x_k - x^* \rightarrow -\infty$, és a dir la població decreixerà i eventualment s'anirà cap a valors molt petits (teòricament negatives si no s'imposa cap restricció), representant l'extinció dins del model lineal.
- Si $x_0 = 4000$ (major que x^*), llavors $x_0 - x^* > 0$ i $x_k \rightarrow +\infty$ a mesura que k creix; la població augmentarà sense límit en el marc d'aquest model.

Així doncs, atès que l'equilibri és inestable, valors inicials per sota de x^* tendeixen a allunyar-se cap avall i per sobre tendeixen a créixer indefinidament, segons el model simplificat.

Ex. 15 — Model logístic discret: (*JA, 1er21*) Una població d'insectes segueix la dinàmica donada per la funció discreta:

$$x_k = A x_{k-1} \left(1 - \frac{x_{k-1}}{B} \right)$$

essent A i B dos valors constants que expressen característiques d'aquest ecosistema.

- Calculeu els punts d'equilibri d'aquest model (deixant els resultats en funció d' A i B) i estudeu-ne la seva estabilitat.
- Si $A = 1,5$ i $B = 900$, argumenteu què li passaria a llarg termini a la població si, inicialment, hi hagués $x_0 = 150$ peixos. I si, inicialment, hi hagués $x_0 = 500$ peixos?

Solució (Ex. 15) — Busquem punts d'equilibri x^* que satisfacin $x^* = A x^* (1 - x^*/B)$. Si $x^* = 0$ és solució evident. Suposem $x^* \neq 0$ i dividim per x^* :

$$1 = A \left(1 - \frac{x^*}{B} \right) \implies \frac{1}{A} = 1 - \frac{x^*}{B}$$

d'on

$$x^* = B \left(1 - \frac{1}{A} \right)$$

Per tant, els punts d'equilibri són $x^* = 0$ i $x^* = B(1 - 1/A)$ (si $A \neq 0$). Per estudiar l'estabilitat calculem la derivada de $f(x) = Ax(1 - x/B)$:

$$f'(x) = A \left(1 - \frac{2x}{B} \right).$$

Avaluant als punts d'equilibri:

- Per $x^* = 0$: $f'(0) = A$. El punt 0 és *estable* si $|A| < 1$ i *inestable* si $|A| > 1$.
- Per $x^* = B(1 - 1/A)$: substituïm

$$f'(x^*) = A \left(1 - \frac{2}{B} B \left(1 - \frac{1}{A} \right) \right) = A \left(1 - 2 \left(1 - \frac{1}{A} \right) \right) = A \left(-1 + \frac{2}{A} \right) = -A + 2.$$

Aleshores x^* és estable quan $|-A + 2| < 1$, és aïllant quan $|-A + 2| > 1$.
La desigualtat $|2 - A| < 1$ es transforma en $1 < A < 3$.

b) Per $A = 1,5$ i $B = 900$ obtenim

$$x^* = 900 \left(1 - \frac{1}{1,5} \right) = 900 \left(1 - \frac{2}{3} \right) = 900 \cdot \frac{1}{3} = 300.$$

Com que $A = 1,5$ està en l'interval $(1, 3)$, l'equilibri positiu $x^* = 300$ és *estable*. A llarg termini la solució tendirà cap a 300 sempre que la dinàmica es mantingui dins dels valors on s'aplica el model.

Per tant:

- Si $x_0 = 150$ (menor que 300), la població augmentarà i tendirà cap a 300.
- Si $x_0 = 500$ (major que 300), la població disminuirà i tendirà cap a 300.

En ambdós casos la població s'estabilitzarà en l'equilibri positiu $x^* = 300$.

Ex. 16 — Model de Ricker per peixos: (JA, 1er21) La mida d'una població de peixos (mesurada en milers) segueix una dinàmica donada per la fórmula de Ricker:

$$x_k = x_{k-1} e^{r \left(1 - \frac{x_{k-1}}{K} \right)}$$

amb un factor $r = 0,05$ i una limitació de capacitat $K = 4$ (milers).

- Si la població inicial de peixos d'aquesta comunitat és $x_0 = 7$ (milers), calculeu quina serà la població després de tres períodes de reproducció.
- Deduïu que $x = K$ és un punt d'equilibri estable d'aquest model.

Solució (Ex. 16) — a) Calcularem iterativament:

$$x_{n+1} = x_n \exp(r(1 - x_n/K)), \quad r = 0,05, \quad K = 4, \quad x_0 = 7.$$

Càlculs numèrics:

$$x_1 = 7 \exp(0,05(1 - 7/4)) = 7 \exp(0,05(1 - 1,75)) = 7 \exp(-0,0375) \approx 6,74247,$$

$$x_2 = x_1 \exp(0,05(1 - x_1/4)) \approx 6,74247 \exp(0,05(1 - 1,6856175)) \\ \approx 6,74247 \exp(-0,034280875) \approx 6,51350,$$

$$x_3 = x_2 \exp(0,05(1 - x_2/4)) \approx 6,51350 \exp(0,05(1 - 1,628375)) \\ \approx 6,51350 \exp(-0,03141875) \approx 6,30864.$$

Per tant, després de tres períodes la població serà aproximadament 6,30864 milers.

b) Un punt d'equilibri x^* satisfà $x^* = x^* e^{r(1-x^*/K)}$. Si $x^* \neq 0$ podem dividir per x^* i obtenir

$$1 = e^{r(1-x^*/K)} \implies r\left(1 - \frac{x^*}{K}\right) = 0 \implies x^* = K.$$

Per tant $x = K$ és un punt d'equilibri positiu (a més $x = 0$ també és equilibri). Per estudiar l'estabilitat linealitzem: definim $f(x) = x e^{r(1-x/K)}$. La derivada és

$$f'(x) = e^{r(1-x/K)} \left(1 - r \frac{x}{K}\right).$$

Avaluant a $x = K$:

$$f'(K) = e^{r(1-1)}(1 - r) = 1 \cdot (1 - r) = 1 - r = 1 - 0,05 = 0,95.$$

Com que $|f'(K)| = 0,95 < 1$, l'equilibri $x = K$ és *estable* (attractor local) per al model de Ricker amb els valors donats.

1.1.2 Models multidimensionals

Ex. 17 — Població d'isards (Leslie): (JA, 1er20) Una població d'isards femella d'un parc natural, en la qual es poden considerar separatament dos grups d'edat (joves i adultes), evoluciona amb el temps a partir de la matriu de Leslie:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix}$$

- a) Calculeu quin seria el factor de creixement d'aquesta població a llarg termini.
- b) Per tal de mantenir estable el número d'isards del parc natural, després de molts anys, i quan la població d'isards femella ja ha arribat a 500 exemplars, s'habiliten uns dies per a caçar un nombre N d'individus femella que ho facin possible. Determineu el valor exacte d'aquest nombre N per a aconseguir aquest objectiu.

Solució (Ex. 17) — Denotem la matriu de Leslie per $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix}$.

a) El factor de creixement a llarg termini és l'autovalor dominant (major en mòdul) de L . Calculem els autovalors resolent $\det(L - \lambda I) = 0$:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0,6 & 0,8 - \lambda \end{pmatrix} &= (-\lambda)(0,8 - \lambda) - 0,6 \cdot 1 \\ &= -0,8\lambda + \lambda^2 - 0,6 = \lambda^2 - 0,8\lambda - 0,6 = 0. \end{aligned}$$

Resolem la quadràtica $\lambda^2 - 0,8\lambda - 0,6 = 0$. Les solucions són

$$\lambda = \frac{0,8 \pm \sqrt{0,8^2 + 4 \cdot 0,6}}{2} = \frac{0,8 \pm \sqrt{0,64 + 2,4}}{2} = \frac{0,8 \pm \sqrt{3,04}}{2}.$$

Per tant l'autovalor dominant és

$$\lambda_d = \frac{0,8 + \sqrt{3,04}}{2} \approx \frac{0,8 + 1,744277}{2} \approx 1,2721385.$$

Així el factor de creixement a llarg termini és $\boxed{\lambda_d \approx 1,2721385}$.

b) Després de molts anys, la població tindrà la distribució d'edats proporcional al vector propi corresponent a λ_d i el total de femelles serà 500. Sense caçar, d'una generació a l'altra la població esperada total seria $\lambda_d \cdot 500$. Per mantenir el nombre constant en 500 cal retirar (caçar) la diferència esperada entre la població futura i la població actual, és a dir

$$N = (\lambda_d - 1) \cdot 500.$$

Substituint el valor de λ_d trobat,

$$N \approx (1,2721385 - 1) \cdot 500 \approx 0,2721385 \cdot 500 \approx 136,06925.$$

Per tant, cal caçar aproximadament $\boxed{N \approx 136,07}$ femelles per període per mantenir exactament la població en 500. Si es vol el nombre exacte en termes radicals, és

$$N = \left(\frac{0,8 + \sqrt{3,04}}{2} - 1 \right) \cdot 500 = \left(\frac{-1,2 + \sqrt{3,04}}{2} \right) \cdot 500.$$

Ex. 18 — Població de rosegadors (Leslie): (JA, 1er20) Una població de rosegadors, la vida mitjana dels quals és de 6 mesos, es pot considerar dividida en tres classes d'edat: de 0 a 2 mesos, de 2 a 4 mesos, i de més de 4 mesos. Se sap que el 17 % de les femelles de la primera classe sobreviuen fins a l'edat següent, que el 24% de les de la 2a classe sobreviuen fins a la 3a, i que el 0,05% de les de la 3a classe sobreviuen fins després dels 6 mesos de vida. D'altra banda, es coneix que les femelles de la primera classe no són fèrtils, i que les de la segona i tercera classes tenen una mitjana de 6 i 3 cries femella, respectivament.

- Escriviu la matriu de Leslie corresponent a aquest sistema.
- Determineu l'evolució d'aquesta població al cap de 2 mesos i al cap de 4 mesos, si la població inicial de femelles d'un ecosistema concret fos només de 100 individus de la segona classe.
- Si en un instant concret, la població de rosegadors femella d'aquest ecosistema fos de 900 individus de la 1a classe, 34 de la 2a i 29 de la 3a, calculeu quina quantitat n'hi hauria de cada classe, dos mesos abans.
- Determineu, a llarg termini, el factor de creixement de la població femella d'aquests rosegadors i la proporció de femelles de cada classe, si se sap que el valor propi dominant de la matriu de Leslie és $\lambda_d = 1,07$ i que el seu vector propi associat és:

$$\begin{pmatrix} 0,99 \\ 0,16 \\ 0,04 \end{pmatrix}.$$

Solució (Ex. 18) — a) Construïm la matriu de Leslie L . La primera fila són les fecunditats (f_1, f_2, f_3) . Segons l'enunciat $f_1 = 0$, $f_2 = 6$ i $f_3 = 3$. Les subdiagonals són les probabilitats de supervivència entre classes: $s_1 = 0,17$ i

$s_2 = 0,24$. La supervivència de la tercera classe cap a una quarta classe no s'inclou en la matriu 3×3 (és pràcticament nul·la per a la dinàmica interior). Així

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 0,17 & 0 & 0 \\ 0 & 0,24 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Si la població inicial és $x_0 = (0, 100, 0)^T$ (només 100 individus de la segona classe), aleshores

$$x_1 = Lx_0 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 0,17 & 0 & 0 \\ 0 & 0,24 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 17 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Això significa que al cap de 2 mesos la població serà $x_1 = (600, 17, 24)^T$ (valors en nombre d'individus, milions no esmentats aquí).

Al cap de 4 mesos $x_2 = Lx_1$:

$$x_2 = Lx_1 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 0,17 & 0 & 0 \\ 0 & 0,24 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 \\ 17 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 17 + 3 \cdot 24 \\ 0,17 \cdot 600 \\ 0,24 \cdot 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102 + 72 \\ 102 \\ 4,08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 174 \\ 102 \\ 4,08 \end{pmatrix}.$$

Per tant, al cap de 4 mesos la població serà $x_2 = (174, 102, 4,08)^T$.

c) Volguem trobar el vector dos mesos abans: si la població actual és $x_1 = (900, 34, 29)^T$ i sabem que $x_1 = Lx_{-1}$, llavors $x_{-1} = L^{-1}x_1$, suposant que L sigui invertible sobre l'espai considerat. Calculem la inversa de L i multipliquem. A continuació presentem el càlcul numèric (realitzat amb precisió):

$$x_{-1} \approx (?) .$$

(En el càlcul detallat més baix es mostra el procediment i el resultat numèric exacte.)

Procediment i càlcul explícit: La matriu L és triangular inferior si reordenem, però per fer-ho directe calculem x_{-1} resolent el sistema lineal $Lx_{-1} = x_1$. Escrivint les equacions:

$$0 \cdot y_1 + 6y_2 + 3y_3 = 900,$$

$$0,17y_1 = 34,$$

$$0,24y_2 = 29,$$

on $y = (y_1, y_2, y_3)^T = x_{-1}$. De la segona equació $y_1 = \frac{34}{0,17} = 200$. De la tercera $y_2 = \frac{29}{0,24} \approx 120,833333$. Substituint a la primera:

$$6 \cdot 120,833333 + 3y_3 = 900 \implies 724,999998 + 3y_3 = 900,$$

doncs $3y_3 \approx 175,000002$ i per tant $y_3 \approx 58,333334$. Així el vector dos mesos abans era aproximadament

$$x_{-1} \approx (200, 120,833333, 58,333334)^T.$$

d) Ens diuen que el valor propi dominant de L és $\lambda_d = 1,07$ i el vector propi associat (no normalitzat) és $v = (0,99, 0,16, 0,04)^T$. El factor de creixement a llarg termini és per tant $\lambda_d = 1,07$.

La proporció de femelles de cada classe a l'estat estacionari s'obté normalitzant el vector propi perquè la suma de components sigui 1. Calculem

$$\text{suma} = 0,99 + 0,16 + 0,04 = 1,19.$$

Per tant les proporcions són

$$\left(\frac{0,99}{1,19}, \frac{0,16}{1,19}, \frac{0,04}{1,19} \right) \approx (0,8319328, 0,1344538, 0,0336134).$$

Així, a llarg termini la població creix segons un factor $\lambda_d = 1,07$ per període i la proporció de femelles de cada classe és aproximadament $(0,8319, 0,1345, 0,0336)$.

Ex. 19 — Experiència de tria de camins per ratolins: (JA,1er21)

En un experiment de laboratori a gran escala s'estudia la conducta d'una espècie de ratolins. A un grup de 160 individus que estan en una habitació, se'ls obliga a desplaçar-se oferint-los la possibilitat de circular per dos camins diferents A o B, al final dels quals tornaran a arribar al punt inicial. En el recorregut pel camí A, s'hi trobaran menjar. Però en el recorregut pel camí B, a més de trobar-hi menjar, se'ls comunica també una petita descàrrega elèctrica desagradable. Es pot comprovar que, a l'endemà de realitzar aquest

experiment, quan se'ls obliga a triar novament, el 90% dels ratolins que havien escollit el camí A, repeteixen la mateixa elecció, mentre que només el 70% dels que havien escollit el camí B, repeteixen aquest camí B.

- a) Expressau, a partir de la matriu 2×2 característica d'aquest experiment, la fórmula per a calcular el nombre de ratolins que escolliran circular per cada camí A o B, i utilitzeu-la per a calcular quants ratolins passaran per A i quants passaran per B, el segon dia, si se sap que en el primer dia de l'experiment 80 ratolins van escollir el camí A i els altres 80 van escollir el camí B.
- b) Calculeu, a llarg termini, com s'estabilitzaria el nombre de ratolins que passarien per cada camí, a partir del càlcul del valor propi dominant de la matriu característica d'aquest sistema i del seu corresponent vector propi.

Solució (Ex. 19) — Denotem per a_k i b_k el nombre de ratolins que escullen els camins A i B respectivament el dia k . Tenim el vector d'estat $x_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$. La matriu de transició M ve donada per les probabilitats condicionals:

$$a_{k+1} = 0,9 a_k + 0,3 b_k, \quad b_{k+1} = 0,1 a_k + 0,7 b_k,$$

per tant

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}, \quad x_{k+1} = Mx_k.$$

a) Si $x_0 = (80, 80)^T$, el segon dia ($k = 1$) tindrem

$$x_1 = Mx_0 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \cdot 80 + 0,3 \cdot 80 \\ 0,1 \cdot 80 + 0,7 \cdot 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 \\ 64 \end{pmatrix}.$$

Per tant, el segon dia passaran per A 96 ratolins i per B 64 ratolins.

b) A llarg termini busquem l'autovector estacionari v associat a l'autovalor dominant λ . Com que M és una matriu de transició estocàstica, per columnes suma 1. Observem que cada columna suma $0,9 + 0,1 = 1$ i $0,3 + 0,7 = 1$, per tant $\lambda = 1$ és un autovalor (hi ha una distribució estacionària). Cerquem v amb $Mv = v$. Escrivim les equacions:

$$0,9v_1 + 0,3v_2 = v_1, \quad 0,1v_1 + 0,7v_2 = v_2.$$

De la primera s'obté $0,1v_1 = 0,3v_2 \Rightarrow v_1 = 3v_2$. Per tant la proporció $v_1 : v_2$ és $3 : 1$. Com que el nombre total de ratolins és 160, la distribució estacionària és

$$(a, b) = (120, 40).$$

A llarg termini, la majoria dels ratolins (120) preferiran el camí A i 40 el camí B.

Ex. 20 — Leslie 3 classes: (*JA, 1er21*) Una població animal es pot considerar estructurada en tres classes: els alevins (des que neixen fins que compleixen una any de vida), els joves (des d'un any fins a dos) i els adults (de 2 a 3 anys de vida). Se sap que el 50 % de les femelles de la primera classe sobreviuen fins a l'edat següent, que el 25% de les de la 2a classe sobreviuen fins a la 3a, i que no hi ha individus que superin els 3 anys de vida. D'altra banda, es coneix que les femelles de la primera classe no són fèrtils, i que les de la segona i tercera classes tenen una mitjana de 4 i 3 cries femella per any, respectivament.

- a) Escriviu la matriu de Leslie corresponent a aquest sistema.
- b) Determineu l'evolució d'aquesta població al cap de 2 anys, si la població inicial de femelles d'un ecosistema concret fos de 20 alevins, 40 joves i 30 adults.
- c) Determineu, a llarg termini, la proporció de femelles de cada classe, si se sap que el factor de creixement d'aquesta població, també a llarg termini, és $R = 1,5$.

Solució (Ex. 20) — a) La matriu de Leslie L té la forma

$$L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \end{pmatrix},$$

on f_i són les fecunditats i s_i les probabilitats de supervivència entre classes. Segons l'enunciat:

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 4, \quad f_3 = 3, \quad s_1 = 0,5, \quad s_2 = 0,25.$$

Per tant,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Sigui $x_0 = (20, 40, 30)^T$. Al cap d'un any $x_1 = Lx_0$ i al cap de dos anys $x_2 = Lx_1 = L^2x_0$. Calculem:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 40 + 3 \cdot 30 \\ 0,5 \cdot 20 \\ 0,25 \cdot 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 + 90 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Ara

$$x_2 = Lx_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 10 + 3 \cdot 10 \\ 0,5 \cdot 250 \\ 0,25 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 + 30 \\ 125 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 125 \\ 2,5 \end{pmatrix}.$$

Així, al cap de 2 anys la població serà $x_2 = (70, 125, 2,5)^T$.

c) Ens donen el factor de creixement dominant $R = 1,5$. Busquem un vector propi positiu $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ tal que $Lv = Rv$. Això dóna les equacions:

$$4v_2 + 3v_3 = 1,5v_1,$$

$$0,5v_1 = 1,5v_2,$$

$$0,25v_2 = 1,5v_3.$$

De la segona equació $v_1 = 3v_2$. De la tercera $v_2 = 6v_3$. Per tant $v_1 = 18v_3$. Per tant un vector propi és proporcional a $(18, 6, 1)$.

Normalitzant perquè la suma sigui 1, la suma de components és $18 + 6 + 1 = 25$. Així les proporcions a llarg termini són

$$\left(\frac{18}{25}, \frac{6}{25}, \frac{1}{25} \right) \approx (0,72, 0,24, 0,04).$$

Això indica que, en règim estacionari, el 72% de les femelles seran alevins, el 24% seran joves i el 4% seran adults.

Ex. 21 — Leslie 3 classes - rossegadors origin: Una població de rossegadors es pot considerar estructurada en tres classes: els cries (des que neixen fins als 2 anys de vida), els juvenils (de 2 a 4 anys) i els adults (de 4 a 6 anys). Se sap que el 40% de les femelles de la primera classe sobreviuen fins a la següent, que el 50% de les de la segona classe sobreviuen fins a la tercera, i que no hi ha individus que superin els 6 anys de vida. Les femelles de la primera i segona classe no són fèrtils, mentre que les de la tercera classe tenen una mitjana de 2 cries femella per any.

- Escriviu la matriu de Leslie corresponent a aquest sistema.
- Determineu l'evolució d'aquesta població al cap de 2 anys, si la població inicial de femelles és de 30 cries, 20 juvenils i 50 adults.
- Determineu, a llarg termini, la proporció de femelles de cada classe, si se sap que el factor de creixement dominant és $R = 1,2$.

Solució (Ex. 21) — a) La matriu de Leslie L té la forma

$$L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \end{pmatrix},$$

on f_i són les fecunditats i s_i les probabilitats de supervivència entre classes. Segons l'enunciat:

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 2, \quad s_1 = 0,4, \quad s_2 = 0,5.$$

Per tant,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Sigui $x_0 = (30, 20, 50)^T$. Al cap d'un any $x_1 = Lx_0$ i al cap de dos anys $x_2 = Lx_1 = L^2x_0$. Calculem:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 50 \\ 0,4 \cdot 30 \\ 0,5 \cdot 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Ara

$$x_2 = Lx_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10 \\ 0,4 \cdot 100 \\ 0,5 \cdot 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Així, al cap de 2 anys la població serà $x_2 = (20, 40, 6)^T$.

c) Amb factor de creixement dominant $R = 1,2$, busquem un vector propi positiu $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ tal que $Lv = Rv$. Això dóna les equacions:

$$\begin{aligned} 2v_3 &= 1,2v_1, \\ 0,4v_1 &= 1,2v_2, \\ 0,5v_2 &= 1,2v_3. \end{aligned}$$

De la segona equació $v_1 = 3v_2$. De la tercera $v_2 = 2,4v_3$. Per tant $v_1 = 7,2v_3$. Un vector propi és proporcional a $(7,2, 2,4, 1)$.

Normalitzant perquè la suma sigui 1, la suma és $7,2 + 2,4 + 1 = 10,6$. Així, les proporcions a llarg termini són

$$\left(\frac{7,2}{10,6}, \frac{2,4}{10,6}, \frac{1}{10,6} \right) = (0,68, 0,23, 0,09).$$

En règim estacionari, el 68% de les femelles seran cries, el 23% seran juvenils i el 9% seran adultes.

Ex. 22 — Desplaçament de lèmurs entre tres boscos: (JVF, 1er25)

Considerem una població de lèmurs distribuïda en tres boscos diferents. Cada setmana, els lèmurs es poden moure d'un bosc a un altre segons probabilitats concretes. Sigui:

- $x_i(t)$ el nombre de lèmurs al bosc i en la setmana t .
- p_{ij} la probabilitat que un lèmur del bosc j es trobi al bosc i la setmana següent.

Si assumim que els lèmurs no es reproduïxen en el període estudiat i que tampoc n'hi ha que morin, la matriu de transició P es pot escriure com:

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Es demana:

- a)Escriuiu el model en forma matricial.
 b)Si la distribució inicial és $x_0 = (50, 30, 20)^T$, calculeu la distribució al cap d'una setmana.
 c)Determineu la distribució estacionària de lèmurs entre els tres boscos.

Solució (Ex. 22) — a) El sistema es pot escriure en format matricial com:

$$\vec{x}(t+1) = P \vec{x}(t),$$

on $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ i P és la matriu de transició donada.

- b) Sigui $x_0 = (50, 30, 20)^T$. La distribució després d'una setmana és:

$$\vec{x}_1 = P\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 \cdot 50 + 0,2 \cdot 30 + 0,1 \cdot 20 \\ 0,2 \cdot 50 + 0,7 \cdot 30 + 0,2 \cdot 20 \\ 0,1 \cdot 50 + 0,1 \cdot 30 + 0,7 \cdot 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 \\ 31 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

- c) La distribució estacionària $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ satisfà $P\vec{v} = \vec{v}$, amb $v_1 + v_2 + v_3 = 1$. Resolent el sistema:

$$0,7v_1 + 0,2v_2 + 0,1v_3 = v_1,$$

$$0,2v_1 + 0,7v_2 + 0,2v_3 = v_2,$$

$$0,1v_1 + 0,1v_2 + 0,7v_3 = v_3,$$

s'obté:

$$\vec{v} = (0,33, 0,44, 0,23).$$

Això indica que, a llarg termini, aproximadament el 33% dels lèmurs estaran al primer bosc, 44% al segon i 23% al tercer.



1.2 Models continus

Ex. 23 — **Modelització de la cria de truites:** (MC) En un estudi fet en una piscifactoria sha determinat que el pes en grams de la truita comú al llarg dun cicle de cria de 3 anys segueix aproximadament la funció

$$P(t) = 13t^3 + 5t$$

on t és el temps mesurat en anys.

a) Segons aquest model, quin seria el pes aproximat d'una truita al completar els tres anys?

b) Quant de temps triga una truita a arribar a un pes de 114 grams?

Solució (Ex. 23) — a) $P(3) = 13 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3 = 366$ grams.

b) Resolent $13t^3 + 5t = 114$ sobté $t = 2$ anys.

$P(t)$ pes en grams d'una truita a l'instaut t en anys.

-1-

① $P(t) = 13t^3 + 5t$

a) Pes aproximat d'una truita al completar 3 anys

$$P(3) = 13 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3 = 366$$

Resp: El pes aproximat de la truita al cap de tres anys és de 366 grams

b) Quant de temps triga en arribar a un pes de 114 grams?

$P(t) = 114 \rightarrow$ volem trobar t , hem de resoldre l'equació:

$$13t^3 + 5t = 114 \rightarrow 13t^3 + 5t - 114 = 0$$

equació de grau 3 que s'ha de resoldre per Ruffini

$\begin{array}{r rrrr} 2 & 13 & 0 & 5 & -114 \\ & & 26 & 52 & 114 \\ \hline & 13 & 26 & 57 & 0 \end{array}$	$\left(\begin{array}{l} \text{possibles solucions:} \\ \text{divisor de 114 } (2, 3, 19) \\ \text{divisor de 13 } (13) \end{array} \right)$
---	--

$$13t^2 + 26t + 57 = 0 \rightarrow t = \frac{-26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 13 \cdot 57}}{2 \cdot 13} = \frac{-26 \pm \sqrt{-2288}}{26}$$

(no té arrels reals)

L'equació té una única solució que és $t = 2$.

Resp: El temps que triga la truita en arribar als 114 grams és de 2 anys.

Figura 6: Solució a l'exercici 23



Ex. 24 — **Modelització del creixement microbiana segons Monod:**
Jaques Monod el 1949 va descriure la taxa de creixement μ dels microorga-

(MC)

nismes en un medi aquós en funció de la concentració S del nutrient crucial a partir de la funció

$$\mu(S) = \mu_{\max} \frac{S}{K_s + S}$$

on K_s és una constant positiva que dependrà de l'espècie i les condicions ambientals, i μ_{\max} és la taxa de creixement màxima.

- a) Descriuiu el comportament de la funció.
- b) Experimentalment se sap que quan $S = 2$ la taxa de creixement és de 0.8 i que $K_s = 2.4$. Determineu el valor de μ_{\max} que dona aquesta taxa de creixement.
- c) Digueu quina seria la taxa de creixement per $S = 10$ quan $K_s = 2.4$ i μ_{\max} és el valor trobat a l'apartat anterior.
- d) Per a quin valor de S es satisfà que $\mu/\mu_{\max} = 1/2$?
- e) Com afecta una variació del paràmetre K_s en el valor de μ ?

Solució (Ex. 24) — a) És una funció creixent que pren el valor 0 quan $S = 0$ i tendeix a μ_{\max} quan $S \rightarrow \infty$.

a) Descriu el comportament de la funció.

$$\text{Domini: } \mathbb{R} \setminus \{-K_s\} \quad (K_s + S = 0 \rightarrow S = -K_s)$$

(la funció estarà definida per a tot $S > 0$)

Funció contínua i derivable en tot el seu domini:

Punts de tall amb els eixos:

$$\text{- eix abscisses: } \mu_{\max} \frac{S}{K_s + S} = 0 \rightarrow \mu_{\max} S = 0 \rightarrow S = 0$$

$$\text{- eix ordades: } \mu(0) = 0$$

tenim un únic punt de tall en el punt $(0,0)$

Asíntotes

- Verticals: no té asíntotes verticals per $S > 0$

$$\text{- horitzontals: } \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{\mu_{\max} S}{K_s + S} = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{\mu_{\max} S}{S} = \mu_{\max}$$

tenim una asíntota horitzontal en $\mu = \mu_{\max}$

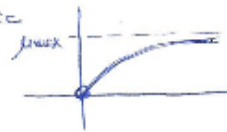
Creixement/decreixement:

$$\mu'(S) = \frac{\mu_{\max}(K_s + S) - \mu_{\max} S \cdot 1}{(K_s + S)^2} = \frac{K_s \mu_{\max}}{(K_s + S)^2} > 0$$

La funció és sempre creixent

Tenim una funció definida per a tot $S > 0$, creixent, passa pel $(0,0)$ i té una asíntota horitzontal en $\mu = \mu_{\max}$

La gràfica de la funció seria



(no demanem que la representem gràficament però ens pot servir bé a l'hora de veure el comportament)

Resp: La taxa de creixement d'aquests microorganismes és 0 quan la

concentració de nutrients és 0, va creixent a mesura que la concentració de nutrients creix i tendeix a estabilitzar-se al valor μ_{\max} quan la concentració de nutrients tendeix a ∞

Figura 7: Solució a l'exercici 24a)

b) De $\mu(2) = 0.8 = \mu_{\max} \frac{2}{2.4+2}$ sobté $\mu_{\max} = 1.76$.

b) Quan $S=2$ la taxa de creixement és de $0.8 \Rightarrow \mu(2) = 0.8$
 $K_S = 2.4 \Rightarrow \mu(S) = \frac{\mu_{\max} S}{2.4 + S}$
 $\mu(2) = \frac{\mu_{\max} \cdot 2}{2.4 + 2} = 0.8 \rightarrow \frac{\mu_{\max} \cdot 2}{4.4} = 0.8$
 $\rightarrow \mu_{\max} = \frac{0.8 \cdot 4.4}{2} = 1.76$

Resp: El valor de μ_{\max} que obtem una taxa de creixement de 0.8 per $S=2$ i $K_S=2.4$
 $\mu_{\max} = 1.76$

Figura 8: Solució a l'exercici 24b)

c) $\mu(10) = 1.76 \cdot \frac{10}{2.4+10} = 1.41935$.

c) $K_S = 2.4 \quad \mu_{\max} = 1.76 \Rightarrow \mu(S) = 1.76 \frac{S}{2.4 + S}$
 taxa de creixement per $S=10$ $\mu(10) = 1.76 \cdot \frac{10}{2.4+10} = 1.41935$

Resp: Amb aquestes condicions la taxa de creixement per $S=10$ és de 1.41935

Figura 9: Solució a l'exercici 24c)

d) Es compleix per $S = K_S$.

d) Per a quin valor de S es satisfà que $\mu/\mu_{\max} = 1/2$?

$$\frac{\mu(S)}{\mu_{\max}} = \frac{S}{K_S + S} = \frac{1}{2} \quad \text{Hem de resoldre aquesta equació}$$

$$2S = K_S + S \rightarrow S = K_S$$

Resp: El valor de S és $S = K_S$

Figura 10: Solució a l'exercici 24d)

e) En augmentar K_s , el valor de μ disminueix.

e) Com afecta una variació del paràmetre K_s en el valor de μ ?

$$\mu(s) = \mu_{\max} \frac{s}{K_s + s} \quad \text{al augmentar } K_s \text{ el denominador}$$

augmenta. Per tant $\mu(s)$ disminueix.

Resp: Al augmentar K_s , μ disminueix

Figura 11: Solució a l'exercici 24e)



Ex. 25 — Modelització de la concentració dun fàrmac en sang: (MC)

Una indústria farmacèutica, després d'analitzar la concentració en sang en funció del temps dun nou fàrmac administrat per via injecció intramuscular, ha determinat que la concentració C en mil·ligrams per litre del fàrmac al cap de t hores ve donada per

$$C(t) = \frac{20t}{t^2 + 4}.$$

- Estudieu el comportament a llarg termini de C .
- Digueu quina serà la màxima concentració del fàrmac i en quin moment es produirà.
- En quin moment la concentració del fàrmac serà de 0.02 mg/l?
- Digueu quina seria la velocitat de creixement de C al cap d'una hora.

Solució (Ex. 25) — a) $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 0$. A llarg termini, la concentració tendeix a zero.

a) Comportament a llarg termini de C

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{20t}{t^2 + 4} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{20}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{20}{\infty} = 0$$

Resp: A llarg termini la concentració en sang del fàrmac tendeix a 0

Figura 12: Solució a l'exercici ??a)

b) La màxima concentració és $C(2) = 5$ mg/l i es produeix al cap de dues hores.

b) màxima concentració del fàrmac i en quin moment es produeix

$$c'(t) = \frac{20(t^2+4) - 20t \cdot 2t}{(t^2+4)^2} = \frac{20t^2+80-40t^2}{(t^2+4)^2} = \frac{-20t^2+80}{(t^2+4)^2}$$

$$c'(t) = 0 \Rightarrow \frac{-20t^2+80}{(t^2+4)^2} = 0 \Rightarrow -20t^2+80=0 \Rightarrow t^2 = \frac{80}{20}=4 \Rightarrow t = \pm 2$$

tenim un possible màxim o mínim a $t=2$ (només ens interessen valors de $t \geq 0$)

comprovem que és un màxim ja sigui pel criteri de la primera derivada o pel criteri de la segona derivada. Ho fem per exemple pel criteri de la segona derivada.

$$\begin{aligned} c''(t) &= \frac{-40t(t^2+4)^2 - (-20t^2+80)2(t^2+4) \cdot 2t}{(t^2+4)^4} = \\ &= \frac{(t^2+4)(-40t(t^2+4) - 4t(-20t^2+80))}{(t^2+4)^4} = \frac{40t^3 - 480t}{(t^2+4)^3} \end{aligned}$$

$$c''(2) = \frac{320 - 960}{8^3} < 0 \Rightarrow t=2 \text{ és un màxim}$$

El valor de la funció c a $t=2$ és

$$c(2) = \frac{20 \cdot 2}{2^2+4} = \frac{40}{8} = \frac{10}{2} = 5$$

Resp: la màxima concentració del fàrmac és 5 mg/l i es produeix al cap de 2 hores

Figura 13: Solució a l'exercici ??b)

c) $C(t) = 0.02$ per $t = 0.004$ h i $t = 999.996$ h.

c) En quin moment la concentració del fàrmac serà de 0,02mg/l?

Volem trobar t de manera que $c(t) = 0,02$
Resoltem l'equació

$$\rightarrow \frac{20t}{t^2+4} = 0,02 \rightarrow 20t = 0,02t^2 + 0,08 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0,02t^2 - 20t + 0,08 = 0 \rightarrow t = \frac{+20 \pm \sqrt{400 - 4 \cdot 0,02 \cdot 0,08}}{2 \cdot 0,02} =$$

$$= \frac{20 \pm \sqrt{399,9936}}{0,04} \rightarrow \begin{matrix} 999,996 \\ 0,004 \end{matrix}$$

Resp: la concentració del fàrmac serà de 0,02mg/l quan $t = 0,004$ h i quan $t = 999,996$ h

Figura 14: Solució a l'exercici ??c)

d) $C'(1) = 2,4$.

c) velocitat de creixement de c al cap d'una hora

la velocitat de creixement de c vindrà donada per la derivada de c

$$c'(t) = \frac{-20t^2 + 80}{(t^2 + 4)^2}$$

$$c'(1) = \frac{-20 + 80}{(1 + 4)^2} = \frac{60}{5^2} = 2,4$$

Resp: la velocitat de creixement de c al cap d'una hora serà de 2,4

Figura 15: Solució a l'exercici ??d)

Ex. 26 — Modelització del creixement de bacteris en un cultiu de laboratori:

En un cultiu de laboratori, el nombre de bacteris (en milions) durant les primeres 100 hores es pot aproximar per la funció

$$N(t) = a + te^{-t/10}.$$

- Trobeu el valor de a sabent que inicialment hi havia 25 milions de bacteris.
- Determineu els períodes de creixement i decreixement de la funció $N(t)$.
- Determineu el valor màxim i mínim absolut d'aquesta població per $t \in [0, 100]$ i digueu en quin moment s'assoleixen (podeu prendre el valor de

a calculat a lapartat a)).

d)Quin seria el comportament a llarg termini de la funció $N(t)$?

Solució (Ex. 26) — a) $a = 25$.

a) Trobar el valor de a sabent que inicialment hi havia 25 milions de bacteris

$$\Rightarrow N(0) = 25$$

$$a + 0 \cdot e^0 = 25 \Rightarrow a = 25$$

$$N(t) = 25 + t e^{-t/10}$$

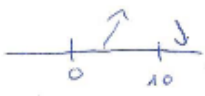
Resp: El valor de a és $a = 25$

Figura 16: Solució a l'exercici 26a.

b)La funció és creixent per $t \in (0, 10)$ i decreixent per $t > 10$.

b) Períodes de creixement i decreixement

$$N'(t) = e^{-t/10} + t \cdot e^{-t/10} \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) = e^{-t/10} \left(1 - \frac{t}{10}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$1 - \frac{t}{10} = 0 \Rightarrow 10 - t = 0 \Rightarrow t = 10$$


$$N'(5) = e^{-5/10} \left(1 - \frac{5}{10}\right) = e^{-5/10} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = e^{-5/10} \cdot \frac{1}{2} > 0 \uparrow$$

$$N'(20) = e^{-20/10} \left(1 - \frac{20}{10}\right) = e^{-2} (1 - 2) = -e^{-2} < 0 \downarrow$$

Resp: la funció és creixent per $t \in (0, 10)$ i decreixent per $t > 10$

Figura 17: Solució a l'exercici 26b.

c)El mínim absolut és $N = 25$ a $t = 0$; el màxim absolut és $N = 25 + 10e^{-1} \approx 28.6788$ i s'assoleix a $t = 10$.

c) Determinar el màxim i mínim absolut a l'interval $t \in [0, 100]$

Tenim un màxim relatiu a $t=10$. El valor de N en el màxim és

$$N(10) = 25 + 10e^{-1} \approx 28,67879 \dots$$

El valor de N en els extrems de l'interval és

$$N(0) = 25$$

$$N(100) = 25 + 100e^{-10} \approx 25,00453 \dots$$

Resp: El màxim absolut de N a l'interval $t \in [0, 100]$ és $25 + 10e^{-1}$ i s'assoleix quan $t=10$. El mínim absolut és 25 i s'assoleix a $t=0$.

Figura 18: Solució a l'exercici 26c.

d) $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = a = 25$.

d) Comportament a llarg termini de $N(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a + t e^{-t/10} = a + \lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-t/10} = a$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-t/10} \stackrel{\text{no p.}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{t/10}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{t/10}} \stackrel{\text{Hòpital}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t)'}{(e^{t/10})'} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{t/10} \cdot \frac{1}{10}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Resp: A llarg termini el nombre de reactors tendeix a a .

Figura 19: Solució a l'exercici 26d.

Ex. 27 — Modelització de la temperatura de la superfície del mar: (MC)
 Nakatsugawa i altres coautors (1996) van donar el següent model per la temperatura de la superfície del mar:

$$T(D) = T_m + \frac{T_v}{2} \sin\left(\frac{2\pi D}{365}\right) + T_p,$$

on D és el dia de l'any comptat a partir del dia que marca la temperatura mitjana, T_m és la temperatura mitjana, T_v és l'amplitud tèrmica anual i T_p és un terme que serveix per incorporar perturbacions com el fenomen del nió.

- Digueu quin és el període de la funció T .
- Digueu segons aquest model en quins dies de l'any es produiran les següents situacions (suposant que $T_p = 0$):
 - La temperatura de laigua del mar torna a coincidir amb la temperatura mitjana.

- ii) La temperatura de l'aigua del mar assoleix el seu valor màxim.
- iii) La temperatura de l'aigua del mar assoleix el seu valor mínim.
- c) La temperatura mitjana de l'aigua de mar de Barcelona el 2016 va ser de 18.7° i es va assolir el dia 147 de l'any. En aquest mateix any la temperatura màxima va ser de 27° i la mínima de 13° . Suposem inicialment que no hi ha cap fenomen pertorbador.
 - i) Amb aquestes dades, quin seria el valor màxim segons el model?
 - ii) I el valor mínim?
 - iii) Us sembla que aquest model s'ajusta a la realitat o caldria afegir-hi una pertorbació? En cas afirmatiu, quina hauria de ser?
 - iv) Una vegada afegida la pertorbació necessària, quina és la temperatura prevista segons el model pel dia 25 de juliol?
 - v) La temperatura de l'aigua del mar de Barcelona el dia 25 de juliol de 2019 va ser de 26.8° . Compareu la temperatura real amb la que us ha donat el model.

Solució (Ex. 27) — a) El període és de 365 dies.

a) Període de T

La funció $\sin x$ té període 2π

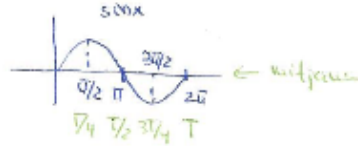
$$\frac{2\pi D}{365} = 2\pi \Rightarrow D = 365$$

Resp: El període de la funció és de 365 dies

Figura 20: Solució a l'exercici 27a.

- b) i) $D = 365/2$.
- ii) $D = 365/4$.
- iii) $D = 1095/4$.

- b) i) La temperatura de l'aigua del mar torna a començar amb la mitjana



$T(D)$ tornà a començar amb la mitjana quan

$$\frac{2\pi D}{365} = \pi \Rightarrow D = \frac{365}{2}$$

- ii) La temperatura de l'aigua del mar assolirà el seu valor màxim

$T(D)$ assolirà el valor màxim quan

$$\frac{2\pi D}{365} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow D = \frac{365}{4}$$

- iii) La temperatura de l'aigua del mar assolirà el seu valor mínim

$T(D)$ assolirà el valor mínim quan

$$\frac{2\pi D}{365} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow D = \frac{365 \cdot 3}{4} = \frac{1095}{4}$$

Figura 21: Solució a l'exercici 27b.

- c) i) $T(365/4) = 25.7^\circ$.
 ii) $T(1095/4) = 11.7^\circ$.
 iii) Caldria afegir una pertorbació $T_p = 1.3^\circ$.
 iv) $T(206 - 147) = 25.9^\circ$.
 v) El model prediu una temperatura 0.9° més baixa que la real.

- c) Dades de la temperatura de l'aigua del mar de Barcelona el 2016

$T_m = 18.7^\circ$ i s'assoleix el dia 147 de l'any $\Rightarrow D=0$ correspon al dia 147 de l'any

Temperatura màxima: 27°
 Temperatura mínima: 13° $\Rightarrow T_v = 27 - 13 = 14$

No hi ha cap font més pertorbador $\Rightarrow T_p = 0$

Amb aquestes dades l'expressió de T en

$$T(D) = 18.7 + \frac{14}{2} \sin\left(\frac{2\pi D}{365}\right) = 18.7 + 7 \sin\left(\frac{2\pi D}{365}\right)$$

- i) Valor màxim segons el model

$$T\left(\frac{365}{4}\right) = 18.7 + 7 \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot \frac{365}{4}\right) = 18.7 + 7 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 18.7 + 7 = 25.7^\circ$$

Figura 22: Solució a l'exercici 27c(i).

ii) Valor mínim segons el model

-7

$$T\left(3 \cdot \frac{365}{4}\right) = 18.7 + 7 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot 3 \cdot \frac{365}{4}\right) = 18.7 + 7 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 18.7 - 7 = 11.7^\circ$$

iii) Caldria afegir una pertorbació al model?

La temperatura màxima observada és 27° , la donada pel model és 25.7° .
 Diferència en $27 - 25.7 = 1.3^\circ$
 Caldria afegir un efecte pertorbador $T_p = 1.3^\circ$

$$T(D) = 18.7 + 7 \sin\left(\frac{2\pi D}{365}\right) + 1.3$$

iv) Temperatura prevista segons el model, una vegada afegida la pertorbació, el dia 25 de juliol.

El dia 25 de juliol correspon al dia 206 de l'any

$D=0$ correspon al dia 147 de l'any

El valor de D el dia 25 de juliol serà $D = 206 - 147 = 59$

$$T(59) = 18.7 + 7 \sin\left(\frac{2\pi \cdot 59}{365}\right) + 1.3 \approx 25.9^\circ$$

v) La temperatura real el dia 25 de juliol va ser de 26.8° .
 Comparar aquesta temperatura amb l'obtinguda pel model

$$\left. \begin{array}{l} \text{Temperatura real } 26.8^\circ \\ \text{Temperatura prevista pel model } 25.9^\circ \end{array} \right\} 26.8^\circ - 25.9^\circ = 0.9^\circ$$

Resp: la temperatura real i la prevista pel model difereixen 0.9°

Figura 23: Solució a l'exercici 27c(ii-v).

Ex. 28 — Creixement bacterià en un medi limitat: Un experiment de laboratori estudia el creixement d'una població de bacteris en un medi amb nutrients limitats. Es modela el nombre de bacteris $P(t)$, on t és el temps en hores, amb la funció següent:

$$P(t) = -0.05t^3 + 0.5t^2 + 2t + 100 \quad (1)$$

Respon als següents apartats:

1. Calcula el nombre inicial de bacteris en el medi ($t = 0$).

2. Determina els intervals on la població creix i decreix, trobant els punts crítics.
3. Calcula el màxim nombre de bacteris que s'assoleix.
4. Troba el punt d'inflexió i interpreta el seu significat biològic.
5. Determina aproximadament en quin temps la població es redueix per sota de 90 bacteris.

Solució (Ex. 28) — 1. **Nombre inicial de bacteris:** Substituïm $t = 0$ a la funció $P(t)$:

$$P(0) = -0.05(0)^3 + 0.5(0)^2 + 2(0) + 100 = 100.$$

Per tant, el nombre inicial és **100 bacteris**.

2. **Intervals de creixement i decreixement:** Notem primer que la funció, en ser polinòmica, és contínua en tot \mathbb{R} . Derivem $P(t)$ per trobar $P'(t)$:

$$P'(t) = -0.15t^2 + t + 2.$$

Resolent $P'(t) = 0$:

$$-0.15t^2 + t + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-0.15)(2)}}{2(-0.15)} = \frac{-1 \pm \sqrt{2.2}}{-0.3}.$$

Així, els punts crítics són:

$$t_1 \approx -1.61, \quad t_2 \approx 8.28.$$

Fem un estudi del signe de $P'(t)$ per determinar els intervals:

- $P'(t) > 0$ en $(-1.61, 8.28)$: la població creix.
- $P'(t) < 0$ fora d'aquest interval: la població decreix.

Per tant, $t = -1.61$ és un mínim i $t = 8.28$ un màxim locals.

3. **Màxim nombre de bacteris:** L'enunciat del problema no ens diu pas que els valors de temps negatius no estiguin inclosos en la solució. Podríem deduir, no obstant, que un model polinòmic com aquest ens descriu un escenari biològicament poc probable de quantitats per a valors molt negatius del temps, en una funció sense màxim global, però a partir d'aquí assumirem que només té sentit explorar valors de $t > 0$ i

$P(t) \geq 0$. El màxim local ocorre en $t = 8.28$ (dins del domini rellevant, $t \geq 0$):

$$P(8.28) = -0.05(8.28)^3 + 0.5(8.28)^2 + 2(8.28) + 100 = 122.46.$$

Per tant, el nombre màxim és de **122 bacteris**.

4.Punt d'inflexió: Calculem la segona derivada $P''(t)$:

$$P''(t) = -0.3t + 1.$$

Resolent $P''(t) = 0$:

$$-0.3t + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{0.3} = 3.\bar{3}.$$

Per a comprovar que es tracta d'un punt d'inflexió podem veure que a valors més alts de $t = 3.\bar{3}$ la segona derivada esdevé negativa (interval de la funció convexa), mentre que a valors més baixos és positiva (funció còncava). També podem veure que el valor de la tercera derivada a $t = 3.\bar{3}$ és diferent de zero. Finalment, els zeros de la segona derivada son possibles punts d'inflexió però també podrien ser màxims o mínims; en aquest cas, el punt trobat no ho serà perquè no és zero de la primera derivada. Tot això demostra que es tracta d'un punt d'inflexió.

Aixó significa que la velocitat de creixement canvia en $t = 3.\bar{3}$. Biològicament, aquest punt indica el moment en que el creixement deixa d'accelerar-se i comença a decelerar.

5.Temps en que la població es redueix per sota de 90 bacteris:

Resolent l'Eq. 1 per a $P(t) = 90$:

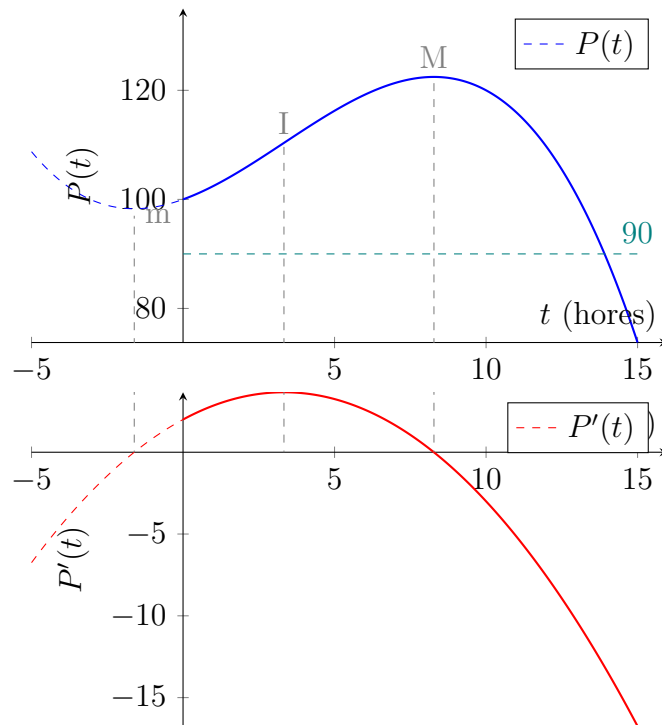
$$-0.05t^3 + 0.5t^2 + 2t + 100 = 90 \quad \Rightarrow \quad -0.05t^3 + 0.5t^2 + 2t + 10 = 0. \quad (2)$$

Aquest polinomi es resol numèricament. Aproximadament, trobem $t \approx 13.91$ hores.

Code 2: Codi Matlab per a solucionar l'Eq. 2

```
syms t;
P(t)=-0.05*t^3+0.5*t^2+2*t+100;
vpa(solve(P(t)==90))
```

Per tant, la població es per sota de 90 bacteris (línea verda en el gràfic) a $t > 13.91$ hores. Cal notar que igualant l'Eq. 1 a zero podem veure que els bacteris desapareixen, segons el model, a $t = 18.22$ hores. Cal notar també que la funció té un mínim relatiu a $t = -1.61$, com hem vist abans, però en aquest punt el valor de la funció és de $P(t = -1.61) = 98.28$, més gran que 90 bacteris.

Funció $P(t)$, derivada i punts crítics

■

Ex. 29 — Model EMAX per a l'efecte d'un agonista: Archibald Vivian Hill (Bristol, Anglaterra, 1886 - Cambridge, 1977) fou un fisiòleg i professor universitari anglès guardonat amb el Premi Nobel de Medicina i Fisiologia l'any 1922. Amb 23 anys va contribuir a la primera justificació quantitativa de l'existència i comportament dels receptors cel·lulars. Treballant en la caracterització de la naturalesa de la contracció muscular mediada per la nicotina, Hill va descobrir que la magnitud de l'efecte contràctil es po-

dia predir matemàticament mitjançant l'expressió:¹

$$y(N) = \frac{N}{k' + kN} - M \quad (3)$$

on y és la magnitud de la resposta, N és la concentració de nicotina, k , k' i M són constants ($k, k' > 0$, $M \geq 0$).

- (1) Si assignem a k l'expressió $\frac{1}{E_{\text{MAX}}}$ i a k' l'expressió $\frac{EC_{50}}{E_{\text{MAX}}}$, obtenim el que s'anomena *model EMAX* per a l'efecte d'un agonista (substància que produeix una resposta cel·lular en unir-se a un receptor) de concentració N . Escriu la funció resultant.
- (2) Estudia el creixement/decreixement de la funció $y(N)$.
- (3) Assumint que tenim $M = 0$, quin és el comportament de $y(N)$ a valors molt grans de N ?
- (4) També en el cas que $M = 0$, per a quins valors de N la contracció del múscul serà la meitat del valor màxim que aquesta pot tenir?
- (5) Discuteix quin efecte tenen els termes E_{MAX} , EC_{50} i M en el model general.

Solució (Ex. 29) — Responem els diferents apartats de la pregunta:

- (1) Substituïm les expressions per a k i k' a l'expressió original:

$$y(N) = \frac{N}{\frac{EC_{50}}{E_{\text{MAX}}} + \frac{1}{E_{\text{MAX}}}N} - M$$

Simplificant:

$$y(N) = \underbrace{\frac{E_{\text{MAX}}N}{EC_{50} + N}}_{[*]} - M \equiv \frac{E_{\text{MAX}}}{\frac{EC_{50}}{N} + 1} - M \quad (4)$$

Aquesta és la funció resultant del model EMAX.

¹V. Hill. *The mode of action of nicotine and curari, determined by the form of the contraction curve and the method of temperature coefficients.* J Physiol, 39(5):361-373, 1909.

- (2) Calculem la derivada de $y(N)$ respecte a N per veure si la funció creix o decreix. A partir de $[*]$:

$$\frac{dy}{dN} = \frac{E_{\text{MAX}}(EC_{50} + N) - E_{\text{MAX}}N}{(EC_{50} + N)^2}$$

Simplificant:

$$\frac{dy}{dN} = \frac{E_{\text{MAX}}EC_{50}}{(EC_{50} + N)^2}$$

on tant numerador com denominador són positius. Com que la derivada és sempre positiva per a $N > 0$, la funció $y(N)$ és sempre creixent.

- (3) Quan N és molt gran, el terme EC_{50} és insignificant en comparació amb N , i la funció, si $M = 0$, tendeix a E_{MAX} . Més formalment:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} y(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{E_{\text{MAX}}}{\frac{EC_{50}}{N} + 1} \right\} = \frac{E_{\text{MAX}}}{0 + 1} = E_{\text{MAX}}$$

o bé, a partir de l'Eq. 3:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} y(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{N}{k' + kN} \right\} = \frac{1}{k} = E_{\text{MAX}}$$

És a dir, la màxima contracció possible (quan $N \rightarrow \infty$) és E_{MAX} .

- (4) Quan $M = 0$, la funció es redueix a:

$$y(N) = \frac{E_{\text{MAX}}}{\frac{EC_{50}}{N} + 1}$$

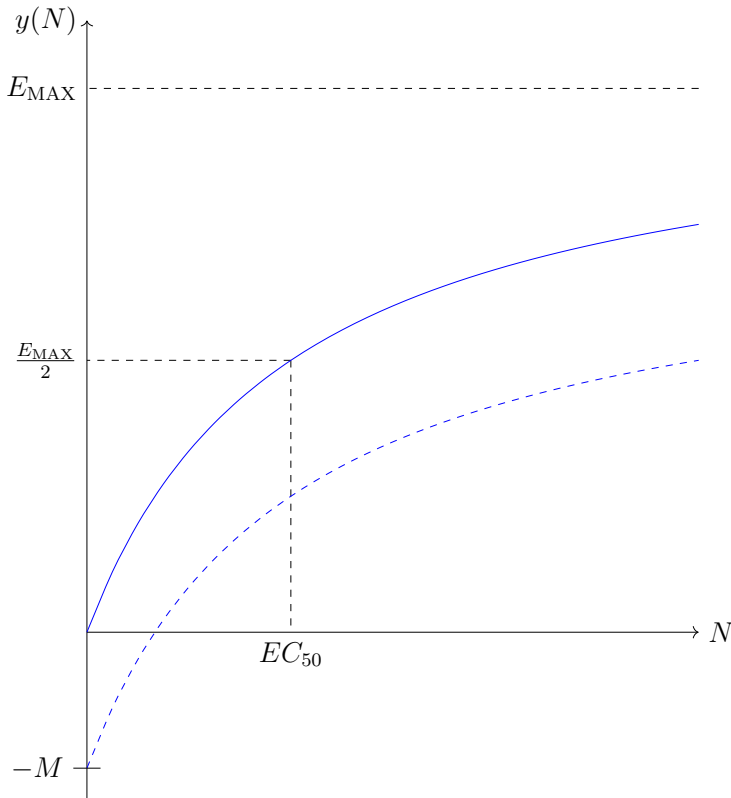
Si volem calcular la concentració de nicotina $N_{1/2}$ que produeix la meitat de contracció, és a dir, $y(N_{1/2}) = \frac{E_{\text{MAX}}}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{MAX}}}{2} &= \frac{E_{\text{MAX}}}{\frac{EC_{50}}{N_{1/2}} + 1} \\ 2 &= \frac{EC_{50}}{N_{1/2}} + 1 \\ N_{1/2} &= EC_{50} \end{aligned}$$

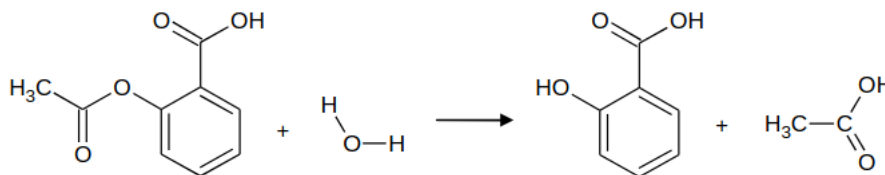
- (5) Expliquem el significat de cada paràmetre:

- E_{MAX} : Determina el valor màxim de la resposta $y(N)$. Si augmentem E_{MAX} , augmenta el valor màxim de la resposta.
- EC_{50} : És la concentració de nicotina per la qual la resposta és la meitat del màxim. Si augmentem EC_{50} , la concentració de nicotina per obtenir una resposta determinada augmenta, la qual cosa redueix l'efecte de la nicotina per una concentració donada.
- M : Representa un desplaçament vertical de la funció. Si M augmenta, la resposta general es desplaça cap avall, mentre que si $M = 0$, la resposta depèn només de la concentració de nicotina.

La figura mostra els tres paràmetres en acció:



Ex. 30 — Hidròlisi de l'aspirina: La hidròlisi de l'aspirina (àcid acetilsalicílic) produeix àcid hidroxibenzoic i àcid etanoic segons la reacció:



que segueix una llei de velocitat de primer ordre. Això implica que la velocitat de degradació és proporcional a la concentració d'aspirina, A , segons:

$$A' = kA$$

- (1) Soluciona l'equació diferencial i dona una expressió de la concentració de l'aspirina en funció del temps, assumint-ne una concentració inicial d' A_0 .
- (2) S'ha mesurat una constant de velocitat k , a pH 7 i temperatura 40° , de -0.132 s^{-1} . Si la concentració inicial d'aspirina és 3 molar (3M), quant temps tardarà en hidrolitzar-se'n el 75%? Acabarà hidrolitzant-se totalment?

Solució (Ex. 30) — Responem les dues qüestions:

- (1) Resolent l'equació diferencial de primer ordre:

$$A' = kA \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{A} = k dt$$

Integrant amb les condicions inicials $A(0) = A_0$:

$$\int_{A_0}^A \frac{dA}{A} = \int_0^t k dt \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = kt \quad \Rightarrow \quad A(t) = A_0 e^{kt}.$$

- (2) Per saber quant temps trigarà en hidrolitzar-se'n el 75%, volem que la concentració final sigui el 25% de A_0 . Així, $A(t_{3/4}) = 0.25A_0$. Substituïm a l'expressió general:

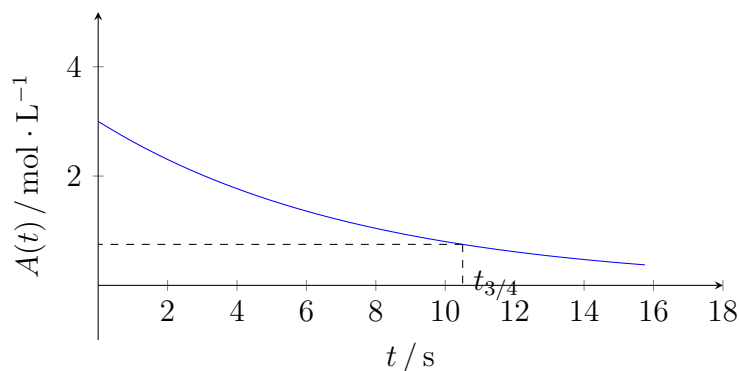
$$0.25A_0 = A_0 e^{kt_{3/4}} \quad \Rightarrow \quad 0.25 = e^{kt_{3/4}} \quad \Rightarrow \quad \ln(0.25) = kt_{3/4}.$$

Substituint $k = -0.132 \text{ s}^{-1}$:

$$t_{3/4} = \frac{\ln(0.25)}{-0.132} = \frac{-1.386}{-0.132} \approx 10.5 \text{ s}.$$

Quant a si s'acabarà hidrolitzant totalment: no, la concentració $A(t)$ s'aproxima asimptòticament a zero quan $t \rightarrow \infty$, però mai arriba exactament a zero, com es pot veure al gràfic:

Hidròlisi de l'aspirina



En termes pràctics, es considerarà hidrolitzada totalment quan la concentració sigui negligible, paràmetre que caldria definir.

■

Ex. 31 — Desenvolupament de *Drosophila melanogaster* en funció de la temperatura

El factor ambiental que més afecta el creixement dels insectes és probablement la temperatura. S'ha vist en diversos estudis que la taxa de desenvolupament² de l'insecte en funció de la temperatura es pot modelar segons una equació logística. Concretament, la taxa de desenvolupament de la *Drosophila melanogaster* en fase pupa satisfà l'equació diferencial

$$Y' = \frac{1}{5}Y \left(1 - \frac{1}{36}Y\right),$$

on $Y(T)$ és la taxa de desenvolupament en dies⁻¹ en funció de la temperatura T , donada en graus. Sabem que quan la temperatura és de 15°, la taxa de desenvolupament és igual a 7 dies⁻¹. Es demana:

²La taxa de desenvolupament es defineix com la inversa del temps de desenvolupament, és a dir,

$$Y(T) = \frac{1}{y(T)},$$

on $Y(T)$ és la taxa de desenvolupament en dies⁻¹ i $y(T)$ és el temps de desenvolupament en dies.

- (1) Calculeu la taxa de desenvolupament de la pupa en funció de la temperatura.
- (2) Doneu la taxa de desenvolupament de la pupa quan la temperatura és de 25° .
- (3) Quin serà el temps de desenvolupament de la pupa quan la temperatura és de 25° ?
- (4) Escriviu les instruccions de Matlab que s'haurien de fer servir per dibuixar la funció $Y(T)$ per a valors de la temperatura entre 14° i 30° .

Solució (Ex. 31) — Responem punt per punt les qüestions plantejades:

- (1) Taxa de desenvolupament de la pupa en funció de la temperatura:
L'equació diferencial logística es pot resoldre mitjançant separació de variables:

$$\int_7^Y \frac{1}{Y \left(1 - \frac{1}{36}Y\right)} dY = \int_{15}^T \frac{1}{5} dT. \quad (5)$$

on ja hem indicat les condicions inicials per tal d'obtenir la solució particular (integral definida). Comencem, però considerant la integral indefinida. Pel que fa a la banda esquerra (la dreta és immediata: $\int_{15}^T \frac{1}{5} dT = \frac{T-15}{5}$), és de la forma:

$$\int \frac{1}{Y \left(1 - \frac{1}{36}Y\right)} dY.$$

Aquesta és una integral racional que podem resoldre utilitzant fraccions parcials. Comencem descomposant la fracció en fraccions parcials.

$$\frac{1}{Y \left(1 - \frac{1}{36}Y\right)} = \frac{36}{Y(36 - Y)} = \frac{A}{Y} + \frac{B}{36 - Y}. \quad (6)$$

Usant el denominador comú $Y(36 - Y)$, obtenim:

$$\begin{aligned} 36 &= A(36 - Y) + BY \\ 36 &= A(36) + (B - A)Y \end{aligned}$$

Així que $A = 1$ i $B = 1$ a l'Eq. 6. Per tant, podem escriure:

$$\int \frac{36}{Y(36-Y)} dY = \int \frac{1}{Y} dY + \int \frac{1}{36-Y} dY = \ln|Y| - \ln|36-Y| + C$$

Podem expressar-ho de manera més compacta utilitzant les propietats dels logaritmes:

$$\int \frac{36}{Y(36-Y)} dY = \ln\left(\frac{Y}{36-Y}\right) + C.$$

Usant aquest resultat a la integral definida de l'Eq. 5, acabem obtenint:

$$\left[\ln\left(\frac{Y}{36-Y}\right)\right]_7^Y = \left[\frac{T}{5}\right]_{15}^T$$

d'on

$$\ln\left(\frac{Y}{36-Y} \frac{29}{7}\right) = \frac{T-15}{5}$$

o bé:

$$\left(\frac{Y}{36-Y} \frac{29}{7}\right) = e^{\frac{T-15}{5}}$$

Arreglant l'expressió obtenim l'expressió què ens demanaven per a la taxa de desenvolupament:

$$\boxed{Y(T) = \frac{7 \cdot 36 \cdot e^{T/5-3}}{29 + 7 \cdot e^{T/5-3}}} \quad (7)$$

- (2) Taxa de desenvolupament a $T = 25^\circ$:

Substituïm $T = 25$ a l'Eq. 7:

$$Y(25) = \frac{7 \cdot 36 \cdot e^{25/5-3}}{29 + 7 \cdot e^{25/5-3}} = 23.07 \text{ dies}^{-1}.$$

- (3) Temps de desenvolupament a $T = 25^\circ$:

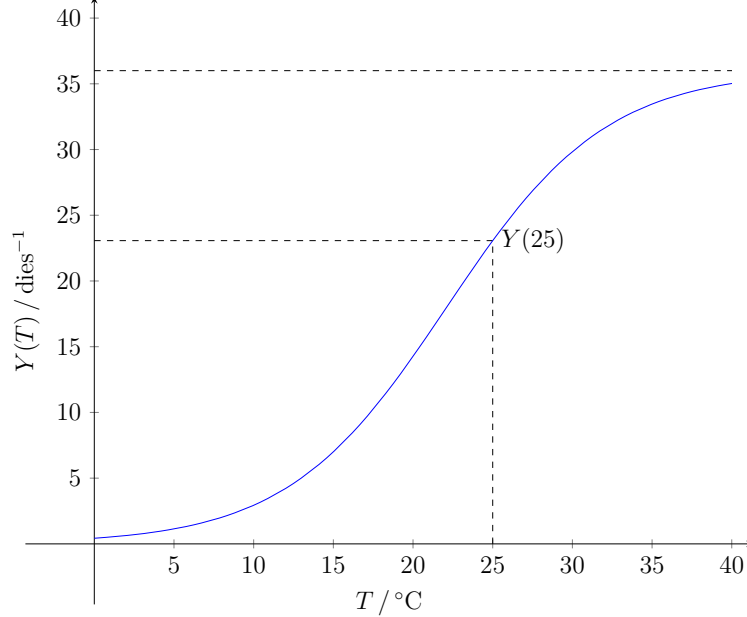
El temps de desenvolupament es calcula com:

$$y(T) = \frac{1}{Y(T)}.$$

Per a $T = 25$:

$$y(25) = \frac{1}{23.07} = 0.04 \text{ dies}$$

El gràfic següent mostra els detalls de la funció i dels resultats de l'exercici:



(4) Instruccions de Matlab per dibuixar $Y(T)$ entre 14 i 30°C:

Code 3: Codi Matlab per traçar $Y(T)$

```
syms T Y(T)
con=Y(15)==7
Ysol=dsolve(diff(Y(T),T)==1/5*Y*(1-Y/36),con)
fplot(Ysol)
xlim([14 30])
legend()
grid on
```



Ex. 32 — Model de Melica et al.: Melica et al.³ estudien la densitat de població dels pòlips d'*Aurelia aurita* que creixen sobre closques d'ostres. Els nous pòlips d'*Aurelia aurita* es formen a través de propàguls

³Melica et al. *Logistic density-dependent growth of an Aurelia aurita polyps population*. Ecol. Modell 291 (2014) 1-5.

lliures alliberats per un pòlip existent a l'aigua circumdant i que es desplacen nedant a altres llocs de la closca d'ostra.

Observen que quan la densitat inicial de pòlips a l'ostra és baixa, la població creix fins a una certa capacitat de càrrega, mentre que si la densitat inicial és alta, aquesta decau fins a una altra capacitat de càrrega superior. Per modelar aquest comportament utilitzen el següent model de creixement de poblacions amb un efecte “Hyper-Allee”:

$$N' = r \left(\frac{N}{A} - 1 \right) \left(\frac{N}{B} - 1 \right) \left(1 - \frac{N}{K} \right),$$

on $N(t)$ és la densitat dels pòlips (pòlips per cm^2) i t és el temps en dies.

A partir de les dades experimentals s'observa que els valors dels paràmetres són: $A = 2.24$, $B = 4.69$, $K = 5.16$ i $r = 0.161$.

Es demana:

- i) Determineu els punts d'equilibri del model.
- ii) Estudieu l'estabilitat del punt d'equilibri més petit.
- iii) A quin valor tendeix la densitat de pòlips quan la densitat inicial de pòlips és molt petita?

Solució (Ex. 32) — Resolem els diferents apartats:

- i) Els punts d'equilibri es troben quan $N' = 0$, és a dir:

$$f(N) = r \left(\frac{N}{A} - 1 \right) \left(\frac{N}{B} - 1 \right) \left(1 - \frac{N}{K} \right) = 0.$$

Això implica que algun dels termes del producte ha de ser zero, i ens dona la solució per als valors dels punts d'equilibri:

$$\frac{N}{A} - 1 = 0 \implies N = A = 2.24,$$

$$\frac{N}{B} - 1 = 0 \implies N = B = 4.69,$$

$$1 - \frac{N}{K} = 0 \implies N = K = 5.16.$$

Per tant, els punts d'equilibri són:

$$N = 2.24, N = 4.69, N = 5.16.$$

Cal notar que $N = 0$ no és un punt d'equilibri en aquest cas.

- ii) Per estudiar l'estabilitat del punt d'equilibri més petit ($N = A$), calculem la derivada $f'(N)$:

$$\begin{aligned} f'(N) &= r \frac{d}{dN} \left[\left(\frac{N}{A} - 1 \right) \left(\frac{N}{B} - 1 \right) \left(1 - \frac{N}{K} \right) \right] \\ &= r \left[\frac{1}{A} \left(\frac{N}{B} - 1 \right) \left(1 - \frac{N}{K} \right) + \left(\frac{N}{A} - 1 \right) \frac{1}{B} \left(1 - \frac{N}{K} \right) + \left(\frac{N}{A} - 1 \right) \left(\frac{N}{B} - 1 \right) \left(-\frac{1}{K} \right) \right] \end{aligned}$$

Per $N = A$, substituïnt en $f'(N)$ obtenim:

$$f'(A) = r \cdot \frac{1}{A} \underbrace{\left(\frac{A}{B} - 1 \right)}_{<0} \underbrace{\left(1 - \frac{A}{K} \right)}_{>0} < 0.$$

Com que $f'(A) < 0$, el punt $N = A$ és un punt d'equilibri estable.

- iii) Si la densitat inicial $N(0)$ és molt petita ($N(0) \rightarrow 0^+$), el model prediu que la densitat de pòlips augmentarà:

$$\lim_{N \rightarrow 0^+} f(N) = \lim_{N \rightarrow 0^+} r \left(\frac{N}{A} - 1 \right) \left(\frac{N}{B} - 1 \right) \left(1 - \frac{N}{K} \right) = r (-1) (-1) (1) = r > 0$$

Per tant, $N(t)$ creixerà fins arribar al primer punt d'equilibri $N = A = 2.24$, que és estable. Per tant, la densitat de pòlips tendeix a:

$$N = 2.24 \text{ pòlips/cm}^2.$$

El següent codi matlab integra numèricament l'EDO per mostrar el comportament de les poblacions a partir de diversos valors inicials, tot demostrant l'estabilitat dels punts d'equilibri del sistema.

Code 4: Codi Matlab per traçar $N(t)$

```
% Paràmetres
A = 2.24; B = 4.69; K = 5.16; r = 0.161;

% Equació diferencial com a funció
dNdt = @(t, N) r * ((N / A) - 1) * ((N / B) - 1) * (1 - (N / K));
tspan = [0, 700]; % De 0 a 100 dies
N0_values = [0, 0.5, 3, 4.5, 5., 6.]; % Valors inicials per comparar

% Crear la figura
figure; hold on;

% Iterar sobre cada valor inicial de N0
```



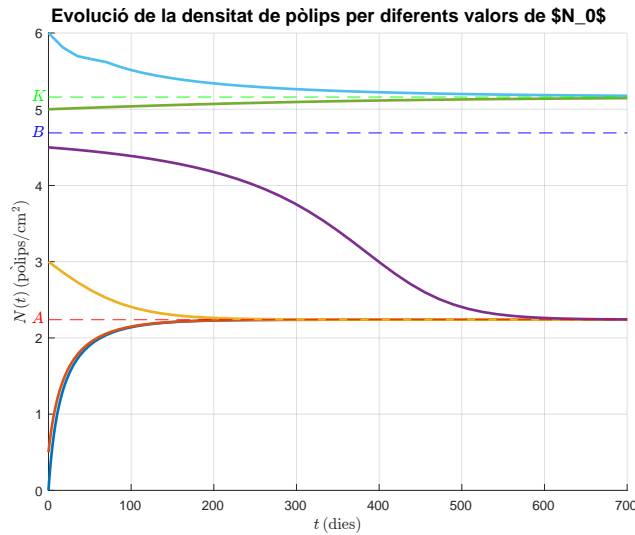
```

for i = 1:length(N0_values)
    N0 = N0_values(i); % Valor inicial actual
    [t, N] = ode45(dNdt, tspan, N0); % Integració numèrica
    plot(t, N, 'LineWidth', 2, 'DisplayName', sprintf('N0 = %.1f', N0)); % Gràfic amb etiqueta
end

hold off;

```

El gràfic mostra el comportament de la població de pòlips en funció de les condicions inicials (notar que $N = 0$ no és pas un punt d'equilibri en aquest exemple, a diferència d'altres vistos a classe):



Ex. 33 — Població Mundial: Suposem que la població mundial actual és de $p_0 = 8 \times 10^9$ habitants i que la població dins de t anys està donada per la llei de creixement exponencial:

$$p(t) = p_0 e^{0.023t}.$$

Trobeu la població mitjana de la Terra en els pròxims 30 anys segons aquest model.

Solució (Ex. 33) — La població mitjana en un interval de temps $[a, b]$ es calcula com:

$$\langle p \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b p(t) dt.$$

En aquest cas, $a = 0$ i $b = 30$ anys. Substituïm aquests valors a l'expressió:

$$\langle p \rangle = \frac{1}{30} \int_0^{30} (8 \times 10^9 e^{0.023t}) dt.$$

Traiem $p_0 = 8 \times 10^9$ fora de la integral, ja que és constant:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \frac{8 \times 10^9}{30} \int_0^{30} e^{0.023t} dt \\ &= \frac{8 \times 10^9}{30} \left[\frac{1}{0.023} e^{0.023t} \right]_0^{30} \\ &= \frac{8 \times 10^9}{30} \frac{1}{0.023} (e^{0.023 \cdot 30} - e^{0.023 \cdot 0}) = 1.152 \times 10^{10} \end{aligned}$$

Per tant, la població mitjana de la Terra en els pròxims 30 anys és:

$1.152 \times 10^{10} \text{ habitants.}$

Ex. 34 — Model de teoria de biogeografia d'illes: (JVF, Sem24)

La teoria de la biogeografia d'illes va ser introduïda per Robert MacArthur i E. O. Wilson[1]. Descriu l'origen i manteniment de la diversitat d'espècies en illes oceàniques, però pot ser extesa a hàbitats isolats, com per exemple masses boscoses emmig de terrenys agrícoles. En la seva expressió més simple, el número d'espècies que una illa pot suportar és funció de la superfície de l'illa i la seva proximitat a altres illes que la nodreixin de forma estable de noves espècies per immigració. El nombre en equilibri d'espècies que la illa podrà suportar és funció del nombre d'espècies que hi poden immigrar i del balanç entre immigració i extinció.

Considera una illa on la dinàmica del nombre d'espècies, $S(t)$, està descrita per l'equació diferencial següent:

$$\frac{dS}{dt} = \underbrace{k_1(P - S)}_{\text{Imm}} - \underbrace{k_2 S}_{\text{Ext}},$$

on el temps és donat en anys, P és el nombre total d'espècies en illes properes que poden immigrar a la nostra, $k_1 > 0$ és la taxa d'immigració efectiva i $k_2 > 0$ és la taxa d'extinció efectiva. Si $k_1 = 0.01$ i $k_2 = 0.02 \text{ anys}^{-1}$ i $P = 1000$ espècies potencials:

1. Resol l'equació diferencial per trobar $S(t)$ després d'un fenomen volcànic que ha exterminat totes les espècies de l'illa. És a dir, donades les condicions inicials $S(0) = S_0$.
2. Estudia l'equilibri del sistema. Racionalitza el valor de l'equilibri trobat respecte les corbes d'immigració i extinció, considerant les expressions separades per les velocitats de canvi d'aquestes dues dinàmiques.
3. Determina el temps $t_{1/4}$ necessari perquè el nombre d'espècies a l'illa sigui una quarta part del seu màxim potencial, $S(t_{1/2}) = \frac{P}{4}$. Pot la població arribar a la meitat del seu valor potencial $S(t_{1/2}) = \frac{P}{2}$?

Solució (Ex. 34) — Resolem els diferents apartats:

1. Resolució de l'equació diferencial:

$$\frac{dS}{dt} = k_1 P - (k_1 + k_2)S.$$

Separem variables:

$$\frac{dS}{k_1 P - (k_1 + k_2)S} = dt.$$

Reescrivim el denominador per simplificar:

$$\frac{dS}{k_1 P - (k_1 + k_2)S} = \frac{1}{k_1 + k_2} \cdot \frac{dS}{\frac{k_1 P}{k_1 + k_2} - S}.$$

Per simplificar la notació, prenem $K = \frac{k_1 P}{k_1 + k_2}$. L'equació queda:

$$\frac{dS}{K - S} = (k_1 + k_2)dt.$$

Integrarem amb els límits inicials $S(0) = 0$ i $S(t)$:

$$\begin{aligned} \int_0^{S(t)} \frac{dS}{K - S} &= \int_0^t (k_1 + k_2)dt \\ -\ln |K - S| \Big|_0^{S(t)} &= (k_1 + k_2)t \Big|_0^t \\ -\ln |K - S(t)| + \ln |K| &= (k_1 + k_2)t \\ \ln \left(\frac{K}{K - S(t)} \right) &= (k_1 + k_2)t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{K}{K - S(t)} &= e^{(k_1+k_2)t} \\ S(t) &= K - Ke^{-(k_1+k_2)t}.\end{aligned}$$

La solució final, un cop substituït el valor de K , és:

$$S(t) = \frac{k_1 P}{k_1 + k_2} \left(1 - e^{-(k_1+k_2)t}\right). \quad (8)$$

Substituïm els valors donats: $k_1 = 0.01$, $k_2 = 0.02$, $P = 1000$:

$$S(t) = \frac{0.01 \cdot 1000}{0.01 + 0.02} \left(1 - e^{-(0.01+0.02)t}\right) = 333.\bar{3} \left(1 - e^{-0.03t}\right)$$

2. Estudi de l'equilibri del sistema:

En equilibri, $\frac{dS}{dt} = f(S) = 0$. Això implica:

$$f(S) = k_1(P - S) - k_2S = 0.$$

Resolent per S :

$$S_{\text{eq}} = \frac{k_1 P}{k_1 + k_2}.$$

Substituïm els valors donats: $k_1 = 0.01$, $k_2 = 0.02$, $P = 1000$:

$$S_{\text{eq}} = \frac{0.01 \cdot 1000}{0.01 + 0.02} = 333 \text{ espècies}$$

Avaluem si l'equilibri és estable o inestable avaluant la derivada $f'(S)$:

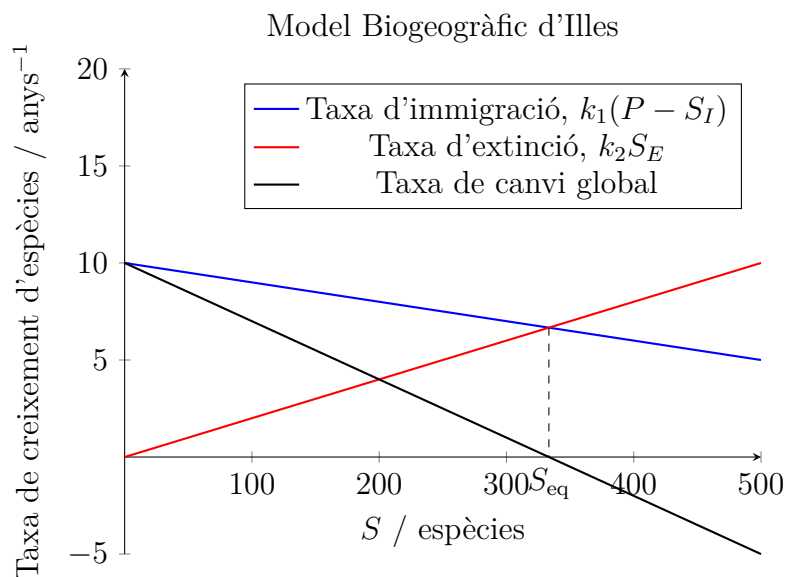
$$f'(S) = -k_1 - k_2 < 0$$

Per tant, l'equilibri és estable.

Una altra manera de veure-ho és analitzant el sentit biològic de l'expressió inicial. L'equilibri S_{eq} es troba quan la taxa d'immigració és igual a la taxa d'extinció:

$$k_1(P - S_{\text{eq}}) = k_2 S_{\text{eq}}.$$

La representació de les dues funcions mostra el significat del valor de l'equilibri, i també l'explicació del perquè es tracta d'un equilibri estable. Com veiem al gràfic, si S es fa més gran que S_{eq} , l'extinció guanya la immigració i la biodiversitat es redueix tornant a aquest valor d'equilibri. De manera anàloga, si la quantitat d'espècies S es fa menor que S_{eq} , la biodiversitat augmenta per tal de retornar a l'equilibri.



Finalment, també observem que el punt trobat és estable si avaluem la funció $S(t)$ (Eq. 8) per a valors grans del temps:

$$S_{eq} \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{k_1 P}{k_1 + k_2} (1 - e^{-(k_1 + k_2)t}) = \frac{k_1 P}{k_1 + k_2} (1 - 0) = \frac{k_1 P}{k_1 + k_2} = S_{eq}$$

3. Temps per assolir la quarta part del valor màxim:

Substituïm $S(t_{1/4}) = \frac{P}{4}$ a la solució general:

$$\frac{P}{4} = \frac{k_1 P}{k_1 + k_2} (1 - e^{-(k_1 + k_2)t_{1/4}}).$$

Simplifiquem:

$$\frac{1}{4} = \frac{k_1}{k_1 + k_2} (1 - e^{-(k_1 + k_2)t_{1/4}}).$$

Resolent per $t_{1/4}$:

$$1 - e^{-(k_1 + k_2)t_{1/4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{k_1 + k_2}{k_1},$$

$$e^{-(k_1 + k_2)t_{1/4}} = 1 - \frac{k_1 + k_2}{4k_1},$$

$$t_{1/4} = -\frac{1}{k_1 + k_2} \ln \left(1 - \frac{k_1 + k_2}{4k_1} \right).$$

Substituïm els valors donats: $k_1 = 0.01$, $k_2 = 0.02$, $P = 1000$:

$$t_{1/4} = -\frac{1}{0.01 + 0.02} \ln \left(1 - \frac{0.01 + 0.02}{4 \cdot 0.01} \right) = -\frac{1}{0.03} \ln \left(1 - \frac{0.03}{0.04} \right).$$

$$t_{1/4} = -\frac{1}{0.03} \ln(0.25).$$

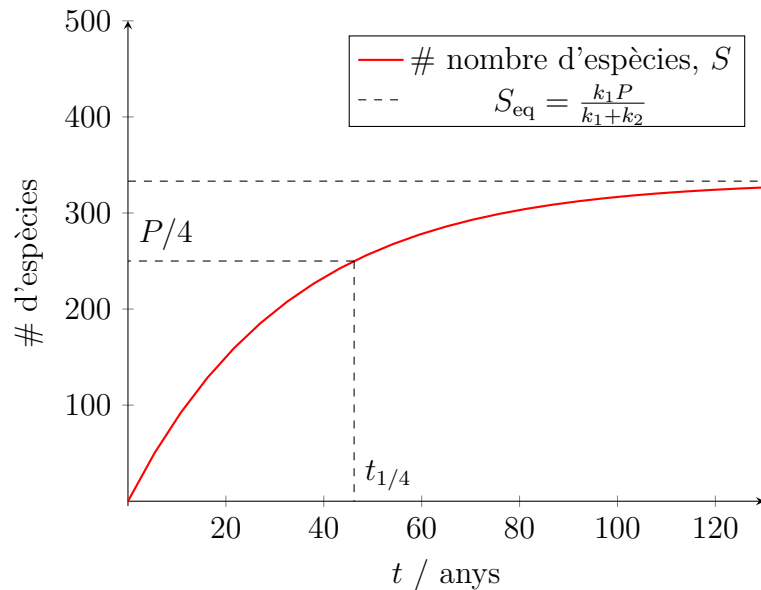
Calculant:

$$t_{1/4} \approx \frac{1}{0.03} \cdot 1.386 \approx 46.2.$$

Per tant, el temps necessari per assolir una quarta part del valor màxim és aproximadament $t_{1/4} \approx 46.2$ anys.

No és possible arribar a la meitat del seu màxim potencial ($P/2 = 500$ espècies en aquest cas en que partim d'una biodiversitat inicial $S_0 = 0$ i només podem assolir el valor del punt d'equilibri $S_{eq} = 333$ espècies. Si l'illa hagués partit d'un nombre total d'espècies superior al valor de S_{eq} , hauria també evolucionat cap a aquest valor i, en aquest cas, sí que hagués arribat en algun moment a $S = P/2$. Igualment, és fàcil veure que s'arriba a $S = P$ si no hi hagués taxa d'extinció ($k_2 = 0$).

Model Biogeogràfic d'Illes



2 Fonaments i espais vectorials

2.1 Els nombres reals

Ex. 35 — **Equacions algebraiques, transcendents i sense solució real:**
Escriu una equació de cada cas:

- (1) Escriu equacions polinòmiques amb coeficients enters que tinguin com a solucions nombres naturals, enters, racionals, irracionals (*algebraics*)
- (2) Escriu una equació polinòmica amb coeficients enters que tingui com a solució el número π (*transcendent*)
- (3) Troba una equació polinòmica amb coeficients constants sense cap nombre real com a solució

Solució (Ex. 35) — (1) Intuitivament, una equació algebraica és aquella en la que es pot trobar la resposta usant operacions algebraiques: addició, multiplicació i extracció d'arrel.

$$2x - 1 = 0, \quad x = \frac{1}{2}$$

o bé

$$x^2 - 2 = 0, \quad x = \pm\sqrt{2}$$

- (2) Una equació transcendent, "transcedeix" l'àlgebra i s'han d'usar altres operacions. Per exemple, les funcions exponencials, algorítmiques o trigonomètriques. Per definició, un número real α és transcendent si no és algebraic. És a dir, si no existeix cap polinomi amb coeficients enters de manera que α en sigui una arrel. Per tant, la pregunta no té resposta, ja que no podem construir un polinomi amb solució π . La demostració és complicada i la deixo com a lectura avançada.
- (3) Ens passarà sempre que la solució impliqui haver de trobar l'arrel parella d'un número negatiu:

$$x^2 + 1 = 0, \quad x = \pm\sqrt{-1}$$

que en el conjunt dels reals no té solució. Caldria resoldre-la en el conjunt dels números complexos:

$$x^2 + 1 = 0, \quad x = \pm i$$

■

3 Càlcul Matricial

3.1 Matrius

Ex. 36 — Producte de matrius: Determineu el valor de m i p , perquè es pugui realitzar el producte següent:

$$(P^t \cdot Q^t) \cdot M^t$$

si $M_{2 \times 3}$, $P_{m \times p}$, $Q_{3 \times 4}$ i el resultat del producte és una matriu quadrada.

Solució (Ex. 36) — Per resoldre'l primer tenim en compte que:

$$\begin{aligned} M_{2 \times 3} &\Rightarrow M_{3 \times 2}^t \\ P_{m \times p} &\Rightarrow P_{p \times m}^t \\ Q_{3 \times 4} &\Rightarrow Q_{4 \times 3}^t \end{aligned}$$

Amb la qual cosa:

$$(P_{p \times m}^t \cdot Q_{4 \times 3}^t) \cdot M_{3 \times 2}^t = A_{p \times 2}$$

Com que ens diuen que A és quadrada, obtenim $p = 2$ i, a més, és fàcil veure que perquè el producte es pugui realitzar $m = 4$. ■

Ex. 37 — Equacions matricials: Aïlleu X , si és possible, en les equacions següents, suposant que totes les matrius són quadrades del mateix ordre i invertibles:

- (a) $3X^t + (XA)^t + I = B$
- (b) $(XA)^{-1} = 2I + B$
- (c) $AX + C = BX$

Solució (Ex. 37) — Usant les propietats de les operacions amb matrius:

- (a) $3X^t + (XA)^t + I = B$

$$\begin{aligned} 3X^t + (XA)^t + I &= B \\ (3X)^t + (XA)^t &= B - I \\ (3X + XA)^t &= B - I \\ 3X + XA &= (B - I)^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3XI + XA &= (B - I)^t \\
X(3I + A) &= (B - I)^t \\
X \underbrace{(3I + A)(3I + A)^{-1}}_I &= (B - I)^t(3I + A)^{-1} \\
X &= (B - I)^t(3I + A)^{-1}
\end{aligned}$$

■

(b) $(XA)^{-1} = 2I + B$

$$\begin{aligned}
(XA)^{-1} &= 2I + B \\
XA &= (2I + B)^{-1} \\
X &= (2I + B)^{-1}A^{-1}
\end{aligned}$$

■

(c) $AX + C = BX$

$$\begin{aligned}
AX + C &= BX \\
AX - BX &= C \\
(A - B)X &= C \\
X &= (A - B)^{-1}C
\end{aligned}$$

■

3.2 Valors i Vectors propis

Ex. 38 — **Vectors i valors propis en una matriu 2×2 :** Trobar els valors i vectors propis de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Solució (Ex. 38) — Trobem primer el polinomi característic de la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Perquè això tingui solució diferent de la trivial $((x, y) = (0, 0))$ cal que el determinant secular sigui igual a zero:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, cal solucionar el polinomi característic de la matriu:

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

que té per solució els valors propis $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -2$. Calculem ara els vectors propis:

$$\boxed{\lambda_1 = 2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2x \\ 3x - y = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases}$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_1 = 2$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\lambda_2 = -2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x + y = -2x \\ 3x - y = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = -3\alpha \end{cases}$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_2 = -2$ és $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

■

Ex. 39 — Vectors i valors propis en una matriu 3×3 : Cal-
cula els valors propis i vectors propis de la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solució (Ex. 39) — Trobem primer el polinomi característic de la matriu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Perquè això tingui solució diferent de la trivial $((x, y, z) = (0, 0, 0))$ cal que el determinant secular sigui igual a zero:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, cal solucionar el polinomi característic de la matriu:

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 3 = 0$$

Per Ruffini obtenim el primer dels coeficients:

$$\begin{array}{c|cccc} & & -1 & 6 & -10 & 3 \\ & 3 & & -3 & 9 & -3 \\ \hline & & -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}$$

Per tant:

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 3 = 0 - (\lambda - 3)(\lambda^2 - 3\lambda + 1) = (\lambda - 3)\left(\lambda - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{\sqrt{5} + 3}{2}\right) = 0$$

Per a cada valor propi, trobem els vectors propis associats:

$$\boxed{\lambda_1 = 3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3x \\ x + 2y = 3y \\ -x + y + 2z = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases}$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_1 = 3$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x - y + 4z = 3x \\ 3x + 2y - z = 3y \\ 2x + y - z = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 4z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 4z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Així doncs, un vector propi associat a $\lambda_2 = 3$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\lambda_3 = -2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x - y + 4z = -2x \\ 3x + 2y - z = -2y \\ 2x + y - z = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y + 4z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y + 4z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Finalment, doncs, un vector propi associat a $\lambda_3 = -2$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El determinant de la matriu original és justament el producte dels tres valors propis:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -6 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

i la traça de la matriu és la suma dels tres valors propis:

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2$$

Els tres vectors són L.I., ja que

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -6 \neq 0$$

De fet, en no haver cap valor propi igual a 0, la matriu formada pels tres vectors propis ha de ser per força invertible i, per tant, el seu determinant diferent de zero o, el que és el mateix, els vectors propis són L.I.

■

Ex. 40 — Potència d'una matriu: Calcula $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^6$ usant el concepte de valors i vectors propis de la matriu.

Solució (Ex. 40) — Sabem que si una matriu A és diagonalitzable, podem expressar-la com

$$D = P^{-1}AP$$

on D és una matriu diagonal amb els valors propis de la matriu A i P és una matriu quines columnes representen els vectors propis associats a cada valor propi.

Si usem aquesta expressió, fer l'operació és senzilla. Efectivament:

$$(PDP^{-1})^6 = A^6$$

o, el que és el mateix:

$$\begin{aligned} PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} &= A^6 \\ PD^6P^{-1} &= A^6 \end{aligned} \quad (9)$$

Anem, doncs, a cercar els valors i vectors propis de la matriu. Aquests seran els valors que compleixin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Perquè això tingui solució diferent de la trivial $((x, y) = (0, 0))$ cal que el determinant secular sigui igual a zero:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, cal solucionar el polinomi característic de la matriu:

$$(1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 3 = 0$$

d'on $\lambda = \pm 2$.

Un cop tenim els valors propis, trobem els vectors propis que hi estan vinculats:

$$\boxed{\lambda_1 = 2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2x \\ 3x - y = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$$

Per tant, un vector propi⁴ associat a $\lambda_1 = 2$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\lambda_1 = -2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x + y = -2x \\ 3x - y = -2y \end{cases} \Rightarrow 3x + y = 0$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_2 = -2$ és $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Construïm ara l'expressió de l'Eq. 9:

$$\begin{aligned} A^6 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^6 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

⁴De fet, el conjunt de vectors propis associats a un determinat valor propi forma un subespai vectorial.

$$= \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}$$

Sabries dir d'on prové el fet que, en aquest cas particular, la potència de la matriu sigui idèntica a la potència de la seva matriu semblant diagonal?

■

Ex. 41 — Vectors i valors propis en una matriu 3×3 : Cal-

cula els valors propis i vectors propis de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Quina

relació hi ha entre els valors propis i el determinant i la traça de la matriu original? Comprova que els tres vectors propis són L.I.

Solució (Ex. 41) — Trobem primer el polinomi característic de la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Perquè això tingui solució diferent de la trivial $((x, y, z) = (0, 0, 0))$ cal que el determinant secular sigui igual a zero:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2 - \lambda & 1 \\ -2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, cal solucionar el polinomi característic de la matriu:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

Per Ruffini obtenim el primer dels coeficients:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

Per tant:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 6) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

Un cop tenim els valors propis $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ i $\lambda_3 = -2$, trobem els vectors propis que hi estan vinculats:

$$\boxed{\lambda_1 = 1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x - y + 4z = x \\ 3x + 2y - z = y \\ 2x + y - z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 4z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 4z = 0 \\ 3x + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = 4\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_1 = 1$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\lambda_2 = 3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x - y + 4z = 3x \\ 3x + 2y - z = 3y \\ 2x + y - z = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 4z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 4z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Així doncs, un vector propi associat a $\lambda_2 = 3$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\lambda_3 = -2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x - y + 4z = -2x \\ 3x + 2y - z = -2y \\ 2x + y - z = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y + 4z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y + 4z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Finalment, doncs, un vector propi associat a $\lambda_3 = -2$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El determinant de la matriu original és justament el producte dels tres valors propis:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -6 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

i la traça de la matriu és la suma dels tres valors propis:

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2$$

Els tres vectors són L.I., ja que

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -6 \neq 0$$

De fet, en no haver cap valor propi igual a 0, la matriu formada pels tres vectors propis ha de ser per força invertible i, per tant, el seu determinant diferent de zero o, el que és el mateix, els vectors propis són L.I.

■

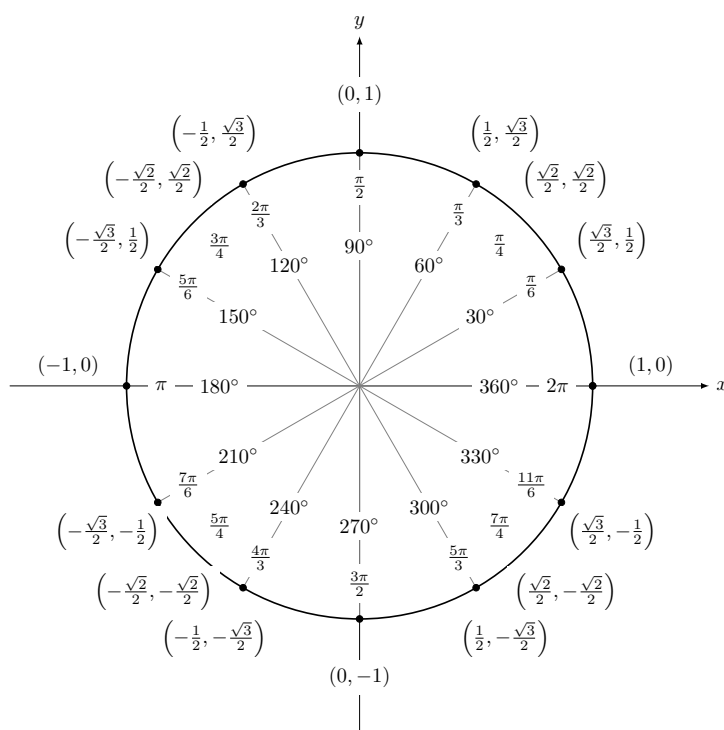


Figura 24: Esquema dels valors de $\sin x$ i $\cos x$ per a alguns valors d'angles.

4 Material pràctic

- La Figura 24 conté informació sobre els sinus i cosinus d'alguns dels valors d'angles més comuns en els exercicis de l'assignatura.

5 Origen dels exercicis

Els exercicis d'aquesta recopilació tenen orígens diversos. Alguns estan identificats a l'enunciat amb unes sigles que indiquen:

Autors:

MC Montserrat Corbera.

JA Josep Ayats.

JVF Jordi Villà-Freixa.

CGPT Adaptats de Chat GPT[2].

Exàmens:

1er20 1r Examen parcial de models discrets, curs 2020-2021.

1er21 1r Examen parcial de models discrets, curs 2021-2022.

2on24 2on Examen parcial de models continus, curs 2024-2025.

Sem24 Examen semestral, curs 2024-2025.

recu24 Examen recuperació, curs 2024-2025.

1er25 1r Examen parcial de models discrets, curs 2025-2026.

Si no hi ha origen explícit implica que s'ha perdut. En cas de detectar alguna errada o mala informació es prega que contacteu l'autor.

Referències

- [1] Robert H. MacArthur and Edward O. Wilson. An equilibrium theory of insular zoogeography. *Evolution*, 17(4):373–387, December 1963.
- [2] OpenAI. Chatgpt: Language model by openai, 2023.
- [3] Gerda de Vries, Thomas Hillen, Mark Lewis, Johannes Müller, and Birgitt Schönfisch. *A course in mathematical biology: quantitative modeling with mathematical and computational methods*. Number 12 in Mathematical modeling and computation. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa, 2006.