

# Modelatge matemàtic multidimensional amb matrius de Leslie

Jordi Villà i Freixa

8 d'Octubre, 2025

## 1 Introducció

Els models de població són eines importants en biologia que ajuden a comprendre la dinàmica d'espècies en un ecosistema. En aquest document, es presenta un model discret multidimensional utilitzant una matriu de Leslie, que permet modelar l'evolució de les poblacions en funció de les classes d'edat. Aquest model és útil per analitzar el creixement poblacional d'espècies, la seva sostenibilitat i la seva conservació.

## 2 Definició del Model

Considerem una població de peixos dividida en tres classes d'edat:

- Joves (0-1 any)
- Adults (1-3 anys)
- Vells (més de 3 anys)

### 2.1 Fecunditat i Taxes de Supervivència

Les taxes de fecunditat i supervivència per cada classe d'edat són:

- **Joves:**
  - Fecunditat: 0
  - Taxa de supervivència: 0.8
- **Adults:**
  - Fecunditat: 2 (produïxen 2 joves per any)
  - Taxa de supervivència: 0.6
- **Vells:**
  - Fecunditat: 1 (produïxen 1 jove per any)
  - Taxa de supervivència: 0.4

## 2.2 Matriu de Leslie

La matriu de Leslie  $L$  per aquest model es pot definir com:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

## 2.3 Vector Inicial

Suposem que la població inicial de cada classe d'edat és la següent:

$$\mathbf{N}_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix}$$

## 3 Evolució de la Població

La població a l'any següent es calcula com:

$$\mathbf{N}_{t+1} = L \cdot \mathbf{N}_t$$

On  $\mathbf{N}_t$  és el vector de població en el temps  $t$ . Per estudiar l'evolució de la població al llarg dels anys, podem calcular les poblacions durant els propers anys (per exemple, 10 anys).

A continuació, es presenten els resultats de la simulació de la població durant 10 anys:

```
Any 0: Joves = 100.00, Adults = 50.00, Vells = 20.00
Any 1: Joves = 130.00, Adults = 80.00, Vells = 30.00
Any 2: Joves = 190.00, Adults = 104.00, Vells = 48.00
Any 3: Joves = 368.00, Adults = 152.00, Vells = 62.40
Any 4: Joves = 498.40, Adults = 294.40, Vells = 91.20
Any 5: Joves = 783.20, Adults = 398.08, Vells = 176.64
Any 6: Joves = 1296.00, Adults = 570.32, Vells = 238.43
Any 7: Joves = 2142.08, Adults = 918.68, Vells = 342.13
Any 8: Joves = 3961.68, Adults = 1333.70, Vells = 551.38
Any 9: Joves = 6908.88, Adults = 2102.15, Vells = 799.11
Any 10: Joves = 12173.60, Adults = 2755.93, Vells = 1016.38
```

## 4 Anàlisi dels Resultats

La taula anterior mostra l'evolució de les poblacions de joves, adults i vells al llarg dels anys.

- Es pot observar un creixement significatiu en la població de joves a mesura que passa el temps.

- Els adults i vells també mostren un augment, però en menor mesura en comparació amb els joves, indicant que la població de joves contribueix significativament al creixement de la població total.
- A llarg termini, la població pot arribar a un punt en què la capacitat de càrrega de l'ecosistema es pugui veure afectada, cosa que hauria de ser considerada en la gestió de recursos.

## 5 Gràfic de l'Evolució de la Població

El gràfic següent il·lustra l'evolució de les poblacions de les diferents classes d'edat al llarg dels anys:

