

Modelatge matemàtic multidimensional amb matrius de Leslie

Jordi Villà i Freixa

8 d'Octubre, 2025

1 Plantejament del problema

Un agent rural està interessat en saber el nombre de femelles d'una certa espècie de rata en un hàbitat i ha recopilat la següent informació sobre aquesta espècie:

- Població inicial de femelles per edat:

$$N_1 = 55$$

$$N_2 = 32$$

$$N_3 = 25$$

- Nombre promig de femelles que són procreades per les femelles existents, per edat:

$$F_1 = 0.6$$

$$F_2 = 2.4$$

$$F_3 = 0.5$$

- Taxa de supervivència (proporció de la població que passa a la següent edat):

$$S_1 = 0.5$$

$$S_2 = 0.6$$

Es demana:

1. Construeix la matriu de Leslie del problema donat.
2. Quantes femelles de 4 anys existeixen al cap de tres anys?
3. Calcula els valors propis i vectors propis de la matriu de Leslie.
4. Està creixent la població total de femelles amb el temps?
5. Quina és la proporció de cada grup de rates després d'un llarg període?

2 Solució

2.1 Construcció de la matriu de Leslie

La matriu de Leslie és una eina que permet modelar l'evolució de la població amb base en les taxes de fecunditat i de supervivència de diferents grups d'edat. En aquest cas, la matriu serà de dimensió 3x3 perquè tenim tres grups d'edat.

La matriu general de Leslie té la forma següent:

$$L = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \end{pmatrix}$$

On:

- F_1 , F_2 , i F_3 són les taxes de fecunditat.
- S_1 i S_2 són les taxes de supervivència.

Segons les dades donades:

- Les fecunditats són $F_1 = 0.6$, $F_2 = 2.4$, i $F_3 = 0.5$.
- Les supervivències són $S_1 = 0.5$ i $S_2 = 0.6$.

Per tant, la matriu de Leslie serà:

$$L = \begin{pmatrix} 0.6 & 2.4 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2 Nombre de femelles de 4 anys

Segons les dades, cap femella de tres anys sobreviu. Per tant, el nombre de femelles de 4 anys és sempre zero.

2.3 Càlcul dels valors propis i vectors propis

Utilitzarem MATLAB per calcular els valors i vectors propis:

```
% Codi MATLAB per al càlcul dels valors i vectors propis

% Definir la matriu de Leslie
L = [0.6, 2.4, 0.5;
     0.5, 0, 0;
     0, 0.6, 0];

% Calcular els valors propis (eigenvalues) i vectors propis (eigenvectors)
[eigenvectors, eigenvalues] = eig(L);

% Mostrar els resultats
eigenvalues
eigenvectors
```

Els valors propis obtinguts són:

$$\lambda_1 = 1.480, \quad \lambda_2 = -0.743, \quad \lambda_3 = -0.136$$

2.4 Determinació del creixement de la població

Per saber si la població està creixent, hem de veure el valor propi més gran (també anomenat el valor propi dominant), λ_d . Si aquest valor és més gran que 1, la població creix. Si és igual a 1, la població és constant, i si és menor que 1, la població decreix.

El valor propi dominant és $\lambda_d = 1.480$. Atès que $\lambda_d > 1$, podem concloure que la població de femelles està creixent al llarg del temps.

2.5 Proporció de cada grup després d'un llarg període

La proporció de cada grup d'edat després d'un llarg període es determina pel vector propi associat al valor propi dominant. Aquest vector ens dona la distribució estable de la població entre els diferents grups d'edat.

El vector propi associat al valor propi dominant és:

$$v_{\text{dom}} = \begin{pmatrix} 0.940 \\ 0.318 \\ 0.129 \end{pmatrix}$$

Després d'un llarg període, la proporció de cada grup d'edat és:

$$\text{Proporció de femelles d'1 any} = \frac{0.940}{0.940 + 0.318 + 0.129} = 0.678$$

$$\text{Proporció de femelles de 2 anys} = \frac{0.318}{0.940 + 0.318 + 0.129} = 0.229$$

$$\text{Proporció de femelles de 3 anys} = \frac{0.129}{0.940 + 0.318 + 0.129} = 0.093$$

Això ens indica que, en l'estat estable (després d'un nombre alt de generacions), el 67.8% de la població són femelles d'1 any, el 22.9% són femelles de 2 anys i el 9.3% són femelles de 3 anys.