Formulari: Models Discrets // Matemàtiques 1r curs Biociències

Models Unidimensionals

- Expressió general:
$$x_n = f(x_{n-1})$$
- Creixement exponencial (Malthus):
$$x_n = Rx_{n-1}, \quad R = \text{factor de creixement}$$
- Generalització:
$$x_n = R^n x_0$$
- Correcció amb N individus per interval:
$$x_n = Rx_{n-1} + N$$
- Creixement restringit:
  - Beverton-Holt:
$$x_n = \frac{Rx_{n-1}}{1 + (R-1)x_{n-1}/K}$$
  - Ricker:
$$x_n = x_{n-1}e^{r(1-x_{n-1}/K)}, \quad r = \ln R$$
  - Logístic:
$$x_n = x_{n-1}\Big(R - \frac{R-1}{K}x_{n-1}\Big)$$
- Punt d'equilibri:
$$x_e : x_e = f(x_e)$$
- Estabilitat:
$$|f'(x_e)| < 1 \Rightarrow \text{estable}, \quad |f'(x_e)| > 1 \Rightarrow \text{inestable}$$

Models Multidimensionals Lineals

- Matriu de Leslie (3 categories):
$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix}$$
- Evolució població:
$$\mathbf{x}(t+1) = L\mathbf{x}(t)$$
- Valor i vector propis:
$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad \det(A - \lambda I) = 0$$
- Vectors propis:
$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$$
- Diagonalització:
$$A = CDC^{-1}, \quad D = \text{diagonal}, \ C = \text{vectors propis en columnes}$$
- Valor propi dominant: el de mòdul més gran

Models Multidimensionals No Lineals

- Nicholson-Bailey (x: host, y: paràsit)
$$x_{n+1} = Rx_n e^{-ay_n}, \quad y_{n+1} = Sx_n(1 - e^{-ay_n})$$
- Binomial Negatiu:
$$x_{n+1} = Rx_n\left(1 + \frac{ay_n}{m}\right)^{-m}, \quad y_{n+1} = Sx_n\left[1 - \left(1 + \frac{ay_n}{m}\right)^{-m}\right]$$
- Punt d'equilibri: prenent $x_{n+1} = f(x_n, y_n)$ i $y_{n+1} = g(x_n, y_n)$
$$(x_e, y_e) : x_e = f(x_e, y_e), \ y_e = g(x_e, y_e)$$
- Jacobiana del sistema discret:
$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{\partial f}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial g}{\partial y_n} \end{pmatrix}_{(x_e, y_e)}$$
- Estabilitat: valors propis de la Jacobiana discreta
$$|\lambda_i| < 1 \Rightarrow \text{estable}, \quad |\lambda_i| > 1 \Rightarrow \text{inestable}$$

Propietats diverses

- Logaritmes de matrius:
$$\ln(A^\alpha) = \alpha \ln(A)$$
- Derivades:
  - Polinòmica: $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = anx^{n-1}, n \neq 0$
  - Exponencial: $f(x) = ae^{bx} \Rightarrow f'(x) = abe^{bx}$
- Inversa d'una matriu:
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)$$