Tema 1: Models discrets

Jordi Villà i Freixa

Universitat de Vic - Universitat Central de Catalunya
Matemàtiques
Troc comú en Biologia i Biotecnologia

jordi.villa@uvic.cat

darrera actualització 16 de setembre de 2025

curs 2025-2026

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC-UCC

Índex

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC-UCC

Referències

El material d'aquestes presentacions està basat en anteriors presentacions i apunts d'altres professors [Corbera(2019)] de la UVic-UCC, pàgines web diverses (normalment enllaçades des del text), així com monografies [Otto and Day(2007)].

Models unidimensionals

En aquesta secció estudiarem models de creixement i decreixement de poblacions d'espècies que es reprodueixen en períodes de temps donats.

Exemples:

- Poblacions de plantes que es reprodueixen un cop a l'any i després moren.
- Poblacions de bacteris que es divideixen en un període fix.

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC-UCC

Exemple. Creixement exponencial de bacteris

Suposem una població de bacteris que es divideixen cada 20 minuts. Inicialment ($k = 0$) hi ha 2 bacteris, i a cada període k doblem la població:

Temps (min)	0	20	40	60	80	100	120	140
Nombre de bacteris	2	4	8	16	32	64	128	256

k	0	1	2	3	4	5	6	7
x_k	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7

Taula 1: Evolució del nombre de bacteris cada 20 minuts

Utilitzarem la notació x_k per indicar el nombre de bacteris transcorreguts k períodes de divisió. Així, obtenim una **successió** de valors a partir d'una **recurrència**:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2, \\
x_k &= 2\,x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \\
x_k &= 2^k\,x_0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

Exemple. Creixement exponencial de bacteris

Exercici 1: Creixement de bacteris

Quan superarà la població els 60 bacteris?

$$x_k = 2^{k+1} \geq 60$$
$$k \geq \frac{\ln 60}{\ln 2} - 1 \approx 4.91$$

Per tant, al cap de $k = 5$ períodes (100 minuts), $x_5 = 64 \geq 60$. Quan $k \to \infty$, $x_k \to \infty$.

Exemple. Creixement exponencial de plantes

Una població de plantes es reprodueix anualment, cada planta en genera tres de noves i mor un cop ho ha fet. Inicialment hi ha $x_0 = 30$ plantes.

$$x_k = 3\,x_{k-1},$$
$$x_k = 30 \cdot 3^k = 3^k\,x_0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Exercici 2: Creixement de plantes
Quantes plantes hi haurà als 4 anys? i als 4 i mig? Quan superarà la població les 30000 plantes?

Exemple. Creixement exponencial de truites

Una fàbrica redueix un 11% anual la població de truites d'un riu. Inicialment $x_0 = 1000$.

$$x_k = 0.89^k \cdot 1000, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Exercici 3: Decreixement de truites

- Quantes truites hi haurà als 6 anys? Als 7 anys i 10 mesos?
- Quan caurà la població per sota de 400 truites?

Model general de creixement exponencial

Suposem que cada individu produeix, de mitjana, $R > 0$ descendents per cicle vital.

$$x_k = R\, x_{k-1}, \quad k \geq 1,$$
$$x_k = R^k x_0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

On:

- R és la **constant de creixement**.
- x_0 és la població inicial.

Depenent del valor de R:

1. $R > 1$: la població creix indefinidament ($x_k \to +\infty$).
2. $R = 1$: la població roman constant ($x_k = x_0$).
3. $0 < R < 1$: la població decreix i tendeix a 0 (extinció).

Exemple. Creixement exponencial de truites amb reintroducció

Si, partint de l'Eq. (1), cada any es reintrodueixen 100 truites addicionals:

$$x_k = 0.89\, x_{k-1} + 100, \quad k = 1, 2, \dots \tag{2}$$

Aquest model mostra que la població tendeix a estabilitzar-se entorn de 909 truites.

Exemple gràfic: Creixement exponencial

k	x_k
1	990.000
2	981.100
3	973.179
4	966.129
5	959.855
6	954.271
7	949.301
8	944.878
9	940.941
10	937.438
...	
48	909.429
49	909.392
50	909.359
51	909.329
52	909.303
53	909.280
54	909.259
55	909.241
56	909.224
57	909.209
58	909.196

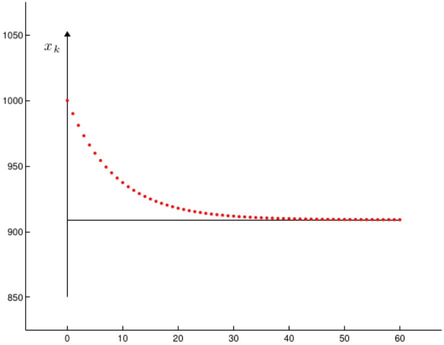

Figura 1: Representació gràfica del creixement exponencial d'una població de truites que decreix amb reintroducció segons l'Eq. (2) [de Souza(2025)].

Generalització: Model amb immigració/reintroducció

En general, si cada període es reintrodueixen C individus i la taxa de supervivència és R:

$$x_k = R\,x_{k-1} + C, \quad k = 1, 2, \ldots$$

La solució explícita és:

$$x_k = R^k x_0 + C\frac{1 - R^k}{1 - R}, \quad \text{si } R \neq 1$$

Quan $0 < R < 1$, la població s'estabilitza a:

$$x_\infty = \frac{C}{1 - R}$$

FACULTAT DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA I ENGINYERIES
UVIC | UVIC-UCC

Bibliografia

Montserrat Corbera.
Unitat 2. Càlcul integral.
Universitat de Vic - Universitat Central de Catalunya, Facultat de Ciències i Tecnologia, Vic, Barcelona, 2019.
Drets reservats. No es pot copiar sense permís de l'autora.

Diego Araújo de Souza.
Matemáticas aplicadas a la biología.
Apuntes de classe; grado en Biología, asignatura de matemáticas, 2025.
Departamento de Ecuaciones diferenciales y Análsis Numérico; Universidad de Sevilla.

Sarah P. Otto and Troy Day.
A biologist's guide to mathematical modeling in ecology and evolution.
Princeton University Press, Princeton, 2007.
ISBN 978-0-691-12344-8.
OCLC: ocm65065577.