## Apèndix: vectors i valors propis d'una matriu

#### Jordi Villà i Freixa

Universitat de Vic - Universitat Central de Catalunya Matemàtiques Troc comú en Biologia i Biotecnologia

jordi.villa@uvic.cat

darrera actualització 8 d'octubre de 2025

curs 2025-2026



1/11

# Índex



## Conceptes bàsics

El producte d'una matriu  $A_{n\times n}$  per un vector  $v\in\mathbb{R}^n$  dona com a resultat un altre vector Av de la mateixa dimensió.

### Vectors privilegiats

Hi ha vectors v tals que:

$$Av = \lambda v$$

on  $\lambda$  és un escalar real o complex. Aquests vectors v mantenen la mateixa direcció que l'original, encara que poden canviar de longitud.

 $\Rightarrow v$  és un **autovector** i  $\lambda$  és el seu **autovalor**.



### Definició formal

#### Definició

Siguin A una matriu  $n \times n$  i  $v \neq 0$  un vector. Si existeix un nombre  $\lambda$  tal que:

$$Av = \lambda v$$

#### aleshores:

- *v* és un **autovector** o **vector propi** de *A*.
- $\lambda$  és el seu autovalor o valor propi associat.

**Nota:** El càlcul d'autovalors i autovectors no és senzill en general, excepte per a matrius de dimensions 2 o 3.



### Càlcul dels autovalors

#### Definició

Els autovalors  $\lambda$  d'una matriu A són les solucions de:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

on I és la matriu identitat i det denota el determinant.

Observació: Una matriu real pot tenir autovalors complexos.

El determinant d'una matriu quadrada és un nombre real que permet estudiar el nombre de solucions d'un sistema lineal.



## Determinants de matrius petites

Per a una matriu  $2 \times 2$ :

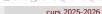
$$A = egin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Per a una matriu  $3 \times 3$ :

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Aquesta fórmula es pot recordar gràcies a la Regla de Sarrus.





## Exemples

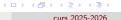
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = 5 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 10 - 3 = 7$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = 5(2)(2) + 1(1)(1) + 3(0)(0) - 0(2)(1) - 3(1)(2) - 5(1)(0)$$
$$\Rightarrow det(A) = 20 - 1 + 0 - 0 - 6 - 0 = 13$$





## Exemple - Autovalors d'una matriu $2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 1 \\ 6 & -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = (5 - \lambda)(-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$\Rightarrow \lambda_1=3,\ \lambda_2=2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm 2i$$

Conclusió: Els autovalors poden ser complexos, fins i tot si A és real a interest to a in a

### Càlcul dels autovectors

Si  $\lambda$  és un autovalor de A, aleshores el seu autovector  $\nu$  compleix:

$$(A - \lambda I)v = 0$$

És un sistema lineal homogeni en les components de v. Per tant, conegut  $\lambda$ , podem trobar v resolent aquest sistema.

- Hi ha **infinites** solucions per a cada autovalor: qualsevol múltiple escalar d'un autovector també ho és.
- Per a matrius grans, és pràctic fer servir programes com MATLAB,
   Python (NumPy) o Octave.





## Exemple - Autovectors

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Els autovalors són  $\lambda_1 = 3$  i  $\lambda_2 = 2$ .

Per a  $\lambda_1 = 3$ :

$$(A-3I)v=0\Rightarrow\begin{pmatrix}2&1\\6&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=0\Rightarrow v_2=-2v_1\Rightarrow v=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

Per a  $\lambda_2 = 2$ :

$$(A-2I)w=0\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow w_2=-3w_1\Rightarrow w=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$





## Bibliografia

El material d'aquestes presentacions està basat en anteriors presentacions i apunts d'altres professors [Corbera(2019)] de la UVic-UCC i d'altres universitats [de Souza(2025)], i pàgines web diverses (normalment enllaçades des del text).



Montserrat Corbera.

Unitat 2. Càlcul integral.

Universitat de Vic - Universitat Central de Catalunya, Facultat de Ciències i Tecnologia, Vic, Barcelona, 2019. Drets reservats. No es pot copiar sense permís de l'autora.



Diego Araújo de Souza.

Matemáticas aplicadas a la biología.

Apuntes de classe; grado en Biología, asignatura de matemáticas, 2025.

Departamento de Ecuaciones diferenciales y Análsis Numérico; Universidad de Sevilla.

