Exercicis Resolts
MATEMÀTIQUES
Graus en Biologia i Biotecnologia

FACULTAT
DE CIÈNCIES, TECNOLOGIA
I ENGINYERIES
UVIC | UVIC·UCC *

Jordi Villà i Freixa

Darrera modificació: 13 d'octubre de 2025

Taula de continguts

*En cas de detectar una errada o fer un suggeriment, si us plau, contacteu-me: jordi.villa@uvic.cat

1 Models matemàtics

1.1 Models discrets

1.1.1 Models unidimensionals

Ex. 1 — Creixement exponencial de bacteris: Estem estudiant una població de bacteris que es divideixen cada 20 minuts i que a l'inici de l'experiment es redueix a dos bacteris. En quin moment el nombre de bacteris supera les 60 unitats? Què li ocorre al tamany de la població en el futur?

Solució (Ex. 1) — Si x_k és el nombre de bacteris després de k períodes de divisió ($20k$ minuts), es té

$$x_k = 2^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Volem el valor més petit de k tal que $x_k \geq 60$:

$$2^{k+1} \geq 60 \iff (k+1)\ln 2 \geq \ln 60 \iff k \geq \frac{\ln 60}{\ln 2} - 1 \approx 4.91$$

Per tant, el primer valor enter és $k = 5$, és a dir, als 100 minuts:

$$x_4 = 2^5 = 32 < 60, \quad x_5 = 2^6 = 64 \geq 60$$

Així, el nombre de bacteris supera les 60 unitats als 100 minuts. A més, com que $x_k = 2^{k+1}$, quan $k \to \infty$, $x_k \to \infty$ i la població creix sense límit. ■

Ex. 2 — Model Malthus amb i sense aportacions: (*CGPT*) Considerem una població de ratolins que es troba en una illa deserta. La població inicial de ratolins és de 100 individus. La taxa de creixement natural anual és del 30% ($r = 0.30$).
Es vol determinar el temps necessari perquè la població arribi a 1 milió de ratolins en dos casos:

- **Sense aportacions externes:** Només es considera el creixement natural de la població.
- **Amb aportacions externes:** Cada any arriben 20 ratolins nous a més del creixement natural.

Solució (Ex. 2) — Sense Aportacions Externes
La població en temps t es modela amb l'equació de creixement exponencial:

$$P(t) = P_0 \cdot (1+r)^t$$

ja que cada pas implica:

$$P(t+1) = P(t) \cdot (1+r)$$

On:

- $P_0 = 100$ (població inicial)
- $r = 0.30$ (taxa de creixement)
- $P(t) = 1{,}000{,}000$ (població objectiu)

Per trobar el temps t necessari per arribar a 1 milió de ratolins, resolem:

$$1{,}000{,}000 = 100 \cdot (1.30)^t$$

$$10{,}000 = (1.30)^t$$

Aplicant logaritmes:

$$\ln(10{,}000) = t \cdot \ln(1.30)$$

$$t = \frac{\ln(10{,}000)}{\ln(1.30)} \approx \frac{9.21034}{0.26236} \approx 35.11$$

Per tant, el temps necessari és aproximadament **35 anys**.
Amb Aportacions Externes
Amb aportacions externes, la població es modela amb l'equació:

$$P(t+1) = P(t) \cdot (1+r) + A$$

o bé

$$P(t) = P_0 \cdot (1+r)^t + A \cdot \frac{(1+r)^t - 1}{r}$$

On:

- $P_0 = 100$ (població inicial)
- $r = 0.30$ (taxa de creixement)
- $A = 20$ (aportacions externes)
- $P(t) = 1{,}000{,}000$ (població objectiu)

Utilitzant un enfocament iteratiu, s'ha de trobar el temps t per al qual la població supera 1 milió de ratolins. En aquest cas, el càlcul és:

$$P(t) = 100 \cdot (1.30)^t + 20 \cdot \frac{(1.30)^t - 1}{0.30}$$

Després de calcular iterativament, es troba que el temps necessari és aproximadament **34 anys**.
El següent gràfic mostra l'evolució de la població amb i sense aportacions externes al llarg del temps:

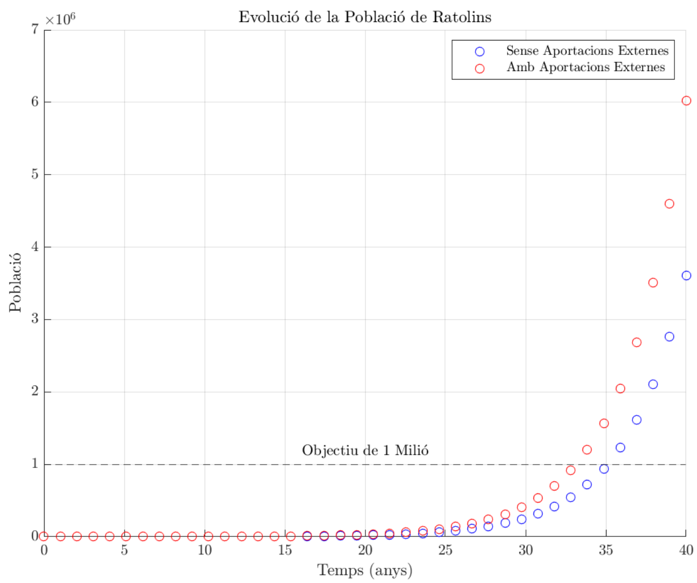


Figura 1: Evolució de la població de ratolins amb i sense aportacions externes. La línia horitzontal indica l'objectiu de 1 milió de ratolins.
■

Ex. 3 — Població país europeu (adaptat de [3]): Escriu un model senzill de naixements i defuncions discret que descrigui la situació següent: Els individus moren amb una taxa δ i neixen amb una taxa μ.
A 31 de desembre de 2023, el país tenia una població de 82 037 000 habitants. L'any 2024 hi va haver 770 748 naixements vius i 846 330 defuncions.

- Troba les taxes δ i μ.
- Què passarà amb la població del país en el futur segons aquest model?
- Com s'hauria d'alterar el model perquè fos més realista?

Solució (Ex. 3) — El model discret és

$$x_{k+1} = (1 + \mu - \delta)\, x_k,$$

on μ és la taxa de natalitat i δ la taxa de mortalitat.

Les taxes són

$$\mu = \frac{770\,748}{82\,037\,000} \approx 0.009395 \quad (0.94\%),$$
$$\delta = \frac{846\,330}{82\,037\,000} \approx 0.010316 \quad (1.03\%).$$

Per tant, $\mu - \delta \approx -0.000921$ i

$$R = 1 + \mu - \delta \approx 0.99908 < 1,$$

de manera que la població decreix molt lentament (aprox. -0.092% anual).

Per fer el model més realista caldria introduir:

- migració neta (M_k) afegida a l'equació,
- estructura per edats (model de Leslie),
- taxes variables en el temps ($\mu(t), \delta(t)$),
- factors socioeconòmics i estocàstics.

■

Ex. 4 — Extinció i recuperació de la població de girafes:
L'any 1980 s'estima que hi havia uns $N_{1980} = 155\,000$ exemplars de girafes a l'Àfrica. Vint anys més tard (any 2000), la població havia disminuït fins a $N_{2000} = 80\,000$.

1. Suposant que aquest ritme de decreixement es manté, calculeu el nombre esperat de girafes l'any 2020.
2. Gràcies a tasques de conservació, la població el 2020 és de $N_{2020} = 115\,000$. Suposant que aquest nou ritme de creixement es manté, en quin any s'arribarà als 200 000 exemplars?
3. Si a més s'hi reintrodueixen M girafes cada 20 anys, escriviu el nou model discret de població.

Solució (Ex. 4) —

- Ritme d'extinció: $r_{\text{decline}} = N_{2000}/N_{1980} \approx 0.516$. Població esperada el 2020: $N_{2020}^{(a)} = N_{2000} \cdot r_{\text{decline}} \approx 41\,300$.
- Ritme de creixement observat: $r_{\text{growth}} = N_{2020}/N_{2000} \approx 1.4375$. Per assolir 200 000: $200000 = N_{2020} \cdot r_{\text{growth}}^k \Rightarrow k \approx 2.9$. Cada pas són 20 anys any $2020 + 3 \times 20 = 2080$.
- Nou model: $P_{k+1} = r_{\text{growth}}\, P_k + M$.

Un exemple de codi MATLAB per generar els resultats és el següent:

```
% GirafesModel.m
% Model d'extinció i recuperació de la població de girafes

clear; clc;

% Dades
N1980 = 155000;
N2000 = 80000;
N2020_real = 115000;
target = 200000;

% a) Ritme d'extinció i estimació per 2020
r_decline = N2000 / N1980;
N2020_pred = N2000 * r_decline;

fprintf('--- Extinció ---\n');
fprintf('Ritme d''extinció r = %.3f\n', r_decline);
fprintf('Població esperada el 2020: %.0f girafes\n\n', N2020_pred);

% b) Nou ritme de creixement i any objectiu
r_growth = N2020_real / N2000;
steps_needed = log(target / N2020_real) / log(r_growth);
steps_needed_ceil = ceil(steps_needed);
year_reach = 2020 + 20 * steps_needed_ceil;

fprintf('--- Recuperació ---\n');
fprintf('Ritme de creixement r = %.3f\n', r_growth);
fprintf('S''arribarà als 200.000 exemplars cap a l''any %d.\n\n', year_reach);

% c) Nou model amb reintroducció
syms Pk M
Pk1 = r_growth * Pk + M;
fprintf('Model discret: P_{k+1} = %.3f * P_k + M\n', r_growth);
```

■

Ex. 5 — Població que triplica cada 5 mesos: Una determinada població triplica la seva dimensió cada 5 mesos i inicialment està formada per $P_0 = 60$ individus.

1. Calculeu quants individus hi haurà al cap d'1,5 anys i al cap de 2,5 anys.
2. Determineu quant temps ha de passar perquè la població superi 1 milió dindividus.

Solució (Ex. 5) —

- Cada 5 mesos la població es multiplica per 3: $P_n = P_0 \cdot 3^n$. 1,5 anys = 18 mesos $n = 3$: $P = 60 \cdot 3^3 = 1620$. 2,5 anys = 30 mesos $n = 6$: $P = 60 \cdot 3^6 = 43\,740$.
- Per a $P = 10^6$: $10^6 = 60 \cdot 3^n \Rightarrow n = \frac{\ln\left(10^6/60\right)}{\ln 3} \approx 7.6$. Cada pas = 5 mesos $7.6 \times 5 \approx 38$ mesos.

Un exemple de codi MATLAB per generar els resultats és el següent:

```
% PoblacioTriplica.m
% Model de creixement exponencial discret (triplica cada 5 mesos)

clear; clc;

% Dades
P0 = 60;       % població inicial
r = 3;         % factor de creixement cada 5 mesos
target = 1e6; % objectiu
bloc = 5;      % mesos per període

% a) Població a 1.5 anys i 2.5 anys
t1 = 18;  % mesos
t2 = 30;  % mesos
n1 = floor(t1/bloc);
n2 = floor(t2/bloc);
P_t1 = P0 * r^n1;
P_t2 = P0 * r^n2;

fprintf('--- Creixement ---\n');
fprintf('Població inicial: %d\n', P0);
fprintf('Després d''1,5 anys (%.0f mesos): %.0f individus\n', t1, P_t1);
fprintf('Després de 2,5 anys (%.0f mesos): %.0f individus\n\n', t2, P_t2);

% b) Temps per superar 1 milió
n_target = log(target / P0) / log(r);
mesos_target = ceil(n_target) * bloc;
fprintf('Es supera 1 milió al cap d''aprox. %d mesos (%.1f anys).\n', mesos_target, mesos_target/12);
```

■

Ex. 6 — Model de BevertonHolt amb protozous: Considerem una població de protozous (en milions) que segueix el model discret de BevertonHolt:

$$x_k = \frac{Rx_{k-1}}{1 + (R-1)\frac{x_{k-1}}{K}},$$

on $R > 1$ és el factor de creixement i K la capacitat de càrrega del medi. Suposem que $R = 1.25$ i $K = 9.0$.

a) Si després d'un període de reproducció la població és de $x_1 = 6.3$ milions, quina era la població inicial x_0?

b) Determineu tots els punts d'equilibri del model i classifiqueu-los com a estables o inestables.

c) A llarg termini, què passarà si la població inicial és de 6.3 milions? I si fos de 11.5 milions?

Solució (Ex. 6) —

a) A partir de l'equació

$$x_1 = \frac{Rx_0}{1 + (R-1)\frac{x_0}{K}},$$

aïllem x_0:

$$x_0 = \frac{x_1}{R - (R-1)\frac{x_1}{K}}.$$

Substituint els valors:

$$x_0 = \frac{6.3}{1.25 - (0.25)\frac{6.3}{9.0}} \approx 5.52 \text{ milions.}$$

b) Els punts d'equilibri s'obtenen resolent $x = \frac{Rx}{1+(R-1)\frac{x}{K}}$, que dona

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = K = 9.0.$$

L'estabilitat ve donada per la derivada $f'(x) = \frac{R}{(1+(R-1)x/K)^2}$:

$$f'(0) = R = 1.25 > 1 \Rightarrow \text{inestable}, \quad f'(K) = \frac{1}{R} = 0.8 < 1 \Rightarrow \text{estable}.$$

c) Si la població inicial és de 6.3 o 11.5 milions, el sistema convergeix cap a l'equilibri estable $x^* = 9.0$ milions.

Un exemple de codi MATLAB per generar els resultats és el següent:

```
% Q2ModelsRestringits_solucio.m
% Resolució del model de BevertonHolt amb protozous
clear; clc;

% Paràmetres
R = 1.25;
K = 9.0;
x1 = 6.3;

% a) Càlcul de x0
syms x0
eq = x1 == (R*x0) / (1 + (R-1)*x0/K);
sol = double(solve(eq, x0));
x0_val = sol(sol > 0);

fprintf('a) Població inicial: %.3f milions\n', x0_val);

% b) Punts dequilibri i estabilitat
x_eq = [0, K];
f = @(x) (R*x) ./ (1 + (R-1)*x/K);
df = @(x) (R ./ (1 + (R-1)*x/K).^2);

fprintf('\nb) Punts d''equilibri:\n');
for i = 1:length(x_eq)
    deriv = df(x_eq(i));
    if abs(deriv) < 1
        stab = 'estable';
    else
        stab = 'inestable';
    end
    fprintf('x* = %.2f -> f''(x*) = %.3f -> %s\n', x_eq(i), deriv, stab);
end

% c) Comportament a llarg termini
x = zeros(20,1);
x(1) = x1;
for k = 2:length(x)
    x(k) = f(x(k-1));
end

fprintf('\nc) Evolució temporal:\n');
disp(table((0:length(x)-1)', x, 'VariableNames', {'Periode','Poblacio'}));

fprintf('\nConclusió: el sistema convergeix a %.1f milions.\n', K);
```

■

Ex. 7 — Comparativa de models de creixement poblacional: Compara els models de creixement poblacional vistos (exponencial, logístic, Beverton-Holt i Ricker). Quines són les seves principals característiques?

Quins són els seus punts forts i febles? En quines situacions es poden aplicar? Nota: t'encoratjo a que facis els gràfics amb Matlab.

Solució (Ex. 7) — Per començar, hem vist que els tres models amb restriccions (logístic, Beverton-Holt i Ricker), mostrats a la figura següent, tenen un comportament similar a l'exponencial per a valors petits de x, però divergeixen quan x s'aproxima a la capacitat de càrrega K.

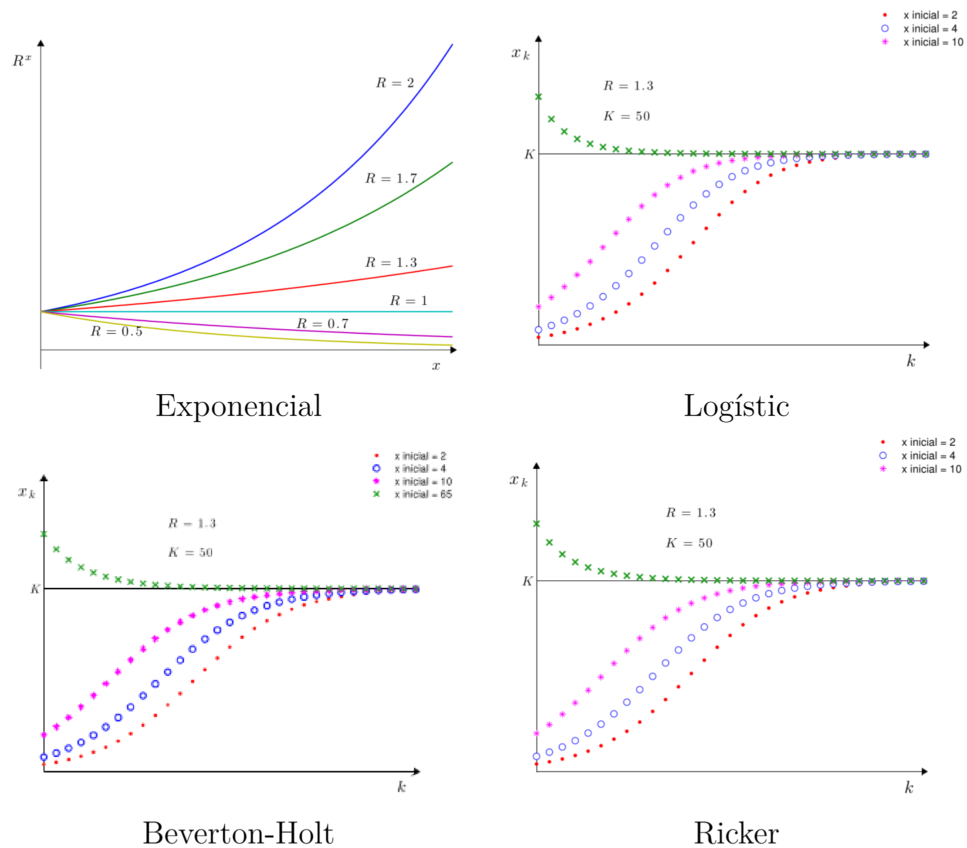


Figura 2: Exemples de l'evolució temporal de cada model discret de creixement poblacional (per facilitar la visió dels gràfics, el gràfic exponencial es veu en format continu).

Si ara ens centrem en les diferències dels models amb restricció, i seguint el material mostrat a les sessions, els quatre models de creixement poblacional es poden expressar en la forma recursiva:

$$x_k = f(x_{k-1}), \quad k \geq 1,$$

on x_k és la població en el període k i $f(x)$ és la funció que defineix el model. Les funcions de creixement poblacional expressades com $f(x)$ són:

- **Model Exponencial:**
$$f(x) = Rx$$

- **Model Logístic:**
$$f(x) = Rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

- **Model Beverton-Holt:**
$$f(x) = \frac{Rx}{1 + \frac{x}{K}}$$

- **Model Ricker:**
$$f(x) = xe^{r\left(1-\frac{x}{K}\right)}$$

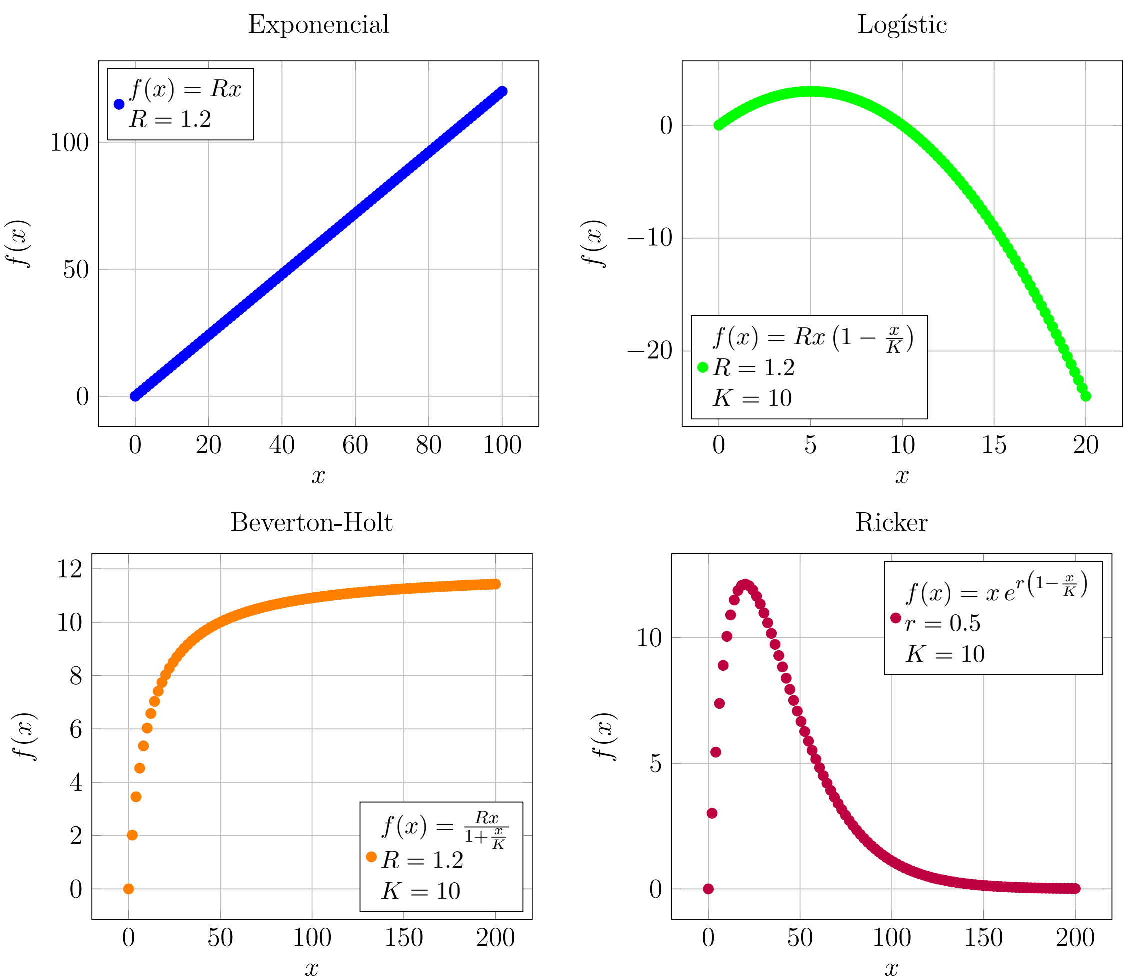


Figura 3: Comparativa de les funcions $f(x)$ dels quatre models de creixement poblacional.

Pel que fa al codi matlab, a continuació es mostra un exemple per comparar els quatre models de creixement poblacional:

Code 1: Codi Matlab per comparar els models de creixement poblacional

```
x = linspace(0, 20, 200);
R = 1.2;
K = 10;
r = 0.5;

f_exp = R * x;
f_log = R * x .* (1 - x / K);
```

```
f_bh   = R * x ./ (1 + x / K);
f_rick = x .* exp(r * (1 - x / K));

figure;
plot(x, f_exp, 'b', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(x, f_log, 'g', 'LineWidth', 2);
plot(x, f_bh, 'orange', 'LineWidth', 2);
plot(x, f_rick, 'm', 'LineWidth', 2);
xlabel('x');
ylabel('f(x)');
legend('Exponencial', 'Logístic', 'Beverton-Holt', 'Ricker');
title('Comparativa de models de creixement poblacional');
grid on;
```

■

Ex. 8 — Model de Ricker (Salmons del Pacífic): El model de Ricker descriu el creixement discret d'una població segons:

$$x_{k+1} = x_k \, e^{r\left(1 - \frac{x_k}{K}\right)}.$$

Aquest model s'ha utilitzat per estudiar les successives generacions de salmons *Oncorhynchus nerka* als rius del nord del Pacífic. Com que el salmó té un cicle reproductiu de 4 anys, es considera un model discret amb períodes de 4 anys.
Es disposa de les observacions (en milions d'individus):

$$x_0 = 0{,}325, \quad x_1 = 0{,}431, \quad x_2 = 0{,}529.$$

1. Determineu els paràmetres r i K resolent el sistema:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 e^{r(1 - x_0/K)} \\ x_2 = x_1 e^{r(1 - x_1/K)} \end{cases}$$

2. Representeu gràficament la sèrie temporal i descriviu el comportament de la població.

Solució (Ex. 8) — Resolem el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 0.431 = 0.325 \, e^{r(1 - 0.325/K)} \\ 0.529 = 0.431 \, e^{r(1 - 0.431/K)} \end{cases}$$

Dividim cada equació entre x_k i prenem logaritmes naturals:

$$\ln\left(\frac{0{,}431}{0{,}325}\right) = r\left(1 - \frac{0{,}325}{K}\right),$$

$$\ln\left(\frac{0{,}529}{0{,}431}\right) = r\left(1 - \frac{0{,}431}{K}\right).$$

D'on s'obté:

$$r \approx 0{,}520, \qquad K \approx 0{,}712.$$

La població tendeix a un valor estacionari proper a K, que representa la capacitat de càrrega de l'ecosistema.

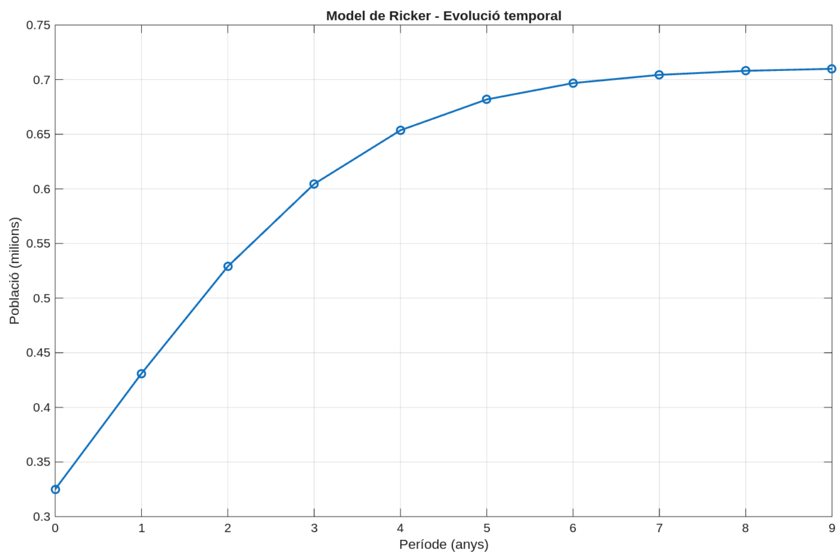


Figura 4: Evolució de la població de salmons del Pacífic segons el model de Ricker. Generat amb el codi matlab de l'exercici 8.

Un exemple de codi MATLAB per generar els resultats és el següent:

```
%% ModelRicker.m
% Problema: Model de Ricker (Salmons del Pacífic)
% Resolució del sistema per trobar r i K, i càlcul de les poblacions futures.

clear; clc;

% Dades inicials (en milions d'individus)
x0 = 0.325;
```

```
x1 = 0.431;
x2 = 0.529;

% Definim el sistema dequacions segons el model de Ricker:
% x_{k+1} = x_k * exp(r * (1 - x_k / K))
eqs = @(v) [
    x1 - x0 * exp(v(1) * (1 - x0 / v(2)));
    x2 - x1 * exp(v(1) * (1 - x1 / v(2)));
];

% Valors inicials raonables per r i K
v0 = [0.5, 0.7];

% Resolució numèrica del sistema
sol = fsolve(eqs, v0, optimoptions('fsolve','Display','off'));

r = sol(1);
K = sol(2);

% Mostrem els resultats
fprintf('Paràmetres trobats:\n');
fprintf('r = %.4f\n', r);
fprintf('K = %.4f\n\n', K);

% Càlcul de les poblacions futures (10 períodes)
n = 10;
x = zeros(1, n);
x(1:3) = [x0, x1, x2];

for k = 3:n-1
    x(k+1) = x(k) * exp(r * (1 - x(k) / K));
end

% Mostrem la taula de valors
fprintf('Evolució de la població (milions dindividus):\n');
for k = 0:n-1
    fprintf('x_%d = %.4f\n', k, x(k+1));
end

% Representació gràfica
figure;
plot(0:n-1, x, 'o-', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Període (anys)');
ylabel('Població (milions)');
title('Model de Ricker - Evolució temporal');
grid on;
```

Versió simplificada de la resolució del sistema d'equacions:

```
syms r K
% Define the equations as anonymous functions
eqs = [0.431==0.325*exp(r*(1-0.325/K)),
    0.529==0.431*exp(r*(1-0.431/K))]
vars = [r K];
```

```
[solr, solK] = solve(eqs, vars)
disp(['Solution for r: ', char(solr)]);
disp(['Solution for K: ', char(solK)]);
```

■

Ex. 9 — Evolució de la població de la Xina: (*JA,1er20*)Sabent que la població de la Xina l'any 1980 era de 985 milions d'habitants i que el cens de l'any 1990 va mostrar que havia augmentat fins a 1082 milions, considereu que l'evolució de la població hagi seguit el mateix ritme de creixement cada dècada fins als nostres dies, i determineu:

a)Quants habitants té la Xina avui (2020).

b)Quin any assoliria una població superior als 2000 milions, considerant que es van fent censos cada 10 anys, i que el ritme de creixement no varia tampoc en el futur.

Solució (Ex. 9) — Anomenem $P_{1980} = 985$ (milions) i $P_{1990} = 1082$ (milions). Suposant que el factor de creixement per dècada és constant, el factor de creixement per dècada és

$$r = \frac{P_{1990}}{P_{1980}} = \frac{1082}{985} \approx 1{,}09847715736.$$

a) L'any 2020 són quatre dècades després de 1980, per tant

$$P_{2020} = P_{1980}\, r^4 = 985 \left(\frac{1082}{985}\right)^4 \approx 1434{,}17 \text{ milions}.$$

Per tant, segons el model assumit, la població estimada per a l'any 2020 és $\boxed{1434{,}17 \text{ milions}}$.

b) Cal trobar el primer enter $n \geq 0$ tal que $P_{1980}\, r^n > 2000$, on cada n representa una dècada. Això és equivalent a resoldre

$$985 \cdot r^n > 2000 \quad \Longrightarrow \quad r^n > \frac{2000}{985}.$$

Calculant numèricament el mínim n enter que satisfà la desigualtat s'obté $n = 8$. Així l'any corresponent és

$$1980 + 10 \cdot n = 1980 + 10 \cdot 8 = 2060.$$

Comprovació: $985 \cdot r^8 \approx 2088{,}16 > 2000$. Per tant, amb el ritme de creixement suposat, la població superaria els 2000 milions l'any $\boxed{2060}$.

Ex. 10 — Model discret d'una població animal: (*JA,1er20*)
L 'evolució d'una població animal està regida pel següent model matemàtic discret:

$$x_k = \frac{a\, x_{k-1}}{10 + x_{k-1}}$$

on x_k és el número d'individus a l'any k (en milers) i el paràmetre a una constant entera i positiva.

a) Determineu el valor del paràmetre a que faci que $x = 40$ (en milers) sigui un punt d'equilibri d'aquesta població.

b) Calculeu, a partir del valor calculat a l'apartat anterior, tots els punts d'equilibri d'aquest model matemàtic i digueu si són punts d'equilibri estable o inestable.

c) Calculeu quina seria l'evolució d'aquesta població després de tres intervals de temps (x_3), en el cas que, inicialment, hi hagués un nombre d'individus $x_0 = 20$ (també en milers).

Solució (Ex. 10) — Un punt d'equilibri x^* compleix $x^* = f(x^*)$, on $f(x) = \dfrac{ax}{10+x}$.
a) Si $x^* = 40$ i és punt d'equilibri, substituïm:

$$40 = \frac{a \cdot 40}{10 + 40} = \frac{40a}{50} \quad \Longrightarrow \quad 1 = \frac{a}{50} \quad \Longrightarrow \quad a = 50.$$

Per tant, el valor enter a que fa que $x = 40$ sigui punt d'equilibri és $\boxed{a = 50}$.
b) Amb $a = 50$ la funció és

$$f(x) = \frac{50x}{10 + x}.$$

Els punts d'equilibri són solucions de $x = f(x)$. Això dóna

$$x = \frac{50x}{10 + x} \quad \Longrightarrow \quad x\left(1 - \frac{50}{10 + x}\right) = 0.$$

O bé $x = 0$ o bé $1 = \dfrac{50}{10 + x}$, aquesta última condueix a $10+x = 50$ i per tant $x = 40$. Així els punts d'equilibri són $\boxed{x = 0 \ \text{ i } \ x = 40}$ (valors en milers).
Per estudiar l'estabilitat calculem la derivada

$$f'(x) = \frac{50(10 + x) - 50x}{(10 + x)^2} = \frac{500}{(10 + x)^2}.$$

Avaluant als punts d'equilibri:

- Per $x = 0$: $f'(0) = \dfrac{500}{10^2} = \dfrac{500}{100} = 5$. Com $|5| > 1$, el punt $x = 0$ és *inestable*.
- Per $x = 40$: $f'(40) = \dfrac{500}{50^2} = \dfrac{500}{2500} = 0{,}2$. Com $|0{,}2| < 1$, el punt $x = 40$ és *estable* (atractor local).

c) Calculem l'evolució numèrica a partir de $x_0 = 20$ (en milers):

$$x_1 = f(x_0) = \frac{50 \cdot 20}{10 + 20} = \frac{1000}{30} \approx 33{,}333333 \text{ (milers)},$$
$$x_2 = f(x_1) = \frac{50 \cdot 33{,}333333}{10 + 33{,}333333} = \frac{1666{,}66665}{43{,}333333} \approx 38{,}461538 \text{ (milers)},$$
$$x_3 = f(x_2) = \frac{50 \cdot 38{,}461538}{10 + 38{,}461538} = \frac{1923{,}0769}{48{,}461538} \approx 39{,}692307 \text{ (milers)}.$$

Per tant, després de tres intervals de temps la població seria aproximadament $\boxed{x_3 \approx 39{,}692307 \text{ milers}}$.

Ex. 11 — Dinàmica de poblacions segons Beverton–Holt: (*JA,1er20*)
La mida d'una població d'insectes (mesurada en milions) segueix una dinàmica donada per la corba de reclutament de Beverton–Holt:

$$x_k = \frac{R\,x_{k-1}}{1 + \dfrac{(R-1)\,x_{k-1}}{K}}$$

amb un factor de creixement $R = 1{,}12$ i una limitació de capacitat $K = 7{,}8$ (milions). Es demana:

a) Si la població inicial d'insectes és $x_0 = 4$ (milions), quina serà la població després de dos períodes de reproducció?

b) Calculeu els punts d'equilibri d'aquest model i estudieu-ne la seva estabilitat.

Solució (Ex. 11) — És convenient reescriure la funció com

$$f(x) = \frac{Rx}{1 + cx}, \qquad \text{o on} \quad c = \frac{R-1}{K}.$$

Per als valors donats, $R = 1{,}12$, $K = 7{,}8$ i per tant

$$c = \frac{1{,}12 - 1}{7{,}8} = \frac{0{,}12}{7{,}8} \approx 0{,}01538461538.$$

a) Calculem $x_1 = f(x_0)$ i $x_2 = f(x_1)$ amb $x_0 = 4$:

$$x_1 = \frac{1{,}12 \cdot 4}{1 + (0{,}01538461538) \cdot 4} = \frac{4{,}48}{1 + 0{,}06153846152} = \frac{4{,}48}{1{,}06153846152} \approx 4{,}2183902 \text{ (milions)},$$

$$x_2 = \frac{1{,}12 \cdot x_1}{1 + cx_1} = \frac{1{,}12 \cdot 4{,}2183902}{1 + 0{,}01538461538 \cdot 4{,}2183902} \approx \frac{4{,}724}{1{,}064} \approx 4{,}439080 \text{ (milions)}.$$

Per tant, després de dos períodes la població serà aproximadament $\boxed{4{,}43908 \text{ milions}}$.
b) Els punts d'equilibri x^* satisfan $x^* = f(x^*)$. Això dóna

$$x = \frac{Rx}{1 + cx} \quad \Longrightarrow \quad x\left(1 - \frac{R}{1 + cx}\right) = 0.$$

O bé $x = 0$ o bé $1 = \dfrac{R}{1 + cx}$, que porta a $1 + cx = R$ i per tant

$$x = \frac{R - 1}{c} = K.$$

Així els punts d'equilibri són $\boxed{x = 0 \ \text{ i } \ x = K = 7{,}8}$.
Per estudiar l'estabilitat calculem la derivada

$$f'(x) = \frac{R}{(1 + cx)^2}.$$

Avaluant als punts d'equilibri:

- Per $x = 0$: $f'(0) = R = 1{,}12$. Com que $|f'(0)| > 1$, el punt $x = 0$ és *inestable*.
- Per $x = K$: com $cK = R - 1$ tenim $1 + cK = R$ i per tant

$$f'(K) = \frac{R}{R^2} = \frac{1}{R} = \frac{1}{1{,}12} \approx 0{,}892857 \ (< 1),$$

de manera que $x = K = 7{,}8$ és *estable*.

Ex. 12 — Culti bacterians - creixement i antibiòtic: (*JA,1er21*)
En un laboratori, s'ha observat que un cultiu de bacteris creix un 6% cada hora i que inicialment està constituït per 2000 bacteris.

a) Calculeu el temps que trigarà aquesta població en créixer fins a arribar a cent mil bacteris.

b) En el cas que, a cada hora, s'injecti a la colònia de bacteris una dosi d'antibiòtic que elimina 200 bacteris, calculeu quants bacteris tindrà la colònia al cap de 3 hores.

c) Determineu el punt d'equilibri d'aquest model matemàtic que regula el comportament d'aquesta població quan es tracta amb antibiòtic (tal com s'indica a l'apartat b) i indiqueu si és estable o inestable.

d) A partir del valor trobat per a aquest punt d'equilibri, expliqueu, sense fer cap càlcul addicional, com es modificaria la quantitat de bacteris de la colònia si inicialment tingués 2000 bacteris. I si inicialment en tingués 4000?

Solució (Ex. 12) — Denotem per x_k el nombre de bacteris (nombre absolut) després de k hores. Sense tractament, el model de creixement horari és multiplicatiu amb factor 1,06, és a dir

$$x_k = 2000 \cdot 1{,}06^k.$$

a) Cal trobar k tal que $2000 \cdot 1{,}06^k = 100000$. Això és

$$1{,}06^k = \frac{100000}{2000} = 50 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{\ln 50}{\ln 1{,}06}.$$

Càlcul numèric:

$$k \approx \frac{\ln 50}{\ln 1{,}06} \approx \frac{3{,}912023005}{0{,}058268908} \approx 67{,}11.$$

Per tant, trigaria aproximadament $\boxed{67{,}11 \text{ hores}}$ per assolir 100000 bacteris; si es vol un nombre d'hores enter, serien 68 hores per superar aquesta xifra.

b) Amb antibiòtic, el model discret horari s'escriu

$$x_k = 1{,}06\, x_{k-1} - 200,$$

amb $x_0 = 2000$. Cal calcular x_1, x_2, x_3:

$$x_1 = 1{,}06 \cdot 2000 - 200 = 2120 - 200 = 1920,$$
$$x_2 = 1{,}06 \cdot 1920 - 200 = 2035{,}2 - 200 = 1835{,}2,$$
$$x_3 = 1{,}06 \cdot 1835{,}2 - 200 = 1946{,}312 - 200 = 1746{,}312.$$

Per tant, al cap de 3 hores la colònia tindrà aproximadament $\boxed{1746{,}31 \text{ bacteris}}$.

c) El punt d'equilibri x^* satisfà $x^* = 1{,}06x^* - 200$. Resolem:

$$x^*(1 - 1{,}06) = -200 \quad \Longrightarrow \quad -0{,}06x^* = -200 \quad \Longrightarrow \quad x^* = \frac{200}{0{,}06} = 3333{,}\overline{3}.$$

Així $x^* = \boxed{\frac{10000}{3} \approx 3333{,}33}$ bacteris.

Per estudiar l'estabilitat considerem la funció afí $f(x) = 1{,}06x - 200$. La derivada constant és $f'(x) = 1{,}06$. Un punt fix d'un mapa discret és estable si $|f'(x^*)| < 1$. Aquí $|1{,}06| > 1$, per tant el punt d'equilibri és *inestable*.

d) Per la forma de la solució general d'un model lineal autònom:

$$x_k = 1{,}06^k(x_0 - x^*) + x^*.$$

Com que $1{,}06 > 1$, la diferència $x_k - x^* = 1{,}06^k(x_0 - x^*)$ creix en valor absolut amb k. Això significa que les successives iteracions s'allunyen del punt d'equilibri.

- Si $x_0 = 2000$ (menor que x^*), aleshores $x_0 - x^* < 0$ i, multiplicat per $1{,}06^k$ que creix, farà que $x_k - x^* \to -\infty$, és a dir la població decreixerà i eventualment s'anirà cap a valors molt petits (teòricament negatives si no s'imposa cap restricció), representant l'extinció dins del model lineal.
- Si $x_0 = 4000$ (major que x^*), llavors $x_0 - x^* > 0$ i $x_k \to +\infty$ a mesura que k creix; la població augmentarà sense límit en el marc d'aquest model.

Així doncs, atès que l'equilibri és inestable, valors inicials per sota de x^* tendeixen a allunyar-se cap avall i per sobre tendeixen a créixer indefinidament, segons el model simplificat.

Ex. 13 — Model logístic discret: (*JA,1er21*)Una població d'insectes segueix la dinàmica donada per la funció discreta:

$$x_k = A\,x_{k-1}\left(1 - \frac{x_{k-1}}{B}\right)$$

essent A i B dos valors constants que expressen característiques d'aquest ecosistema.

a)Calculeu els punts d'equilibri d'aquest model (deixant els resultats en funció d'A i B) i estudieu-ne la seva estabilitat.

b)Si $A = 1{,}5$ i $B = 900$, argumenteu què li passaria a llarg termini a la població si, inicialment, hi hagués $x_0 = 150$ peixos. I si, inicialment, hi hagués $x_0 = 500$ peixos?

Solució (Ex. 13) — Busquem punts d'equilibri x^* que satisfacin $x^* = Ax^*(1-x^*/B)$. Si $x^* = 0$ és solució evident. Suposem $x^* \neq 0$ i dividim per x^*:

$$1 = A\left(1 - \frac{x^*}{B}\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{A} = 1 - \frac{x^*}{B}$$

d'on

$$\boxed{x^* = B\left(1 - \frac{1}{A}\right)}$$

Per tant, els punts d'equilibri són $x^* = 0$ i $x^* = B(1 - 1/A)$ (si $A \neq 0$).
Per estudiar l'estabilitat calculem la derivada de $f(x) = Ax(1 - x/B)$:

$$f'(x) = A\left(1 - \frac{2x}{B}\right).$$

Avaluant als punts d'equilibri:

- Per $x^* = 0$: $f'(0) = A$. El punt 0 és *estable* si $|A| < 1$ i *inestable* si $|A| > 1$.
- Per $x^* = B(1 - 1/A)$: substituïm

$$f'\left(x^*\right) = A\left(1-\frac{2}{B}B\left(1-\frac{1}{A}\right)\right) = A\left(1-2\left(1-\frac{1}{A}\right)\right) = A\left(-1+\frac{2}{A}\right) = -A+2.$$

Aleshores x^* és estable quan $|-A+2| < 1$, és aïllant quan $|-A+2| > 1$. La desigualtat $|2 - A| < 1$ es transforma en $1 < A < 3$.

b) Per $A = 1{,}5$ i $B = 900$ obtenim

$$x^* = 900\left(1 - \frac{1}{1{,}5}\right) = 900\left(1 - \tfrac{2}{3}\right) = 900 \cdot \tfrac{1}{3} = 300.$$

Com que $A = 1{,}5$ està en l'interval $(1, 3)$, l'equilibri positiu $x^* = 300$ és *estable*. A llarg termini la solució tendirà cap a 300 sempre que la dinàmica es mantingui dins dels valors on s'aplica el model.
Per tant:

- Si $x_0 = 150$ (menor que 300), la població augmentarà i tendirà cap a 300.
- Si $x_0 = 500$ (major que 300), la població disminuirà i tendirà cap a 300.

En ambdós casos la població s'estabilitzarà en l'equilibri positiu $x^* = 300$.

Ex. 14 — Model de Ricker per peixos: (*JA,1er21*)La mida d'una població de peixos (mesurada en milers) segueix una dinàmica donada per la fórmula de Ricker:

$$x_k = x_{k-1}\, e^{r\left(1-\dfrac{x_{k-1}}{K}\right)}$$

amb un factor $r = 0{,}05$ i una limitació de capacitat $K = 4$ (milers).

a)Si la població inicial de peixos d'aquesta comunitat és $x_0 = 7$ (milers), calculeu quina serà la població després de tres períodes de reproducció.

b)Deduïu que $x = K$ és un punt d'equilibri estable d'aquest model.

Solució (Ex. 14) — a) Calcularem iterativament:

$$x_{n+1} = x_n \exp\Big(r(1 - x_n/K)\Big), \qquad r = 0{,}05,\ K = 4,\ x_0 = 7.$$

Càlculs numèrics:

$$x_1 = 7\exp\Big(0{,}05(1 - 7/4)\Big) = 7\exp\Big(0{,}05(1 - 1{,}75)\Big) = 7\exp(-0{,}0375) \approx 6{,}74247,$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \exp\Big(0{,}05(1 - x_1/4)\Big) \approx 6{,}74247 \exp\Big(0{,}05(1 - 1{,}6856175)\Big) \\ &\approx 6{,}74247 \exp(-0{,}034280875) \approx 6{,}51350, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 \exp\Big(0{,}05(1 - x_2/4)\Big) \approx 6{,}51350 \exp\Big(0{,}05(1 - 1{,}628375)\Big) \\ &\approx 6{,}51350 \exp(-0{,}03141875) \approx 6{,}30864. \end{aligned}$$

Per tant, després de tres períodes la població serà aproximadament $\boxed{6{,}30864 \text{ milers}}$.

b) Un punt d'equilibri x^* satisfà $x^* = x^* e^{r(1-x^*/K)}$. Si $x^* \neq 0$ podem dividir per x^* i obtenir

$$1 = e^{r(1-x^*/K)} \quad \Longrightarrow \quad r\left(1 - \frac{x^*}{K}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^* = K.$$

Per tant $x = K$ és un punt d'equilibri positiu (a més $x = 0$ també és equilibri). Per estudiar l'estabilitat linealitzem: definim $f(x) = xe^{r(1-x/K)}$. La derivada és

$$f'(x) = e^{r(1-x/K)}\Big(1 - r\,\tfrac{x}{K}\Big).$$

Avaluant a $x = K$:

$$f'(K) = e^{r(1-1)}(1-r) = 1 \cdot (1-r) = 1 - r = 1 - 0{,}05 = 0{,}95.$$

Com que $|f'(K)| = 0{,}95 < 1$, l'equilibri $x = K$ és *estable* (attractor local) per al model de Ricker amb els valors donats.

1.1.2 Models multidimensionals

Ex. 15 — Població d'isards (Leslie): (*JA,1er20*)Una població d'isards femella d'un parc natural, en la qual es poden considerar separadament dos grups d'edat (joves i adultes), evoluciona amb el temps a partir de la matriu de Leslie:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

a)Calculeu quin seria el factor de creixement d'aquesta població a llarg termini.

b)Per tal de mantenir estable el número d'isards del parc natural, després de molts anys, i quan la població d'isards femella ja ha arribat a 500 exemplars, s'habiliten uns dies per a caçar un nombre N d'individus femella que ho facin possible. Determineu el valor exacte d'aquest nombre N per a aconseguir aquest objectiu.

Solució (Ex. 15) — Denotem la matriu de Leslie per $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

a) El factor de creixement a llarg termini és l'autovalor dominant (major en mòdul) de L. Calculem els autovalors resolent $\det(L-\lambda I)=0$:

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}-\lambda & 1\\ 0{,}6 & 0{,}8-\lambda\end{pmatrix} &= (-\lambda)(0{,}8-\lambda)-0{,}6\cdot 1\\ &= -0{,}8\lambda+\lambda^2-0{,}6=\lambda^2-0{,}8\lambda-0{,}6=0.\end{aligned}$$

Resolem la quadràtica $\lambda^2-0{,}8\lambda-0{,}6=0$. Les solucions són

$$\lambda=\frac{0{,}8\pm\sqrt{0{,}8^2+4\cdot 0{,}6}}{2}=\frac{0{,}8\pm\sqrt{0{,}64+2{,}4}}{2}=\frac{0{,}8\pm\sqrt{3{,}04}}{2}.$$

Per tant l'autovalor dominant és

$$\lambda_d=\frac{0{,}8+\sqrt{3{,}04}}{2}\approx\frac{0{,}8+1{,}744277}{2}\approx 1{,}2721385.$$

Així el factor de creixement a llarg termini és $\boxed{\lambda_d\approx 1{,}2721385}$.

b) Després de molts anys, la població tindrà la distribució d'edats proporcional al vector propi corresponent a λ_d i el total de femelles serà 500. Sense caçar, d'una generació a l'altra la població esperada total seria $\lambda_d\cdot 500$. Per mantenir el nombre constant en 500 cal retirar (caçar) la diferència esperada entre la població futura i la població actual, és a dir

$$N=(\lambda_d-1)\cdot 500.$$

Substituint el valor de λ_d trobat,

$$N\approx(1{,}2721385-1)\cdot 500\approx 0{,}2721385\cdot 500\approx 136{,}06925.$$

Per tant, cal caçar aproximadament $\boxed{N\approx 136{,}07}$ femelles per període per mantenir exactament la població en 500. Si es vol el nombre exacte en termes radicals, és

$$N=\left(\frac{0{,}8+\sqrt{3{,}04}}{2}-1\right)\cdot 500=\left(\frac{-1{,}2+\sqrt{3{,}04}}{2}\right)\cdot 500.$$

Ex. 16 — Població de rosegadors (Leslie): *(JA,1er20)*Una població de rosegadors, la vida mitjana dels quals és de 6 mesos, es pot considerar dividida en tres classes d'edat: de 0 a 2 mesos, de 2 a 4 mesos, i de més de 4 mesos. Se sap que el 17 % de les femelles de la primera classe sobreviuen fins a l'edat següent, que el 24% de les de la 2a classe sobreviuen fins a la 3a, i que el 0,05% de les de la 3a classe sobreviuen fins després dels 6 mesos de vida. D'altra banda, es coneix que les femelles de la primera classe no són fèrtils, i que les de la segona i tercera classes tenen una mitjana de 6 i 3 cries femella, respectivament.

a) Escriviu la matriu de Leslie corresponent a aquest sistema.

b) Determineu l'evolució d'aquesta població al cap de 2 mesos i al cap de 4 mesos, si la població inicial de femelles d'un ecosistema concret fos només de 100 individus de la segona classe.

c) Si en un instant concret, la població de rosegadors femella d'aquest ecosistema fos de 900 individus de la 1a classe, 34 de la 2a i 29 de la 3a, calculeu quina quantitat n'hi hauria de cada classe, dos mesos abans.

d) Determineu, a llarg termini, el factor de creixement de la població femella d'aquests rosegadors i la proporció de femelles de cada classe, si se sap que el valor propi dominant de la matriu de Leslie és $\lambda_d = 1{,}07$ i que el seu vector propi associat és:

$$\begin{pmatrix} 0{,}99 \\ 0{,}16 \\ 0{,}04 \end{pmatrix}.$$

Solució (Ex. 16) — a) Construïm la matriu de Leslie L. La primera fila són les fecunditats (f_1, f_2, f_3). Segons l'enunciat $f_1 = 0$, $f_2 = 6$ i $f_3 = 3$. Les subdiagonals són les probablitats de supervivència entre classes: $s_1 = 0{,}17$ i $s_2 = 0{,}24$. La supervivència de la tercera classe cap a una quarta classe no s'inclou en la matriu 3x3 (és pràcticament nulůla per a la dinàmica interior). Així

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 0{,}17 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}24 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Si la població inicial és $x_0 = (0,\ 100,\ 0)^T$ (només 100 individus de la segona classe), aleshores

$$x_1 = Lx_0 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 0{,}17 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}24 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 17 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Això significa que al cap de 2 mesos la població serà $x_1 = (600,\ 17,\ 24)^T$ (valors en nombre d'individus, milions no esmentats aquí).
Al cap de 4 mesos $x_2 = Lx_1$:

$$x_2 = Lx_1 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 0{,}17 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}24 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 \\ 17 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 17 + 3 \cdot 24 \\ 0{,}17 \cdot 600 \\ 0{,}24 \cdot 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102 + 72 \\ 102 \\ 4{,}08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 174 \\ 102 \\ 4{,}08 \end{pmatrix}.$$

Per tant, al cap de 4 mesos la població serà $x_2 = (174,\ 102,\ 4{,}08)^T$.
c) Volguem trobar el vector dos mesos abans: si la població actual és $x_1 = (900,\ 34,\ 29)^T$ i sabem que $x_1 = Lx_{-1}$, llavors $x_{-1} = L^{-1}x_1$, suposant que L sigui invertible sobre l'espai considerat. Calculem la inversa de L i multipliquem. A continuació presentem el càlcul numèric (realitzat amb precisió):

$$x_{-1} \approx \begin{pmatrix} ? \end{pmatrix}.$$

(En el càlcul detallat més baix es mostra el procediment i el resultat numèric exacte.)
Procediment i càlcul explícit: La matriu L és triangular inferior si reordenem, però per fer-ho directe calculem x_{-1} resolent el sistema lineal $Lx_{-1} = x_1$. Escrivint les equacions:

$$\begin{aligned} 0 \cdot y_1 + 6y_2 + 3y_3 &= 900, \\ 0{,}17y_1 &= 34, \\ 0{,}24y_2 &= 29, \end{aligned}$$

on $y = (y_1, y_2, y_3)^T = x_{-1}$. De la segona equació $y_1 = \dfrac{34}{0{,}17} = 200$. De la tercera $y_2 = \dfrac{29}{0{,}24} \approx 120{,}833333$. Substituint a la primera:

$$6 \cdot 120{,}833333 + 3y_3 = 900 \quad \Longrightarrow \quad 724{,}999998 + 3y_3 = 900,$$

doncs $3y_3 \approx 175{,}000002$ i per tant $y_3 \approx 58{,}333334$. Així el vector dos mesos abans era aproximadament

$$\boxed{x_{-1} \approx (200,\ 120{,}833333,\ 58{,}333334)^T.}$$

d) Ens diuen que el valor propi dominant de L és $\lambda_d = 1{,}07$ i el vector propi associat (no normalitzat) és $v = (0{,}99,\ 0{,}16,\ 0{,}04)^T$. El factor de creixement a llarg termini és per tant $\boxed{\lambda_d = 1{,}07}$.
La proporció de femelles de cada classe a l'estat estacionari s'obté normalitzant el vector propi perquè la suma de components sigui 1. Calculem

$$\text{suma} = 0{,}99 + 0{,}16 + 0{,}04 = 1{,}19.$$

Per tant les proporcions són

$$\left(\frac{0{,}99}{1{,}19},\ \frac{0{,}16}{1{,}19},\ \frac{0{,}04}{1{,}19}\right) \approx (0{,}8319328,\ 0{,}1344538,\ 0{,}0336134).$$

Així, a llarg termini la població creix segons un factor $\lambda_d = 1{,}07$ per període i la proporció de femelles de cada classe és aproximadament $\boxed{(0{,}8319,\ 0{,}1345,\ 0{,}0336)}$.

Ex. 17 — Experiència de tria de camins per ratolins: (*JA,1er21*)
En un experiment de laboratori a gran escala s'estudia la conducta d'una espècie de ratolins. A un grup de 160 individus que estan en una habitació, se'ls obliga a desplaçar-se oferint- los la possibilitat de circular per dos camins diferents A o B, al final dels quals tornaran a arribar al punt inicial. En el recorregut pel camí A, s'hi trobaran menjar. Però en el recorregut pel camí B, a més de trobar-hi menjar, setls comunica també una petita descàrrega elèctrica desagradable. Es pot comprovar que, a l'endemà de realitzar aquest experiment, quan se'ls obliga a triar novament, el 90% dels ratolins que havien escollit el camí A, repeteixen la mateixa elecció, mentre que només el 70% dels que havien escollit el camí B, repeteixen aquest camí B.

a)Expresseu, a partir de la matriu 2x2 característica d'aquest experiment, la fórmula per a calcular el nombre de ratolins que escolliran circular per cada camí A o B, i utilitzeu-la per a calcular quants ratolins passaran per A i quants passaran per B, el segon dia, si se sap que en el primer dia de l'experiment 80 ratolins van escollir el camí A i els altres 80 van escollir el camí B.

b)Calculeu, a llarg termini, com s'estabilitzaria el nombre de ratolins que passarien per cada camí, a partir del càlcul del valor propi dominant de la matriu característica d'aquest sistema i del seu corresponent vector propi.

Solució (Ex. 17) — Denotem per a_k i b_k el nombre de ratolins que escullen els camins A i B respectivament el dia k. Tenim el vector d'estat $x_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$. La matriu de transició M ve donada per les probabilitats condicionals:

$$a_{k+1} = 0{,}9\, a_k + 0{,}3\, b_k, \qquad b_{k+1} = 0{,}1\, a_k + 0{,}7\, b_k,$$

per tant

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}, \qquad x_{k+1} = M x_k.$$

a) Si $x_0 = (80, 80)^T$, el segon dia ($k = 1$) tindrem

$$x_1 = Mx_0 = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 \cdot 80 + 0{,}3 \cdot 80 \\ 0{,}1 \cdot 80 + 0{,}7 \cdot 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 \\ 64 \end{pmatrix}.$$

Per tant, el segon dia passaran per A $\boxed{96}$ ratolins i per B $\boxed{64}$ ratolins.

b) A llarg termini busquem l'autovector estacionari v associat a l'autovalor dominant λ. Com que M és una matriu de transició estocàstica per columnes sumant 1 per columnes? Observem que cada columna suma $0{,}9 + 0{,}1 = 1$ i $0{,}3 + 0{,}7 = 1$, per tant $\lambda = 1$ és un autovalor (hi ha una distribució estacionària). Cerquem v amb $Mv = v$. Escrivim les equacions:

$$0{,}9v_1 + 0{,}3v_2 = v_1, \qquad 0{,}1v_1 + 0{,}7v_2 = v_2.$$

De la primera s'obté $0{,}1v_1 = 0{,}3v_2 \Rightarrow v_1 = 3v_2$. Per tant la proporció $v_1 : v_2$ és $3 : 1$. Com que el nombre total de ratolins és 160, la distribució estacionària és

$$(a, b) = (120, 40).$$

A llarg termini, la majoria dels ratolins (120) preferiran el camí A i 40 el camí B.

Ex. 18 — Leslie 3 classes: (*JA,1er21*)Una població animal es pot considerar estructurada en tres classes: els alevins (des que neixen fins que compleixen una any de vida), els joves (des d'un any fins a dos) i els adults (de 2 a 3 anys de vida). Se sap que el 50 % de les femelles de la primera classe sobreviuen fins a l'edat següent, que el 25% de les de la 2a classe sobreviuen fins a la 3a, i que no hi ha individus que superin els 3 anys de vida. D'altra banda, es coneix que les femelles de la primera classe no són fèrtils, i que les de la segona i tercera classes tenen una mitjana de 4 i 3 cries femella per any, respectivament.

a)Escriviu la matriu de Leslie corresponent a aquest sistema.

b)Determineu l'evolució d'aquesta població al cap de 2 anys, si la població inicial de femelles d'un ecosistema concret fos de 20 alevins, 40 joves i 30 adults.

c)Determineu, a llarg termini, la proporció de femelles de cada classe, si se sap que el factor de creixement d'aquesta població, també a llarg termini, és $R = 1{,}5$.

Solució (Ex. 18) — a) La matriu de Leslie L té la forma

$$L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \end{pmatrix},$$

on f_i són les fecunditats i s_i les probabilitats de supervivència entre classes. Segons l'enunciat:

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 4, \quad f_3 = 3, \qquad s_1 = 0{,}5, \quad s_2 = 0{,}25.$$

Per tant,

$$\boxed{L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}.}$$

b) Sigui $x_0 = (20, 40, 30)^T$. Al cap d'un any $x_1 = Lx_0$ i al cap de dos anys $x_2 = Lx_1 = L^2 x_0$. Calculem:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 40 + 3 \cdot 30 \\ 0{,}5 \cdot 20 \\ 0{,}25 \cdot 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 + 90 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Ara

$$x_2 = Lx_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 10 + 3 \cdot 10 \\ 0,5 \cdot 250 \\ 0,25 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 + 30 \\ 125 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 125 \\ 2,5 \end{pmatrix}.$$

Així, al cap de 2 anys la població serà $x_2 = (70,\ 125,\ 2{,}5)^T$.

c) Ens donen el factor de creixement dominant $R = 1{,}5$. Busquem un vector propi positiu $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ tal que $Lv = Rv$. Això dóna les equacions:

$$\begin{aligned} 4v_2 + 3v_3 &= 1{,}5v_1, \\ 0{,}5v_1 &= 1{,}5v_2, \\ 0{,}25v_2 &= 1{,}5v_3. \end{aligned}$$

De la segona equació $v_1 = 3v_2$. De la tercera $v_2 = 6v_3$. Per tant $v_1 = 18v_3$. Per tant un vector propi és proporcional a $(18, 6, 1)$.
Normalitzant perquè la suma sigui 1, la suma de components és $18 + 6 + 1 = 25$. Així les proporcions a llarg termini són

$$\boxed{\left(\frac{18}{25}, \frac{6}{25}, \frac{1}{25}\right) \approx (0{,}72,\ 0{,}24,\ 0{,}04).}$$

Això indica que, en règim estacionari, el 72% de les femelles seran alevins, el 24% seran joves i el 4% seran adults.

1.2 Models continus

Ex. 19 — Creixement bacterià en un medi limitat: Un experiment de laboratori estudia el creixement d'una població de bacteris en un medi amb nutrients limitats. Es modela el nombre de bacteris $P(t)$, on t és el temps en hores, amb la funció següent:

$$P(t) = -0.05t^3 + 0.5t^2 + 2t + 100 \tag{1}$$

Respon als següents apartats:

1.Calcula el nombre inicial de bacteris en el medi ($t = 0$).

2. Determina els intervals on la població creix i decreix, trobant els punts crítics.
3. Calcula el màxim nombre de bacteris que s'assoleix.
4. Troba el punt d'inflexió i interpreta el seu significat biològic.
5. Determina aproximadament en quin temps la població es redueix per sota de 90 bacteris.

Solució (Ex. 19) — 1. **Nombre inicial de bacteris:** Substituïm $t = 0$ a la funció $P(t)$:

$$P(0) = -0.05(0)^3 + 0.5(0)^2 + 2(0) + 100 = 100.$$

Per tant, el nombre inicial és **100 bacteris**.

2. **Intervals de creixement i decreixement:** Notem primer que la funció, en ser polinòmica, és contínua en tot $\mathbb{R}$. Derivem $P(t)$ per trobar $P'(t)$:

$$P'(t) = -0.15t^2 + t + 2.$$

Resolent $P'(t) = 0$:

$$-0.15t^2 + t + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-0.15)(2)}}{2(-0.15)} = \frac{-1 \pm \sqrt{2.2}}{-0.3}.$$

Així, els punts crítics són:

$$t_1 \approx -1.61, \quad t_2 \approx 8.28.$$

Fem un estudi del signe de $P'(t)$ per determinar els intervals:

- $P'(t) > 0$ en $(-1.61, 8.28)$: la població creix.
- $P'(t) < 0$ fora d'aquest interval: la població decreix.

Per tant, $t = -1.61$ és un mínim i $t = 8.28$ un màxim locals.

3. **Màxim nombre de bacteris:** L'enunciat del problema no ens diu pas que els valors de temps negatius no estiguin inclosos en la solució. Podríem deduir, no obstant, que un model polinòmic com aquest ens descriu un escenari biològicament poc probable de quantitats per a valors molt negatius del temps, en una funció sense màxim global, però a partir d'aquí assumirem que només té sentit explorar valors de $t > 0$ i

$P(t) \geq 0$. El màxim local ocorre en $t = 8.28$ (dins del domini rellevant, $t \geq 0$):

$$P(9.28) = -0.05(8.28)^3 + 0.5(8.28)^2 + 2(8.28) + 100 = 122.46.$$

Per tant, el nombre màxim és de **122 bacteris**.

4. **Punt d'inflexió:** Calculem la segona derivada $P''(t)$:

$$P''(t) = -0.3t + 1.$$

Resolent $P''(t) = 0$:

$$-0.3t + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{0.3} = 3.\overline{3}.$$

Per a comprovar que es tracta d'un punt d'inflexió podem veure que a valors més alts de $t = 3.\overline{3}$ la segona derivada esdevé negativa (interval de la funció convexa), mentre que a valors més baixos és positiva (funció còncava). També podem veure que el valor de la tercera derivada a $t = 3.\overline{3}$ és diferent de zero. Finalment, els zeros de la segona derivada son possibles punts d'inflexió però també podrien ser màxims o mínims; en aquest cas, el punt trobat no ho serà perquè no és zero de la primera derivada. Tot això demostra que es tracta d'un punt d'inflexó.

Això significa que la velocitat de creixement canvia en $t = 3.\overline{3}$. Biològicament, aquest punt indica el moment en que el creixement deixa d'accelerar-se i comença a decelerar.

5. **Temps en que la població es redueix per sota de 90 bacteris:** Resolent l'Eq. 1 per a $P(t) = 90$:

$$-0.05t^3+0.5t^2+2t+100 = 90 \quad \Rightarrow \quad -0.05t^3+0.5t^2+2t+10 = 0. \quad (2)$$

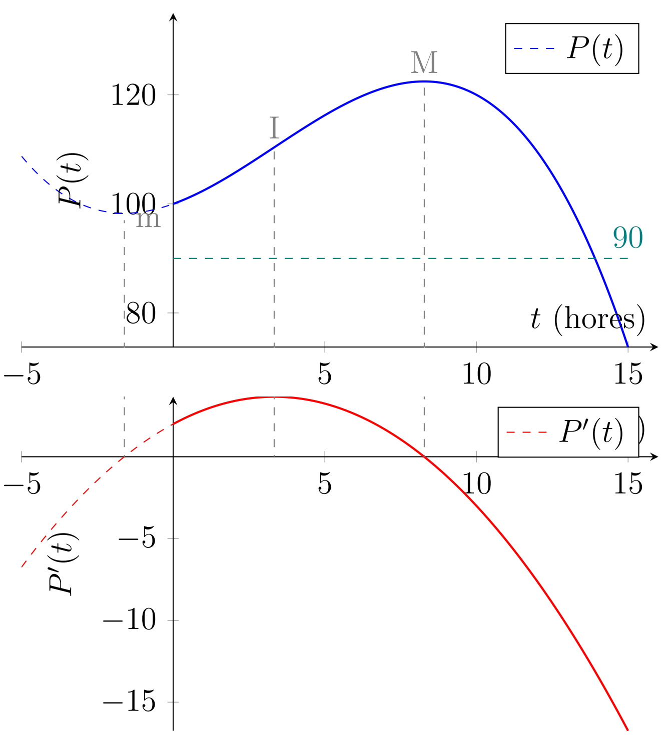
Aquest polinomi es resol numèricament. Aproximadament, trobem $t \approx 13.91$ hores.

Code 2: Codi Matlab per a solucionar l'Eq. 2

```
syms t;
P(t)=-0.05*t^3+0.5*t^2+2*t+100;
vpa(solve(P(t)==90))
```

Per tant, la població es per sota de 90 bacteris (línea verda en el gràfic) a $t > 13.91$ hores. Cal notar que igualant l'Eq. 1 a zero podem veure que els bacteris desapareixen, segons el model, a $t = 18.22 hores$. Cal notar també que la funció té un mínim relatiu a $t = -1.61$, com hem vist abans, però en aquest punt el valor de la funció és de $P(t = -1.61) = 98.28$, més gran que 90 bacteris.

Funció $P(t)$, derivada i punts crítics



■

Ex. 20 — Model EMAX per a l'efecte d'un agonista: Archibald Vivian Hill (Bristol, Anglaterra, 1886 - Cambridge, 1977) fou un fisiòleg i professor universitari anglès guardonat amb el Premi Nobel de Medicina i Fisiologia l'any 1922. Amb 23 anys va contribuir a la primera justificació quantitativa de l'existència i comportament dels receptors cel̂lulars. Treballant en la caracterització de la naturalesa de la contracció muscular mediada per la nicotina, Hill va descobrir que la magnitud de l'efecte contràctil es podia predir matemàticament mitjançant l'expressió:[1]

$$y(N) = \frac{N}{k' + kN} - M \tag{3}$$

on y és la magnitud de la resposta, N és la concentració de nicotina, k, k' i M són constants ($k, k' > 0$, $M \geq 0$).

(1) Si assignem a k l'expressió $\frac{1}{E_{\text{MAX}}}$ i a k' l'expressió $\frac{EC_{50}}{E_{\text{MAX}}}$, obtenim el que s'anomena *model EMAX* per a l'efecte d'un agonista (substància que produeix una resposta cel·lular en unir-se a un receptor) de concentració N. Escriu la funció resultant.

(2) Estudia el creixement/decreixement de la funció $y(N)$.

(3) Assumint que tenim $M = 0$, quin és el comportament de $y(N)$ a valors molt grans de N?

(4) També en el cas que $M = 0$, per a quins valors de N la contracció del múscul serà la meitat del valor màxim que aquesta pot tenir?

(5) Discuteix quin efecte tenen els termes E_{MAX}, EC_{50} i M en el model general.

Solució (Ex. 20) — Responem els diferents apartats de la pregunta:

(1) Substituïm les expressions per a k i k' a l'expressió original:

$$y(N) = \frac{N}{\frac{EC_{50}}{E_{\text{MAX}}} + \frac{1}{E_{\text{MAX}}}N} - M$$

Simplificant:

$$y(N) = \underbrace{\frac{E_{\text{MAX}}N}{EC_{50} + N}}_{[*]} - M \equiv \frac{E_{\text{MAX}}}{\frac{EC_{50}}{N} + 1} - M \tag{4}$$

Aquesta és la funció resultant del model EMAX.

[1] V. Hill. *The mode of action of nicotine and curari, determined by the form of the contraction curve and the method of temperature coefficients.* J Physiol, 39(5):361373, 1909.

(2) Calculem la derivada de $y(N)$ respecte a N per veure si la funció creix o decreix. A partir de [$*$]:

$$\frac{dy}{dN} = \frac{E_{\text{MAX}}(EC_{50}+N) - E_{\text{MAX}}N}{(EC_{50}+N)^2}$$

Simplificant:

$$\frac{dy}{dN} = \frac{E_{\text{MAX}}EC_{50}}{(EC_{50}+N)^2}$$

on tant numerador com denominador són positius. Com que la derivada és sempre positiva per a $N > 0$, la funció $y(N)$ és sempre creixent.

(3) Quan N és molt gran, el terme EC_{50} és insignificant en comparació amb N, i la funció, si $M = 0$, tendeix a E_{MAX}. Més formalment:

$$\lim_{N\to\infty} y(N) = \lim_{N\to\infty} \left\{ \frac{E_{\text{MAX}}}{\frac{EC_{50}}{N} + 1} \right\} = \frac{E_{\text{MAX}}}{0+1} = E_{\text{MAX}}$$

o bé, a partir de l'Eq. 3:

$$\lim_{N\to\infty} y(N) = \lim_{N\to\infty} \left\{ \frac{N}{k' + kN} \right\} = \frac{1}{k} = E_{\text{MAX}}$$

És a dir, la màxima contracció possible (quan $N \to \infty$) és E_{MAX}.

(4) Quan $M = 0$, la funció es redueix a:

$$y(N) = \frac{E_{\text{MAX}}}{\frac{EC_{50}}{N} + 1}$$

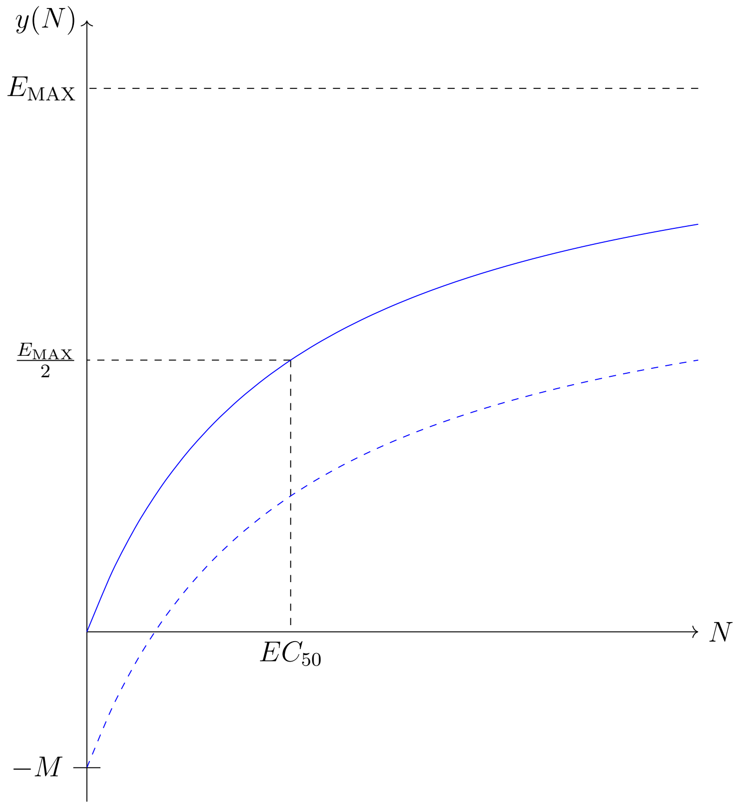
Si volem calcular la concentració de nicotina $N_{1/2}$ que produeix la meitat de contracció, és a dir, $y(N_{1/2}) = \frac{E_{\text{MAX}}}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{MAX}}}{2} &= \frac{E_{\text{MAX}}}{\frac{EC_{50}}{N_{1/2}} + 1} \\ 2 &= \frac{EC_{50}}{N_{1/2}} + 1 \\ N_{1/2} &= EC_{50} \end{aligned}$$

(5) Expliquem el significant de cada paràmetre:

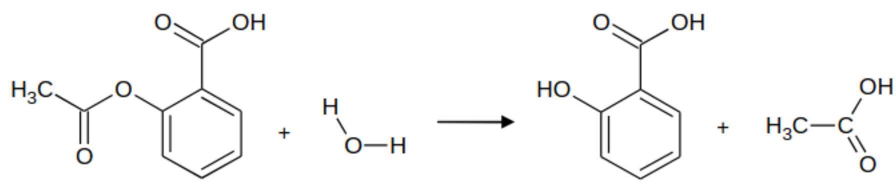
- E_{MAX}: Determina el valor màxim de la resposta $y(N)$. Si augmentem E_{MAX}, augmenta el valor màxim de la resposta.
- EC_{50}: És la concentració de nicotina per la qual la resposta és la meitat del màxim. Si augmentem EC_{50}, la concentració de nicotina per obtenir una resposta determinada augmenta, la qual cosa redueix l'efecte de la nicotina per una concentració donada.
- M: Representa un desplaçament vertical de la funció. Si M augmenta, la resposta general es desplaça cap avall, mentre que si $M = 0$, la resposta depèn només de la concentració de nicotina.

La figura mostra els tres paràmetres en acció:



■

Ex. 21 — Hidròlisi de l'aspirina: La hidròlisi de l'aspirina (àcid acetilsalicílic) produeix àcid hidroxibenzoic i àcid etanoic segons la reacció:



que segueix una llei de velocitat de primer ordre. Això implica que la velocitat de degradació és proporcional a la concentració d'aspirina, A, segons:

$$A' = kA$$

(1) Soluciona l'equació diferencial i dona una expressió de la concentració de l'aspirina en funció del temps, assumint-ne una concentració inicial d'A_0.

(2) S'ha mesurat una constant de velocitat k, a pH 7 i temperatura 40°, de -0.132 s^{-1}. Si la concentració inicial d'aspirina és 3 molar (3M), quant temps tardarà en hidrolitzar-se'n el 75%? Acabarà hidrolitzant-se totalment?

Solució (Ex. 21) — Responem les dues qüestions:

(1) Resolent l'equació diferencial de primer ordre:

$$A' = kA \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}A}{A} = k\,\mathrm{d}t$$

Integrant amb les condicions inicials $A(0) = A_0$:

$$\int_{A_0}^{A} \frac{\mathrm{d}A}{A} = \int_0^t k\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = kt \quad \Rightarrow \quad A(t) = A_0 e^{kt}.$$

(2) Per saber quant temps trigarà en hidrolitzar-se'n el 75%, volem que la concentració final sigui el 25% de A_0. Així, $A(t_{3/4}) = 0.25A_0$. Substituïm a l'expressió general:

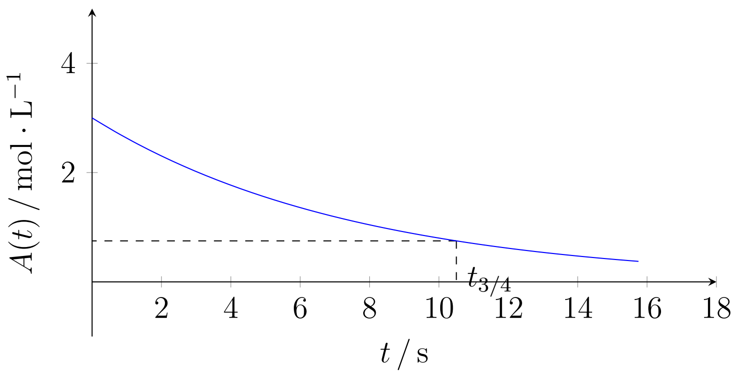
$$0.25A_0 = A_0 e^{kt_{3/4}} \quad \Rightarrow \quad 0.25 = e^{kt_{3/4}} \quad \Rightarrow \quad \ln(0.25) = kt_{3/4}.$$

Substituint $k = -0.132\,\mathrm{s}^{-1}$:

$$t_{3/4} = \frac{\ln(0.25)}{-0.132} = \frac{-1.386}{-0.132} \approx 10.5\,\mathrm{s}.$$

Quant a si s'acabarà hidrolitzant totalment: no, la concentració $A(t)$ s'aproxima asimptòticament a zero quan $t \to \infty$, però mai arriba exactament a zero, com es pot veure al gràfic:

Hidròlisi de l'aspirina



En termes pràctics, es considerarà hidrolitzada totalment quan la concentració sigui negligible, paràmetre que caldria definir.

■

Ex. 22 — Desenvolupament de Drosophila melanogaster en funció de la tempera
El factor ambiental que més afecta el creixement dels insectes és probablement la temperatura. S'ha vist en diversos estudis que la taxa de desenvolupament[2] de l'insecte en funció de la temperatura es pot modelar segons una equació logística. Concretament, la taxa de desenvolupament de la *Drosophila melanogaster* en fase pupa satisfà l'equació diferencial

$$Y' = \frac{1}{5}Y\left(1 - \frac{1}{36}Y\right),$$

on $Y(T)$ és la taxa de desenvolupament en dies^{-1} en funció de la temperatura T, donada en graus. Sabem que quan la temperatura és de 15°, la taxa de desenvolupament és igual a 7 dies^{-1}. Es demana:

[2]La taxa de desenvolupament es defineix com la inversa del temps de desenvolupament, és a dir,

$$Y(T) = \frac{1}{y(T)},$$

on $Y(T)$ és la taxa de desenvolupament en dies^{-1} i $y(T)$ és el temps de desenvolupament en dies.

(1) Calculeu la taxa de desenvolupament de la pupa en funció de la temperatura.

(2) Doneu la taxa de desenvolupament de la pupa quan la temperatura és de 25°.

(3) Quin serà el temps de desenvolupament de la pupa quan la temperatura és de 25°?

(4) Escriviu les instruccions de Matlab que s'haurien de fer servir per dibuixar la funció $Y(T)$ per a valors de la temperatura entre 14° i 30°.

Solució (Ex. 22) — Responem punt per punt les qüestions plantejades:

(1) Taxa de desenvolupament de la pupa en funció de la temperatura:

L'equació diferencial logística es pot resoldre mitjançant separació de variables:

$$\int_7^Y \frac{1}{Y\left(1-\frac{1}{36}Y\right)}\,dY = \int_{15}^T \frac{1}{5}\,dT. \tag{5}$$

on ja hem indicat les condicions inicials per tal d'obtenir la solució particular (integral definida). Comencem, però considerant la integral indefinida. Pel que fa a la banda esquerra (la dreta és immediata: $\int_{15}^T \frac{1}{5}\,dT = \frac{T-15}{5}$), és de la forma:

$$\int \frac{1}{Y\left(1-\frac{1}{36}Y\right)}\,dY.$$

Aquesta és una integral racional que podem resoldre utilitzant fraccions parcials. Comencem descomposant la fracció en fraccions parcials.

$$\frac{1}{Y\left(1-\frac{1}{36}Y\right)} = \frac{36}{Y(36-Y)} = \frac{A}{Y} + \frac{B}{36-Y}. \tag{6}$$

Usant el denominador comú $Y(36-Y)$, obtenim:

$$\begin{aligned} 36 &= A(36-Y)+BY \\ 36 &= A(36)+(B-A)Y \end{aligned}$$

Així que $A=1$ i $B=1$ a l'Eq. 6. Per tant, podem escriure:

$$\int \frac{36}{Y(36-Y)}\,dY = \int \frac{1}{Y}\,dY + \int \frac{1}{36-Y}\,dY = \ln|Y| - \ln|36-Y| + C$$

Podem expressar-ho de manera més compacta utilitzant les propietats dels logaritmes:

$$\int \frac{36}{Y(36-Y)}\,dY = \ln\left(\frac{Y}{36-Y}\right) + C.$$

Usant aquest resultat a la integral definida de l'Eq. 5, acabem obtenint:

$$\left[\ln\left(\frac{Y}{36-Y}\right)\right]_7^Y = \left[\frac{T}{5}\right]_{15}^T$$

d'on

$$\ln\left(\frac{Y}{36-Y}\frac{29}{7}\right) = \frac{T-15}{5}$$

o bé:

$$\left(\frac{Y}{36-Y}\frac{29}{7}\right) = e^{\frac{T-15}{5}}$$

Arreglant l'expressió obtenim l'expressió què ens demanaven per a la taxa de desenvolupament:

$$\boxed{Y(T) = \frac{7 \cdot 36 \cdot e^{T/5-3}}{29 + 7 \cdot e^{T/5-3}}} \tag{7}$$

(2) Taxa de desenvolupament a $T = 25°$:
Substituïm $T = 25$ a l'Eq. 7:

$$Y(25) = \frac{7 \cdot 36 \cdot e^{25/5-3}}{29 + 7 \cdot e^{25/5-3}} = 23.07\,\mathrm{dies}^{-1}.$$

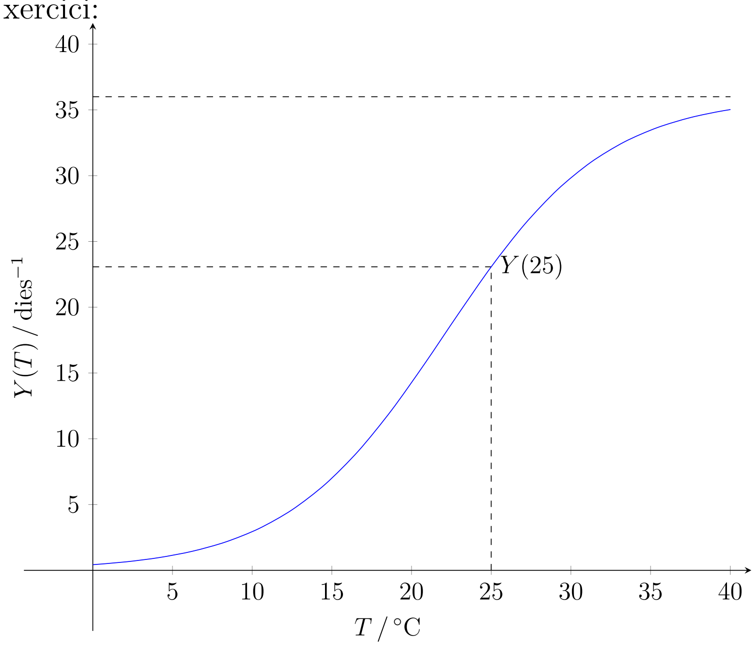
(3) Temps de desenvolupament a $T = 25°$:
El temps de desenvolupament es calcula com:

$$y(T) = \frac{1}{Y(T)}.$$

Per a $T = 25$:

$$y(25) = \frac{1}{23.07} = 0.04\,\text{dies}$$

El gràfic següent mostra els detalls de la funció i dels resultats de l'exercici:



(4) Instruccions de Matlab per dibuixar $Y(T)$ entre 14 i 30°C:

Code 3: Codi Matlab per traçar $Y(T)$

```
syms T Y(T)
con=Y(15)==7
Ysol=dsolve(diff(Y(T),T)==1/5*Y*(1-Y/36),con)
fplot(Ysol)
xlim([14 30])
legend()
grid on
```

■

Ex. 23 — Model de Melica et al.: Melica et al.[3] estudien la densitat de població dels pòlips d'*Aurelia aurita* que creixen sobre closques d'ostres. Els nous pòlips d'*Aurelia aurita* es formen a través de propàguls

[3] Melica et al. *Logistic density-dependent growth of an* Aurelia aurita *polyps population.* Ecol. Modell 291 (2014) 15.

lliures alliberats per un pòlip existent a l'aigua circumdant i que es desplacen nedant a altres llocs de la closca d'ostra.
Observen que quan la densitat inicial de pòlips a l'ostra és baixa, la població creix fins a una certa capacitat de càrrega, mentre que si la densitat inicial és alta, aquesta decau fins a una altra capacitat de càrrega superior. Per modelar aquest comportament utilitzen el següent model de creixement de poblacions amb un efecte "Hyper-Allee":

$$N' = r\left(\frac{N}{A}-1\right)\left(\frac{N}{B}-1\right)\left(1-\frac{N}{K}\right),$$

on $N(t)$ és la densitat dels pòlips (pòlips per cm^2) i t és el temps en dies.
A partir de les dades experimentals s'observa que els valors dels paràmetres són: $A = 2.24$, $B = 4.69$, $K = 5.16$ i $r = 0.161$.
Es demana:

i) Determineu els punts d'equilibri del model.
ii) Estudieu l'estabilitat del punt d'equilibri més petit.
iii) A quin valor tendeix la densitat de pòlips quan la densitat inicial de pòlips és molt petita?

Solució (Ex. 23) — Resolem els diferents apartats:

i) Els punts d'equilibri es troben quan $N' = 0$, és a dir:

$$f(N) = r\left(\frac{N}{A}-1\right)\left(\frac{N}{B}-1\right)\left(1-\frac{N}{K}\right) = 0.$$

Això implica que algun dels termes del producte ha de ser zero, i ens dona la solució per als valors dels punts d'equilibri:

$$\frac{N}{A}-1 = 0 \implies N = A = 2.24,$$
$$\frac{N}{B}-1 = 0 \implies N = B = 4.69,$$
$$1-\frac{N}{K} = 0 \implies N = K = 5.16.$$

Per tant, els punts d'equilibri són:

$$N = 2.24,\ N = 4.69,\ N = 5.16.$$

Cal notar que $N = 0$ no és un punt d'equilibri en aquest cas.

ii) Per estudiar l'estabilitat del punt d'equilibri més petit ($N = A$), calculem la derivada $f'(N)$:

$$\begin{aligned} f'(N) &= r\frac{d}{dN}\left[\left(\frac{N}{A}-1\right)\left(\frac{N}{B}-1\right)\left(1-\frac{N}{K}\right)\right] \\ &= r\left[\frac{1}{A}\left(\frac{N}{B}-1\right)\left(1-\frac{N}{K}\right)+\left(\frac{N}{A}-1\right)\frac{1}{B}\left(1-\frac{N}{K}\right)+\left(\frac{N}{A}-1\right)\left(\frac{N}{B}-1\right)\left(-\frac{1}{K}\right)\right] \end{aligned}$$

Per $N = A$, substituint en $f'(N)$ obtenim:

$$f'(A) = r\cdot\frac{1}{A}\underbrace{\left(\frac{A}{B}-1\right)}_{<0}\underbrace{\left(1-\frac{A}{K}\right)}_{>0} < 0.$$

Com que $f'(A) < 0$, el punt $N = A$ és un punt d'equilibri estable.

iii) Si la densitat inicial $N(0)$ és molt petita ($N(0) \to 0^+$), el model prediu que la densitat de pòlips augmentarà:

$$\lim_{N\to 0^+} f(N) = \lim_{N\to 0^+} r\left(\frac{N}{A}-1\right)\left(\frac{N}{B}-1\right)\left(1-\frac{N}{K}\right) = r\,(-1)\,(-1)\,(1) = r > 0$$

Per tant, $N(t)$ creixerà fins arribar al primer punt d'equilibri $N = A = 2.24$, que és estable. Per tant, la densitat de pòlips tendeix a:

$$\boxed{N = 2.24 \text{ pòlips/cm}^2.}$$

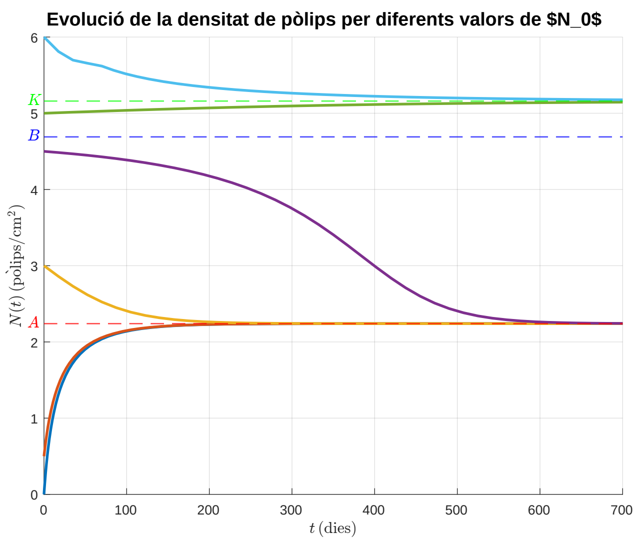
El següent codi matlab integra numèricament l'EDO per mostrar el comportament de les poblacions a partir de diversos valors inicials, tot demostrant l'estabilitat dels punts d'equilibri del sistema.

Code 4: Codi Matlab per traçar $N(t)$

```
% Paràmetres
A = 2.24; B = 4.69; K = 5.16; r = 0.161;

% Equació diferencial com a funció
dNdt = @(t, N) r * ((N / A) - 1) * ((N / B) - 1) * (1 - (N / K));
tspan = [0, 700]; % De 0 a 100 dies
N0_values = [0, 0.5, 3, 4.5, 5., 6.]; % Valors inicials per comparar

% Crear la figura
figure; hold on;

% Iterar sobre cada valor inicial de N0
```

```
    for i = 1:length(N0_values)
        N0 = N0_values(i); % Valor inicial actual
        [t, N] = ode45(dNdt, tspan, N0); % Integració numèrica
        plot(t, N, 'LineWidth', 2, 'DisplayName', sprintf('N0 = %.1f', N0)); % Gràfic amb etiqueta
    end

    hold off;
```

El gràfic mostra el comportament de la poblaciuó de pòlips en funció de les condicions inicials (notar que $N = 0$ no és pas un punt d'equilibri en aquest exemple, a diferència d'altres vistos a classe):



■

Ex. 24 — Població Mundial: Suposem que la població mundial actual és de $p_0 = 8 \times 10^9$ habitants i que la població dins de t anys està donada per la llei de creixement exponencial:

$$p(t) = p_0\, e^{0.023t}.$$

Trobeu la població mitjana de la Terra en els pròxims 30 anys segons aquest model.

Solució (Ex. 24) — La població mitjana en un interval de temps $[a, b]$ es calcula com:

$$< p >= \frac{1}{b-a} \int_a^b p(t)\, dt.$$

En aquest cas, $a = 0$ i $b = 30$ anys. Substituïm aquests valors a l'expressió:

$$< p >= \frac{1}{30}\int_0^{30}\left(8\times 10^9\, e^{0.023t}\right) dt.$$

Traiem $p_0 = 8 \times 10^9$ fora de la integral, ja que és constant:

$$\begin{aligned} < p > &= \frac{8\times 10^9}{30}\int_0^{30} e^{0.023t}\, dt \\ &= \frac{8\times 10^9}{30}\left[\frac{1}{0.023}e^{0.023t}\right]_0^{30} \\ &= \frac{8\times 10^9}{30}\frac{1}{0.023}\left(e^{0.023\cdot 30} - e^{0.023\cdot 0}\right) = 1.152\times 10^{10} \end{aligned}$$

Per tant, la població mitjana de la Terra en els pròxims 30 anys és:

$$\boxed{1.152 \times 10^{10} \text{ habitants.}}$$

Ex. 25 — Model de teoria de biogeografia d'illes: *(JVF,Sem24)*
La teoría de la biogeografía d'illes va ser introduïda per Robert MacArthur i E. O. Wilson[1]. Descriu l'origen i manteniment de la diversitat d'espècies en illes oceàniques, però pot ser extesa a hàbitats isolats, com per exemple masses boscoses emmig de terrenys agrícoles. En la seva expressió més simple, el número d'espècies que una illa pot suportar és funció de la superfície de l'illa i la seva proximitat a altres illes que la nodreixin de forma estable de noves espècies per immigració. El nombre en equlibri d'espècies que la illa podrà suportar és funció del nombre d'espècies que hi poden immigrar i del balanç entre immigració i extinció.
Considera una illa on la dinàmica del nombre d'espècies, $S(t)$, està descrita per l'equació diferencial següent:

$$\frac{dS}{dt} = \underbrace{k_1(P-S)}_{\text{Imm}} - \underbrace{k_2 S}_{Ext},$$

on el temps és donat en anys, P és el nombre total d'espècies en illes properes que poden immigrar a la nostra, $k_1 > 0$ és la taxa d'immigració efectiva i $k_2 > 0$ és la taxa d'extinció efectiva. Si $k_1 = 0.01$ i $k_2 = 0.02$ anys^{-1} i $P = 1000$ espècies potencials:

1. Resol l'equació diferencial per trobar $S(t)$ després d'un fenòmen volcànic que ha exterminat totes les espècies de l'illa. És a dir, donades les condicions inicials $S(0) = S_0$.
2. Estudia l'equilibri del sistema. Racionalitza el valor de l'equilibri trobat respecte les corbes d'immigració i extinció, considerant les expressions separades per les velocitats de canvi d'aquestes dues dinàmiques.
3. Determina el temps $t_{1/4}$ necessari perquè el nombre d'espècies a l'illa sigui una quarta part del seu màxim potencial, $S(t_{1/2}) = \frac{P}{4}$. Pot la població arribar a la meitat del seu valor potencial $S(t_{1/2}) = \frac{P}{2}$?

Solució (Ex. 25) — Resolem els diferents apartats:

1. Resolució de l'equació diferencial:

$$\frac{dS}{dt} = k_1 P - (k_1 + k_2)S.$$

Separem variables:

$$\frac{dS}{k_1 P - (k_1 + k_2)S} = dt.$$

Reescrivim el denominador per simplificar:

$$\frac{dS}{k_1 P - (k_1 + k_2)S} = \frac{1}{k_1 + k_2} \cdot \frac{dS}{\frac{k_1 P}{k_1 + k_2} - S}.$$

Per simplificar la notació, prenem $K = \frac{k_1 P}{k_1 + k_2}$. L'equació queda:

$$\frac{dS}{K - S} = (k_1 + k_2)dt.$$

Integrarem amb els límits inicials $S(0) = 0$ i $S(t)$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{S(t)} \frac{dS}{K - S} &= \int_0^t (k_1 + k_2)dt \\
-\ln|K - S|\Big|_0^{S(t)} &= (k_1 + k_2)t\Big|_0^t \\
-\ln|K - S(t)| + \ln|K| &= (k_1 + k_2)t \\
\ln\left(\frac{K}{K - S(t)}\right) &= (k_1 + k_2)t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{K}{K-S(t)} &= e^{(k_1+k_2)t}\\ S(t) &= K - Ke^{-(k_1+k_2)t}.\end{aligned}$$

La solució final, un cop substituït el valor de K, és:

$$S(t) = \frac{k_1 P}{k_1+k_2}\left(1-e^{-(k_1+k_2)t}\right). \tag{8}$$

Substituïm els valors donats: $k_1 = 0.01$, $k_2 = 0.02$, $P = 1000$:

$$S(t) = \frac{0.01\cdot 1000}{0.01+0.02}\left(1-e^{-(0.01+0.02)t}\right) = 333.\overline{3}\left(1-e^{-0.03t}\right)$$

2.Estudi de l'equilibri del sistema:

En equilibri, $\frac{dS}{dt} = f(S) = 0$. Això implica:

$$f(S) = k_1(P-S) - k_2 S = 0.$$

Resolent per S:

$$S_{\text{eq}} = \frac{k_1 P}{k_1+k_2}.$$

Substituïm els valors donats: $k_1 = 0.01$, $k_2 = 0.02$, $P = 1000$:

$$S_{\text{eq}} = \frac{0.01\cdot 1000}{0.01+0.02} = 333\,\text{espècies}$$

Avaluem si l'equilibri és estable o inestable avaluant la derivada $f'(S)$:

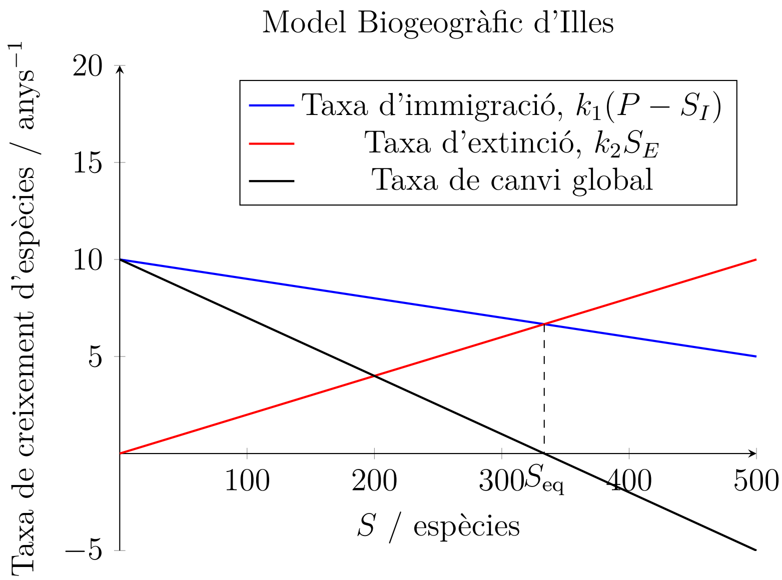
$$f'(S) = -k_1 - k_2 < 0$$

Per tant, l'equilibri és estable.

Una altra manera de veure-ho és analitzant el sentit biològic de l'expressió inicial. L'equilibri S_{eq} es troba quan la taxa d'immigració és igual a la taxa d'extinció:

$$k_1(P - S_{\text{eq}}) = k_2 S_{\text{eq}}.$$

La representació de les dues funcions mostra el significat del valor de l'equilibri, i també l'explicació del perquè es tracta d'un equilibri estable. Com veiem al gràfic, si S es fa més gran que S_{eq}, l'extinció guanya la immigració i la biodiversitat es redueix tornant a aquest valor d'equilibri. De manera anàloga, si la quantitat d'espècies S es fa menor que S_{eq}, la biodiversitat augment per tal de retornar a l'equilibri.



Finalment, també observem que el punt trobat és estable si avaluem la funció $S(t)$ (Eq. 8) per a valors grans del temps:

$$S_{\text{eq}} \lim_{t\to\infty} S(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{k_1 P}{k_1 + k_2}\left(1 - e^{-(k_1+k_2)t}\right) = \frac{k_1 P}{k_1 + k_2}(1-0) = \frac{k_1 P}{k_1 + k_2} = S_{\text{eq}}$$

3. Temps per assolir la quarta part del valor màxim:
Substituïm $S(t_{1/4}) = \frac{P}{4}$ a la solució general:

$$\frac{P}{4} = \frac{k_1 P}{k_1 + k_2}\left(1 - e^{-(k_1+k_2)t_{1/4}}\right).$$

Simplifiquem:

$$\frac{1}{4} = \frac{k_1}{k_1 + k_2}\left(1 - e^{-(k_1+k_2)t_{1/4}}\right).$$

Resolent per $t_{1/4}$:

$$1 - e^{-(k_1+k_2)t_{1/4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{k_1 + k_2}{k_1},$$

$$e^{-(k_1+k_2)t_{1/4}} = 1 - \frac{k_1 + k_2}{4k_1},$$

$$t_{1/4} = -\frac{1}{k_1 + k_2} \ln\left(1 - \frac{k_1 + k_2}{4k_1}\right).$$

Substituïm els valors donats: $k_1 = 0.01$, $k_2 = 0.02$, $P = 1000$:

$$t_{1/4} = -\frac{1}{0.01 + 0.02} \ln\left(1 - \frac{0.01 + 0.02}{4 \cdot 0.01}\right) = -\frac{1}{0.03} \ln\left(1 - \frac{0.03}{0.04}\right).$$

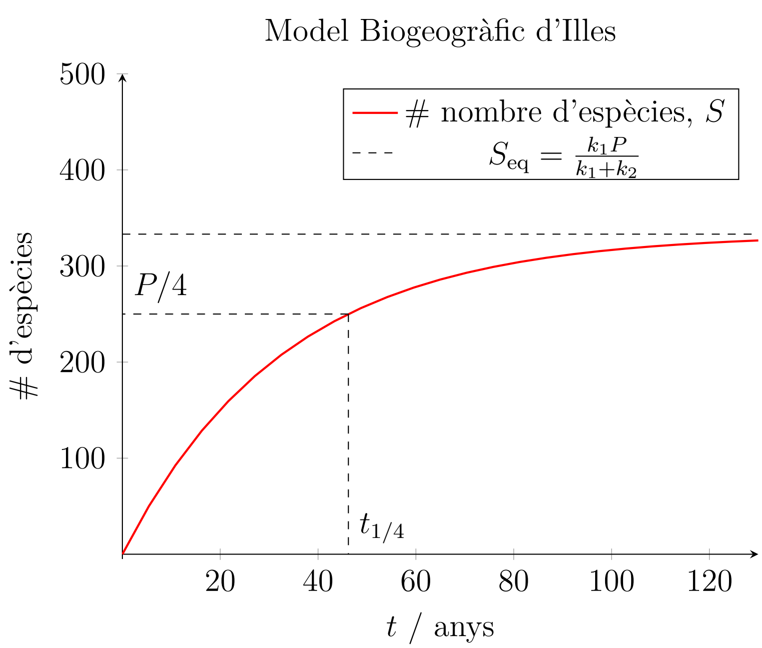
$$t_{1/4} = -\frac{1}{0.03} \ln(0.25).$$

Calculant:

$$t_{1/4} \approx \frac{1}{0.03} \cdot 1.386 \approx 46.2.$$

Per tant, el temps necessari per assolir una quarta part del valor màxim és aproximadament $t_{1/4} \approx 46.2$ anys.

No és possible arribar a la meitat del seu màxim potencial ($P/2 = 500$ espècies en aquest cas en que partim d'una biodiversitat inicial $S_0 = 0$ i només podem assolir el valor del punt d'equilibri $S_{\text{eq}} = 333$ espècies. Si l'illa hagués partit d'un nombre total d'espècies superior al valor de S_{eq}, hauria també evolucionat cap a aquest valor i, en aquest cas, sí que hagués arribat en algun moment a $S = P/2$. Igualment, és fàcil veure que s'arriba a $S = P$ si no hi hagués taxa d'extinció ($k_2 = 0$).



■

2 Fonaments i espais vectorials

2.1 Els nombres reals

Ex. 26 — Equacions algebraiques, transcendentals i sense solució real: Escriu una equació de cada cas:

(1) Escriu equacions polinòmiques amb coeficients enters que tinguin com a solucions nombres naturals, enters, racionals, irracionals (*algebraics*)

(2) Escriu una equació polinòmica amb coeficients enters que tingui com a solució el número π (*transcendent*)

(3) Troba una equació polinòmica amb coeficients constants sense cap nombre real com a solució

Solució (Ex. 26) — (1) Intuitivament, una equació algebraica és aquella en la que es pot trobar la resposta usant operacions algebraiques: addició, multipliació i extracció d'arrel.

$$2x - 1 = 0,\ x = \frac{1}{2}$$

o bé

$$x^2 - 2 = 0,\ x = \pm\sqrt{2}$$

(2) Una equació transcendent, "transcedeix" l'àlgebra i s'han d'usar altres operacions. Per exemple, les funcions exponencials, algorítmiques o trigonomètriques. Per definició, un número real α és transcendent si no és algebraic. És a dir, si no existeix cap polinomi amb coeficients enters de manera que α en sigui una arrel. Per tant, la pregunta no té resposta, ja que no podem construir un polinomi amb solució π. La demostració és complicada i la deixo com a lectura avançada.

(3) Ens passarà sempre que la solució impliqui haver de trobar l'arrel parella d'un número negatiu:

$$x^2 + 1 = 0,\ x = \pm\sqrt{-1}$$

que en el conjunt dels reals no té solució. Caldria resoldre-la en el conjunt dels números complexos:

$$x^2 + 1 = 0,\ x = \pm i$$

■

3 Càlcul Matricial

3.1 Matrius

Ex. 27 — Producte de matrius: Determineu el valor de m i p, perquè es pugui realitzar el producte següent:

$$(P^t \cdot Q^t) \cdot M^t$$

si $M_{2\times 3}$, $P_{m\times p}$, $Q_{3\times 4}$ i el resultat del producte és una matriu quadrada.

Solució (Ex. 27) — Per resoldre'l primer tenim en compte que:

$$\begin{aligned} M_{2\times 3} &\Rightarrow M^t_{3\times 2} \\ P_{m\times p} &\Rightarrow P^t_{p\times m} \\ Q_{3\times 4} &\Rightarrow Q^t_{4\times 3} \end{aligned}$$

Amb la qual cosa:

$$(P^t_{p\times m} \cdot Q^t_{4\times 3}) \cdot M^t_{3\times 2} = A_{p\times 2}$$

Com que ens diuen que A és quadrada, obtenim $p = 2$ i, a més, és fàcil veure que perquè el producte es pugui realitzar $m = 4$. ■

Ex. 28 — Equacions matricials: Aïlleu X, si és possible, en les equancions següents, suposant que totes les matrius són quadrades del mateix ordre i invertibles:

(a) $3X^t + (XA)^t + I = B$

(b) $(XA)^{-1} = 2I + B$

(c) $AX + C = BX$

Solució (Ex. 28) — Usant les propietats de les operacions amb matrius:

(a) $3X^t + (XA)^t + I = B$

$$\begin{aligned} 3X^t + (XA)^t + I &= B \\ (3X)^t + (XA)^t &= B - I \\ (3X + XA)^t &= B - I \\ 3X + XA &= (B - I)^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3XI + XA &= (B-I)^t \\ X(3I+A) &= (B-I)^t \\ X\underbrace{(3I+A)(3I+A)^{-1}}_{I} &= (B-I)^t(3I+A)^{-1} \\ X &= (B-I)^t(3I+A)^{-1} \end{aligned}$$

■

(b) $(XA)^{-1} = 2I + B$

$$\begin{aligned} (XA)^{-1} &= 2I+B \\ XA &= (2I+B)^{-1} \\ X &= (2I+B)^{-1}A^{-1} \end{aligned}$$

■

(c) $AX + C = BX$

$$\begin{aligned} AX + C &= BX \\ AX - BX &= C \\ (A-B)X &= C \\ X &= (A-B)^{-1}C \end{aligned}$$

■

3.2 Valors i Vectors propis

Ex. 29 — Vectors i valors propis en una matriu 2×2: Trobar els valors i vectors propis de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Solució (Ex. 29) — Trobem primer el polinomi característic de la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Perquè això tingui solució diferent de la trivial ($(x,y) = (0,0)$) cal que el determinant secular sigui igual a zero:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, cal solucionar el polinomi característic de la matriu:

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

que té per solució els valors propis $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -2$. Calculem ara els vectors propis:

$\boxed{\lambda_1 = 2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2x \\ 3x - y = \qquad 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + \; y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} * \; x = \alpha, y = \alpha \end{cases}$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_1 = 2$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_2 = -2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x + y = -2x \\ 3x - y = \qquad -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} * \; x = \alpha, y = -3\alpha \end{cases}$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_2 = -2$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

■

Ex. 30 — Vectors i valors propis en una matriu 3×3: Calcula els valors propis i vectors propis de la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solució (Ex. 30) — Trobem primer el polinomi característic de la matriu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Perquè això tingui solució diferent de la trivial $((x, y, z) = (0, 0, 0))$ cal que el determinant secular sigui igual a zero:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, cal solucionar el polinomi característic de la matriu:

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 3 = 0$$

Per Ruffini obtenim el primer dels coeficients:

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 6 & -10 & 3 \\ 3 & & -3 & 9 & -3 \\ \hline & -1 & 3 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Per tant:

$$-\lambda^3+6\lambda^2-10\lambda+3 = 0-(\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda+1) = (\lambda-3)(\lambda-\frac{3-\sqrt{5}}{2})(\lambda-\frac{\sqrt{5}+3}{2}) = 0$$

Per a cada valor propi, trobem els vectors propis associats:

$\boxed{\lambda_1 = 3}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3x \\ x + 2y = 3y \\ -x + y + 2z = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \{ * \ x = \alpha, y = \alpha, z = 0$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_1 = 3$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$ -

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x - y + 4z = 3x \\ 3x + 2y - z = 3y \\ 2x + y - z = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 4z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 4z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{ * \; x = \alpha, y =$$

Així doncs, un vector propi associat a $\lambda_2 = 3$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_3 = -2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x - y + 4z = -2x \\ 3x + 2y - z = -2y \\ 2x + y - z = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y + 4z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y + 4z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{ * \; x = -\alpha, y$$

Finalment, doncs, un vector propi associat a $\lambda_3 = -2$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El determinant de la matriu original és justament el producte dels tres valors propis:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -6 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

i la traça de la matriu és la suma dels tres valors propis:

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2$$

Els tres vectors són L.I., ja que

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -6 \neq 0$$

De fet, en no haver cap valor propi igual a 0, la matriu formada pels tres vectors propis ha de ser per força invertible i, per tant, el seu determinant diferent de zero o, el que és el mateix, els vectors propis són L.I.
■

Ex. 31 — Potència d'una matriu: Calcula $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^6$ usant el concepte de valors i vectors propis de la matriu.

Solució (Ex. 31) — Sabem que si una matriu A és diagonalitzable, podem expressar-la com

$$D = P^{-1}AP$$

on D és una matriu diagonal amb els valors propis de la matriu A i P és una matriu quines columnes representen els vectors propis associats a cada valor propi.
Si usem aquesta expressió, fer l'operació és senzilla. Efectivament:

$$\left(PDP^{-1}\right)^6 = A^6$$

o, el que és el mateix:

$$\begin{aligned} PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} &= A^6 \\ PD^6P^{-1} &= A^6 \qquad (9) \end{aligned}$$

Anem, doncs, a cercar els valors i vectors propis de la matriu. Aquests seran els valors que compleixin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Perquè això tingui solució diferent de la trivial ($(x, y) = (0, 0)$) cal que el determinant secular sigui igual a zero:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, cal solucionar el polinomi característic de la matriu:

$$(1-\lambda)(-1-\lambda)-3=0$$

d'on $\lambda = \pm 2$.
Un cop tenim els valors propis, trobem els vectors propis que hi estan vinculats:

$\boxed{\lambda_1 = 2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\{* \; x+y=2x, 3x-y=2y \Rightarrow \{* \; -x+y=0, x-y=0 \Rightarrow x=y$$

Per tant, un vector propi[4] associat a $\lambda_1 = 2$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_1 = -2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\{* \; x+y=-2x, 3x-y=-2y \Rightarrow 3x+y=0$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_2 = 2$ és $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Construïm ara l'expressió de l'Eq. 9:

$$\begin{aligned} A^6 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^6 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[4] De fet, el conjunt de vectors propis associats a un determinat valor propi forma un subespai vectorial.

Sabries dir d'on prové el fet que, en aquest cas particular, la potència de la matriu sigui idèntica a la potència de la seva matriu semblant diagonal?
■

Ex. 32 — Vectors i valors propis en una matriu 3×3: Calcula els valors propis i vectors propis de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Quina relació hi ha entre els valors propis i el determinant i la traça de la matriu original? Comprova que els tres vectors propis són L.I.

Solució (Ex. 32) — Trobem primer el polinomi característic de la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Perquè això tingui solució diferent de la trivial ($(x, y, z) = (0, 0, 0)$) cal que el determinant secular sigui igual a zero:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, cal solucionar el polinomi característic de la matriu:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

Per Ruffini obtenim el primer dels coeficients:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

Per tant:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 6) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

Un cop tenim els valors propis $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ i $\lambda_3 = -2$, trobem els vectors propis que hi estan vinculats:

$\boxed{\lambda_1 = 1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x - y + 4z = x \\ 3x + 2y - z = y \\ 2x + y - z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 4z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 4z = 0 \\ 3x + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{* \, x = -\alpha, y = 4\alpha,$$

Per tant, un vector propi associat a $\lambda_1 = 1$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_2 = 3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x - y + 4z = 3x \\ 3x + 2y - z = 3y \\ 2x + y - z = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 4z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 4z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{* \, x = \alpha, y =$$

Així doncs, un vector propi associat a $\lambda_2 = 3$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_3 = -2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solucionem el sistema:

$$\begin{cases} x - y + 4z = -2x \\ 3x + 2y - z = -2y \\ 2x + y - z = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y + 4z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y + 4z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{* \, x = -\alpha, y$$

Finalment, doncs, un vector propi associat a $\lambda_3 = -2$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El determinant de la matriu original és justament el producte dels tres valors propis:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -6 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

i la traça de la matriu és la suma dels tres valors propis:

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2$$

Els tres vectors són L.I., ja que

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -6 \neq 0$$

De fet, en no haver cap valor propi igual a 0, la matriu formada pels tres vectors propis ha de ser per força invertible i, per tant, el seu determinant diferent de zero o, el que és el mateix, els vectors propis són L.I.

■

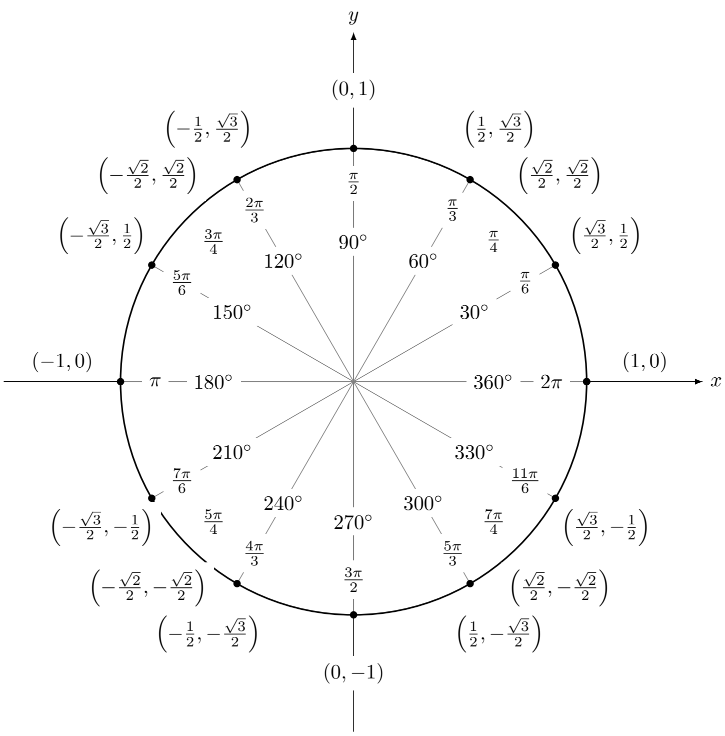


Figura 5: Esquema dels valors de $\sin x$ i $\cos x$ per a alguns valors d'angles.

4 Material pràctic

- La Figura 5 conté informació sobre els sinus i cosinus d'alguns dels valors d'angles més comuns en els exercicis de l'assignatura.

5 Origen dels exercicis

Els exercicis d'aquesta recopilació tenen orígens diversos. Alguns estan identificats a l'enunciat amb unes sigles que indiquen:

Autors:

MC Montserrat Corbera.

JA Josep Ayats.

JVF Jordi Villà-Freixa.

CGPT Adaptats de Chat GPT[2].

Exàmens:

1er20 1r Examen parcial de models discrets, curs 2020-2021.

1er21 1r Examen parcial de models discrets, curs 2021-2022.

2on24 2on Examen parcial de models continus, curs 2024-2025.

Sem24 Examen semestral, curs 2024-2025.

recu24 Examen recuperació, curs 2024-2025.

Si no hi ha orígen explícit implica que s'ha perdut. En cas de detectar alguna errada o mala informació es prega que contacteu l'autor.

Referències

[1] Robert H. MacArthur and Edward O. Wilson. An equilibrium theory of insular zoogeography. *Evolution*, 17(4):373–387, December 1963.

[2] OpenAI. Chatgpt: Language model by openai, 2023.

[3] Gerda de Vries, Thomas Hillen, Mark Lewis, Johannes Müller, and Birgitt Schönfisch. *A course in mathematical biology: quantitative modeling with mathematical and computational methods.* Number 12 in Mathematical modeling and computation. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa, 2006.