

Modelatge dinàmic amb equacions de diferència

Jordi Villà i Freixa

15 de Setembre, 2025

Problema

Suposem que un organisme té un cicle de vida molt rígid (el que podria ser realista per a un insecte), en el qual cada femella pon 200 ous, després de la qual cosa tots els adults moren. Després que els ous eclosionin, només el 3% sobreviuen per convertir-se en femelles adultes, la resta moren o són mascles. Per escriure una equació de diferències per a les femelles d'aquesta població, on triem mesurar t en generacions, només hem d'observar que la taxa de mortalitat és $d = 1$, mentre que la fecunditat efectiva és $f = 0.03 \times 200 = 6$. Per tant,

$$P_{t+1} = (1 + 6 - 1)P_t = 6P_t$$

1. La població creixerà o disminuirà?
2. Suposa que no coneixes la fecunditat efectiva, però sí que saps que la població és estable (no canvia) al llarg del temps. Quin ha de ser la fecunditat efectiva? (Pista: Quin és $1 + f - d$ si la població és estable?)
3. Si cada femella pon 200 ous, quina fracció d'aquests ha de néixer i convertir-se en femelles?
4. Observa que en aquest model hem ignorat els mascles. Això és en realitat un enfocament força comú i simplifica el model. No obstant això, això implica que estem fent algunes suposicions. Per a aquest insecte en particular, el nombre precís de mascles podria tenir poc efecte en com creix la població. Pot ser que els mascles estiguin sempre en un nombre aproximadament igual al de les femelles, de manera que sabem que la població total és simplement el doble de la de les femelles. Alternativament, la mida de la població de mascles podria comportar-se de manera diferent de la de les femelles, però hi hauria sempre prou mascles perquè la reproducció de les femelles es realitzi de la mateixa manera. Així, la població de femelles és la més important a seguir per comprendre el creixement o declivi a llarg termini de la població. Pots imaginar circumstàncies en què ignorar els mascles seria una mala idea?

Solució

1. Creixement o declivi de la població:

Donada l'equació de diferències per a la població de femelles adultes:

$$P_{t+1} = (1 + f - d)P_t$$

on f és la fecunditat efectiva i d és la taxa de mortalitat. En aquest cas, $f = 6$ i $d = 1$. Substituint aquests valors a l'equació:

$$P_{t+1} = (1 + 6 - 1)P_t = 6P_t$$

El coeficient de P_t és 6, que és més gran que 1. Això indica que la població de femelles adultes creixerà exponencialment. Per tant, la població augmentarà amb el temps.

2. Fecunditat efectiva per a una població estable:

Perquè la població sigui estable, la mida de la població no ha de canviar al llarg de les generacions. Per tant, necessitem:

$$P_{t+1} = P_t$$

A l'equació de diferències:

$$P_{t+1} = (1 + f - d)P_t$$

Per a l'estabilitat:

$$1 + f - d = 1$$

Resolent per f :

$$f = d$$

Atès que la taxa de mortalitat $d = 1$, la fecunditat efectiva f també ha de ser 1 perquè la població sigui estable.

3. Si cada femella pon 200 ous i la població és estable, la fracció d'ous que ha de néixer i convertir-se en femelles és:

$$\frac{f}{200} = \frac{1}{200}$$

Per tant, només el 0.5% dels ous han de sobreviure i convertir-se en femelles perquè la població es mantingui estable.

4. Circumstàncies on ignorar els mascles podria ser una mala idea

Ignorar els mascles podria ser problemàtic en certs casos:

Dinàmiques d'Aparellament: Si els mascles i les femelles tenen taxes de supervivència diferents o si hi ha factors que afecten l'aparellament (per exemple, la disponibilitat de mascles o la competència), això podria impactar la taxa de reproducció efectiva. Ignorar els mascles podria passar per alt aquestes dinàmiques.

Genètica de la Població: En casos on la diversitat genètica o la consanguinitat sigui una preocupació, saber sobre la població de mascles pot ser important. Els mascles contribueixen a la diversitat genètica i als patrons d'aparellament.

Aspectes Comportamentals: Si el comportament dels mascles influeix significativament en la supervivència o la reproducció de les femelles (per exemple, si els mascles proporcionen protecció o recursos), això es podria perdre en un model que només es centra en les femelles.

Gestió de la Població: En situacions de conservació o control de plagues, entendre tant els mascles com les femelles és crucial per gestionar eficaçment la població.

En general, encara que centrar-se en les femelles simplifica el model i sovint és una bona aproximació, incorporar els mascles pot proporcionar una comprensió més completa de la dinàmica de la població, especialment quan els mascles juguen un paper significatiu en la reproducció o la supervivència.