

# Formulari: Models Discrets // Matemàtiques 1r curs Biociències

## Models Unidimensionals

- Expressió general:

$$x_n = f(x_{n-1})$$

- Creixement exponencial (Malthus):

$$x_n = Rx_{n-1}, \quad R = \text{factor de creixement}$$

- Generalització:

$$x_n = R^n x_0$$

- Correcció amb  $N$  individus per interval:

$$x_n = Rx_{n-1} + N$$

- Creixement restringit:

- Beverton-Holt:

$$x_n = \frac{Rx_{n-1}}{1 + (R-1)x_{n-1}/K}$$

- Ricker:

$$x_n = x_{n-1}e^{r(1-x_{n-1}/K)}, \quad r = \ln R$$

- Logístic:

$$x_n = x_{n-1} \left( R - \frac{R-1}{K} x_{n-1} \right)$$

- Punt d'equilibri:

$$x_e : x_e = f(x_e)$$

- Estabilitat:

$$|f'(x_e)| < 1 \Rightarrow \text{estable}, \quad |f'(x_e)| > 1 \Rightarrow \text{inestable}$$

## Models Multidimensionals Lineals

- Matriu de Leslie (3 categories):

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Evolució població:

$$\mathbf{x}(t+1) = L\mathbf{x}(t)$$

- Valor i vector propis:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad \det(A - \lambda I) = 0$$

- Vectors propis:

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$$

- Diagonalització:

$$A = CDC^{-1}, \quad D = \text{diagonal}, \quad C = \text{vectors propis en columnes}$$

- Valor propi dominant: el de mòdul més gran

## Models Multidimensionals No Lineals

- Nicholson-Bailey ( $x$ : host,  $y$ : paràsit)

$$x_{n+1} = Rx_n e^{-ay_n}, \quad y_{n+1} = cx_n(1 - e^{-ay_n})$$

- Binomial Negatiu:

$$x_{n+1} = Rx_n \left( 1 + \frac{ay_n}{m} \right)^{-m}, \quad y_{n+1} = cx_n \left[ 1 - \left( 1 + \frac{ay_n}{m} \right)^{-m} \right]$$

- Punt d'equilibri: prenent  $x_{n+1} = f(x_n, y_n)$  i  $y_{n+1} = g(x_n, y_n)$

$$(x_e, y_e) : x_e = f(x_e, y_e), \quad y_e = g(x_e, y_e)$$

- Jacobiana del sistema discret:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{\partial f}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial g}{\partial y_n} \end{pmatrix}_{(x_e, y_e)}$$

- Estabilitat: valors propis de la Jacobiana discreta

$$|\lambda_i| < 1 \Rightarrow \text{estable}, \quad |\lambda_i| > 1 \Rightarrow \text{inestable}$$

## Propietats diverses

- Logaritmes de matrius:

$$\ln(A^\alpha) = \alpha \ln(A)$$

- Derivades:

$$\text{– Polinòmica: } f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = anx^{n-1}, n \neq 0$$

$$\text{– Exponencial: } f(x) = ae^{bx} \Rightarrow f'(x) = abe^{bx}$$

- Inversa d'una matriu:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$