

Tema 0: Models matemàtics

Jordi Villà i Freixa

Universitat de Vic - Universitat Central de Catalunya
Matemàtiques

Troc comú en Biologia i Biotecnologia

jordi.villa@uvic.cat

darrera actualització 15 de setembre de 2025

curs 2025-2026

- 1 Prèvia
- 2 Models matemàtics en biologia
- 3 Apliquem els models a un cas concret
- 4 Limitacions
- 5 Conclusió

Referències

El material d'aquestes presentacions està basat en anteriors presentacions i apunts d'altres professors [Corbera(2019)] de la UVic-UCC, pàgines web diverses (normalment enllaçades des del text), així com monografies [Otto and Day(2007)].

Matemàtiques aplicades a la Biologia

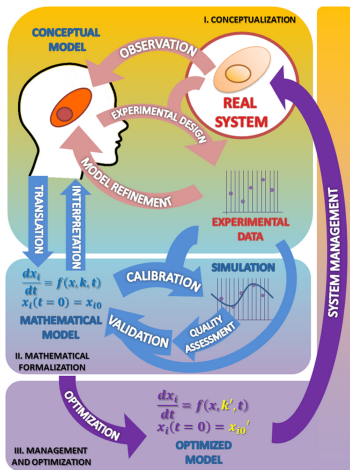
- Objectiu principal: millorar la capacitat d'entendre i construir models matemàtics en biologia.
- Les matemàtiques són com una llengua estrangera per a molts biòlegs: cal temps i pràctica per dominar-les.
- L'important no és memoritzar fórmules, sinó entendre-les i saber on buscar quan no coneixes la solució.
- Matemàtiques utilitzades en biologia: àlgebra, càlcul bàsic, àlgebra de matrius, teoria de probabilitats, i estadística.
- Avantatge de l'era dels ordinadors: no cal ser un expert en matemàtiques per resoldre models complexos.
- Ús del programari Matlab per realitzar càlculs matemàtics avançats, permetent-nos centrar en la formulació i anàlisi de models.

Exemple: Població de Porcs Senglar

Per exemple, si volem estudiar la població futura de porcs senglars en un hàbitat, podem utilitzar un model matemàtic en lloc de realitzar experiments físics, cosa que és més barata i eficient.

Així doncs, plantejarem models matemàtics i utilitzarem eines per a resoldre'ls.

Models Matemàtics



El procés de modelització en les ciències de la vida. Les activitats principals implicades en aquest procediment són l'observació seguida de la modelització matemàtica; simulació, anàlisi, optimització i retorn a l'observació. En aquest cicle, el model matemàtic ocupa, just després del sistema real, la posició central. Extret de [Torres and Santos(2015)].

Definició de Model Matemàtic

Un model matemàtic és una representació d'un procés real mitjançant equacions. Per construir un model matemàtic s'ha de:

- Abstreure la realitat per identificar els elements importants.
- Definir variables significatives i interpretar les seves relacions.
- Simplificar i comprovar la validesa del model.

“Everything should be made as simple as possible, but not simpler”

Albert Einstein

Mètode Científic en la construcció de models

Els mètodes matemàtics es basen en el mètode científic:

- 1 Anàlisi inicial de la situació: cal esbrinar quines són les qüestions més rellevants, les quals ajudin a simplificar el problema que s'estudia
- 2 Interpretació del funcionament qualitatiu del sistema: es dissenya un model molt simple que descriu el comportament del sistema
- 3 Descripció quantitativa del model: cal definir les variables significatives del sistema i les seves interrelacions (hipòtesis del model)
- 4 Escriptura de les equacions que regeixen el comportament del sistema
- 5 Comprovació de la validesa del model per a algun cas conegut
- 6 Reanàlisi de les hipòtesis inicialment plantejades si la comprovació anterior no és bona (tornant al pas número 3) o, en cas contrari, acceptació del model dissenyat
- 7 Utilització del model per a fer prediccions del comportament del sistema

Classificació de Models Matemàtics

Els models matemàtics els classificarem segons l'evolució de les variables en el **temps**:

- Models discrets: Equacions recursives. Sovint matricials.
- Models continus: Equacions diferencials (ordinàries -ODE- o parcials -PDE-).¹

Els models discrets s'estudien a la primera part del curs i els models continus a la segona.

¹Per entendre millor els diferents tipus d'equacions diferencials, podeu veure [aquest enllaç](#)

	Discrete Model	Continuous Model
Exponential Growth	$n[t+1] = R \ n[t]$	$\frac{dn[t]}{dt} = r \ n[t]$
Logistic Growth	$n[t+1] = (1 + r (1 - \frac{n[t]}{K})) \ n[t]$	$\frac{dn[t]}{dt} = r (1 - n[t]/K) \ n[t]$
Haploid Selection	$p[t+1] = \frac{p[t] \ w_A}{p[t] \ w_A + q[t] \ w_a}$	$\frac{d p}{d t} = (r_A - r_a) \ p \ (1-p)$
Diploid Selection	$p[t+1] = \frac{p[t]^2 \ w_{AA} + p[t] \ q[t] \ w_{Aa}}{p[t]^2 \ w_{AA} + 2 \ p[t] \ q[t] \ w_{Aa} + q[t]^2 \ w_{aa}} \quad \text{(not derived)}$	

Set passos per modelar un problema biològic[Otto and Day(2007)]

Pas 1: Formular la pregunta

- Què vols saber?
- Descriu el model en forma de pregunta.
- Simplifica la pregunta.
- Comença amb la descripció més simple i raonable del problema.

Pas 2: Determinar els ingredients bàsics

- Defineix les variables del model i les seves restriccions.
- Descriu les interaccions entre variables.
- Decideix si el temps serà discret o continu, i estableix l'escala temporal.
- Defineix els paràmetres del model i les seves restriccions.

Pas 3: Descriure qualitativament el sistema biològic

- Dibuixa un diagrama de cicle de vida o de flux per descriure els canvis en les variables.
- Si hi ha molts esdeveniments possibles, construeix una taula amb els resultats de cada esdeveniment.

Set passos per modelar un problema biològic (cont.)

Pas 4: Descriure quantitativament el sistema biològic

- Escriu les equacions basant-te en els diagrames i taules.
- Fes comprovacions: es compleixen les restriccions a mesura que passa el temps?
Els resultats del model poden abordar la pregunta?

Pas 5: Analitzar les equacions

- Simula i dibuixa gràfics dels canvis en el sistema.
- Realitza les anàlisis apropiades i assegura't que aborden el problema.

Pas 6: Verificacions

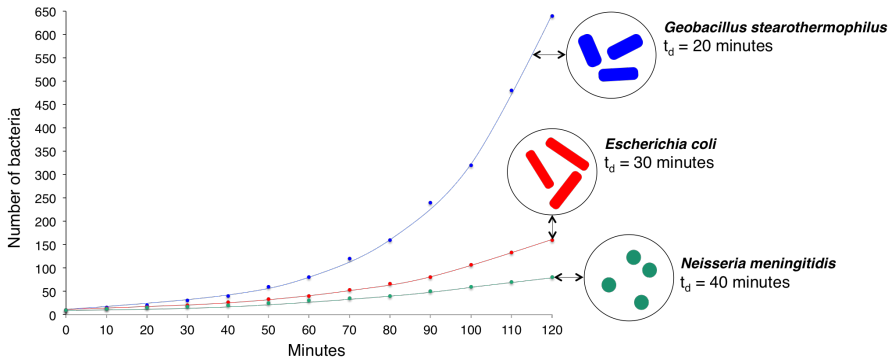
- Comprova els resultats amb dades o casos especials coneguts.
- Considera alternatives al model més simple i repeteix els passos anteriors.

Pas 7: Relacionar els resultats amb la pregunta

- Els resultats responen a la pregunta biològica?
- Interpreta els resultats verbalment i descriu nous coneixements sobre el procés biològic.
- Descriu possibles experiments.

Exemple 1a: Model Discret de l'evolució d'un cultiu cel·lular

G. stearothermophilus has a shorter doubling time (t_d) than *E. coli* and *N. meningitidis*

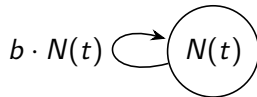


De Clevercapbara - Own work, CC BY-SA 4.0,

<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=42596607>

Exemple 1a: Model Discret de l'evolució d'un cultiu celular

- Pas 1:** El nombre de cèl·lules creix; a quin ritme? de què depèn?
- Pas 2:** $N_0 = 10$ cèl·lules; N és la variable dependent; t serà la independent; n'hi ha alguna més? (T , aliment, posició a la placa, ...). Plantegem un model discret.
- Pas 3:** Generem un diagrama de fluxe per entendre tot el que succeix en un interval de temps (time step)



(continued)

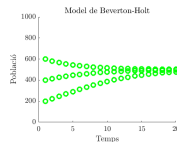
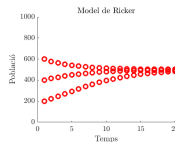
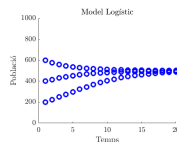
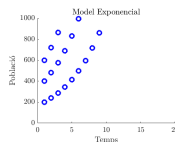
Pas 4: Construïm les equacions:

- En $t = 0$, $N = 10$
- En $t = 20$ minuts, $N = 20 = 2 \cdot N(0)$
- En $t = 40$ minuts, $N = 40 = 2 \cdot N(20)$, etc. $\Rightarrow b = 2$

$$N(t = k \cdot t_1) = 2^k \cdot N_0, \text{ amb } t_1 = 20 \text{ minuts i } k \in \mathbf{N}.$$

Passos 5 i 6: Simulem i comparem amb les dades:

t	$N(t)$	$N(t)^{\text{pred}}$
0.0	10.0	10.0
1.0	18.8	20.0
2.0	54.9	40.0
3.0	94.1	80.0
4.0	174.2	160.0



Exemple 1b: Model Continu

Exemple d'un model continu per descriure l'evolució del mateix cultiu cel·lular:

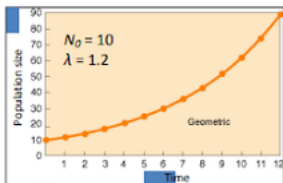
Geometric (*discrete time*)

$$\Delta N / \Delta t = (b - d)N$$

$$N_{t+1} = (1 + b - d)N_t = \lambda N_t$$

or

$$N_t = N_0 \lambda^t$$

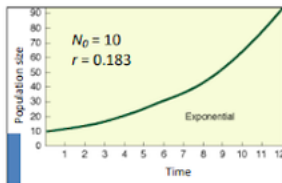


Exponential (*continuous time*)

$$dN/dt = (b - d)N = rN$$

or

$$N_t = N_0 e^{rt}$$



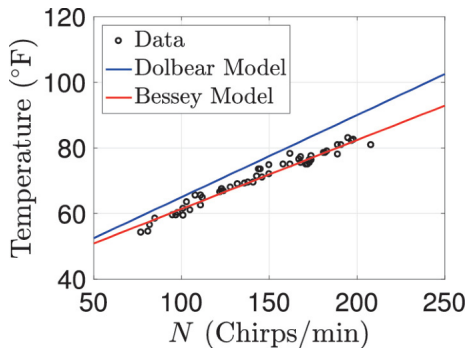
De <https://quizlet.com/ca/669052041/topic-3-geometric-growth-curves-flash-cards/>

Exemple 2: Model de Dolbear

Exemple d'un model matemàtic discret que relaciona la temperatura de l'aire (T) amb el nombre de carrisqeigs per minut (N) dels grills:

$$T = 50 + \frac{N - 40}{4}$$

on T és la temperatura en F i N el nombre de carrisqeigs per minut.



[Palacios(2022)]

Limitacions dels models

- Els models matemàtics tenen limitacions, i els resultats són només tan interessants com les preguntes biològiques que els motiven.
- Sovint, resoldre un model requereix fer suposicions dubtoses, fent-lo massa complicat.
- Els models ens poden dir què és possible, però sense dades, no ens poden dir què ha passat o què està passant.
- Té tan poc sentit promoure la biologia matemàtica per sobre d'altres àrees com evitar completament les matemàtiques.
- El progrés científic serà més ràpid gràcies a la unió entre la biologia matemàtica i l'empírica.

Consell Final

Practiqueu i feu exercicis! Igual que aprendre a jugar al tennis, l'aprenentatge de les matemàtiques requereix pràctica. A classe s'explicaran conceptes, però la pràctica és clau per assolir-los.

Afronteu l'assignatura amb predisposició i ganes per esdevenir competents professionals en l'àmbit de la Biologia.

Bibliografia



Montserrat Corbera.

Unitat 2. Càlcul integral.

Universitat de Vic - Universitat Central de Catalunya, Facultat de Ciències i Tecnologia, Vic, Barcelona, 2019.
Drets reservats. No es pot copiar sense permís de l'autora.



Sarah P. Otto and Troy Day.

A biologist's guide to mathematical modeling in ecology and evolution.

Princeton University Press, Princeton, 2007.

ISBN 978-0-691-12344-8.

OCLC: ocm65065577.



Antonio Palacios.

Mathematical Modeling: A Dynamical Systems Approach to Analyze Practical Problems in STEM Disciplines.

Mathematical Engineering. Springer International Publishing, Cham, 2022.

ISBN 978-3-031-04728-2 978-3-031-04729-9.

doi: 10.1007/978-3-031-04729-9.

URL <https://link.springer.com/10.1007/978-3-031-04729-9>.



Nestor V. Torres and Guido Santos.

The (Mathematical) Modeling Process in Biosciences.

Front. Genet., 6, December 2015.

ISSN 1664-8021.

doi: 10.3389/fgene.2015.00354.

URL <https://www.frontiersin.org/journals/genetics/articles/10.3389/fgene.2015.00354/full>.

Publisher: Frontiers.