

Punts d'equilibri i estabilitat amb equacions de diferència

Jordi Villà i Freixa

30 de Setembre, 2024

Problema

En una petita illa remota, habita una espècie de rosegadors amb un cicle de reproducció anual. La població d'aquests animals creix de manera controlada, ja que l'illa té recursos limitats. Els biòlegs que estudien la dinàmica de la població han proposat un model discret unidimensional per descriure la seva evolució any rere any. El model segueix la següent equació de recurrència:

$$N_{t+1} = r \cdot N_t \cdot \left(1 - \frac{N_t}{K}\right) \quad (1)$$

On:

- r és la taxa de creixement intrínseca de la població.
- K és la capacitat de càrrega de l'illa.
- N_t és la població al final de l'any t .

Aquest document analitza els punts d'equilibri i l'estabilitat d'aquest model per predir el comportament de la població a llarg termini.

1 Punts d'equilibri

Els punts d'equilibri es troben quan la població es manté constant, és a dir, quan $N_{t+1} = N_t$. Això ens porta a la següent equació:

$$N = r \cdot N \cdot \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (2)$$

Resolem aquesta equació per trobar els punts d'equilibri:

$$N \left(1 - r \cdot \left(1 - \frac{N}{K}\right)\right) = 0 \quad (3)$$

Aquesta equació té dues solucions:

- $N = 0$ (extinció)
- $N = K$ (equilibri amb la capacitat de càrrega)

2 Estudi de l'estabilitat

Per estudiar l'estabilitat dels punts d'equilibri, calculem la derivada de la funció de recurrència respecte a N :

$$f(N) = r \cdot N \cdot \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (4)$$

La derivada és:

$$f'(N) = r \left(1 - \frac{2N}{K}\right) \quad (5)$$

Substituïm els punts d'equilibri:

- Per $N = 0$, tenim $f'(0) = r$. Si $r < 1$, aquest punt és estable.
- Per $N = K$, tenim $f'(K) = r(1 - \frac{2K}{K}) = -r$. Per tant, si $r < 2$, l'equilibri $N = K$ és estable.

3 Conclusió

Els punts d'equilibri del model de creixement de població són $N = 0$ i $N = K$. La seva estabilitat depèn del valor de la taxa de creixement r . Si r és inferior a 1, el punt $N = 0$ és estable. Si r és inferior a 2, l'equilibri $N = K$ és estable. No obstant això, per valors més grans de r , el sistema es torna inestable, cosa que pot provocar oscil·lacions o comportament caòtic en la població.