TP3
Algèbre linéaire numérique

Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires
(Jacobi, Gauss-Seidel, relaxation)

Titouan PUECH
Numa CORNEC
IPSA PARIS – 3PC1

Table des matières :

Introduction :

https://github.com/BipraXk/Ma313_TP3

Dans ce TP, on souhaite tester des méthodes itératives sur trois systèmes Ax = b.
Pour chaque situation expérimentée, on procédera au calcul des termes successifs de la suite définie par la méthode itérative avec $x^{(0)} = 0$ et la récurrence :

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{\mathrm{k}} + b$$

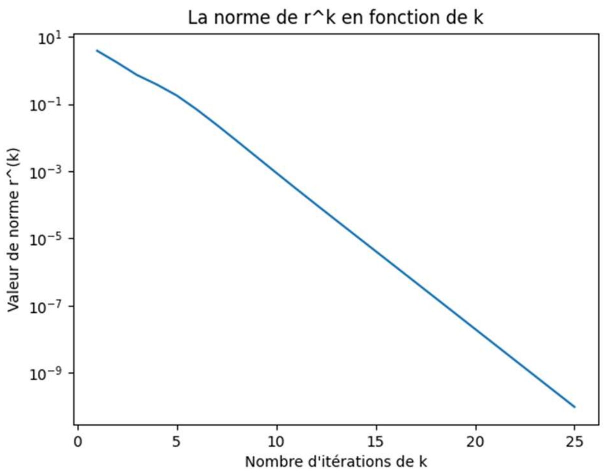
(Pour calculer x(k+1), on pourra utiliser les fonctions de numpy, notamment numpy.linalg.solve).
On calculera, à chaque rang, la valeur de $\|r^k\|$ en notant $r^k = Ax^k - b$.
On mènera le calcul jusqu'à avoir $\|r^k\| \leq 10^{-10}$ ou lorsque 100 itérations ont été calculées. On relèvera le nombre d'itérations calculées ainsi que la valeur du dernier $\|r^k\|$. On représentera graphiquement l'évolution de $\|r^k\|$ en fonction de k

Système 1 :

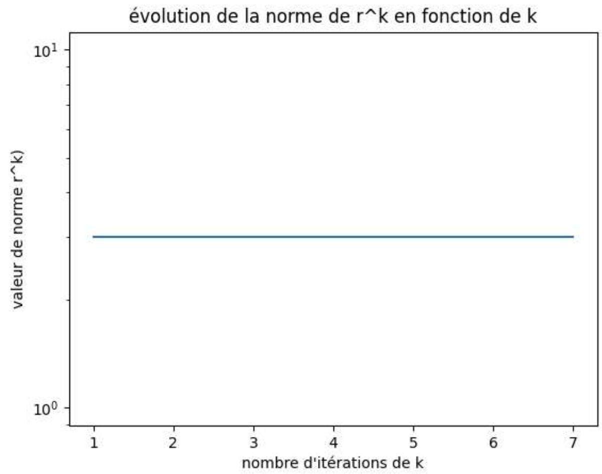
On considère le système à 150 équations et 150 inconnues décrit par les matrices A et b dont les coefficients sont donnés par les expressions :

$$\text{Si } i \neq j,\ a_{i,j} = \frac{1}{5+(2i-3j)^2}. \quad \text{Si } i = j,\ a_{i,i} = 1 \quad \text{Et } b_i = \sin\frac{i}{11}.$$

On expérimentera la méthode de Jacobi et la méthode de Gauss-Seidel.
Dire si les méthodes convergent ou pas. Le cas échéant, dire laquelle converge le plus vite.



Méthode de Jacobi



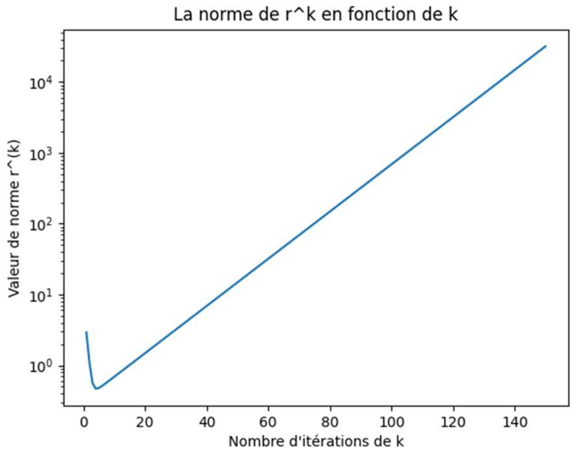
Méthode de Gauss-Seidel

Système 2 :

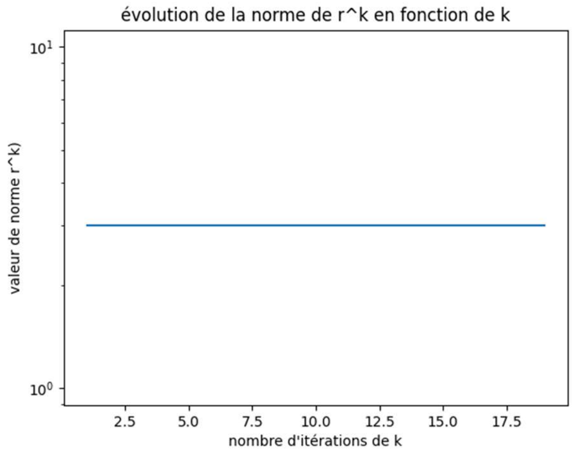
On considère A de taille 150 aussi avec les coefficients de A définis par :

$$a_{i,j} = \frac{1}{2 + 3|i - j|}$$

(On choisit le même b que pour le système précédent).
Expérimenter la méthode de Jacobi et la méthode de Gauss-Seidel. Commenter.



Méthode de Jacobi



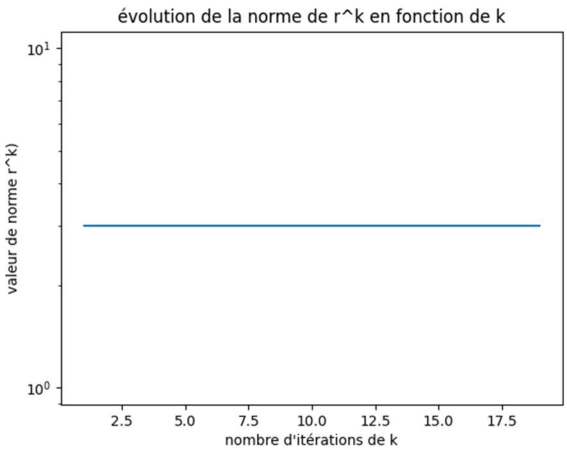
Méthode de Gauss-Seidel

Système 3 :

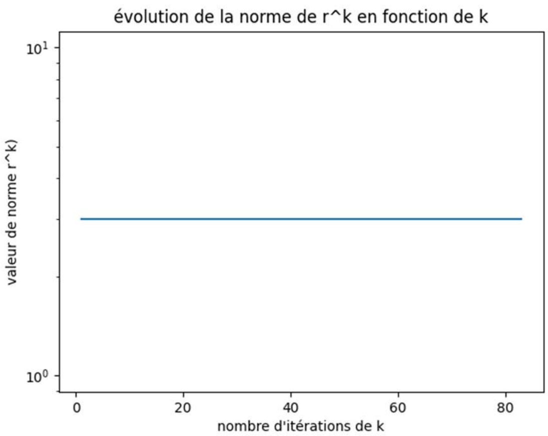
On considère A de taille 150 de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

On prendra $\alpha = 11$, $\beta = -3$, $\gamma = -7$.
(On résoud avec le même vecteur b que pour les systèmes précédents.)
Expérimenter la méthode de Jacobi, la méthode de Gauss-Seidel ainsi que la méthode de relaxation avec un paramètre $\omega = 1,3$. Commenter.



Méthode de Jacobi



Méthode de Gauss-Seidel