数学笔记

BeBop

August 10, 2025

Contents

I 杂题集萃 **5**

1 复几何 **7**

Part I

杂题集萃

Chapter 1

复几何

问题 1.0.1. 证明 $\mathbb{C}P^n$ 上的全纯线丛 $\mathcal{O}(q)$ 的单位球丛 $S(\mathcal{O}(q))$ 微分同胚于透镜空间 $L(n,|q|)$。

证明. 我们先看 $S(\mathcal{O}(-1))$, 因为

$$\mathcal{O}(-1)=\left\{([z],v)\,\middle|\,v\in[z]\subset\mathbb{C}^{n+1}\right\}$$

其中 $[z]$ 表示 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中由 z 张成的复直线, 因此

$$S(\mathcal{O}(-1))=\left\{([z],v)\,\middle|\,v\in[z]\subset\mathbb{C}^{n+1},|v|=1\right\}.$$

定义映射

$$\begin{aligned}f:S(\mathcal{O}(-1))&\to S^{2n+1}\\([z],v)&\mapsto v\end{aligned}$$

容易看出 f 是光滑的, 且是双射. 且它的逆映射

$$\begin{aligned}f^{-1}:S^{2n+1}&\to S(\mathcal{O}(-1))\\v&\mapsto([v],v)\end{aligned}$$

也是光滑的. 因此 f 是一个微分同胚.

我们知道 S^1 在 S^{2n+1} 上的作用为

$$e^{i\theta}\cdot z=e^{i\theta}z,$$

定义 S^1 在 $S(\mathcal{O}(-1))$ 上的作用为

$$e^{i\theta}\cdot([z],v)=([e^{i\theta}z],e^{i\theta}v)=([z],e^{i\theta}v).$$

显然 f 保持了这种作用, 因此 f 是 S^1-等变的. 因为 $\mathbb{Z}_q$ 是 S^1 的子群, 因此 f 诱导了一个微分同胚

$$\begin{aligned}\tilde{f}: S\left(\mathcal{O}(-1)\right)/\mathbb{Z}_q &\to S^{2n+1}/\mathbb{Z}_q = L(n,q).\\ ([z],[v]_q) &\mapsto [v]_q.\end{aligned}$$

接下来只需证明

$$S\left(\mathcal{O}(-q)\right) \cong S\left(\mathcal{O}(-1)\right)/\mathbb{Z}_q.$$

由于 $\mathcal{O}(-q) = \mathcal{O}(-1)^{\otimes q}$,

$$\begin{aligned}S\left(\mathcal{O}(-q)\right) &= \left\{([z], v_1 \otimes \cdots \otimes v_q) \,\middle|\, v_i \in [z] \subset \mathbb{C}^{n+1}, |v_1 \otimes \cdots \otimes v_q| = 1\right\}\\ &= \left\{([z], \underbrace{v \otimes \cdots \otimes v}_{q\text{个}v}) \,\middle|\, v \in [z] \subset \mathbb{C}^{n+1}, |v| = 1\right\}.\end{aligned}$$

定义映射

$$\begin{aligned}g: S\left(\mathcal{O}(-1)\right) &\to S\left(\mathcal{O}(-q)\right)\\ ([z], v) &\mapsto ([z], \underbrace{v \otimes \cdots \otimes v}_{q\text{个}v}).\end{aligned}$$

容易看出 g 是 q-叶覆盖映射, 且 $\mathbb{Z}_q$ 在 $S\left(\mathcal{O}(-1)\right)$ 上作用的轨道正好是 g 的纤维, 因此 g 诱导了一个微分同胚

$$\begin{aligned}\tilde{g}: S\left(\mathcal{O}(-1)\right)/\mathbb{Z}_q &\to S\left(\mathcal{O}(-q)\right)\\ ([z], [v]_q) &\mapsto ([z], \underbrace{v \otimes \cdots \otimes v}_{q\text{个}v}).\end{aligned}$$

综合以上讨论, 我们得到了微分同胚

$$S\left(\mathcal{O}(-q)\right) \cong S\left(\mathcal{O}(-1)\right)/\mathbb{Z}_q \cong S^{2n+1}/\mathbb{Z}_q \cong L(n,q).$$

因此 $S\left(\mathcal{O}(-q)\right)$ 微分同胚于透镜空间 $L(n,q)$. $\square$

Bibliography

[1] 梅加强. 流形与几何初步. 科学出版社, 2013.