数学笔记

BeBop

September 26, 2024

Contents

Part I

知识整理

Part II

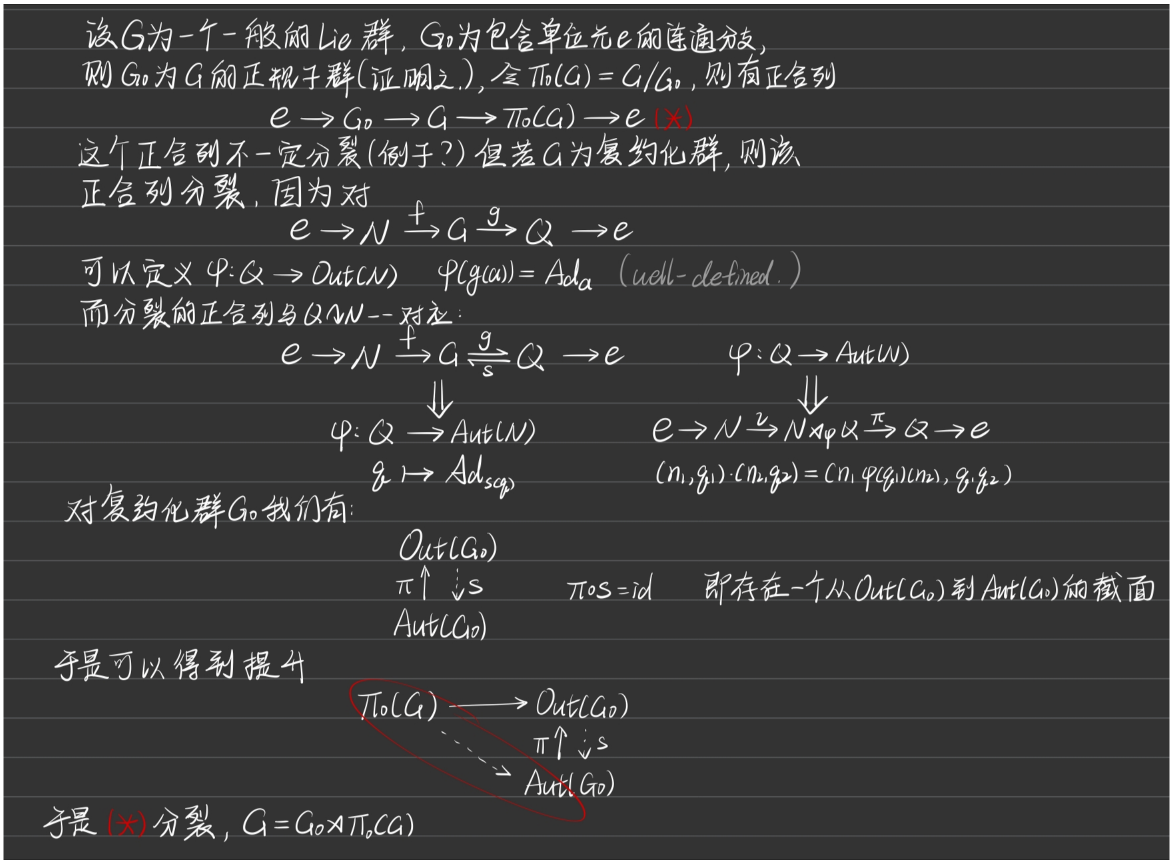
杂题集萃

Part III

易错知识

Part IV

亟待整理



设G为一个一般的Lie群，G_0为包含单位元e的连通分支，
则G_0为G的正规子群(证明之)，令$\pi_0(G) = G/G_0$，则有正合列

$$e \to G_0 \to G \to \pi_0(G) \to e \quad (*)$$

这个正合列不一定分裂(例子?) 但若G为复约化群，则该
正合列分裂，因为对

$$e \to N \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} Q \to e$$

可以定义 $\varphi: Q \to \mathrm{Out}(N)$ $\quad \varphi(g(a)) = \mathrm{Ad}_a$ (well-defined.)

而分裂的正合列与$Q \ltimes N$一一对应：

$$e \to N \xrightarrow{f} G \underset{s}{\overset{g}{\rightleftarrows}} Q \to e \qquad \varphi: Q \to \mathrm{Aut}(N)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\varphi: Q \to \mathrm{Aut}(N) \qquad e \to N \xrightarrow{\iota} N \rtimes_\varphi Q \xrightarrow{\pi} Q \to e$$

$$q \mapsto \mathrm{Ad}_{s(q)} \qquad (n_1, g_1)\cdot(n_2, g_2) = (n_1\,\varphi(g_1)(n_2),\ g_1 g_2)$$

对复约化群G_0我们有：

$$\begin{array}{c} \mathrm{Out}(G_0) \\ \pi \uparrow \ \downarrow s \\ \mathrm{Aut}(G_0) \end{array} \qquad \pi \circ s = id$$

即存在一个从$\mathrm{Out}(G_0)$到$\mathrm{Aut}(G_0)$的截面

于是可以得到提升

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(G) & \longrightarrow & \mathrm{Out}(G_0) \\ & \searrow & \pi \uparrow \ \downarrow s \\ & & \mathrm{Aut}(G_0) \end{array}$$

于是 $(*)$ 分裂，$G = G_0 \rtimes \pi_0(G)$

Figure 1: 李群的正合列何时分裂