数学笔记

BeBop

September 29, 2024

Contents

Part I

知识整理

Chapter 1

点集拓扑

1.1 逆紧映射在微分流形的应用

定义 1.1.1 (逆紧映射的定义)**.** 设 $f : X \to Y$ 是拓扑空间之间的连续映射, 若对 Y 中的任意紧子集 K, 其完全原像 $f^{-1}(K)$ 都是 X 中的紧集, 则称 f 是逆紧的 (proper).

命题 1.1.2 (流形间的逆紧映射是闭映射)**.** 设 $f : X \to Y$ 为逆紧映射且 X, Y 均为局部紧 Hausdorff 空间, 则 f 是闭映射.

特别地, 若 f 是流形间的逆紧映射, 则 f 为闭映射.

证明. 设 F 为 X 中任意闭子集, 为证 $f(F)$ 是闭集, 等价于证 $Y \backslash f(F)$ 为开集. 对任意 $y \notin f(F)$, 因为 Y 是局部紧空间, 存在 y 的开领域 V 使得 $\overline{V}$ 为紧集. 由条件知 $f^{-1}(\overline{V})$ 为紧集, 于是 $F \cap f^{-1}(\overline{V})$ 为紧集的闭子集, 从而仍为紧集. 于是 $f\big(F \cap f^{-1}(\overline{V})\big)$ 是紧集, 因为 Y 是 Hausdorff 的, 从而也是闭集. 令 $U = V - f\big(F \cap f^{-1}(\overline{V})\big)$, 则 U 为开集, 且因为 $y \notin f(F)$, 所以 $y \in U$, 即 U 是 y 的开邻域. 而因为

$$\Big(V - f\big(F \cap f^{-1}(\overline{V})\big)\Big) = \Big(V - f(F) \cap \overline{V}\Big) \subset \Big(V - f(F) \cap V\Big) = V - f(F)$$

于是 $U \cap f(F) = \emptyset$, 证毕. $\square$

命题 1.1.3. 逆紧的单浸入是嵌入.

命题 1.1.4. 逆紧的满射如果是淹没, 则必为纤维丛的丛投影.

这个命题的证明归功于 Ehresmann.

Part II

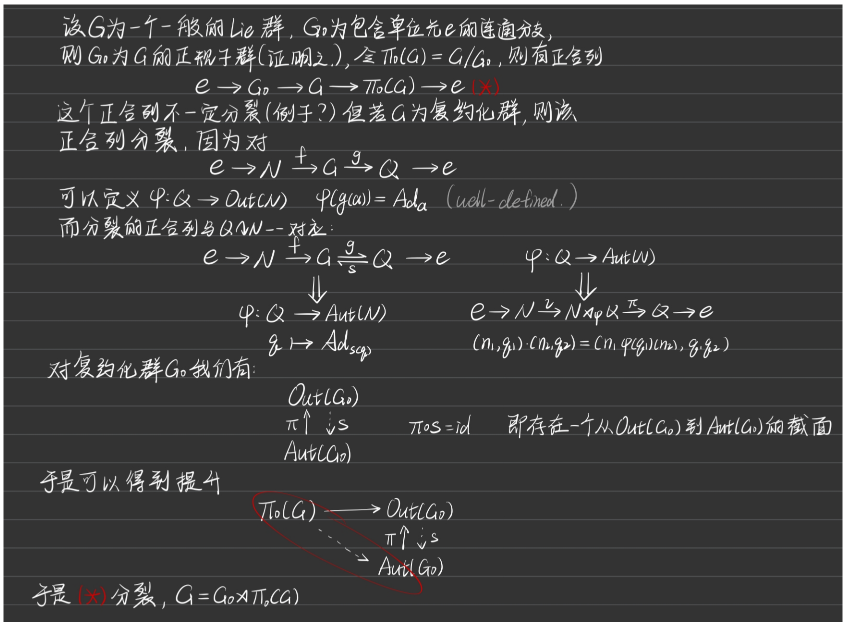
杂题集萃

Part III

易错知识

Part IV

亟待整理



设G为一个一般的Lie群，G_0为包含单位元e的连通分支，
则G_0为G的正规子群(证明之)，令$\pi_0(G)=G/G_0$，则有正合列

$$e \to G_0 \to G \to \pi_0(G) \to e \quad (*)$$

这个正合列不一定分裂(例子?) 但若G为复约化群，则该
正合列分裂，因为对

$$e \to N \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} Q \to e$$

可以定义 $\varphi: Q \to \mathrm{Out}(N)$ $\quad \varphi(g(a)) = \mathrm{Ad}_a$ (well-defined.)
而分裂的正合列与$Q \curvearrowright N$一一对应:

$$e \to N \xrightarrow{f} G \underset{s}{\overset{g}{\rightleftarrows}} Q \to e \qquad \varphi: Q \to \mathrm{Aut}(N)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\varphi: Q \to \mathrm{Aut}(N) \qquad e \to N \xrightarrow{i} N \rtimes_\varphi Q \xrightarrow{\pi} Q \to e$$

$$q \mapsto \mathrm{Ad}_{s(q)} \qquad (n_1, q_1)\cdot(n_2, q_2) = (n_1\varphi(q_1)(n_2), q_1 q_2)$$

对复约化群G_0我们有:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Out}(G_0) \arrow[d, dashed, shift left, "s"] \\ \mathrm{Aut}(G_0) \arrow[u, shift left, "\pi"] \end{tikzcd} \qquad \pi \circ s = id$$

即存在一个从$\mathrm{Out}(G_0)$到$\mathrm{Aut}(G_0)$的截面

于是可以得到提升

$$\begin{tikzcd} \pi_0(G) \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & \mathrm{Out}(G_0) \arrow[d, dashed, shift left, "s"] \\ & \mathrm{Aut}(G_0) \arrow[u, shift left, "\pi"] \end{tikzcd}$$

于是 (*) 分裂，$G = G_0 \rtimes \pi_0(G)$

Figure 1.1: 李群的正合列何时分裂