数学笔记

BeBop

June 25, 2024

Contents

Chapter 1

微分流形

1.1 向量丛结构群的约化

定义 1.1.1 (向量丛的定义)**.** *设 E, M 为微分流形, $\pi : E \to M$ 为光滑满射, 且有 M 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 及微分同胚 $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$, 满足:*

1. *$\psi(\pi^{-1}(p)) = \{p\} \times \mathbb{R}^k$, $\forall p \in U_\alpha$,*

2. *当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时, 存在光滑映射 $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$, 使得 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(p, v) = (p, g_{\beta\alpha}(p)v)$.*

则称:

- *E 是 M 上的光滑向量丛, k 为向量丛的秩, π 为丛投影;*
- *$\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ 为局部平凡化, $g_{\beta\alpha}$ 为连接函数, $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ 为结构群;*
- *$E_p := \pi^{-1}(p)$ 为点 p 上的纤维.*

对每个 E_p, 由条件1可知 E_p 上可自然定义一个线性空间结构, 这看似依赖于局部平凡化 ψ_α 的选取, 不过由条件2可知线性结构并不依赖局部平凡化的选取.

*若存在 $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ 的闭 Lie 子群 H, 使得 $g_{\beta\alpha}(p) \in H$, $\forall p \in U_\alpha \cap U_\beta$, 则称结构群**可约化到子群** H.*

连接函数 $g_{\beta\alpha}$ 在向量丛的定义中占据很重要的地位, 容易证明它满足性质:

$$g_{\alpha\alpha} = 1,\ \forall U_\alpha, \qquad g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = 1,\ \forall U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset.$$

反之, 若有一族光滑函数 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 满足以上性质, 定义商空间 $E := \sqcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{R}^k)/\sim$, 其中等价关系定义为: $(p, v_\alpha) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^k$, $(q, v_\beta) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k$

$$(p, v_\alpha) \sim (q, v_\beta) \Leftrightarrow p = q,\ v_\beta = g_{\beta\alpha}(p) v_\alpha.$$

E 的拓扑由商拓扑给出, 记 $[p, v]$ 为 (p, v) 的等价类, 定义 $\pi : E \to M$, $\pi([p, v]) = p$. 则 E 在投影映射 π 下成为 M 上的秩 k 的向量丛.

1.1.1 流形可定向与结构群可约化至 $\mathrm{GL}^+(\mathrm{k},\mathbb{R})$

1.1.2 黎曼度量与结构群可约化至正交群 $O(k)$

流形 M 上的黎曼度量是指光滑 $(0,2)$-张量场 g, g 在每个点的切空间处都是内积. 下面就来说明 n 维流形 M 上存在黎曼结构与切丛 TM 的结构群可约化至正交群 $O(n)$ 是等价的.

1°. 设 (M,g) 为一个黎曼流形, 取 M 的一个局部坐标覆盖 $\{(U_\alpha;x_\alpha^1,\ldots,x_\alpha^n)\}$, 于是 $\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}$ 成为 U_α 上的一组标架, 因为 U_α 上有度量结构, 我们可对标架做 Gram-Schmidt 正交化得到单位正交标架 $e_{1\alpha},\ldots,e_{n\alpha}$, 令局部平凡化映射为

$$
\begin{aligned}
\psi_\alpha : TU_\alpha &\to U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\
(p, a^i e_{i\alpha}|_p) &\mapsto (p, a^i e_i)
\end{aligned}
$$

其中 $e_1,\ldots,e_n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的自然基底. 当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ 时, 对每个点 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$, 因为 $\{e_{i\alpha}|_p\}$ 和 $\{e_{i\beta}|_p\}$ 都是 T_pM 的一组标准正交基, 所以转移函数 $g_{\beta\alpha}(p)$ 是正交矩阵, 因此结构群可被约化至 $O(n)$.

2°. 假设 TM 的结构群可约化至正交群, 设 $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}$ 是对应的平凡化, 即 ψ_α 是从 TU_α 到 $U_\alpha\times\mathbb{R}^n$ 的微分同胚, 令 $e_{i\alpha}=\psi^{-1}(U_\alpha\times\{e_i\})$, 其中 $\{e_i\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的自然基底. 我们得到了 TU_α 上处处线性无关的一组向量场 $\{e_{i\alpha}\}$, 命这组向量场构成 TU_α 的一个单位正交标架场, 这能唯一确定 TU_α 上的黎曼度量. 若 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$, 对 $\forall\, p\in U_\alpha\cap U_\beta$,

$$
\begin{aligned}
\langle e_{i\alpha}, e_{j\alpha}\rangle_p &= \langle \psi_\alpha(e_{i\alpha}|_p), \psi_\alpha(e_{j\alpha}|_p)\rangle \\
&= \langle g_{\alpha\beta}(p)\psi_\beta(e_{i\beta}|_p), g_{\alpha\beta}(p)\psi_\beta(e_{j\beta}|_p)\rangle \\
&= \langle \psi_\beta(e_{i\beta}|_p), \psi_\beta(e_{j\beta}|_p)\rangle \\
&= \langle e_{i\beta}, e_{j\beta}\rangle_p
\end{aligned}
$$

所以不同平凡化定义的黎曼结构是相容的, 因此能定义一个整体的黎曼度量 g.

注意到我们能用单位分解在任意微分流形上构造黎曼度量, 这表明任意微分流形切丛的结构群都能约化到正交群.