数学笔记

BeBop

May 15, 2025

Contents

Part I

知识整理

Chapter 1

定向极限的对偶和对偶的逆向极限

定义 1.0.1 (定向极限)**.** *设 I 是一个定向集, $\{V_i\}_{i\in I}$ 是一族以 I 为指标集的域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 满足对任意 $i \leqslant j$ 都有线性映射 $\varphi_j^i : V_i \to V_j$. 基于此, 我们定义定向极限*

$$\varinjlim_{i\in I} V_i := \left(\bigoplus_{i\in I} V_i\right) / \sim$$

其中等价关系 $\sim$ 定义为:

$$v_i \sim v_j \iff \exists k \geqslant i, j,\ s.t.\ \varphi_k^i(v_i) = \varphi_k^j(v_j).$$

定义 1.0.2 (逆向极限)**.** *条件同上, 对于对偶空间 $V_i^* := \mathrm{Hom}(V_i, \mathbb{F})$ 当 $i \leqslant j$ 时, 存在 $(\varphi_j^i)^* : V_j^* \to V_i^*$. 基于此我们定义逆向极限*

$$\varprojlim_{i\in I} V_i^* := \left\{ \{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i^* \,\middle|\, f_i = f_j \circ \varphi_j^i,\ for\ \forall\, i \leqslant j \right\}$$

从定义能看出对偶的关系, 定向极限是直和对象的商对象, 逆向极限是直积对象的子对象. 事实上它们确实存在自然的同构关系:

定理 1.0.3 (定向极限的对偶是对偶的逆向极限)**.**

$$\mathrm{Hom}\left(\varinjlim_{i\in I} V_i, \mathbb{F}\right) \cong \varprojlim_{i\in I} \mathrm{Hom}(V_i, \mathbb{F}).$$

也即

$$\left(\varinjlim_{i\in I} V_i\right)^* \cong \varprojlim_{i\in I} V_i^*.$$

证明. 我们分别定义

$$\Phi : \left(\varinjlim V_i\right)^* \to \varprojlim V_i^*,$$
$$\Psi : \varprojlim V_i^* \to \left(\varinjlim V_i\right)^*.$$

并说明它们互为对方的逆映射.

1° 定义 Φ: 对任意 $f : \varinjlim V_i \to \mathbb{F}$, 对每一个 $i \in I$, 令

$$f_i := f \circ \pi_i : V_i \to \varinjlim V_i \to \mathbb{F}$$

则当 $j \leqslant k$ 时, 有如下交换图

$$\begin{tikzcd} V_j \arrow[r, "\pi_j"] \arrow[d, "\varphi_k^j"'] & \varinjlim V_i \\ V_k \arrow[ur, "\pi_k"'] & \end{tikzcd}$$

因此

$$f_j = f \circ \pi_j = f \circ \pi_k \circ \varphi_k^j = f_k \circ \varphi_k^j$$

这说明 $\{f_i\}_{i\in I}$ 定义了 $\varprojlim V_i^*$ 中的一个元素. 令

$$\Phi(f) := \{f_i\}_{i\in I} = \{f \circ \pi_i\}_{i\in I}.$$

2° 定义 Ψ: 对任意 $\{g_i\}_{i\in I} \in \varprojlim V_i^*$, 定义

$$\Psi(\{g_i\})([v_j]) := g_j(v_j), \quad \forall\, [v_j] \in \varinjlim V_i.$$

为了验证其良定义性, 注意到逆向极限保证了对于任意 $j \leqslant k$, 都有

$$g_j = g_k \circ \varphi_k^j.$$

因此当 $[v_j] = [v_k]$ 时, 由定向极限的定义知存在 $l \geqslant j, k$ 使得

$$\varphi_l^j(v_j) = \varphi_l^k(v_k)$$

因此

$$g_j(v_j) = g_l(\varphi_l^j(v_j)) = g_l(\varphi_l^k(v_k)) = g_k(v_k).$$

这说明我们的定义是良好的.

从定义不难看出对任意 $\{g_i\}_{i\in I} \in \varprojlim V_i^*$,

$$\Psi(\{g_i\}) \circ \pi_j = g_j, \quad \forall\, j \in I.$$

因此 $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$. 另一方面对任意 $f : \varinjlim V_i \to \mathbb{F}$,

$$\Psi(\{f_i\})([v_j]) = f \circ \pi_j(v_j) = f([v_j]).$$

因此 $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$. $\square$

Bibliography

[1] 梅加强. 流形与几何初步. 科学出版社, 2013.