

# 数学笔记

BeBop

September 17, 2024



# Contents

<b>I</b>	<b>知识整理</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>代数拓扑</b>	<b>7</b>
1.1	Brouwer 不动点定理与 Sperner 引理 . . . . .	7
1.2	Invariance of domain . . . . .	9
1.3	Poincaré Lemma . . . . .	9
<b>II</b>	<b>杂题集萃</b>	<b>11</b>
<b>III</b>	<b>易错知识</b>	<b>13</b>



## Part I

# 知识整理



# Chapter 1

## 代数拓扑

### 1.1 Brouwer 不动点定理与 Sperner 引理

我们首先叙述 Brouwer 不动点定理与 Sperner 引理:

**定理 1.1.1** (Brouwer 不动点定理). 设  $f$  是  $n$  维闭球  $B^n$  到自身的连续映射, 则  $f$  必有不动点.

**引理 1.1.2** (Sperner 引理). 设  $K = [v_0, \dots, v_n]$  是  $n$  维单纯形, 考虑其三角剖分  $T$ , 将  $T$  的顶点  $(n+1)$  染色, 即定义  $\lambda: V(T) \rightarrow \{0, \dots, n\}$ , 且满足对任意指标子集  $\{i_0, \dots, i_k\} \subseteq \{0, \dots, n\}$ ,  $\lambda$  在  $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$  上的限制的值域包含于  $\{i_0, \dots, i_k\}$ . 则一定存在  $u_0, \dots, u_n \in V(T)$ , 使得  $[u_0, \dots, u_n]$  是三角剖分  $T$  的单形, 且  $\lambda(u_i)$  互不相同.

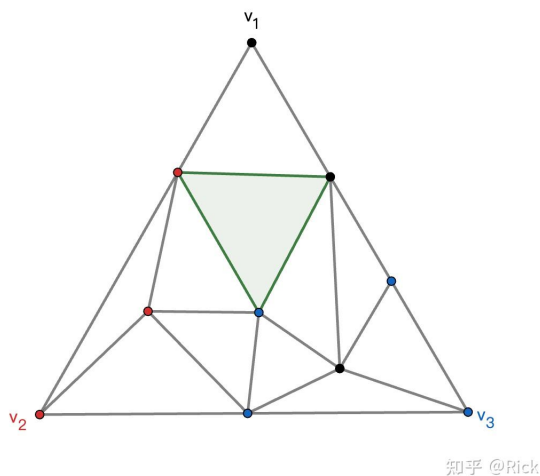


Figure 1.1: Sperner 引理示意图

它们一个是拓扑的定理, 一个是组合的定理, 看似没有联系, 但实际上我们能证明它们是等价的: 由于  $B^n \cong K$ , 我们将 Brouwer 不动点定理的叙述改为  $K$  到自身的连续映射  $f$  必有不动点.

1°: Sperner 引理  $\Rightarrow$  Brouwer 不动点定理

设  $K = [v_0, \dots, v_n]$  是  $n$  维单形, 对  $\forall x \in K$ ,  $x = \sum_i \alpha_i v_i$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\sum_i \alpha_i = 1$ . 设  $f(x) = \sum_i \beta_i v_i$ , 定义染色映射  $\lambda(x)$  为使得  $\alpha_i \geq \beta_i$  且  $\alpha_i \neq 0$  的最小下标  $i$ . 我们首先观察到在任意集合  $\{i_0, \dots, i_k\} \subseteq \{0, \dots, n\}$  中, 对  $\forall x \in [v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$ ,  $x$  的坐标  $\alpha$  满足  $\alpha_i = 0$ ,  $i \notin \{i_0, \dots, i_k\}$ , 因此  $\lambda(x)$  只可能在  $\{i_0, \dots, i_k\}$  中取值.

固定染色  $\lambda$ , 取重心重分  $K^0, K^1, \dots$ , 则在每一个  $K^j$  中  $\lambda$  均满足引理条件, 于是存在异色单形  $\Delta^j = [u_0^j, \dots, u_n^j]$ , 不妨设  $\lambda(u_i^j) = i$ . 因为  $K$  是紧集, 因此  $\{u_0^j\}_j$  存在收敛子列, 不妨设就为序列本身, 由重心重分的性质知  $\Delta^j$  的直径趋于零, 因此对所有  $i$ ,  $\{u_i^j\}_j$  均收敛于同一点  $u$ , 即  $u = \lim_{j \rightarrow \infty} u_i^j$ ,  $\forall i = 0, \dots, n$ . 由染色的定义知  $u_i^j$  的  $v_i$  坐标不等于零且大于等于  $f(u_i^j)$  的, 根据极限的保号性知  $u$  的所有坐标  $\alpha_i$  大于等于  $f(u)$  对应的坐标  $\beta_i$ , 但因为  $\sum_i \alpha_i = \sum_i \beta_i = 1$ , 所以  $\alpha_i = \beta_i$ , 因此  $u = f(u)$  是  $f$  的不动点.

2°: Sperner 引理  $\Leftarrow$  Brouwer 不动点定理

设  $K = [v_0, \dots, v_n]$  是  $n$  维单形,  $\lambda$  为满足引理要求的染色,  $T$  是  $K$  的一个三角剖分, 则可以定义单纯映射  $f: K \rightarrow K$  如下: 对  $\forall x \in V(T)$ , 定义  $f(x) = v_{\lambda(x)}$ , 若  $x = \sum_{i=0}^k \alpha_i x_i$ , 其中  $[x_0, \dots, x_k]$  为  $T$  的  $k$  维单形, 定义  $f(x) = \sum_{i=0}^k \alpha_i v_{\lambda(x_i)}$ .

若  $T$  中没有  $n$  维异色单形, 则  $f$  的像集包含于  $\partial K$  中, 且对于每个  $(n-1)$  维面  $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$  均有  $f([v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]) \subset [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ . 不妨设  $\sum_{i=0}^n v_i = 0$ , 即  $K$  的重心是原点. 定义  $g: \partial K \rightarrow \partial K$ ,  $g(x)$  为射线  $xO$  与  $\partial K$  的另一个交点, 类比对径映射. 则  $g([v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]) \cap [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] = \emptyset$  则  $g \circ f$  是  $K$  到自身的连续映射, 但没有不动点, 与 Brouwer 不动点定理矛盾.

现在我们回到 Sperner 引理本身的证明

**证明.** 对维数  $n$  做归纳, 我们证明对任意维数异色单形的个数均为奇数.

当  $n = 1$  时,  $K = [v_0, v_1]$  可看做闭区间  $[0, 1]$ , 设  $v_0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = v_1$  是剖分  $T$  中的点, 则  $\# \text{异色单形} = \# \{i \mid \lambda(x_{i-1}) \neq \lambda(x_i)\}$ . 而

$$1 = \lambda(v_1) - \lambda(v_0) = \sum_{i=1}^m \lambda(x_i) - \lambda(x_{i-1}) = \sum_{\lambda(x_{i-1}) \neq \lambda(x_i)} \lambda(x_i) - \lambda(x_{i-1})$$

因此  $\# \text{异色单形}$  是奇数.

假设维数为  $n-1$  时命题成立, 我们称  $T$  中的  $(n-1)$  维单形  $[x_0, \dots, x_{n-1}]$  为一个好单形, 若  $\{\lambda(x_0), \dots, \lambda(x_{n-1})\} = \{0, \dots, n-1\}$ . 对  $T$  中的  $n$  维单形  $\Delta_n = [u_0, \dots, u_n]$ , 令  $c(\Delta_n)$  为  $\Delta_n$  中好单形的个数, 记  $S = \{\lambda(u_0), \dots, \lambda(u_n)\}$ , 则

$$c(\Delta_n) = \begin{cases} 0, \{0, \dots, n-1\} \not\subseteq S \\ 2, \{0, \dots, n-1\} = S, \\ 1, \{0, \dots, n\} = S \end{cases}$$



于是异色单形个数的奇偶性与  $\sum_{\Delta_n \subset T} c(\Delta_n)$  的奇偶性相同. 而当好单形在  $\overset{\circ}{K}$  内时, 它是两个  $n$  单形的公共面; 当好单形在  $\partial K$  上时, 它仅为一个  $n$  单形的面. 因此异色单形个数的奇偶性与  $\partial K$  上好单形的个数的奇偶性相同, 根据条件好单形仅在  $[v_0, \dots, v_{n-1}]$  中出现, 由归纳假设知  $[v_0, \dots, v_{n-1}]$  中好单形有奇数个, 命题成立.  $\square$

## 1.2 区域不变性定理 (Invariance of domain)

该定理也是拓扑中的重要定理, 有人说它是欧式空间的内蕴性质, 用它可以区分不同维数的欧式空间.

**定理 1.2.1.** 设  $U$  为  $\mathbb{R}^n$  中的开子集,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  为连续单射, 则  $f(U)$  为  $\mathbb{R}^n$  的开子集且  $f$  为开映射, 即  $f$  为  $U$  到  $f(U)$  的同胚.

## 1.3 Poincaré Lemma 的另一种表述形式

**引理 1.3.1** (d-Poincaré lemma). 若整体有  $d\omega = 0$ , 则方程  $d\eta = \omega$  局部有解, 即在每点处存在邻域使得方程有解.

**引理 1.3.2** ( $\bar{\partial}$ -Poincaré lemma). 若整体有  $\bar{\partial}\omega = 0$ , 则方程  $\bar{\partial}\eta = \omega$  局部有解, 即在每点处存在邻域使得方程有解.

**注.** 因此若整体有  $d\omega = 0$ , 但方程  $d\eta = \omega$  在整体上没有解, 这就表明空间本身限制的整体解的存在性, 也就是说我们检测到一个拓扑上的障碍.



## Part II

## 杂题集萃



## Part III

# 易错知识

