数学笔记

BeBop

August 26, 2024

Contents

I 知识整理 **5**

1 复分析、复几何 **7**

1.1 实线性空间与复线性空间 7
1.2 实可微与复可微 8
1.2.1 一维情形: 复导数是复数 8
1.2.2 高维情形: 复微分是复线性变换 9
1.2.3 复导数存在与复线性 10
1.2.4 全纯部分与反全纯部分 11

II 杂题集萃 **13**

III 易错知识 **15**

Part I

知识整理

Chapter 1

复分析、复几何

1.1 实线性空间与复线性空间

流形 $\mathbb{C}^n$ 中每点的坐标为 $(z^1,\ldots,z^n)$, 记 $z^j = x^j + iy^j$, 于是 $x^1,\ldots,x^n$ 和 $y^1,\ldots,y^n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的实坐标. 对 $\forall p \in \mathbb{C}^n$, 切空间 $T_p\mathbb{C}^n$ 有一组基 $\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n}$, $\frac{\partial}{\partial y^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial y^n}$; 余切空间 $T_p^*\mathbb{C}$ 有一组基 $\mathrm{d}x^1,\ldots,\mathrm{d}x^n$, $\mathrm{d}y^1,\ldots,\mathrm{d}y^n$.

定义 $J_p : T_p\mathbb{C}^n \to T_p\mathbb{C}^n$

$$J_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial y^j}, \qquad J_p\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^j}$$

它的对偶变换为 $J_p^* : T_p^*\mathbb{C}^n \to T_p^*\mathbb{C}^n$

$$J_p^*\left(\mathrm{d}x^j\right) = -\mathrm{d}y^j, \qquad J_p^*\left(\mathrm{d}y^j\right) = \mathrm{d}x^j$$

因为 $(J_p)^2 = -\mathrm{id}$, 所以 $(J_p^*)^2 = -\mathrm{id}$, 于是 J_p 和 J_p^* 均可对角化且特征值均为 $\pm i$.

计算可发现 J_p^* 的属于 i 的特征子空间的一组基为 $\mathrm{d}z^1,\ldots,\mathrm{d}z^n$, 属于 $-i$ 的特征子空间的一组基为 $\mathrm{d}\bar{z}^1\ldots,\mathrm{d}\bar{z}^n$, 其中

$$\mathrm{d}z^j = \mathrm{d}x^j + i\mathrm{d}y^j, \qquad \mathrm{d}\bar{z}^j = \mathrm{d}x^j - i\mathrm{d}y^j$$

于是对应地它的对偶空间 $T_p\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}$ 的属于 i 的特征子空间的一组基为 $\frac{\partial}{\partial z^1},\cdots\frac{\partial}{\partial z^n}$, 属于 $-i$ 的特征子空间的一组基为 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}$, 其中

$$\frac{\partial}{\partial z^j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} - i\frac{\partial}{\partial y^j}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} + i\frac{\partial}{\partial y^j}\right) \tag{1.1}$$

回顾 Cauchy-Riemann 方程: 设 $f = u + iv$ 是全纯函数, 则 $u(x,y), v(x,y)$ 关于 x,y 的偏导数满足:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

代入 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ 可得

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

于是 f 全纯当且仅当 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\equiv 0$, 推广到多元复变量即: $f(z^1,\dots,z^n)$ 是多元全纯函数当且仅当每个 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^j}\equiv 0$.

1.2 实可微与复可微

1.2.1 一维情形: 复导数是复数

我们知道一个复变量复值 (连续) 函数 $f(z)$ 可以视作一个实二元向量值 (连续) 函数, 即有 $1-1$ 对应 $\mathcal{C}(\mathbb{C},\mathbb{C})\leftrightarrow\mathcal{C}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$:

$$f(z)=u(x+\sqrt{-1}y)+\sqrt{-1}v(x+\sqrt{-1}y)\leftrightarrow\begin{pmatrix}u(x,y)\\v(x,y)\end{pmatrix}.$$

回顾向量值函数可微性的定义, 如果

$$\begin{pmatrix}u(x+\Delta x,y+\Delta y)\\v(x+\Delta x,y+\Delta y)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}u(x,y)\\v(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\Delta x\\\Delta y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})\\o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})\end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

则称 $(u,v)'$ 在点 $(x,y)'$ 处可微, 此时 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}&\frac{\partial u}{\partial y}\\\frac{\partial v}{\partial x}&\frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=:\frac{\mathrm{D}(u,v)}{\mathrm{D}(x,y)}$.

复变量函数可微性定义如下, 若

$$f(z+\Delta z)-f(z)=w\cdot\Delta z+o(\Delta z),$$

其中 $w=p+\sqrt{-1}q\in\mathbb{C}$, 则称 f 在点 z 处复可微.

这里为什么要强调 w 是一个复数呢? 这是为了提醒我们可以将 Jacobi 矩阵 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 看成一个复数, 那什么时候能把一个实 2×2 矩阵看成一个复数呢?

事实上我们能很自然地给一个 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的嵌入:

$$\iota:\mathbb{C}\hookrightarrow\mathbb{R}^{2\times 2}$$
$$z=a+\sqrt{-1}b\mapsto\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}.$$

注. 该嵌入是通过将数乘一个复数看成 $\mathbb{C}(\cong\mathbb{R}^2)$ 到自身的线性变换, 再取一组实线性无关的基 1、$\sqrt{-1}$, 这个线性变换在这组基下的矩阵就是映射的像.

因此能将 $\frac{\mathrm{D}(u,v)}{\mathrm{D}(x,y)}$ 视作一个复数当且仅当存在 $p,q\in\mathbb{C}$ 使得

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}&\frac{\partial u}{\partial y}\\\frac{\partial v}{\partial x}&\frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p&-q\\q&p\end{pmatrix}$$

从而

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=p\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=q\end{cases}$$

此即 Cauchy-Riemann 方程.

1.2.2 高维情形: 复微分是复线性变换

一维情形下复线性变换只有数乘, 这种特殊性会让我们错失更一般的图景. 设 $f(z_1,\ldots,z_n)=(f_1(z_1,\ldots,z_n),\ldots,f_n(z_1,\ldots,z_n))'$ 为 $\mathbb{C}^n$ 上的 (连续) 函数. 设 $f_i=u_i+\sqrt{-1}v_i$, $z_j=x_j+\sqrt{-1}y_j$, 则 f 和 $\mathbb{R}^{2n}$ 到自身的 (连续) 映射一一对应:

$$f(z_1,\ldots,z_n)\leftrightarrow\begin{pmatrix}u_1(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)\\ \vdots\\ u_n(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)\\ v_1(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)\\ \vdots\\ v_n(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)\end{pmatrix}$$

当这个映射可微时, 我们也有它的 Jacobi 矩阵:

$$\mathrm{D}f:=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{D}(u_1,\cdots,u_n)}{\mathrm{D}(x_1,\cdots,x_n)} & \frac{\mathrm{D}(u_1,\cdots,u_n)}{\mathrm{D}(y_1,\cdots,y_n)}\\ \\ \frac{\mathrm{D}(v_1,\cdots,v_n)}{\mathrm{D}(x_1,\cdots,x_n)} & \frac{\mathrm{D}(v_1,\cdots,v_n)}{\mathrm{D}(y_1,\cdots,y_n)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial y_n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} & \frac{\partial u_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial y_n}\\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial x_n} & \frac{\partial v_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial y_n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial v_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_n}{\partial x_n} & \frac{\partial v_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial v_n}{\partial y_n}\end{pmatrix}$$

Df 是一个实线性变换, 我们将说明当 f 复可微 (等价于满足高维 C-R 方程) 的时候 Df 是复线性的.

我们先做一些线性代数的准备, $\mathbb{C}^n$ 可看成 $\mathbb{R}^{2n}$, 因此复线性变换能对应一个实线性变换:

$$\begin{aligned}\iota:\mathbb{C}^{n\times n}&\hookrightarrow\mathbb{R}^{2n\times 2n}\\ A+\sqrt{-1}B&\mapsto\begin{pmatrix}A & -B\\ B & A\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1.3}$$

特别地, 数乘一个复数 $w=p+\sqrt{-1}q$ (记为 λ_w) 对应的矩阵为

$$\lambda_w\mapsto\begin{pmatrix}pI_n & -qI_n\\ qI_n & pI_n\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}I_n & \\ & I_n\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix} & -I_n\\ I_n & \end{pmatrix}=:pI_{2n}+qJ$$

反过来, 一个 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的线性变换 φ 什么时候是复线性的呢? 将复线性的定义转化为实的语言即为:

$$\varphi(\lambda_w(v))=\lambda_w(\varphi(v)),\quad\forall\, v\in\mathbb{R}^{2n},\, w\in\mathbb{C}.$$

由 φ 实线性, 实际上只需验证:

$$\varphi(\lambda_{\sqrt{-1}}(v)) = \lambda_{\sqrt{-1}}(\varphi(v)), \quad \forall v \in \mathbb{R}^{2n}.$$

写成矩阵形式即要求 φ 对应的矩阵 M_φ 满足:

$$M_\varphi \circ J = J \circ M_\varphi. \tag{1.4}$$

设 $M_\varphi = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$, 其中 $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 则

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & -I_n \\ I_n & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -I_n \\ I_n & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A = D \\ B = -C \end{cases}.$$

定理 1.2.1 (复可微的含义)**.** *设 f 是 $\mathbb{C}^n$ 到 $\mathbb{C}^n$ 的连续映射, f 作为 $\mathbb{R}^{2n}$ 到 $\mathbb{R}^{2n}$ 的映射是光滑的, 则 f 复线性当且仅当其微分 $\mathrm{D}f$ 是复线性的.*

证明. 由前文的讨论知 $\mathrm{D}f$ 复线性当且仅当它满足

$$\mathrm{D}f \circ J = J \circ \mathrm{D}f \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{D}(u_1, \cdots, u_n)}{\mathrm{D}(x_1, \cdots, x_n)} = \dfrac{\mathrm{D}(v_1, \cdots, v_n)}{\mathrm{D}(y_1, \cdots, y_n)} \\ \dfrac{\mathrm{D}(v_1, \cdots, v_n)}{\mathrm{D}(x_1, \cdots, x_n)} = -\dfrac{\mathrm{D}(u_1, \cdots, u_n)}{\mathrm{D}(y_1, \cdots, y_n)} \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{D}f\text{满足 C-R 方程}$$

□

注. *由此可以看出复函数的全纯性确实比光滑性更强, 它要求函数的实 Jacobian 有对称性 (1.4).*

1.2.3 复导数存在与复线性

回到 1 维情形, 复函数 $w = f(z)$ 在点 z 处的定义为

$$f'(z) := \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{1.5}$$

现假设 f 光滑 (不一定全纯), 则在点 $z = x + \sqrt{-1}y$ 处有 (1.2) 成立, 观察到在 (1.2) 两侧乘以行向量 $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}$ 能得到

$$\Delta f = \Delta u + \sqrt{-1}\Delta v = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} \frac{\mathrm{D}(u, v)}{\mathrm{D}(x, y)} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$$

为了配出导数定义式 (1.5) 的除法我们需要存一个复数 $w = p + \sqrt{-1}q$ 使得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} \frac{\mathrm{D}(u, v)}{\mathrm{D}(x, y)} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} &= w \cdot \Delta z = (p + \sqrt{-1}q)(\Delta x + \sqrt{-1}\Delta y) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因此
$$\begin{pmatrix}1 & \sqrt{-1}\end{pmatrix}\frac{\mathrm{D}(u,v)}{\mathrm{D}(x,y)} = \begin{pmatrix}1 & \sqrt{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{-1}\end{pmatrix}$$
因为此时
$$\begin{pmatrix}1 & \sqrt{-1}\end{pmatrix}J = \begin{pmatrix}1 & \sqrt{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & -1\\ 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{-1} & -1\end{pmatrix} = \sqrt{-1}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{-1}\end{pmatrix}$$
所以
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{-1}\end{pmatrix}\frac{\mathrm{D}(u,v)}{\mathrm{D}(x,y)}J &= \begin{pmatrix}1 & \sqrt{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{-1}\end{pmatrix}J\\ &= \sqrt{-1}\cdot\begin{pmatrix}1 & \sqrt{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{-1}\end{pmatrix}\\ &= \sqrt{-1}\cdot\begin{pmatrix}1 & \sqrt{-1}\end{pmatrix}\frac{\mathrm{D}(u,v)}{\mathrm{D}(x,y)}J\\ &= \begin{pmatrix}1 & \sqrt{-1}\end{pmatrix}J\frac{\mathrm{D}(u,v)}{\mathrm{D}(x,y)}\end{aligned}$$
所以 Jacobian 需要满足
$$\frac{\mathrm{D}(u,v)}{\mathrm{D}(x,y)}J = J\frac{\mathrm{D}(u,v)}{\mathrm{D}(x,y)}$$
这就与前面的复线性联系上了.

注. *或许可以直接用*
$$\begin{pmatrix}1 & \sqrt{-1}\end{pmatrix}\frac{\mathrm{D}(u,v)}{\mathrm{D}(x,y)} = \begin{pmatrix}1 & \sqrt{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{-1}\end{pmatrix} = (p+\sqrt{-1}q)\cdot\begin{pmatrix}1 & \sqrt{-1}\end{pmatrix}$$
说明 $\frac{\mathrm{D}(u,v)}{\mathrm{D}(x,y)}$ *是复线性的?*

1.2.4 全纯部分与反全纯部分

前面我们考虑了 $\mathbb{C}^n$ 到 $\mathbb{R}^{2n}$ 的嵌入 ι (详见 (1.3)), 实 $2n$ 阶矩阵 $M \in \operatorname{Im}\iota$ 当且仅当 $MJ = JM$. 现在若 $MJ = -JM$, 可以算出 M 形如 $\begin{pmatrix}A & B\\ B & -A\end{pmatrix}$, 定义
$$\begin{aligned}\bar{\iota}: \mathbb{C}^{n\times n} &\hookrightarrow \mathbb{R}^{2n\times 2n}\\ A+\sqrt{-1}B &\mapsto \begin{pmatrix}A & B\\ B & -A\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1.6}$$

命题 1.2.2. *$\mathbb{R}^{2n\times 2n} = \operatorname{Im}\iota \oplus \operatorname{Im}\bar{\iota}$, 分别记 $\mathbb{R}^{2n\times 2n}$ 到两个分量的投影为 ∂、$\bar{\partial}$, (我想把它们分别称为全纯部分和反全纯部分)*

证明. $\operatorname{Im}\iota \cap \operatorname{Im}\bar{\iota} = \emptyset$ 显然, 仅需证 $\mathbb{R}^{2n\times 2n} = \operatorname{Im}\iota + \operatorname{Im}\bar{\iota}$, 当然可以待定系数

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & -B_1 \\ B_1 & A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ B_2 & -A_2 \end{pmatrix}$$

解出 A_1, B_1, A_2, B_2. 下面用 J 给出一个具体表达式, 设 $M = \partial M + \bar{\partial} M$, 则

$$JMJ = J\partial MJ + J\bar{\partial}MJ = -\partial M + \bar{\partial}M$$

因此

$$\begin{aligned} \partial M &= \frac{1}{2}(M - JMJ) \\ \bar{\partial} M &= \frac{1}{2}(M + JMJ) \end{aligned} \tag{1.7}$$

□

注. 最后算出来的表达式和 (1.1) 很像.

注. 一般复光滑函数的实 Jacobian 也可以分解成这两部分, 这与复几何的 $T_{\mathbb{R}}X \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X$ 有没有联系?

Part II

杂题集萃

Part III

易错知识