Contents

Chapter 1

高等代数

1.1 线性空间、对偶空间

1.1.1 对偶空间

1.1.2 协变张量与反变张量

“The general formulation of covariance and contravariance refers to how the components of a coordinate vector transform under a change of basis.” 协变张量与反变张量描述了向量的坐标分量是如何随基向量的变化而变化的.

设线性空间 V 有两组基:

$$\begin{aligned} \{e_i\}: &\quad e_1, \ldots, e_n \\ \{e'_i\}: &\quad e'{}_1, \ldots, e'{}_n \end{aligned}$$

它们的对偶基分别为

$$\begin{aligned} \{e^*{}_i\}: &\quad e^*{}_1, \ldots, e{*}_n \\ \{e^*{}'_i\}: &\quad e^*{}'_1, \ldots, e^*{}'_n \end{aligned}$$

并且 $\{e_i\}$ 到 $\{e'_i\}$ 的过渡矩阵为 $P = (a_{ij})$, 即

$$(e'{}_1, \ldots, e'{}_n) = (e_1, \ldots, e_n)P = (e_1, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

反变张量: 设 v 是 V 中的某个向量, 它在基 $\{e_i\}$, $\{e'{}_i\}$ 下的坐标 $v[e_i]$, $v[e'{}_i]$ 分别为 $\{X_i\}$ 和 $\{X'{}_i\}$, 即

$$v = \left(e_1, \ldots, e_n\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(e'{}_1, \ldots, e'{}_n\right) \begin{pmatrix} x'{}_1 \\ \vdots \\ x'{}_n \end{pmatrix}$$

则由

$$v = \left(e'_1, \ldots, e'_n\right) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \left(e_1, \ldots, e_n\right) P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

知

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

从表达式可以看出 v 坐标分量的变化与基向量的变化是相反的, 也可以这么理解: v 本就是不随基底改变的一个固有对象, 为了保持不变, 它坐标分量的变化必须与基底变化相反, 才能抵消基变换带来的影响, 用式子表示即为

$$\begin{aligned} v &= \left(e_1, \ldots, e_n\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \left(e_1, \ldots, e_n\right) P P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \left(e'_1, \ldots, e'_n\right) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

共变张量: 设 f 是对偶空间 V^* 中的元素, 即 f 是 V 上的线性函数, $\{y_i\} = \{f[e_i]\}$, $\{y'_i\} = \{f[e'_i]\}$ 为它在这两组基下的坐标, 即

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^{n} y_i e_i^* = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i^* \\ &= \sum_{i=1}^{n} y'_i {e^*}'_i = \sum_{i=1}^{n} f(e'_i) {e^*}'_i \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \left(y'_1, \ldots, y'_n\right) &= \left(f(e'_1), \ldots, f(e'_n)\right) \\ &= f\left(\left(e'_1, \ldots, e'_n\right)\right) \\ &= f\left(\left(e_1, \ldots, e_n\right) P\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)\, P \\
&= \big(y_1, \ldots, y_n\big)\, P
\end{aligned}
$$

所以 f 的坐标的变化与基底的变化保持一致.

1.2 线性映射、线性变换的矩阵表示

设线性映射 $\mathcal{A}: V \to W$, $(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^m)$ 是 V 的一组基, $(\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n)$ 是 W 的一组基, 那么 $\mathcal{A}$ 在这两组基下的矩阵为,

$$
\mathcal{A}(\xi^1, \ldots, \xi^m) = (\mathcal{A}\xi^1, \ldots, \mathcal{A}\xi^m) = (\eta^1, \ldots, \eta^n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = (\eta^1, \ldots, \eta^n) A
$$

设 v 是 V 中的向量, 并设

$$
v = x_1 \xi^1 + \cdots + x_m \xi^m = (\xi^1, \ldots, \xi^m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = (\xi^1, \ldots, \xi^m) X
$$

其中 X 是 v 在基 $(\xi^1, \ldots, \xi^m)$ 下的坐标, 那么由于

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}v &= \mathcal{A}(x_1 \xi^1 + \cdots + x_m \xi^m) \\
&= \mathcal{A}(\xi^1, \ldots, \xi^m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\
&= (\mathcal{A}\xi^1, \ldots, \mathcal{A}\xi^m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\
&= (\eta^1, \ldots, \eta^n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\
&= (\eta^1, \ldots, \eta^n) AX
\end{aligned}
$$

$\mathcal{A}v$ 在基 $(\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n)$ 下的坐标为 AX.

1.3 矩阵迹的几何解释

给定一个矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 在高代中我们定义了矩阵的迹为:

$$
\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}
$$

下面我们从比较几何的角度给出矩阵迹的一个定义, 并用这个定义重新证明关于迹的一些性质.

1.3.1 用矩阵定义的向量场

设矩阵 A 如上, 定义 $\mathbb{R}^n$ 上的向量场 $F_A(X) := AX, \forall X \in \mathbb{R}^n$. 则可证明向量场 F_A 的散度 $\mathrm{div}(F_A)$ 是常数, 且经计算恰好是我们所熟知的 A 的迹, 我们就把这个值作为矩阵迹的定义, 即

$$\mathrm{div}F_A := \mathrm{tr}A$$

注. 矩阵 A 对应某个线性变换 $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, 从函数角度来看, $X \mapsto AX$ 是一个从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的向量值函数. 因为每个 $\mathbb{R}^n$ 上的函数都可视作 $\mathbb{R}^n$ 的向量丛的截面, 也即 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑向量场, 这也解释了为什么这么定义 F_A.

注. 我们可以从多变量微积分的角度验证新定义的合理性,

$$F_A(x^1, \ldots, x^n) = (\sum_{i=1}^n a_{1i}x^i, \ldots, \sum_{i=1}^n a_{ni}x^i).$$

则

$$(\mathrm{div}F_A)(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_A^i}{\partial x^i}\bigg|_p = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

结果是一个常数且取值就是我们熟知的迹.

因为上述求散度计算中仍有取主对角线元素相加的操作, 形式上和最原始的定义没有本质区别, 所以以下面用微分形式的语言重新计算散度.

取 $\mathbb{R}^n$ 中的平坦度量, 并取自然坐标系 $(x^1, \ldots, x^n)$, 则体积形式为

$$\Omega = \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

向量场 F_A 的表达式为

$$F_A(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{i,\,j} a_{ij}x^j \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{(x^1, \ldots, x^n)}$$

向量场 F_A 的散度定义为

$$(\mathrm{div}F_A)\Omega = L_{F_A}\Omega \tag{1.1}$$

因为

$$L_{F_A}\mathrm{d}x^i = \mathrm{d}L_{F_A}x^i = \mathrm{d}(F_A x^i) = \mathrm{d}\sum_{k=1}^n a_{ik}x^k = \sum_{k=1}^n a_{ik}\mathrm{d}x^k$$

所以

$$\begin{aligned} L_{F_A}\Omega &= L_{F_A}(\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge L_{F_A}\mathrm{d}x^i \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\ &= \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}\mathrm{d}x^k\right) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right) \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right) \Omega
\end{aligned}
$$

经过一通计算我们再次验证了这么定义矩阵迹的合理性, 更进一步地, 我们可以用外微分的语言重新证明迹的几个性质, 比如, $\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}BA$.

1.3.2 迹的性质

我们知道关于李导数和李括号有等式

$$[L_X, L_Y] = L_{[X,Y]}, \quad \forall X,\, Y \in C^\infty(\mathbb{R}^n, T\mathbb{R}^n)$$

设矩阵 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, 对应的向量场为 F_A, F_B, 因为

$$\mathrm{ent}_{ij}[A, B] = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} - b_{ik}a_{kj}$$

所以

$$
\begin{aligned}
[F_A, F_B] &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} F_A^j \frac{\partial F_B^i}{\partial x^j} - F_B^j \frac{\partial F_A^i}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ij}x^k - b_{jk}a_{ij}x^k\right) \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{jk} - a_{ij}b_{jk}\right) x^k\right) \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{ent}_{ik}[B, A]x^k\right) \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= F_{[B,A]}
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}(F_{[B,A]})\Omega &= L_{F_{[B,A]}}\Omega \\
&= L_{[F_A, F_B]}\Omega \\
&= [L_{F_A}, L_{F_B}]\Omega \\
&= (L_{F_A}L_{F_B} - L_{F_B}L_{F_A})\Omega \\
&= (\mathrm{div}F_A)(\mathrm{div}F_B)\Omega - (\mathrm{div}F_B)(\mathrm{div}F_A)\Omega \\
&= 0
\end{aligned}
$$

从而推出

$$\mathrm{tr}(BA-AB)=\mathrm{tr}[B,A]=\mathrm{div}F_{[B,A]}=0$$

也即

$$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$$

若 A, B 不是 n 阶方阵, 不妨设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times m}$, 其中 $m<n$, 令 $A_1=\begin{pmatrix}A_{m\times n}\\ O_{(n-m)\times n}\end{pmatrix}$, $B_1=\left(B_{n\times m},\,O_{n\times(n-m)}\right)$ 于是有

$$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(A_1B_1)=\mathrm{tr}(B_1A_1)=\mathrm{tr}(BA)$$

1.4 外代数与 Lie 代数

设 V 是 n 维线性空间, 我们有 V 对应的外代数 $(E(V),\wedge)$, 也即

$$E(V)=\bigoplus_{k=1}^{n}\bigwedge^{k}V$$

在 $E(V)$ 中我们可以定义"微分" d, 它满足:

- $\mathrm{d}\in\mathrm{End}(\bigwedge^k V,\bigwedge^{k+1}V),\quad k=0,1,\ldots,n-1.$
- $\mathrm{d}(u_1\wedge\cdots\wedge u_s)=\sum\limits_{i=1}^{s}(-1)^{i-1}u_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_i\wedge\cdots\wedge u_s.$
- $\mathrm{dd}u=0\quad\forall u\in V.$

实际上我们只需定义线性映射

$$\begin{aligned}\mathrm{d}:V&\to\bigwedge^2 V\\ v&\mapsto\mathrm{d}v\end{aligned}$$

使其满足

- $\mathrm{d}(u\wedge v)=\mathrm{d}u\wedge v-u\wedge\mathrm{d}v$

再用线性性和外积使其扩充为 $E(V)$ 到自身的线性映射, 这样再加上 $\mathrm{d}^2=0$ 就可以定义一个微分运算了.

接着上面的讨论, 我们考虑线性空间的对偶:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^*:\bigwedge^2 V^*&\to V^*\\ u\wedge v&\mapsto\mathrm{d}(u\wedge v)=:[u,v]\end{aligned}$$

我们有意把 $\mathrm{d}(u\wedge v)$ 记为 $[u,v]$ 是有考量的, 因为我们有如下定理:

定理 1.4.1. d 满足 $\mathrm{d}^2=0$ 当且仅当 d^* 满足 Jacobi 恒等式, 此时 $(\mathfrak{g}=V,[\cdot,\cdot])$ 构成一个 Lie 代数

证明. 对 $\forall u \in V$, 设

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}u &= \sum_{i=1}^{r} v_i \wedge w_i \\
\mathrm{d}v_i &= \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \wedge b_{ij} \\
\mathrm{d}w_i &= \sum_{k=1}^{t} c_{ik} \wedge d_{ik}
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
&[[\alpha,\beta],\gamma](u) \\
=&\mathrm{d}^*(\mathrm{d}^*(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma)(u) \\
=&(\mathrm{d}^*(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma)(\mathrm{d}u) \\
=&(\mathrm{d}^*(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma)(\sum_{i=1}^{r} v_i\wedge w_i) \\
=&\sum_{i=1}^{r}(\mathrm{d}^*(\alpha\wedge\beta)(v_i)\gamma(w_i)-(\mathrm{d}^*(\alpha\wedge\beta))(w_i)\gamma(v_i)) \\
=&\sum_{i=1}^{r}((\alpha\wedge\beta)(\mathrm{d}v_i)\gamma(w_i)-(\alpha\wedge\beta)(\mathrm{d}w_i)\gamma(v_i)) \\
=&\sum_{i=1}^{r}\left((\alpha\wedge\beta)\left(\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\wedge b_{ij}\right)\gamma(w_i)-(\alpha\wedge\beta)\left(\sum_{k=1}^{t} c_{ik}\wedge d_{ik}\right)\gamma(v_i)\right) \\
=&\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\alpha(a_{ij})\beta(b_{ij})\gamma(w_i)-\alpha(b_{ij})\beta(a_{ij})\gamma(w_i) \\
&-\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{t}\alpha(c_{ik})\beta(d_{ik})\gamma(v_i)-\alpha(d_{ik})\beta(c_{ik})\gamma(v_i)
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
&([[\alpha,\beta],\gamma]+[[\beta,\gamma],\alpha]+[[\gamma,\alpha],\beta])(u) \\
=&\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\alpha(a_{ij})\beta(b_{ij})\gamma(w_i)-\alpha(b_{ij})\beta(a_{ij})\gamma(w_i)+\beta(a_{ij})\gamma(b_{ij})\alpha(w_i) \\
&\quad-\beta(b_{ij})\gamma(a_{ij})\alpha(w_i)+\gamma(a_{ij})\alpha(b_{ij})\beta(w_i)-\gamma(b_{ij})\alpha(a_{ij})\beta(w_i) \\
&-\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{t}\alpha(c_{ik})\beta(d_{ik})\gamma(v_i)-\alpha(d_{ik})\beta(c_{ik})\gamma(v_i)+\beta(c_{ik})\gamma(d_{ik})\alpha(v_i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\beta(d_{ik})\gamma(c_{ik})\alpha(v_i)+\gamma(c_{ik})\alpha(d_{ik})\beta(v_i)-\gamma(d_{ik})\alpha(c_{ik})\beta(v_i)\\
=&\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\alpha\wedge\beta\wedge\gamma)(a_{ij}\wedge b_{ij}\wedge w_i)-\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{t}(\alpha\wedge\beta\wedge\gamma)(c_{ik}\wedge d_{ik}\wedge v_i)\\
=&(\alpha\wedge\beta\wedge\gamma)\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}a_{ij}\wedge b_{ij}\wedge w_i-\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{t}c_{ik}\wedge d_{ik}\wedge v_i\right)\\
=&(\alpha\wedge\beta\wedge\gamma)(\mathrm{d}^2u)
\end{aligned}
$$

因此对 $\forall\, u\in V$,

$$
\begin{gathered}
\mathrm{d}^2u=0\\
\Longleftrightarrow\left([[\alpha,\beta],\gamma]+[[\beta,\gamma],\alpha]+[[\gamma,\alpha],\beta]\right)(u)=0
\end{gathered}
$$

从而定理得证. $\square$

定理 1.4.1 表明一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 可对应一个带有微分映射的外代数 $E(V)$, 而在 $E(V)$ 上我们可以做上同调, 这个上同调就叫 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的上同调.

Chapter 2

黎曼几何

2.1 仿射联络

在局部坐标 $\left(U;x^i\right)$ 下有

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma_{ji}^k\frac{\partial}{\partial x^k}$$

其中 Γ_{ji}^k 称为 D 在局部坐标下的**联络系数**.

我们进一步定义任意 (r,s) 型张量的协变导数, 首先定义 1 阶微分形式 α 的协变导数:

$$\begin{aligned}(D_X\alpha)(Y)&=C_1^1\left((D_X\alpha)\otimes Y\right)\\&=C_1^1\left(D_X(\alpha\otimes Y)-\alpha\otimes(D_XY)\right)\\&=X(\alpha(Y))-\alpha(D_XY)\end{aligned}$$

特别地,

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\mathrm{d}x^j=-\Gamma_{ki}^j\mathrm{d}x^k$$

对于一般的 (r,s) 型张量 $\tau\in\mathcal{T}_s^r(M)$, 定义它沿向量场 X 的协变导数为

$$\begin{aligned}&(D_X\tau)(\alpha^1,\dots,\alpha^r,X_1,\dots,X_s)\\=&X\left(\tau(\alpha^1,\dots,\alpha^r,X_1,\dots,X_s)\right)\\&-\sum_{a=1}^r\tau\left(\alpha^1,\dots,D_X\alpha^a,\dots,\alpha^r,X_1,\dots,X_s\right)\\&-\sum_{b=1}^s\tau\left(\alpha^1,\dots,\alpha^r,X_1,\dots,D_XX^b,\dots,X_s\right)\end{aligned}$$

定义一个 (r,s) 型张量场 τ 沿向量场 X 的协变微分为

$$(D\tau)(\alpha^1,\dots,\alpha^r,X_1,\dots,X_s,X):=(D_X\tau)(\alpha^1,\dots,\alpha^r,X_1,\dots,X_s)$$

可以看到 D 把 τ 变为一个 $(r,s+1)$ 型张量. 在局部坐标 $\left(U;x^i\right)$ 下的分量表达式为

$$\begin{aligned}\tau^{i_1\cdots i_r,i}_{j_1\cdots j_s}=&\frac{\partial\tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}}{\partial x^i}+\sum_{a=1}^{r}\tau^{i_1\cdots i_{a-1}ki_{a+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\Gamma^{i_a}_{ki}\\&-\sum_{b=1}^{s}\tau^{i_1\cdots i_r}_{j_i\cdots j_{b-1}kj_{b+1}\cdots j_s}\Gamma^{k}_{j_bi}\end{aligned}$$

2.2 黎曼联络

定义挠率张量 T 为

$$T(X,Y)=D_XY-D_XY-[X,Y]$$

在局部坐标 $\left(U;x^i\right)$ 下 T 的表达式为

$$T=\left(\Gamma^k_{ji}-\Gamma^k_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\otimes\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j$$

若由联络定义的挠率张量 T 恒等于零, 则称该联络是**无挠联络**. 由局部坐标表达式可知无挠联络的联络系数满足 $\Gamma^k_{ji}=\Gamma^k_{ij}$.

若联络 D 和度量 g 满足 g 的协变微分 $Dg\equiv 0$, 则称联络和度量是**相容的**. 该条件等价于 $(D_Zg)(X,Y)=0,\ \forall X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$ 因为

$$(D_Zg)(X,Y)=Z\left\langle X,Y\right\rangle-\left\langle D_ZX,Y\right\rangle-\left\langle X,D_ZY\right\rangle$$

所以联络和度量相容当且仅当

$$Z\left\langle X,Y\right\rangle=\left\langle D_ZX,Y\right\rangle+\left\langle X,D_ZY\right\rangle$$

2.2.1 黎曼几何基本定理

定理 2.2.1. *设 (M,g) 是黎曼流形, 则 M 上存在唯一一个与 g 相容的无挠联络 D, 我们称之为***黎曼联络***.*

定理 2.2.2 (Koszul 公式)**.** *若联络 D 满足无挠且与度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 相容, 则有公式*

$$\begin{aligned}2\left\langle D_XY,Z\right\rangle=&X\left\langle Y,Z\right\rangle+Y\left\langle X,Z\right\rangle-Z\left\langle X,Y\right\rangle\\&+\left\langle [X,Y],Z\right\rangle-\left\langle X,[Y,Z]\right\rangle-\left\langle Y,[X,Z]\right\rangle\end{aligned}\tag{2.1}$$

利用 Koszul 公式可以很容易证明黎曼几何基本定理.

2.3 黎曼联络系数的坐标变换

$$\Gamma_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{pq}^r \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^r} + \frac{\partial^2 \tilde{x}^r}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^r}$$

因为

$$\begin{aligned}
0 =& \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^r}\frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^j}\right) \\
=& \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^r}\right)\frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^j} + \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^r}\frac{\partial^2 \tilde{x}^r}{\partial x^i \partial x^j} \\
=& \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^s}\left(\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^r}\right)\frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^j} + \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^r}\frac{\partial^2 \tilde{x}^r}{\partial x^i \partial x^j} \\
=& \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^k}{\partial \tilde{x}^r \partial \tilde{x}^s}\frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^j} + \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^r}\frac{\partial^2 \tilde{x}^r}{\partial x^i \partial x^j}
\end{aligned}$$

故

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial \tilde{x}^r \partial \tilde{x}^s}\frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^i}\frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^j} = -\frac{\partial^2 \tilde{x}^r}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^r}\Big(\text{一般而言} \neq 0\Big)$$

2.4 由联络定义的各种微分算子

- **散度算子** div: $\mathrm{div}(X) = C_1^1(DX)$

$$(\mathrm{div}X)|_U = X_{,i}^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + X^k \Gamma_{ki}^i = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{G}X^i).$$

- **梯度算子** ∇: $\langle \nabla f, X\rangle := \mathrm{d}f(X) = X(f)$

$$(\nabla f)|_U = f^i \frac{\partial}{\partial x^i} = f_j g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i} = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

- **Laplace 算子** Δ: $\Delta := \mathrm{div} \circ \nabla$

$$(\Delta f)|_U = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{G}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)$$

- **函数的 Hessian 算子** $\mathrm{Hess}(f) := D(Df) = D(\mathrm{d}f)$

$$(\mathrm{Hess}(f))(X,Y) = Y(X(f)) - (D_Y X)(f)$$

  分量的局部坐标表达式为

$$\mathrm{Hess}(f)_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} = f_{i,j}$$

Hessian 算子与 Laplace 算子的关系是

$$\Delta f = \mathrm{tr}_g(\mathrm{Hess}(f)) = \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}(f))$$

用分量表示即

$$\Delta f = g^{ij} f_{i,j}$$

- **Hodge 星 $*$ 算子**: 设 $\omega \in A^r(M)$ 且

$$\omega|_U = \frac{1}{r!}\omega_{i_1}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}$$

命

$$(*\omega)|_U = \frac{\sqrt{G}}{r!(m-r)!}\delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_m}\omega^{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_m}$$

- **余微分算子** $\delta := (-1)^{mr+1} * \circ \mathrm{d} \circ * = \mathrm{d}^*$

$$(\mathrm{d}\varphi, \psi) = (\varphi, \delta\psi)$$

- **Hodge-Laplace 算子** $\bar{\Delta} := \mathrm{d} \circ \delta + \delta \circ \mathrm{d}$

$$\bar{\Delta} f = \Delta f$$

2.5 不同双曲模型之间的等距同构

2.5.1 三种双曲模型

- Poincare 上半平面模型 $\mathbb{H}^n := \left\{ \left(x^1, \ldots, x^n\right) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x^n > 0 \right\}$

其上的度量定义为

$$h = \frac{(\mathrm{d}x^1)^2 + \cdots + (\mathrm{d}x^n)^2}{(x^n)^2}$$

- Poincare 球模型 $D^n := \left\{ \left(y^1, \ldots, y^n\right) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, |y| < 1 \right\}$

其上的度量定义为

$$g_{-1} = \frac{(\mathrm{d}y^1)^2 + \cdots + (\mathrm{d}y^n)^2}{(1-|y|^2)^2}$$

- Minkowski 模型: $\mathbb{R}^{n+1}$ 上定义 Lorentz 内积 $l = \langle\cdot,\cdot\rangle$

$$l(x,y) = \langle x, y\rangle_1 = \sum_{i=1}^n x^i y^i - x^{n+1}y^{n+1}, \quad \forall x,\, y \in \mathbb{R}^n,$$

考虑 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中双叶双曲面的上半叶

$$M^n := \left\{ z = \left(z^1, \ldots, z^{n+1}\right) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \langle z, z\rangle = -1 \text{ 且 } z^{n+1} > 0 \right\},$$

其上的度量定义为嵌入映射 i 诱导的拉回度量 $m = i^* l$.

2.5.2 双曲模型间的等距同构

- M^n 与 D^n 之间: 由球极投影给出

$$\begin{aligned}\varphi : M^n &\to D^n \\ \left(z^1, \ldots, z^{n+1}\right) &\mapsto \left(y^1, \ldots, y^n\right) = \left(\frac{z^1}{1+z^{n+1}}, \ldots, \frac{z^n}{1+z^{n+1}}\right) \\ \varphi^{-1} : D^n &\to M^n \\ \left(y^1, \ldots, y^n\right) &\mapsto \left(z^1, \ldots, z^{n+1}\right) = \left(\frac{2y^1}{1-|y|^2} \cdots \frac{2y^n}{1-|y|^2}, \frac{1+|y|^2}{1-|y|^2}\right)\end{aligned}$$

- $\mathbb{H}^n$ 与 D^n 之间: 由分式线性变换的推广, Cayley 变换给出

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{H}^n &\to D^n \\ \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \ni (\vec{x}, x^n) &\mapsto (\vec{y}, y^n) = \left(\frac{2\vec{x}}{|\vec{x}|^2 + (x^n+1)^2}, \frac{|\vec{x}|^2 + (x^n)^2 - 1}{|\vec{x}|^2 + (x^n+1)^2}\right) \\ \psi^{-1} : D^n &\to \mathbb{H}^n \\ \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \ni (\vec{y}, y^n) &\mapsto (\vec{x}, x^n) = \left(\frac{2\vec{y}}{|\vec{y}|^2 + (y^n-1)^2}, \frac{1 - |\vec{y}|^2 - (y^n)^2}{|\vec{y}|^2 + (y^n-1)^2}\right)\end{aligned}$$

可以试着用它们之间的同构给出 $\mathrm{SO}(2,1)$ 到 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 的显式同构.

2.6 黎曼曲率张量的对称性

设 V 为 n 维线性空间, 若 $R \in (V^*)^{\otimes 4}$ 且满足:

1. $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W) = -R(X,Y,W,Z) = R(Z,W,X,Y)$
2. $R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0$

对 $\forall X, Y, Z, W \in V$ 均成立. 则称 R 为代数黎曼曲率张量, 全体代数黎曼曲率张量构成的线性空间记为 $\mathcal{R}(V^*)$.

我们分别记 $\Sigma^n(V^*)$, $\bigwedge^n(V^*)$ 为对偶空间 V^* 的对称张量积和反对称张量积, 则由第一条可知 $\mathcal{R}(V^*) \subset \Sigma^2(\bigwedge^2 V^*)$. 容易看出 $\bigwedge^4 V^*$ 也为 $\Sigma^2(\bigwedge^2 V^*)$ 的一个子空间, 而且若在 V 上有度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle_g$, 由第二条可推出

$$\Sigma^2(\textstyle\bigwedge^2 V^*) = \mathcal{R}(V^*) \oplus \bigwedge^4 V^*$$

直和项互相正交.

我们分两步说明上述论断. 首先对 $\forall R \in \mathcal{R}(V^*)$, $S \in \bigwedge^4 V^*$, 设 e_i 为 V 的一组标准正交基, 则

$$\begin{aligned}&\langle R, S\rangle_g \\ =& \sum_{i,j,k,l} R(e_i,e_j,e_k,e_l) S(e_i,e_j,e_k,e_l)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{3}\sum_{i,j,k,l}\left(R(e_i,e_j,e_k,e_l)+R(e_j,e_k,e_i,e_l)+R(e_k,e_i,e_j,e_l)\right)S(e_i,e_j,e_k,e_l)\\
&=0
\end{aligned}
$$

其次, 对每一个 $T\in\Sigma^2(\bigwedge^2 V^*)\subset(V^*)^{\otimes 4}$, 我们原本就有一个将一般 (0,4) 型张量化为反对称张量的算子 $\mathcal{A}$, 在附加的对称性下, 反对称算子在 $\Sigma^2(\bigwedge^2 V^*)$ 上的作用可以写为

$$
\mathcal{A}(T)(X,Y,Z,W)=\frac{1}{3}\left(T(X,Y,Z,W)+T(Y,Z,X,W)+T(Z,X,Y,W)\right)
$$

可以验证这样定义的 $\mathcal{A}(T)$ 确实为一个反对称张量:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}(T)(Y,Z,W,X)\\
=&\frac{1}{3}\left(T(Y,Z,W,X)+T(Z,W,Y,X)+T(W,Y,Z,X)\right)\\
=&-\frac{1}{3}\left(T(X,Y,Z,W)+T(Y,Z,X,W)+T(Z,X,Y,W)\right)\\
=&-\mathcal{A}(T)(X,Y,Z,W)
\end{aligned}
$$

注. 因为 $S_4=\langle(12),(1234)\rangle$ 而 $(12),(1234)$ 在 $\mathcal{A}(T)$ 上的作用均符合反对称张量符号变化规律, 所以 $\mathcal{A}(T)$ 是反对称张量.

得到反对称张量的分量后就可以很容易得到代数黎曼曲率张量的分量了:

$$
T_R:=T-\mathcal{A}(T)
$$

可以验证 $T_R\in\mathcal{R}(V^*)$

$$
\begin{aligned}
&T_R(X,Y,Z,W)+T_R(Y,Z,X,W)+T_R(Z,X,Y,W)\\
=&T(X,Y,Z,W)+T(Y,Z,X,W)+T(Z,X,Y,W)-3\mathcal{A}(T)\\
=&0
\end{aligned}
$$

命题 2.6.1. *n 维线性空间 V 上的代数黎曼曲率张量的维数为 $\dfrac{n^2(n^2-1)}{12}$*

证明. 因为

$$
\dim\mathcal{R}(V^*)=\dim\Sigma^2(\bigwedge^2 V^*)-\dim\bigwedge^4 V^*
$$

所以

$$
\dim\mathcal{R}(V^*)=\frac{1}{2}\binom{n}{2}\left(\binom{n}{2}-1\right)-\binom{n}{4}=\frac{n^2(n^2-1)}{12}
$$

□

2.7 黎曼几何中的各种曲率

2.7.1 曲率张量

缘起

在协变微分中我们引进记号

$$\nabla Z(X) := \nabla_X Z$$

于是可以考虑多次协变微分是否可换序的问题, 即

$$\nabla^2 Z(X,Y) \stackrel{?}{=} \nabla^2 Z(Y,X)$$

我们仔细地将等号两侧的式子展开

$$\begin{aligned}\nabla^2 Z(X,Y) &= (\nabla_Y \nabla Z)(X)\\ &= \nabla_Y((\nabla Z)(X)) - (\nabla Z)(\nabla_Y X)\\ &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_Y X} Z\end{aligned}$$

若该仿射联络是无挠联络, 则有

$$\begin{aligned}&\nabla^2 Z(X,Y) - \nabla^2 Z(Y,X)\\ =&\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_Y X - \nabla_X Y} Z\\ =&\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y,X]} Z\end{aligned}$$

受此启发, 我们定义曲率张量 $\mathcal{R}(\cdot,\cdot)\cdot : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ 为:

定义 2.7.1. $\mathcal{R}(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$

Chapter 3

复分析、复几何

3.1 实线性空间与复线性空间

流形 $\mathbb{C}^n$ 中每点的坐标为 $(z^1,\dots,z^n)$, 记 $z^j = x^j + iy^j$, 于是 $x^1,\dots,x^n$ 和 $y^1,\dots,y^n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的实坐标. 对 $\forall p\in\mathbb{C}^n$, 切空间 $T_p\mathbb{C}^n$ 有一组基 $\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}$, $\frac{\partial}{\partial y^1},\dots,\frac{\partial}{\partial y^n}$; 余切空间 $T_p^*\mathbb{C}$ 有一组基 $\mathrm{d}x^1,\dots,\mathrm{d}x^n$, $\mathrm{d}y^1,\dots,\mathrm{d}y^n$.

定义 $J_p : T_p\mathbb{C}^n \to T_p\mathbb{C}^n$

$$J_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial y^j}, \qquad J_p\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^j}$$

它的对偶变换为 $J_p^* : T_p^*\mathbb{C}^n \to T_p^*\mathbb{C}^n$

$$J_p^*\left(\mathrm{d}x^j\right) = -\mathrm{d}y^j, \qquad J_p^*\left(\mathrm{d}y^j\right) = \mathrm{d}x^j$$

因为 $(J_p)^2 = -\mathrm{id}$, 所以 $(J_p^*)^2 = -\mathrm{id}$, 于是 J_p 和 J_p^* 均可对角化且特征值均为 $\pm i$.

计算可发现 J_p^* 的属于 i 的特征子空间的一组基为 $\mathrm{d}z^1,\dots,\mathrm{d}z^n$, 属于 $-i$ 的特征子空间的一组基为 $\mathrm{d}\bar{z}^1\dots,\mathrm{d}\bar{z}^n$, 其中

$$\mathrm{d}z^j = \mathrm{d}x^j + i\mathrm{d}y^j, \qquad \mathrm{d}\bar{z}^j = \mathrm{d}x^j - i\mathrm{d}y^j$$

于是对应地它的对偶空间 $T_p\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}$ 的属于 i 的特征子空间的一组基为 $\frac{\partial}{\partial z^1},\dots\frac{\partial}{\partial z^n}$, 属于 $-i$ 的特征子空间的一组基为 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1},\dots,\frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}$, 其中

$$\frac{\partial}{\partial z^j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} - i\frac{\partial}{\partial y^j}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} + i\frac{\partial}{\partial y^j}\right)$$

回顾 Cauchy-Riemann 方程: 设 $f = u + iv$ 是全纯函数, 则 $u(x,y), v(x,y)$ 关于 x, y 的偏导数满足:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

代入 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ 可得

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

于是 f 全纯当且仅当 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$, 推广到多元复变量即: $f(z^1, \dots, z^n)$ 是多元全纯函数当且仅当每个 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^j} \equiv 0$.

Chapter 4

Lie 群基础

4.1 Lie 群同态

定理 4.1.1. *设 G, H 为 Lie 群, 且 G 连通, 它们的 Lie 代数分别为 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$. 现有两个 Lie 群同态 $\varphi, \psi : G \to H$, 若 φ, ψ 诱导的 Lie 代数同态 $\varphi_*, \psi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是相同的, 即 $\varphi_* = \psi_*$, 那么 $\varphi = \psi$.*

证明. 设 $\omega_1, \ldots, \omega_n$ 是 $\mathfrak{h}$ 的一组基, 也即 H 上处处线性无关的一组左不变一次微分式. 并分别记 $\pi_1 : G \times H \to G$, $\pi_2 : G \times H \to H$ 为自然投影, 则可验证

$$\left\{\pi_1^*\varphi^*\omega_i - \pi_2^*\omega_i \,\middle|\, i = 1, \ldots, n\right\} = \left\{\pi_1^*\psi^*\omega_i - \pi_2^*\omega_i \,\middle|\, i = 1, \ldots, n\right\}$$

张成的理想都是 $G \times H$ 上的左不变 (暂时不知道有什么用) 微分理想, 且 $\varphi(e) = \psi(e) = e$, 由微分理想的结果再加上 G 是连通的可知 $\varphi = \psi$. $\square$

4.2 Lie 子群

定义 4.2.1. *若 (H, φ) 满足:*

- *H 是一个 Lie 群.*
- *$\varphi : H \to G$ 是微分流形的浸入*
- *$\varphi : H \to G$ 是群同态*

则称 (H, φ) 为 Lie 群 G 的 Lie 子群.

注. *我们可以定义 Lie 子群之间的等价 (就像浸入子流形的等价一样), 并且可以在每个等价类中选取 (H, i) 使得 $H \subset G$ 是 G 的子集 (但 H 的拓扑不一定是 G 的相对拓扑), 含入映射 $i : H \hookrightarrow G$ 是微分流形的浸入. 此时 $\mathfrak{h}$ 也可自然看成 $\mathfrak{g}$ 的子集.*

定理 4.2.2 (Lie 子代数与连通 Lie 子群的一一对应)**.** *设 G 为 Lie 群, 它的 Lie 代数为 $\mathfrak{g}$. 设 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 为 Lie 子代数, 则存在唯一的连通 Lie 子群 H 使得 H 的 Lie 代数就是 $\mathfrak{h}$.*

证明. $\mathfrak{h}$ 对应 G 上一个对合分布 $\mathcal{D}$, 记 (H, φ) 为 $\mathcal{D}$ 的经过单位元 e 的极大积分子流形, 则 (H, φ) 即为所求.

任取 $\sigma \in H$, 则 $(H, l_{\sigma^{-1}} \circ \varphi)$ 仍为 $\mathcal{D}$ 的积分子流形 (因为 $\mathcal{D}$ 左平移不变), 再由 (H, φ) 的极大性, 可以推出 H 是抽象子群.

证明 H 的群结构与微分结构相容 (即 $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau$ 是 $H \times H$ 到 H 的光滑映射) 和 H 的唯一性则需要极大积分子流形的相关结果. □

定理 4.2.3 (闭 Lie 子群与正则子流形的关系)**.** *设 (H, φ) 是 G 的 Lie 子群, 则以下两条*

- *φ 是嵌入, 即 φ 是 H 到 $\varphi(H)$(取关于 G 的相对拓扑) 的同胚.*
- *(H, φ) 是 G 的闭 Lie 子群 ($\varphi(H)$ 是 G 的闭子集).*

是等价的.

证明. 证明暂时没看懂 □

4.3 覆叠映射

若 $\pi : \tilde{M} \to M$ 是连通局部道路联通空间 $\tilde{M}$ 到 M 的覆叠映射, 则 $\tilde{M}$ Hausdorff、第二可数且局部同胚于欧式空间。而且 $\tilde{M}$ 上存在唯一的微分结构使得 π 是光滑且局部同胚映射。

若 G 为 Lie 群, 则存在单连通空间 $\tilde{G}$ 以及覆叠映射 $\pi : \tilde{G} \to G$, 由上述结果可知能在 $\tilde{G}$ 上定义合适的光滑结构, 更进一步地, 能在 $\tilde{G}$ 上定义群结构使得其成为 Lie 群, 且 π 成为 Lie 群同态.

命题 4.3.1 (Lie 群同态与覆叠映射)**.** *设 G 和 H 为连通 Lie 群, 且有 Lie 群同态 $\varphi : G \to H$. 则 φ 为覆叠映射当且仅当切映射 $\varphi_* : G_e \to H_e$ 是线性同构.*

4.4 单连通 Lie 群

定理 4.4.1. *敬请期待.*