数学笔记

BeBop

February 16, 2025

Contents

I 知识整理 **5**

1 微分流形 **7**

1.1 向量丛结构群的约化 7

1.1.1 流形可定向与结构群可约化至 $\mathrm{GL}^+(\mathrm{k},\mathbb{R})$ 8

1.1.2 黎曼度量与结构群可约化至正交群 $O(k)$ 8

1.1.3 复向量丛与近复结构, 与结构群可约化至 $\mathrm{GL}(k,\mathbb{C})$ . . 9

1.2 向量丛分类定理 9

1.2.1 同伦的映射拉回同构的向量丛 (纤维丛) 9

1.3 Kunnëth 公式与 Leray-Hirsch 定理 11

1.4 微分流形中的同伦 14

1.4.1 连续映射同伦于光滑映射 14

1.5 Thom 同构、Thom 空间与 Thom 类 15

2 代数拓扑 **17**

2.1 Brouwer 不动点定理与 Sperner 引理 17

2.2 Invariance of domain 19

2.3 Poincaré Lemma 19

2.4 Excision Theorem in Signular Homology 19

2.5 紧支集上同调 26

II 杂题集萃 **29**

III 易错知识 **31**

IV 亟待整理 **33**

Part I

知识整理

Chapter 1

微分流形

1.1 向量丛结构群的约化

定义 1.1.1 (向量丛的定义). *设 E, M 为微分流形, $\pi : E \to M$ 为光滑满射, 且有 M 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 及微分同胚 $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$, 满足:*

1. $\psi(\pi^{-1}(p)) = \{p\} \times \mathbb{R}^k$, $\forall p \in U_\alpha$,

2. *当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时, 存在光滑映射 $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$, 使得 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(p, v) = (p, g_{\beta\alpha}(p)v)$.*

则称:

- *E 是 M 上的光滑向量丛, k 为向量丛的秩, π 为丛投影;*

- *$\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ 为局部平凡化, $g_{\beta\alpha}$ 为连接函数, $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ 为结构群;*

- *$E_p := \pi^{-1}(p)$ 为点 p 上的纤维.*

对每个 E_p, 由条件1可知 E_p 上可自然定义一个线性空间结构, 这看似依赖于局部平凡化 ψ_α 的选取, 不过由条件2可知线性结构并不依赖局部平凡化的选取.

*若存在 $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ 的闭 Lie 子群 H, 使得 $g_{\beta\alpha}(p) \in H$, $\forall p \in U_\alpha \cap U_\beta$, 则称结构群**可约化到子群** H.*

连接函数 $g_{\beta\alpha}$ 在向量丛的定义中占据很重要的地位, 容易证明它满足性质:

$$g_{\alpha\alpha} = 1,\ \forall U_\alpha, \qquad g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1,\ \forall U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset.$$

反之, 若有一族光滑函数 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 满足以上性质, 定义商空间 $E := \sqcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{R}^k)/\sim$, 其中等价关系定义为: $(p, v_\alpha) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^k$, $(q, v_\beta) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k$

$$(p, v_\alpha) \sim (q, v_\beta) \Leftrightarrow p = q,\ v_\beta = g_{\beta\alpha}(p)v_\alpha.$$

E 的拓扑由商拓扑给出, 记 $[p,v]$ 为 (p,v) 的等价类, 定义 $\pi : E \to M$, $\pi([p,v]) = p$. 则 E 在投影映射 π 下成为 M 上的秩 k 的向量丛.

1.1.1 流形可定向与结构群可约化至 $\mathrm{GL^+(k,\mathbb{R})}$

略

1.1.2 黎曼度量与结构群可约化至正交群 $O(k)$

流形 M 上的黎曼度量是指光滑 $(0,2)$-张量场 g, g 在每个点的切空间处都是内积. 下面就来说明 n 维流形 M 上存在黎曼结构与切丛 TM 的结构群可约化至正交群 $O(n)$ 是等价的.

1°. 设 (M,g) 为一个黎曼流形, 取 M 的一个局部坐标覆盖 $\{(U_\alpha; x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)\}$, 于是 $\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}$ 成为 U_α 上的一组标架, 因为 U_α 上有度量结构, 我们可对标架做 Gram-Schmidt 正交化得到单位正交标架 $e_{1\alpha}, \dots, e_{n\alpha}$, 令局部平凡化映射为

$$\begin{aligned}\psi_\alpha : TU_\alpha &\to U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ (p, a^i e_{i\alpha}|_p) &\mapsto (p, a^i e_i)\end{aligned}$$

其中 $e_1, \dots, e_n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的自然基底. 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时, 对每个点 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, 因为 $\{e_{i\alpha}|_p\}$ 和 $\{e_{i\beta}|_p\}$ 都是 T_pM 的一组标准正交基, 所以转移函数 $g_{\beta\alpha}(p)$ 是正交矩阵, 因此结构群可被约化至 $O(n)$.

2°. 假设 TM 的结构群可约化至正交群, 设 $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ 是对应的平凡化, 即 ψ_α 是从 TU_α 到 $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ 的微分同胚, 令 $e_{i\alpha} = \psi^{-1}(U_\alpha \times \{e_i\})$, 其中 $\{e_i\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的自然基底. 我们得到了 TU_α 上处处线性无关的一组向量场 $\{e_{i\alpha}\}$, 命这组向量场构成 TU_α 的一个单位正交标架场, 这能唯一确定 TU_α 上的黎曼度量. 若 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 对 $\forall p \in U_\alpha \cap U_\beta$,

$$\begin{aligned}\langle e_{i\alpha}, e_{j\alpha}\rangle_p &= \langle \psi_\alpha(e_{i\alpha}|_p), \psi_\alpha(e_{j\alpha}|_p)\rangle \\ &= \langle g_{\alpha\beta}(p)\psi_\beta(e_{i\beta}|_p), g_{\alpha\beta}(p)\psi_\beta(e_{j\beta}|_p)\rangle \\ &= \langle \psi_\beta(e_{i\beta}|_p), \psi_\beta(e_{j\beta}|_p)\rangle \\ &= \langle e_{i\beta}, e_{j\beta}\rangle_p\end{aligned}$$

所以不同平凡化定义的黎曼结构是相容的, 因此能定义一个整体的黎曼度量 g.

注意到我们能用单位分解在任意微分流形上构造黎曼度量, 这表明任意微分流形切丛的结构群都能约化到正交群.

1.1.3 复向量丛与近复结构, 与结构群可约化至 $\mathrm{GL}(k,\mathbb{C})$

设 M 是 m 维流形, M 上的复向量丛 E 在定义上仅需要把纤维 $\mathbb{R}^k$ 改为 $\mathbb{C}^k$、结构群改为 $\mathrm{GL}(k,\mathbb{C})$.

但如果把 $\mathbb{C}^k$ 视为 $\mathbb{R}^{2k}$, 则结构群可约化至 $\mathrm{GL}(2k,\mathbb{R})$ 的子群

$$\left\{\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \,\middle|\, |A|^2+|B|^2>0\right\}$$

我们仍把这个子群记为 $\mathrm{GL}(k,\mathbb{C})$. 可以证明实的秩为 $2k$ 的向量丛 E 为复的秩为 k 的向量丛当且仅当结构群可约化至 $\mathrm{GL}(k,\mathbb{C})$.

我们也可以从近复结构的视角理解复向量丛, 若实的秩为 $2k$ 的向量丛 E 上存在自同构 J (即 $\pi\circ J=\pi$), 使得 $J^2=-\mathrm{id}$, 则称 J 为 M 的近复结构. 可以证明 M 为复向量丛当且仅当 M 上存在近复结构.

一方面若 M 为复向量丛, 则可以逐点定义 $J_p(p,v)=(p,\sqrt{-1}v)$, 因为转移映射是复线性变换, 所以 J_p 良定, 且 $J_p^2=-\mathrm{id}$; 另一方面我们可以适当修改平凡化 ψ_α 使得 J 可局部表示为

$$J_\alpha(p,v_\alpha)=\left(p,\begin{pmatrix} & -I_k \\ I_k & \end{pmatrix}v_\alpha\right)$$

因为 $g_{\alpha\beta}\cdot J_\beta=J_\alpha\cdot g_{\alpha\beta}$, 所以

$$\begin{pmatrix} & -I_k \\ I_k & \end{pmatrix}\cdot g_{\alpha\beta}(p)=g_{\alpha\beta}(p)\cdot\begin{pmatrix} & -I_k \\ I_k & \end{pmatrix}\Rightarrow g_{\alpha\beta}(p)=\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

从而结构群可约化至 $\mathrm{GL}(k,\mathbb{C})$.

1.2 向量丛分类定理

1.2.1 同伦的映射拉回同构的向量丛 (纤维丛)

定义 1.2.1 (拉回丛的定义). *设 $f:X\to Y$, 且有向量丛 $p:E\to Y$, 则可以定义 X 上的拉回丛 $p':f^*E\to X$, 其中*

$$f^*E:=\{(x,e)\in X\times E \,|\, f(x)=p(e)\}$$

为 $X\times E$ 的子集, 且赋予子拓扑结构. 丛投影为映射到第一个分量的投影映射. 每根纤维的线性结构由 E 上每根纤维的线性结构给出.(有模糊的地方)

命题 1.2.2 (同伦的映射拉回同构的向量丛). *现有向量丛 $p:E\to Y$, 设 $f\simeq g:X\to Y$ 为同伦的光滑映射, 则拉回丛 f^*E 与 g^*E 丛同构.*

在证明之前, 我们先分析一下命题. 设 $H : X\times[0,1]\to Y$ 是从 f 到 g 的光滑伦移, 即 $H|_{X\times\{0\}}=f$, $H|_{X\times\{1\}}=g$. 则有 $X\times[0,1]$ 上的拉回丛 H^*E, 且 $H^*E|_{X\times\{0\}}=f^*E$, $H^*E|_{X\times\{1\}}=g^*E$. 因此为了证明 $f^*E\cong g^*E$, 只需证明:

命题 1.2.3 (向量丛在柱空间的上下底的限制是同构的)**.** 当 X 仿紧时, 对任意 $X\times[0,1]$ 上的向量丛 E, $E|_{X\times\{0\}}\cong E|_{X\times\{1\}}$.

证明. 我们需要两个关于向量丛的事实:

(1) : 若 $p:E\to X\times[a,b]$ 在 $X\times[a,c]$ 和 $X\times[c,b]$ 上分别是平凡的, 则 E 在整个 $X\times[a,b]$ 上平凡.

只需分别写出在 $X\times[a,c]$ 和 $X\times[c,b]$ 上的平凡化 h_1 和 h_2, 并修改 h_2 使得它们在 $p^{-1}(X\times\{c\})$ 上匹配, 则 h_1 和修改后的 h_2 合并成整个 $X\times[a,b]$ 上的平凡化.

(2) : 对于向量丛 $p:E\to X\times[0,1]$, 存在 X 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 使得 E 在每个 $U_\alpha\times[0,1]$ 上都是平凡的.

对任意 $x\in X$, 存在 $U_{x,1},\ldots,U_{x,k}$ 以及 $0=t_0<t_1<\cdots<t_k=1$ 使得 E 在 $U_{x,i}\times[t_{i-1},t_i]$ 上平凡, 令 $U_x=U_{x,1}\cap\cdots\cap U_{x,k}$, 则由 (1) 知 E 在 $U_x\times[0,1]$ 上平凡.

下面我们来证明该命题, 由 (2) 我们可以取 X 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 使得 E 在每个 $U_\alpha\times[0,1]$ 上平凡. 因为 X 是第二可数空间, 不妨设 $\{U_\alpha\}=\{U_n\}_{n=1}^\infty$, 也即开覆盖为可数开覆盖. 取从属于 $\{U_n\}$ 的单位分解 $\{\rho_n\}$ (这里为使下标一致我们牺牲了 $\operatorname{supp}\rho_n$ 的紧性). 记

$$\varphi_n=\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_n,$$

特别地令 $\varphi_0\equiv 0$, $\varphi_\infty\equiv 1$. 则每个 φ_i 都能定义图流形

$$X_i:=\{(x,\varphi_i(x))\,\big|\,x\in X\}\subset X\times[0,1]$$

每个含入 $\iota_i:X_i\hookrightarrow X\times[0,1]$ 都定义了一个拉回丛 $E_i:=\iota_i^*E=E|_{X_i}$. 特别地 $X_0=X\times\{0\}$, $X_\infty=X\times\{1\}$, $\iota_0^*E=E|_{X\times\{0\}}$, $\iota_\infty^*E=E|_{X\times\{1\}}$. 因为 X_{j-1} 到 X_j 仅改变了 U_j 所对应的图像 ($\operatorname{supp}\rho_j\subset U_j$). 而 E 在 $U_j\times[0,1]$ 上是平凡的, 所以

$$\begin{aligned}E_{j-1}|_{X_{j-1}\cap(U_j\times[0,1])}&\cong(X_{j-1}\cap(U_j\times[0,1]))\times\mathbb{R}^n\\&\cong(X_j\cap(U_j\times[0,1]))\times\mathbb{R}^n\\&\cong E_j|_{X_j\cap(U_j\times[0,1])}\end{aligned}$$

且能取同构映射 ψ_j 使得在 $\operatorname{supp}\rho_j$ 之外为恒等 (此处用空间 X 中的集合指代图流形对应的集合), 因此 ψ_j 能用恒同映射光滑延拓至整个向量丛, 于是

$$\psi_j:E_{j-1}\cong E_j.$$

定义从 $E|_{X\times\{0\}}$ 到 $E|_{X\times\{1\}}$ 的映射:

$$\psi := \cdots \circ \psi_2 \circ \psi_1$$[1]

因为对每个 $x \in X$ 存在 x 的开领域 V 使得仅有有限个 ρ_n 在 V 上非零, 因此在 V 上 $\psi_1, \psi_2, \cdots$ 仅有有限项不是恒同映射, 从而良定义, 而这给出了从 $E|_{X\times\{0\}}$ 到 $E|_{X\times\{1\}}$ 的同构. □

注. 注意到在证明过程中并没有用到纤维具体是什么, 因此该证明可以逐字逐句地推广至一般纤维丛的同伦不变性.

1.3 Kunnëth 公式与 Leray-Hirsch 定理

定理 1.3.1 (Kunnëth 公式). 设流形 M 有有限好覆盖, F 是任意流形, 则

$$H^*(M\times F) \cong H^*(M)\otimes H^*(F)$$

证明概要. 设 $\pi : M\times F \to M$, $\rho : M\times F \to F$ 为乘积流形到两个分量的投影, 则可以定义

$$\begin{aligned}\psi : H^*(M)\otimes H^*(F) &\to H^*(M\times F)\\ \omega\otimes\tau &\mapsto \pi^*\omega\wedge\rho^*\tau\end{aligned}$$

由 M-V 论证, 可以得到如下交换图:

[1] 终于知道为什么 Hatcher 上是递减定义的了.

$$\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow \\
\bigoplus_{p+q=k} H^p(U\cup V)\otimes H^q(F) & \xrightarrow{\psi} & H^k\left((U\cup V)\times F\right) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\bigoplus_{p+q=k} \left((H^p(U)\otimes H^q(F))\oplus(H^p(V)\otimes H^q(F))\right) & \xrightarrow{\psi} & H^k(U\times F)\oplus H^k(V\times F) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\bigoplus_{p+q=k} H^p(U\cap V)\otimes H^q(F) & \xrightarrow{\psi} & H^k((U\cap V)\times F) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{d}^*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{d}^*} \\
\bigoplus_{p+q=k+1} H^p(U\cup V)\otimes H^q(F) & \xrightarrow{\psi} & H^{k+1}\left((U\cup V)\times F\right) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

前两个圈的交换性显然, 第三个圈的交换性需要用到 d^* 的表达式. 由五引理能得到归纳递推, 归纳奠基是平凡的. □

定理 1.3.2 (Leray-Hirsch 定理). *设 $\pi : E \to M$ 为纤维丛, 纤维为 F, 若存在 E 上的微分形式 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 满足将它们限制在每个纤维 F_x 上都能得到 $H^*(F_x)$ 的一组基, 则*

$$H^*(E) \cong H^*(M) \otimes \{e_1, \ldots, e_n\} \cong H^*(M) \otimes H^*(F).$$

证明概要. 这里的关键在于不存在 E 到 F 的整体投影 ρ, 也就无法通过这个方式定义 $\rho^* : H^*(F) \to H^*(E)$ 了. 但是借助 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 我们可以构造合适的映射 $\tilde{\rho^*}$, 做法如下: 固定某个点 $x \in M$, 也即固定某个纤维 F_x, 取 $H^*(F_x)$ 的一组基 $\{f_1, \ldots, f_n\}$, 定义:

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho^*} : H^*(F) &\to H^*(E) \\
\sum_i a_i f_i &\mapsto \sum_i a_i e_i.
\end{aligned}$$

于是可以定义:

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi} : H^*(M) \otimes H^*(F) &\to H^*(E) \\
\omega \otimes \tau &\mapsto \pi^*\omega \wedge \tilde{\rho^*}\tau
\end{aligned}$$

归纳递推仍由 M-V 论证给出;

$$
\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow \\
\bigoplus_{p+q=k} H^p(U\cup V)\otimes H^q(F) & \xrightarrow{\psi} & H^k\left(\pi^{-1}(U\cup V)\right) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\bigoplus_{p+q=k} \left((H^p(U)\otimes H^q(F))\oplus(H^p(V)\otimes H^q(F))\right) & \xrightarrow{\psi} & H^k(\pi^{-1}(U))\oplus H^k(\pi^{-1}(V)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\bigoplus_{p+q=k} H^p(U\cap V)\otimes H^q(F) & \xrightarrow{\psi} & H^k(\pi^{-1}(U\cap V)) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{d}^*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{d}^*} \\
\bigoplus_{p+q=k+1} H^p(U\cup V)\otimes H^q(F) & \xrightarrow{\psi} & H^{k+1}\left(\pi^{-1}(U\cup V)\right) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

因为 good cover 中的每个开集都同伦于单点, 而同伦映射诱导同构的拉回丛 (注意这里是纤维丛的版本), 因此 good cover 同时也是 locally trivialization. 故 $\pi^{-1}(U_\alpha)\cong U_\alpha\times F$, 从而 $H^*(\pi^{-1}(U_\alpha))\cong H^*(U_\alpha)\otimes H^*(F)$, 这给出了归纳奠基. □

注. 实际上当底空间 M 连通时, 定理的条件可弱化为 $\{e_1,\dots,e_n\}$ 限制在某个纤维 F_x 上得到 $H^*(F_x)$ 的一组基. 因为对不同的两点 x,y, 有道路 $\gamma:[0,1]\to M$ 将他们相连, 于是嵌入映射 $\iota_x:F_x\hookrightarrow E$ 和 $\iota_y:F_y\hookrightarrow E$ 同伦. 因此拉回映射 $\iota_x^*:H^*(E)\to H^*(F_x)$ 与 $\iota_y^*:H^*(E)\to H^*(F_y)$ 相等.

注. 这里的同构 $H^*(E)\cong H^*(M)\otimes H^*(F)$ 并不保持环结构 *(例如?)* 因此只能说 $H^*(E)$ 可看成 $H^*(M)$-模.

注. 存在不满足 Leray-Hirsch 定理条件的纤维丛, 比如 Hopf 纤维化:

$$
\begin{array}{ccc}
S^1 & \longrightarrow & S^3 \\
& & \downarrow \\
& & S^2
\end{array}
$$

其中

$$H^*(S^3)\neq H^*(S^1)\otimes H^*(S^2)$$

1.4 微分流形中的同伦

1.4.1 连续映射同伦于光滑映射

定理 1.4.1 (用光滑映射逼近连续映射)**.** 设 $f: M^m \to \mathbb{R}^n$ 为任意连续映射, $\varepsilon: M \to \mathbb{R}_{>0}$ 为任意误差函数. 则存在光滑映射 $g: M \to \mathbb{R}^n$ 满足 $||f(x) - g(x)|| < \varepsilon(x)$, $\forall\, x \in M$.

证明. 对 M 中任一点 p, 存在开邻域 U_p 使得

$$||f(q) - f(p)|| < \varepsilon(p), \quad \varepsilon(q) > \frac{1}{2}\varepsilon(p), \quad \forall\, q \in U_p.$$

记 $\{\rho_p\}$ 为从属于开覆盖 $\{U_p\}$ 的单位分解, 定义

$$g(x) = \sum_p \rho_p(x) f(p) = \sum_{U_p \ni x} \rho_p(x) f(p).$$

则 $g(x)$ 是 M 到 $\mathbb{R}^n$ 的光滑映射且满足

$$\begin{aligned}
||g(x) - f(x)|| &= \Big|\Big| \sum_p \rho_p(x) f(p) - \sum_p \rho_p(x) f(x) \Big|\Big| \\
&= \Big|\Big| \sum_{U_p \ni x} \rho_p(x) \Big(f(p) - f(x) \Big) \Big|\Big| \\
&\leqslant \sum_{U_p \ni x} \rho_p(x) \Big|\Big| f(p) - f(x) \Big|\Big| \\
&\leqslant \sum_{U_p \ni x} \rho_p(x) \varepsilon(x) \\
&= \varepsilon(x).
\end{aligned}$$

$g(x)$ 即为所求. □

注. 这个定理是单位分解的一个重要应用.

注. 若 f 的像集 $f(M)$ 包含于 $\mathbb{R}^n$ 的某个开集 U 中, 则也可使 $g(M) \subset U$. 具体做法是稍微修改一下误差函数. 令

$$\varepsilon_1(x) := \min\left\{ \varepsilon(x), \frac{1}{2} d(f(x), \mathbb{R}^n \backslash U) \right\}$$

以新误差函数 ε_1 构造的 g 自动满足 $g(M) \in U$.

定理 1.4.2 (用光滑映射逼近连续映射且保持在某个闭集不动)**.** 设 $f : M^m \to \mathbb{R}^n$ 为连续映射, 且在闭子集 A 的某个开邻域 U_0 内光滑, 则对任意误差函数 $\varepsilon : M \to \mathbb{R}_{>0}$, 存在光滑映射 $g : M \to \mathbb{R}^n$ 满足 $||f(x) - g(x)|| < \varepsilon(x)$, $\forall x \in M$ 且 $f\big|_A = g\big|_A$.

证明. 主要的构造思路保持不变, 但开覆盖有些许变化. 对任意 $p \in M\backslash A$, 取开邻域 $U_p \subset M\backslash A$ 使得

$$||f(q) - f(p)|| < \varepsilon(p), \quad \varepsilon(q) > \frac{1}{2}\varepsilon(p), \quad \forall\, q \in U_p.$$

设 $\{\rho_0\} \cup \{\rho_p\}_{p\notin A}$ 为从属于开覆盖 $\{U_0\} \cup \{U_p\}_{p\notin A}$ 的单位分解, 令

$$g(x) = \rho_0(x)f(x) + \sum_{p\notin A} \rho_p(x)f(p).$$

则因为

$$f(x) = \rho_0(x)f(x) + \sum_{p\notin A} \rho_p(x)f(x),$$

可以验证 g 满足定理要求. □

注. 同上一个注一样, 该定理可以加强使逼近前后的像集在同一个开集中.

定理 1.4.3 (任意连续映射都同伦于一个光滑映射)**.** 任意光滑流形间的连续映射 $f : M^m \to N^n$ 均同伦于某一个光滑映射 $g : M \to N$.

证明. f 在局部上可以看成是 M 到 $\mathbb{R}^n$ 的连续映射, 用之前的定理可以在局部上用光滑映射逼近 f, 则局部上可以用直线同伦连接 f 与光滑映射, 对每个点的局部都如此考虑即可.

□

1.5 Thom 同构、Thom 空间与 Thom 类

设 $\pi : E \to M$ 是 M 上的秩为 k 的可定向向量丛, 在 Bott & Tu 的书中我们知道存在 $\Phi \in H^k_{cv}(E)$ 使得

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : H^{*-k}(M) &\to H^*_{cv}(E) \\ \omega &\mapsto \pi^*\omega \wedge \Phi \end{aligned}$$

是同构. 下面我们将用相对上同调以及 Thom 空间的语言重新描述 Thom 同构.

由定理 2.5.3,

Chapter 2

代数拓扑

2.1 Brouwer 不动点定理与 Sperner 引理

我们首先叙述 Brouwer 不动点定理与 Sperner 引理:

定理 2.1.1 (Brouwer 不动点定理)**.** *设 f 是 n 维闭球 B^n 到自身的连续映射, 则 f 必有不动点.*

引理 2.1.2 (Sperner 引理)**.** *设 $K = [v_0, \ldots, v_n]$ 是 n 维单纯形, 考虑其三角剖分 T, 将 T 的顶点 $(n+1)$ 染色, 即定义 $\lambda : V(T) \to \{0, \ldots, n\}$, 且满足对任意指标子集 $\{i_0, \ldots, i_k\} \subseteq \{0, \ldots, n\}$, λ 在 $[v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}]$ 上的限制的值域包含于 $\{i_0, \ldots, i_k\}$. 则一定存在 $u_0, \ldots, u_n \in V(T)$, 使得 $[u_0, \ldots, u_n]$ 是三角剖分 T 的单形, 且 $\lambda(u_i)$ 互不相同.*

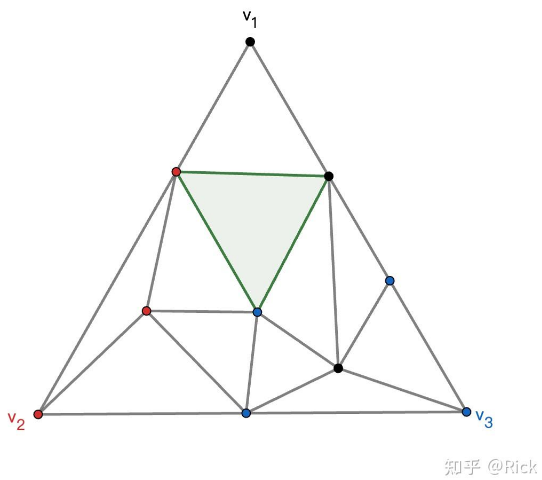


Figure 2.1: Sperner 引理示意图

它们一个是拓扑的定理, 一个是组合的定理, 看似没有联系, 但实际上我们能证明它们是等价的:

等价性的证明. 由于 $B^n \cong K$, 我们将 Brouwer 不动点定理的叙述改为 K 到自身的连续映射 f 必有不动点.

$1°$:Sperner 引理 $\Rightarrow$ Brouwer 不动点定理

设 $K = [v_0, \ldots, v_n]$ 是 n 维单形, 对 $\forall x \in K$, $x = \sum_i \alpha_i v_i$, $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$. 设 $f(x) = \sum_i \beta_i v_i$, 定义染色映射 $\lambda(x)$ 为使得 $\alpha_i \geqslant \beta_i$ 且 $\alpha_i \neq 0$ 的最小下标 i. 我们首先观察到在任意集合 $\{i_0, \ldots, i_k\} \subseteq \{0, \ldots, n\}$ 中, 对 $\forall x \in [v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}]$, x 的坐标 α 满足 $\alpha_i = 0$, $i \notin \{i_0, \ldots, i_k\}$, 因此 $\lambda(x)$ 只可能在 $\{i_0, \ldots, i_k\}$ 中取值.

固定染色 λ, 取重心重分 $K^0, K^1, \ldots$, 则在每一个 K^j 中 λ 均满足引理条件, 于是存在异色单形 $\Delta^j = [u_0^j, \ldots, u_n^j]$, 不妨设 $\lambda(u_i^j) = i$. 因为 K 是紧集, 因此 $\{u_0^j\}_j$ 存在收敛子列, 不妨设就为序列本身, 由重心重分的性质知 Δ^j 的直径趋于零, 因此对所有 i, $\{u_i^j\}_j$ 均收敛于同一点 u, 即 $u = \lim\limits_{j \to \infty} u_i^j, \forall\, i = 0, \ldots, n$. 由染色的定义知 u_i^j 的 v_i 坐标不等于零且大于等于 $f(u_i^j)$ 的, 根据极限的保号性知 u 的所有坐标 α_i 大于等于 $f(u)$ 对应的坐标 β_i, 但因为 $\sum_i \alpha_i = \sum_i \beta_i = 1$, 所以 $\alpha_i = \beta_i$, 因此 $u = f(u)$ 是 f 的不动点.

$2°$:Sperner 引理 $\Leftarrow$ Brouwer 不动点定理

设 $K = [v_0, \ldots, v_n]$ 是 n 维单形, λ 为满足引理要求的染色, T 是 K 的一个三角剖分, 则可以定义单纯映射 $f : K \to K$ 如下: 对 $\forall x \in V(T)$, 定义 $f(x) = v_{\lambda(x)}$, 若 $x = \sum_{i=0}^k \alpha_i x_i$, 其中 $[x_0, \ldots, x_k]$ 为 T 的 k 维单形, 定义 $f(x) = \sum_{i=0}^k \alpha_i v_{\lambda(x_i)}$.

若 T 中没有 n 维异色单形, 则 f 的像集包含于 ∂K 中, 且对于每个 $(n-1)$ 维面 $[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$ 均有 $f([v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]) \subset [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$. 不妨设 $\sum_{i=0}^n v_i = 0$, 即 K 的重心是原点. 定义 $g : \partial K \to \partial K$, $g(x)$ 为射线 xO 与 ∂K 的另一个交点, 类比对径映射. 则 $g([v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]) \cap [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n] = \emptyset$ 则 $g \circ f$ 是 K 到自身的连续映射, 但没有不动点, 与 Brouwer 不动点定理矛盾. $\square$

现在我们回到 Sperner 引理本身的证明

证明. 对维数 n 做归纳, 我们证明对任意维数异色单形的个数均为奇数.

当 $n = 1$ 时, $K = [v_0, v_1]$ 可看做闭区间 $[0, 1]$, 设 $v_0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = v_1$ 是剖分 T 中的点, 则 $\#\text{异色单形} = \#\left\{i \,\middle|\, \lambda(x_{i-1}) \neq \lambda(x_i)\right\}$. 而

$$1 = \lambda(v_1) - \lambda(v_0) = \sum_{i=1}^m \lambda(x_i) - \lambda(x_{i-1}) = \sum_{\lambda(x_{i-1}) \neq \lambda(x_i)} \lambda(x_i) - \lambda(x_{i-1})$$

因此 $\#\text{异色单形}$ 是奇数.

假设维数为 $n-1$ 时命题成立, 我们称 T 中的 $(n-1)$ 维单形 $[x_0,\dots,x_{n-1}]$ 为一个好单形, 若 $\{\lambda(x_0),\dots,\lambda(x_{n-1})\}=\{0,\dots,n-1\}$. 对 T 中的 n 维单形 $\Delta_n=[u_0,\dots,u_n]$, 令 $c(\Delta_n)$ 为 Δ_n 中好单形的个数, 记 $S=\{\lambda(u_0),\dots,\lambda(u_n)\}$, 则

$$c(\Delta_n)=\begin{cases}0, \{0,\dots,n-1\}\nsubseteq S\\ 2, \{0,\dots,n-1\}=S\\ 1, \{0,\dots,n\}=S\end{cases},$$

于是异色单形个数的奇偶性与 $\sum\limits_{\Delta_n\subset T}c(\Delta_n)$ 的奇偶性相同. 而当好单形在 $\mathring{K}$ 内时, 它是两个 n 单形的公共面; 当好单形在 ∂K 上时, 它仅为一个 n 单形的面. 因此异色单形个数的奇偶性与 ∂K 上好单形的个数的奇偶性相同, 根据条件好单形仅在 $[v_0,\dots,v_{n-1}]$ 中出现, 由归纳假设知 $[v_0,\dots,v_{n-1}]$ 中好单形有奇数个, 命题成立. □

2.2 区域不变性定理 (Invariance of domain)

该定理也是拓扑中的重要定理, 有人说它是欧式空间的内蕴性质, 用它可以区分不同维数的欧式空间.

定理 2.2.1. *设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集, $f:U\to\mathbb{R}^n$ 为连续单射, 则 $f(U)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的开子集且 f 为开映射, 即 f 为 U 到 $f(U)$ 的同胚.*

2.3 Poincaré Lemma 的另一种表述形式

引理 2.3.1 (d-Poincaré lemma)**.** *若整体有 $\mathrm{d}\omega=0$, 则方程 $\mathrm{d}\eta=\omega$ 局部有解, 即在每点处存在邻域使得方程有解.*

引理 2.3.2 ($\overline{\partial}$-Poincaré lemma)**.** *若整体有 $\overline{\partial}\omega=0$, 则方程 $\overline{\partial}\eta=\omega$ 局部有解, 即在每点处存在邻域使得方程有解.*

注. 因此若整体有 $\mathrm{d}\omega=0$, 但方程 $\mathrm{d}\eta=\omega$ 在整体上没有解, 这就表明空间本身限制的整体解的存在性, 也就是说我们检测到一个拓扑上的障碍.

2.4 切除定理 (Excision Theorem)

定理 2.4.1 (切除定理表述 1)**.** *设 $Z\subset A\subset X$ 满足 $\overline{Z}\subset A^\circ$, 则空间偶的嵌入 $(X-Z,A-Z)\hookrightarrow(X,A)$ 诱导了相对同调群之间的同构:*

$$H_n(X-Z,A-Z)\xrightarrow{\cong}H_n(X,A),\quad n\geq 0.$$

这个定理有一个等价的表述:

定理 2.4.2 (切除定理表述 2). *设 $A, B \subset X$ 且满足 $A^\circ \cup B^\circ = X$, 则空间偶的嵌入 $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ 诱导了相对同调群之间的同构:*

$$H_n(B, A \cap B) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A), \quad n \geq 0.$$

注. *两种表述靠 $B = X - Z$ $(Z = X - B)$ 相互转化.*

为了证明这个定理, 我们需要先证明同调的 "局部性" (**locality principal**).

设 X 是一个拓扑空间, 我们称 X 的子集族 $\mathfrak{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ 是一个覆盖, 若 $\{U_j^\circ\}_{j \in J}$ 构成一个开覆盖 (注意 U_j 本身不必是开集).

定义 2.4.3 ($\mathfrak{U}$-**small chains**).

- *一个 n-单形 $\sigma : \Delta^n \to X$ 被称为 $\mathfrak{U}$-small 的, 若 $\operatorname{Im} \sigma$ 在某个 U_j 中.*
- *一个 n-复形 $c = \sum_i n_i \sigma_i$ 被称为 $\mathfrak{U}$-small 的, 若每个 σ_i 都是 $\mathfrak{U}$-small 的.*
- *所有 $\mathfrak{U}$-small 的 n-复形构成 $C_n(X)$ 的一个子群, 记为*

$$C_n^{\mathfrak{U}}(X) := \left\{ c \in C_n(X) \,\middle|\, c \text{ is } \mathfrak{U}\text{-small} \right\}.$$

- *若 $A \subset X$, 记*

$$C_n^{\mathfrak{U}}(X, A) := \frac{C_n^{\mathfrak{U}}(X)}{C_n^{\mathfrak{U}}(A)}.$$

若记 $\iota_j : U_j \hookrightarrow X$ 为 U_j 到 X 的嵌入, 那么 $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$ 也可以被定义为

$$C_n^{\mathfrak{U}}(X) = \operatorname{Im}\left(\bigoplus_{j \in J} C_n(U_j) \xrightarrow{\oplus_j (\iota_j)_*} C_n(X) \right).$$

这一概念的关键在于我们可以仅用 $\mathfrak{U}$-small 的链来计算原空间的同调群, 这体现了同调群的局部性.

定理 2.4.4 (**Locality Principle/Small Chain Theorem**). *设 $\mathfrak{U}$ 是 X 的一个覆盖, 则链复形的嵌入映射*

$$C_n^{\mathfrak{U}}(X) \subset C_n(X)$$

诱导了同调群之间的同构.

这个定理的证明需要用到重心剖分, 其证明过程有些繁琐, 所以我们跳过该定理的证明, 先看如何用这个定理推导出切除定理.

Proof of the Excision Axiom using small chains:

我们证明切除定理的表述 2, 令 $\mathfrak{U} = \{A, B\}$. 链复形的嵌入映射 $C_n^{\mathfrak{U}}(X) \subset C_n(X)$ 诱导了链复形短正合列之间的一个态射:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_*(A) & \longrightarrow & C_*^{\mathfrak{U}}(X) & \longrightarrow & C_*^{\mathfrak{U}}(X)/C_*(A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C_*(A) & \longrightarrow & C_*(X) & \longrightarrow & C_*(X)/C_*(A) & \longrightarrow & 0 \end{array}.$$

因为中间竖直的映射诱导了同调群之间的同构映射 (定理2.4.4), 由根据短正合引长正合、同调群的自然性、五引理, 我们得到右侧竖直映射诱导了同调群的同构, 由此转化为比较 $C_*(B, A\cap B)$ 和 $C_*^{\mathfrak{U}}(X)/C_*(A)$.

注意到

$$C_*^{\mathfrak{U}}(X) = C_*(A) + C_*(B) \subset C_*(X),$$
$$C_*(A\cap B) = C_*(A) \cap C_*(B).$$

因此

$$\frac{C_*(B)}{C_*(A\cap B)} = \frac{C_*(B)}{C_*(A)\cap C_*(B)} \cong \frac{C_*(A)+C_*(B)}{C_*(A)} = \frac{C_*^{\mathfrak{U}}(X)}{C_*(A)}.$$

中间的同构源自同态基本定理.

因此链映射

$$C_*(B, A\cap B) \to C_*^{\mathfrak{U}}(X)/C_*(A)$$

诱导了同调群之间的同构, 原命题成立. □

Proof of Locality Principle. [1] 我们需要引入重心重分 (或叫重心剖分) 这一操作, 需要分几步定义:

Step 1: 首先定义什么是 n-单形 Δ^n 的重心重分. 为了方便我们使用坐标描述, 我们将 Δ^n 嵌入底空间 $\mathbb{R}^n$, 可用顶点集表示为 $[v_0, \ldots, v_n]$, 其中的点可以表示为 $P = \sum_{i=0}^n t_i v_i$, $0 \le t_i \le 1$, $\sum_{t_0}^n t_i = 1$ 是点 P 的 $n+1$ 个坐标.

我们知道从几何图形上看 Δ^n 重心重分后是一些更小块的 n-单形 (带符号), 但是为了规范叙述重心重分, 我们需要将重分后的对象视为 $LC_n(Y)$ 中的元素, 其中 Y 是某个欧氏空间中的凸集[2]. 也即, 我们把原始的 Δ^n 视为 $\mathrm{id}: \Delta^n \to \Delta^n$, 重分后得到 $S\Delta^n \in LC_n(Y)$.

[1]证明源自 Hacter 的 Algebraic Topology, 此处是我总结凝练的个人理解.

[2]这里我很纠结到底用不用书上的记号, 我原本想把每个 Δ^n 视为 $C_n(\Delta^n)$ 中的元素, 但这样得不到一个链复形, S 和 T 无法定义在一个统一的 $C_*(?)$. 加上线性映射这一条件也是必要的, 否则映射的像就不是规则的图形了.

1° 锥映射 (cone map): 设 b 是 $\mathbb{R}^n$ 中的某一个点, 定义以 b 为顶点的锥映射, 写为

$$b : [v_0, \ldots, v_n] \mapsto [b, v_0, \ldots, v_n]$$

因此 $b([v_0, \ldots, v_n])$ 中坐标为 $(t_0, \ldots, t_{n+1})$ 的点是

$$t_0 b + \sum_{t=1}^{n+1} t_i v_i = t_0 b + (1 - t_0) \sum_{t=1}^{n+1} \frac{t_i}{1 - t_0} v_i.$$

2° 重心重分映射 $S : LC_n(\Delta^n) \to LC_n(\Delta^n)$. 设 λ 是一个 n-单形, 记 b_λ 为 λ 的重心, 即所有坐标都取 $\frac{1}{n+1}$ 的点. 我们归纳地定义

$$S\lambda = \begin{cases} [\varnothing] & , n = -1; \\ b_\lambda S(\partial\lambda) & , n \geq 0. \end{cases}$$

S 在小维数单形上的作用:

- 当 $n = -1$, 即 $\lambda = [\varnothing]$ 时, $S[\varnothing] = [\varnothing]$;
- 当 $n = 0$, 即 $\lambda = [w_0]$ 时, $b_\lambda = w_0$, $S[w_0] = w_0 S\partial[w_0] = w_0([\varnothing]) = [w_0]$;
- 当 $n = 1$, 即 $\lambda = [w_0, w_1]$ 时, $S[w_0, w_1] = b_\lambda S([w_1] - [w_0]) = [b_\lambda, w_1] - [b_\lambda, w_0]$.

下面归纳地证明 S 是链映射, 即 $S\partial = \partial S$.

- 当 $n = -1, 0$ 时, $S = \mathbb{1}$, 等式显然成立.
- 当 $n > 0$ 时,

$$\begin{aligned} \partial S\lambda &= \partial b_\lambda(S\partial\lambda) \\ &= S\partial\lambda - b_\lambda\partial(S\partial\lambda) \qquad \text{因为 } \partial b_\lambda = \mathbb{1} - b_\lambda\partial \\ &= S\partial\lambda - b_\lambda(S\partial\partial\lambda) \qquad \text{因为归纳假设 } \partial S(\partial\lambda) = S\partial(\partial\lambda) \\ &= S\partial\lambda \qquad \text{因为 } \partial\partial = 0. \end{aligned}$$

3° id 和 S 的链同伦 $T : C_n(Y) \to C_{n+1}(Y)$, 我们归纳地定义

$$T\lambda = \begin{cases} 0 & , n = -1; \\ b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda) & , n \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & LC_2(Y) \arrow[r] \arrow[d, "S"] & LC_1(Y) \arrow[r] \arrow[d, "S"] \arrow[dl, "T"'] & LC_0(Y) \arrow[r] \arrow[d, "S"', "\mathbb{1}"] \arrow[dl, "T"'] & LC_{-1}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "S"', "\mathbb{1}"] \arrow[dl, "T"', "0"] & 0 \\ \cdots \arrow[r] & LC_2(Y) \arrow[r] & LC_1(Y) \arrow[r] & LC_0(Y) \arrow[r] & LC_{-1}(Y) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

T 在小维数单形上的作用:

- 当 $n=-1$, 即 $\lambda=[\varnothing]$ 时, $T[\varnothing]=0$;
- 当 $n=0$, 即 $\lambda=[w_0]$ 时, $b_\lambda=w_0$, $T[w_0]=w_0([w_0]-T\partial[w_0])=w_0([w_0])=[w_0.w_0]$;
- 当 $n=1$, 即 $\lambda=[w_0,w_1]$ 时, $T[w_0,w_1]=b_\lambda\Big([w_0,w_1]-T([w_1]-[w_0])\Big)=[b_\lambda,w_0,w_1]-[w_1,w_1]+[w_0,w_0]$.

T 的几何解释如下: 将 $\Delta^n\times I$ 分成若干个 Δ^n, 满足下底 $\Delta^n\times\{0\}$ 仍为一整个 Δ^n(代表 id), 上底则成为重心重分后的图形 (代表 $S\Delta^n$). T 作用在某个 λ 上可能会出现 $[w_0,w_0]$ 这样的元素, 对此我们可以将前一个 w_0 视作时间参数 $t=1$ 的点, 后一个视作 $t=0$ 的点, 通过人为增添一个时间维度 (即乘以 I), 我们能更好地想象 T 的几何动机, T 实际作用的像是前文描述的图形在投影 $\Delta^n\times I\to\Delta^n$ 下的像. 下面归纳地验证 T 是连接 id 和 S 的链

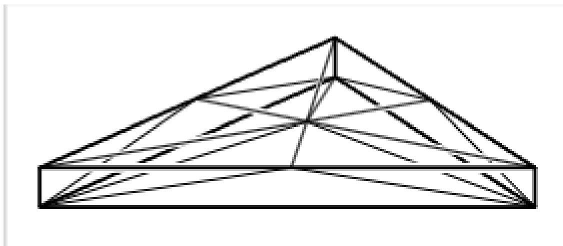


Figure 2.2: 重心重分与恒同的链同论

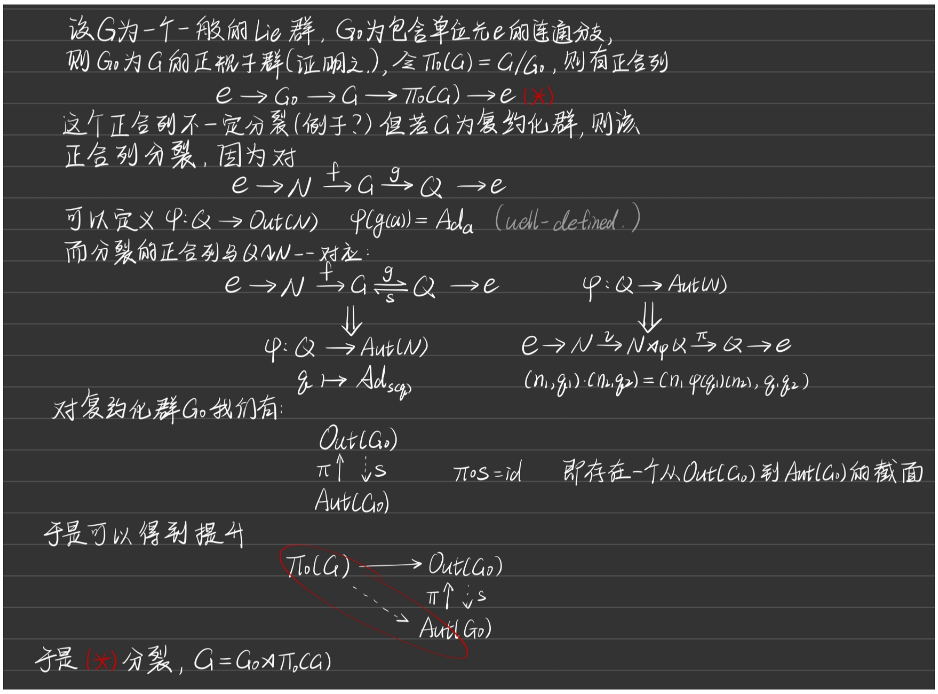
同论, 即 $\partial T+T\partial=\mathbb{1}-S$:

- 当 $n=-1$ 时, $S=\mathbb{1},T=0$, 显然成立.
- 当 $n\geq 0$ 时,

$$\begin{aligned}\partial T\lambda &= \partial b_\lambda(\lambda-T\partial\lambda)\\ &=(\lambda-T\partial\lambda)-b_\lambda\partial(\lambda-T\partial\lambda) && \text{因为 } \partial b_\lambda=\mathbb{1}-b_\lambda\partial\\ &=\lambda-T\partial\lambda-b_\lambda\partial\lambda+b_\lambda\partial T\partial\lambda\\ &=\lambda-T\partial\lambda-b_\lambda\partial\lambda+b_\lambda(\partial\lambda-S\partial\lambda-T\partial\partial\lambda) && \text{因为归纳假设}\\ &=\lambda-T\partial\lambda-b_\lambda(S\partial\lambda)\\ &=\lambda-S\lambda-T\partial\lambda.\end{aligned}$$

Step 2: 对一般的链 $\sigma:\Delta^n\to X$ 定义重心重分.
1° 定义 $S:C_n(X)\to C_n(X)$ 为

$$S\sigma=\sigma_\sharp S\Delta^n$$



设 G 为一个一般的 Lie 群, G_0 为包含单位元 e 的连通分支,
则 G_0 为 G 的正规子群(证明之), 令 $\pi_0(G) = G/G_0$, 则有正合列

$$e \to G_0 \to G \to \pi_0(G) \to e \quad (*)$$

这个正合列不一定分裂(例子?) 但若 G 为复约化群, 则该正合列分裂, 因为对

$$e \to N \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} Q \to e$$

可以定义 $\varphi: Q \to \mathrm{Out}(N)$ $\varphi(g(a)) = \mathrm{Ad}_a$ (well-defined.)
而分裂的正合列与 $Q \curvearrowright N$ 一一对应:

$$e \to N \xrightarrow{f} G \underset{s}{\overset{g}{\rightleftarrows}} Q \to e \qquad \varphi: Q \to \mathrm{Aut}(N)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\varphi: Q \to \mathrm{Aut}(N) \qquad e \to N \xrightarrow{i} N \rtimes_\varphi Q \xrightarrow{\pi} Q \to e$$

$$g \mapsto \mathrm{Ad}_{s(g)} \qquad (n_1, g_1)\cdot(n_2, g_2) = (n_1 \varphi(g_1)(n_2), g_1 g_2)$$

对复约化群 G_0 我们有:

$$\begin{array}{c} \mathrm{Out}(G_0) \\ \pi\uparrow \ \downarrow s \\ \mathrm{Aut}(G_0) \end{array} \qquad \pi \circ s = id \qquad \text{即存在一个从 } \mathrm{Out}(G_0) \text{ 到 } \mathrm{Aut}(G_0) \text{ 的截面}$$

于是可以得到提升

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(G) & \longrightarrow & \mathrm{Out}(G_0) \\ & \searrow & \pi\uparrow \ \downarrow s \\ & & \mathrm{Aut}(G_0) \end{array}$$

于是 $(*)$ 分裂, $G = G_0 \rtimes \pi_0(G)$

Figure 2.3: 重心重分与恒同的链同论

下面的示意图能帮助我们理解 S 的定义. 下面验证 S 是一个链映射, 即 $\partial S = S\partial$:

$$\begin{aligned}
\partial S\sigma &= \partial\sigma_\sharp S\Delta^n = \sigma_\sharp\partial S\Delta^n = \sigma_\sharp S\partial\Delta^n \\
&= \sigma_\sharp S\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\Delta_i^n \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_\sharp S\Delta_i^n \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i S(\sigma|_{\Delta^n}) \\
&= S\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma|_{\Delta^n}\right) = S(\partial\sigma).
\end{aligned}$$

2° 类似地定义 $T: C_n(X) \to C_{n+1}(X)$ 为

$$T\sigma = \sigma_\sharp T\Delta^n$$

下面验证 T 是一个链同伦, 即 $\partial T + T\partial = \mathbb{1} - S$:

$$\partial T\sigma = \partial\sigma_\sharp T\Delta^n = \sigma_\sharp\partial T\Delta^n$$

$$\begin{aligned}&= \sigma_\sharp(\mathbb{1} - S - T\partial)\Delta^n \\ &= \sigma - S\sigma - \sigma_\sharp T\partial\Delta^n \qquad \text{和上面的过程类似} \\ &= \sigma - S\sigma - T\partial\sigma.\end{aligned}$$

Step 3: 迭代重心重分操作.

1° 可以证明对 Δ^n 做一次重心重分得到 $(n+1)!$ 个小的 n-复形, 这些 n-复形的最大直径不超过原复形的 $\frac{n}{n+1}$. 这个仅依赖于维数的严格小于 1 的常数是重心重分的一个关键性质. 它保证了只要重分足够多次, 每个 n-复形的直径可以任意小.

现设 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ 是 X 的一个覆盖, 则对单形 $\sigma : \Delta^n \to X$, $\{\sigma^{-1}U_\alpha\}_\alpha$ 构成 Δ^n 的一个开覆盖, 因为 Δ^n 是完备度量空间, 设 δ_σ 是 $\{\sigma^{-1}U_\alpha\}_\alpha$ 的 Lebesuge 数. 则当 m 充分大时, $S^m\Delta^n$ 中的每个单形的直径都小于 δ_σ. 对一般的链 $\sigma \in C_n(X)$, 记 $m(\sigma)$ 为最小的使得 $S^m\sigma \in C_n^{\mathfrak{U}}(X)$ 的迭代数 m.

连接 $\mathbb{1}$ 和 S^m 的链同论是 $D_m = \sum\limits_{i=0}^{m-1} TS^i$, 其验证如下:

$$\begin{aligned}\partial D_m + D_m\partial &= \sum_{i=0}^{m-1} \partial TS^i + \sum_{i=0}^{m-1} TS^i\partial \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (\mathbb{1} - S - T\partial)S^i + \sum_{i=0}^{m-1} TS^i\partial \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (\mathbb{1} - S)S^i - \sum_{i=0}^{m-1} T\partial S^i + \sum_{i=0}^{m-1} TS^i\partial \\ &= \mathbb{1} - S^m.\end{aligned}$$

对一般的链 σ, 若定义 $S\sigma = S^{m(\sigma)}\sigma$, 则不能良定义链同论 $D\sigma$, 因为如果定义 $D\sigma = D_{m(\sigma)}\sigma$, 公式 $\partial D\sigma + D\partial\sigma = \partial D_{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\partial\sigma)}\partial\sigma$, 下指标不全是 $m(\sigma)$.

因此我们得先定义 $D\sigma := D_{m(\sigma)}\sigma$, 再形式地定义 $\rho : C_n(X) \to C_n^{\mathfrak{U}}(X)$,

$$\rho := \mathbb{1} - \partial D - D\partial$$

需要验证 ρ 是链映射, 即 $\partial\rho = \rho\partial$:

$$\begin{aligned}\partial\rho\sigma &= \partial\sigma - \partial\partial D\sigma - \partial D\partial\sigma \\ &= \partial\sigma - \partial D\partial\sigma \\ &= \partial\sigma - \partial D\partial\sigma - D\partial\partial\sigma \\ &= (\mathbb{1} - \partial D - D\partial)\partial\sigma = \rho\partial\sigma.\end{aligned}$$

由 ρ 的定义易知 D 是 $\mathbb{1}$ 与 ρ 的链同论.

最后验证 ρ 确实将 $C_n(\Delta^n)$ 中的元素映到 $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$ 中:

$$\begin{aligned}\rho\sigma &= \sigma - \partial D_{m(\sigma)}\sigma - D_{m(\partial\sigma)}\partial\sigma \\ &= S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D_{m(\partial\sigma)}\partial\sigma \\ &= S^{m(\sigma)}\sigma + \sum_{m(\partial\sigma)\le i<m(\sigma)} TS^i\partial\sigma\end{aligned}$$

因为 $\partial\sigma \subset \sigma$, 所以 $m(\partial\sigma) \le m(\sigma)$, 由 $m(\sigma)$ 的定义以及 T 保持 $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$ 不动, 等号末项属于 $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$, 因此 ρ 就是我们想要的映射.
总结: 我们有嵌入映射 $\iota : C_n^{\mathfrak{U}}(X) \hookrightarrow C_n(X)$, 然后我们又定义了 $\rho : C_n(\Delta^n) \to C_n^{\mathfrak{U}}(X)$, 以及 $D : C_n(X) \to C_{n+1}(X)$, 使得 $\partial D + D\partial = \mathbb{1} - \rho$. 显然 $\rho\iota = \mathbb{1}$, 因此 ρ 是 ι 的同伦逆, 也即 $C_n^{\mathfrak{U}}(X) \hookrightarrow C_n(X)$ 诱导了同调群之间的同构. □

2.5 紧支集上同调[3]

Let X be a topological space and K be a compact subset of X, then

$$C_c^i(X) := \bigcup_K C^i(X, X\setminus K) = \Big\{\varphi : C_i(X) \to \mathbb{Z} \,\Big|\, \exists \text{compact } K_\varphi \subset X \\ \text{s.t. } \varphi = 0 \text{ on chains in } X\setminus K_\varphi\Big\} \subset C^i(X).$$

Define $\delta\varphi(\sigma) := \varphi(\partial\sigma)$, note if $\varphi \in C_c^i(X)$, then $\delta\varphi$ is also zero on all chains in $X \setminus K_\varphi$ and so $\delta\varphi \in C_c^{i+1}(X)$. Then we get a cochain subcomplex $C_c^*(X)$.

定义 2.5.1. $H_c^i(X) := H^i(C_c^*(X))$ *is called the cohomology of* X *with compact support.*

这个定义和紧支集 de Rham 上同调是一致的.

定理 2.5.2 (紧支集上同调与相对上同调[4])**.** $H_c^i(X) \cong \varinjlim_{K\in I} H^i(X, X\setminus K)$ *where* K *denotes a compact subset of* X.

证明. Let $I = \{K \subset X \mid K \text{ compact}\}$, and then I is a directed set since it is partially ordered by inclusion, and the union of two compact sets is also compact. Let $K \subset L$ be compact subsets of X, then there is a homomorphism $f_{KL} : H^i(X, X\setminus K) \to H^i(X, X\setminus L)$ induced by inclusion. Note since each element of $\varinjlim H^i(X, X\setminus K)$ is represented by some cocycle $\varphi \in C^i(X, X\setminus K)$ for some compact K with $[\varphi] \in H_c^i(X)$, and such φ is the zero element in $\varinjlim H^i(X, X\setminus K)$ iff $\varphi = \delta\psi$ for some $\psi \in C^i(X, X\setminus L)$, and so $[\varphi] = 0$ in $H_c^i(X)$. Thus $H_c^i(X) \cong \varinjlim H^i(X, X\setminus K)$. □

[3]这一段完全摘抄自`https://people.math.wisc.edu/~lmaxim/Topnotes9.pdf`
[4]有点抽象废话的意思, 能增进我的理解, 但是无法将其与其它更熟悉的概念联系起来.

定理 2.5.3 (紧支集上同调与一点紧化空间的约化上同调)**.** *Let $X^+ = X \cup \{\infty\}$ be one piont compactification of X. Then $H_c^*(X) \cong H^*(X^+, \infty) \cong \tilde{H}^*(X^+)$.*

证明. Consider $U \overset{open}{\hookrightarrow} X \hookleftarrow X \setminus U$, we have a short exact sequence:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_c^*(U) & \longrightarrow & \Omega_c^*(X) & \longrightarrow & \Omega_c^*(X \setminus U) & \longrightarrow & 0 \\ & & \theta & \longmapsto & j_*\theta & & & & \\ & & & & \omega & \longmapsto & \iota^*\omega & & \end{array}$$

where j_* means extension by zero, ι^* is the pull-back of $\iota : X \setminus U \hookrightarrow X$. So we can get a long exact sequnce of cohomology with compact support:

$$\cdots \to H_c^n(U) \to H_c^n(X) \to H_c^n(X \setminus U) \to H_c^{n+1}(U) \to \cdots$$

In case of $X^+ = X \cup \{\infty\}\}$, we get:

$$\cdots \to H_c^n(X) \to H_c^n(X^+) \to H_c^n(\{\infty\}) \to H_c^{n+1}(X) \to \cdots$$

Since both X^+ and $\{\infty\}$ are compact, we have

$$\cdots \to H_c^n(X) \to H^n(X^+) \to H^n(\{\infty\}) \to H_c^{n+1}(X) \to \cdots$$

Thus

$$H_c^n(X) \cong H^n(X^+, \{\infty\}) \cong \tilde{H}^n(X^+).$$

□

类似的事情对于 de Rham 上同调也成立.

Part II

杂题集萃

Part III

易错知识

Part IV

亟待整理