

数学笔记

BeBop

June 25, 2024

Contents

1	微分流形	5
1.1	向量丛结构群的约化	5
1.1.1	流形可定向与结构群可约化至 $GL^+(k, \mathbb{R})$	6
1.1.2	黎曼度量与结构群可约化至正交群 $O(k)$	6

Chapter 1

微分流形

1.1 向量丛结构群的约化

定义 1.1.1 (向量丛的定义). 设 E, M 为微分流形, $\pi: E \rightarrow M$ 为光滑满射, 且有 M 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 及微分同胚 $\psi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$, 满足:

1. $\psi(\pi^{-1}(p)) = \{p\} \times \mathbb{R}^k, \forall p \in U_\alpha$,
2. 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时, 存在光滑映射 $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(k, \mathbb{R})$, 使得 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(p, v) = (p, g_{\beta\alpha}(p)v)$.

则称:

- E 是 M 上的光滑向量丛, k 为向量丛的秩, π 为丛投影;
- $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ 为局部平凡化, $g_{\beta\alpha}$ 为连接函数, $\text{GL}(k, \mathbb{R})$ 为结构群;
- $E_p := \pi^{-1}(p)$ 为点 p 上的纤维.

对每个 E_p , 由条件1可知 E_p 上可自然定义一个线性空间结构, 这看似依赖于局部平凡化 ψ_α 的选取, 不过由条件2可知线性结构并不依赖局部平凡化的选取.

若存在 $\text{GL}(k, \mathbb{R})$ 的闭 Lie 子群 H , 使得 $g_{\beta\alpha}(p) \in H, \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta$, 则称结构群可约化到子群 H .

连接函数 $g_{\beta\alpha}$ 在向量丛的定义中占据很重要的地位, 容易证明它满足性质:

$$g_{\alpha\alpha} = 1, \forall U_\alpha, \quad g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1, \forall U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset.$$

反之, 若有一族光滑函数 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 满足以上性质, 定义商空间 $E := \sqcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{R}^k) / \sim$, 其中等价关系定义为: $(p, v_\alpha) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^k, (q, v_\beta) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k$

$$(p, v_\alpha) \sim (q, v_\beta) \Leftrightarrow p = q, v_\beta = g_{\beta\alpha}(p)v_\alpha.$$

E 的拓扑由商拓扑给出, 记 $[p, v]$ 为 (p, v) 的等价类, 定义 $\pi: E \rightarrow M, \pi([p, v]) = p$. 则 E 在投影映射 π 下成为 M 上的秩 k 的向量丛.

1.1.1 流形可定向与结构群可约化至 $GL^+(k, \mathbb{R})$

1.1.2 黎曼度量与结构群可约化至正交群 $O(k)$

流形 M 上的黎曼度量是指光滑 $(0, 2)$ -张量场 g , g 在每个点的切空间处都是内积. 下面就说明 n 维流形 M 上存在黎曼结构与切丛 TM 的结构群可约化至正交群 $O(n)$ 是等价的.

1°. 设 (M, g) 为一个黎曼流形, 取 M 的一个局部坐标覆盖 $\{(U_\alpha; x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)\}$, 于是 $\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}$ 成为 U_α 上的一组标架, 因为 U_α 上有度量结构, 我们可对标架做 Gram-Schmidt 正交化得到单位正交标架 $e_{1\alpha}, \dots, e_{n\alpha}$, 令局部平凡化映射为

$$\begin{aligned} \psi_\alpha : TU_\alpha &\rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ (p, a^i e_{i\alpha}|_p) &\mapsto (p, a^i e_i) \end{aligned}$$

其中 e_1, \dots, e_n 表示 \mathbb{R}^n 上的自然基底. 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时, 对每个点 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, 因为 $\{e_{i\alpha}|_p\}$ 和 $\{e_{i\beta}|_p\}$ 都是 $T_p M$ 的一组标准正交基, 所以转移函数 $g_{\beta\alpha}(p)$ 是正交矩阵, 因此结构群可被约化至 $O(n)$.

2°. 假设 TM 的结构群可约化至正交群, 设 $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ 是对应的平凡化,