数学笔记

BeBop

March 26, 2025

Contents

Part I

知识整理

Chapter 1

高等代数

1.1 线性空间、对偶空间

1.1.1 对偶空间

1.1.2 协变张量与反变张量

“The general formulation of covariance and contravariance refers to how the components of a coordinate vector transform under a change of basis.” 协变张量与反变张量描述了向量的坐标分量是如何随基向量的变化而变化的.

设线性空间 V 有两组基:

$$\begin{aligned}\{e_i\}: &\quad e_1, \ldots, e_n \\ \{e'_i\}: &\quad {e'}_1, \ldots, {e'}_n\end{aligned}$$

它们的对偶基分别为

$$\begin{aligned}\{{e^*}_i\}: &\quad {e^*}_1, \ldots, e*_n \\ \{{e^*}'_i\}: &\quad {e^*}'_1, \ldots, {e^*}'_n\end{aligned}$$

并且 $\{e_i\}$ 到 $\{e'_i\}$ 的过渡矩阵为 $P = (a_{ij})$, 即

$$({e'}_1, \ldots, {e'}_n) = (e_1, \ldots, e_n)P = (e_1, \ldots, e_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

反变张量: 设 v 是 V 中的某个向量, 它在基 $\{e_i\}, \{{e'}_i\}$ 下的坐标 $v[e_i], v[{e'}_i]$ 分别为 $\{X_i\}$ 和 $\{{X'}_i\}$, 即

$$v = (e_1, \ldots, e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = ({e'}_1, \ldots, {e'}_n)\begin{pmatrix} {x'}_1 \\ \vdots \\ {x'}_n\end{pmatrix}$$

则由

$$v = \left(e'_1, \dots, e'_n\right) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \left(e_1, \dots, e_n\right) P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

知

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

从表达式可以看出 v 坐标分量的变化与基向量的变化是相反的, 也可以这么理解: v 本就是不随基底改变的一个固有对象, 为了保持不变, 它坐标分量的变化必须与基底变化相反, 才能抵消基变换带来的影响, 用式子表示即为

$$\begin{aligned} v &= \left(e_1, \dots, e_n\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \left(e_1, \dots, e_n\right) P P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \left(e'_1, \dots, e'_n\right) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

共变张量: 设 f 是对偶空间 V^* 中的元素, 即 f 是 V 上的线性函数, $\{y_i\} = \{f[e_i]\}$, $\{y'_i\} = \{f[e'_i]\}$ 为它在这两组基下的坐标, 即

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^{n} y_i e_i^* = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i^* \\ &= \sum_{i=1}^{n} y'_i {e^*}'_i = \sum_{i=1}^{n} f(e'_i) {e^*}'_i \end{aligned}$$

而

$$\left(y'_1, \dots, y'_n\right) = \left(f(e'_1), \dots, f(e'_n)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= f\left(\left(e'_1, \ldots, e'_n\right)\right) \\
&= f\left(\left(e_1, \ldots, e_n\right) P\right) \\
&= \left(f(e_1), \ldots, f(e_n)\right) P \\
&= \left(y_1, \ldots, y_n\right) P
\end{aligned}$$

所以 f 的坐标的变化与基底的变化保持一致.

1.2 线性映射、线性变换的矩阵表示

设线性映射 $\mathcal{A}: V \to W$, $(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^m)$ 是 V 的一组基, $(\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n)$ 是 W 的一组基, 那么 $\mathcal{A}$ 在这两组基下的矩阵为,

$$\mathcal{A}(\xi^1, \ldots, \xi^m) = (\mathcal{A}\xi^1, \ldots, \mathcal{A}\xi^m) = (\eta^1, \ldots, \eta^n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = (\eta^1, \ldots, \eta^n)A$$

设 v 是 V 中的向量, 并设

$$v = x_1\xi^1 + \cdots + x_m\xi^m = (\xi^1, \ldots, \xi^m)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = (\xi^1, \ldots, \xi^m)X$$

其中 X 是 v 在基 $(\xi^1, \ldots, \xi^m)$ 下的坐标, 那么由于

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}v &= \mathcal{A}(x_1\xi^1 + \cdots + x_m\xi^m) \\
&= \mathcal{A}(\xi^1, \ldots, \xi^m)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\
&= (\mathcal{A}\xi^1, \ldots, \mathcal{A}\xi^m)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\
&= (\eta^1, \ldots, \eta^n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\
&= (\eta^1, \ldots, \eta^n)AX
\end{aligned}$$

$\mathcal{A}v$ 在基 $(\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n)$ 下的坐标为 AX.

1.3 矩阵迹的几何解释

给定一个矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 在高代中我们定义了矩阵的迹为:

$$\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

下面我们从比较几何的角度给出矩阵迹的一个定义, 并用这个定义重新证明关于迹的一些性质.

1.3.1 用矩阵定义的向量场

设矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 定义 $\mathbb{R}^n$ 上的向量场 $F_A(X):=AX, \forall X\in\mathbb{R}^n$. 则可证明向量场 F_A 的散度 $\mathrm{div}(F_A)$ 是常数, 且经计算恰好是我们所熟知的 A 的迹, 我们就把这个值作为矩阵迹的定义, 即

$$\mathrm{div}F_A:=\mathrm{tr}A$$

注. 矩阵 A 对应某个线性变换 $\mathcal{A}\in\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, 从函数角度来看, $X\mapsto AX$ 是一个从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的向量值函数. 因为每个 $\mathbb{R}^n$ 上的函数都可视作 $\mathbb{R}^n$ 的向量丛的截面, 也即 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑向量场, 这也解释了为什么这么定义 F_A.

注. 我们可以从多变量微积分的角度验证新定义的合理性,

$$F_A(x^1,\dots,x^n)=(\sum_{i=1}^{n}a_{1i}x^i,\dots,\sum_{i=1}^{n}a_{ni}x^i).$$

则

$$(\mathrm{div}F_A)(p)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_A^i}{\partial x^i}\bigg|_p=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

结果是一个常数且取值就是我们熟知的迹.

因为上述求散度计算中仍有取主对角线元素相加的操作, 形式上和最原始的定义没有本质区别, 所以下面用微分形式的语言重新计算散度.

取 $\mathbb{R}^n$ 中的平坦度量, 并取自然坐标系 $(x^1,\dots,x^n)$, 则体积形式为

$$\mathrm{d}V=\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$$

向量场 F_A 的表达式为

$$F_A(x^1,\dots,x^n)=\sum_{i,j}a_{ij}x^j\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{(x^1,\dots,x^n)}$$

向量场 F_A 的散度定义为[1]

$$(\mathrm{div}F_A)\mathrm{d}V = L_{F_A}\mathrm{d}V \tag{1.1}$$

因为

$$L_{F_A}\mathrm{d}x^i = \mathrm{d}L_{F_A}x^i = \mathrm{d}(F_A x^i) = \mathrm{d}\sum_{k=1}^n a_{ik}x^k = \sum_{k=1}^n a_{ik}\mathrm{d}x^k$$

所以

$$\begin{aligned}
L_{F_A}\mathrm{d}V &= L_{F_A}(\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge L_{F_A}\mathrm{d}x^i\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n \\
&= \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{k=1}^n a_{ik}\mathrm{d}x^k\right)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n \\
&= \left(\sum_{i=1}^n a_{ii}\right)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n \\
&= \left(\sum_{i=1}^n a_{ii}\right)\mathrm{d}V
\end{aligned}$$

经过一通计算我们再次验证了这么定义矩阵迹的合理性, 更进一步地, 我们可以用外微分的语言重新证明迹的几个性质, 比如, $\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}BA$.

1.3.2 迹的性质

设矩阵 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, 对应的向量场分别为 F_A, F_B. 下面我们计算 $[F_A, F_B]$. 因为

$$\mathrm{ent}_{ij}[A,B] = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} - b_{ik}a_{kj}$$

所以

$$\begin{aligned}
[F_A, F_B] &= \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n F_A^j\frac{\partial F_B^i}{\partial x^j} - F_B^j\frac{\partial F_A^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ij}x^k - b_{jk}a_{ij}x^k\right)\frac{\partial}{\partial x^i}
\end{aligned}$$

[1] 这个定义和黎曼几何中的定义是一致的

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{jk} - a_{ij}b_{jk}\right)x^k\right)\frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{ent}_{ik}[B,A]x^k\right)\frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= F_{[B,A]}
\end{aligned}$$

我们知道关于李导数和李括号有等式 (Jacobi 恒等式)

$$[L_X, L_Y] = L_{[X,Y]}, \quad \forall X, Y \in C^\infty(\mathbb{R}^n, T\mathbb{R}^n)$$

因此

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(F_{[B,A]})\mathrm{d}V &= L_{F_{[B,A]}}\mathrm{d}V \\
&= L_{[F_A,F_B]}\mathrm{d}V \\
&= [L_{F_A}, L_{F_B}]\mathrm{d}V \\
&= (L_{F_A}L_{F_B} - L_{F_B}L_{F_A})\mathrm{d}V \\
&= (\mathrm{div}F_A)(\mathrm{div}F_B)\mathrm{d}V - (\mathrm{div}F_B)(\mathrm{div}F_A)\mathrm{d}V \\
&= 0
\end{aligned}$$

从而推出

$$\mathrm{tr}(BA - AB) = \mathrm{tr}[B,A] = \mathrm{div}F_{[B,A]} = 0$$

也即

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

若 A, B 不是 n 阶方阵, 不妨设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times m}$, 其中 $m < n$, 令 $A_1 = \begin{pmatrix} A_{m\times n} \\ O_{(n-m)\times n} \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} B_{n\times m}, O_{n\times(n-m)} \end{pmatrix}$ 于是有

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A_1B_1) = \mathrm{tr}(B_1A_1) = \mathrm{tr}(BA)$$

1.4 外代数与 Lie 代数

设 V 是 n 维线性空间, 我们有 V 对应的外代数 $(E(V), \wedge)$, 也即

$$E(V) = \bigoplus_{k=0}^{n} \bigwedge^k V$$

在 $E(V)$ 中我们可以定义“微分” d, 它满足:

- $\mathrm{d} \in \mathrm{End}(\bigwedge^k V, \bigwedge^{k+1} V), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$

- $\mathrm{d}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_s) = \sum_{i=1}^{s}(-1)^{i-1} u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u_i \wedge \cdots \wedge u_s$.

- $\mathrm{dd}u = 0 \quad \forall u \in V$.

实际上我们只需定义线性映射

$$\begin{aligned} \mathrm{d} : V &\to \bigwedge^2 V \\ v &\mapsto \mathrm{d}v \end{aligned}$$

使其满足

- $\mathrm{d}(u \wedge v) = \mathrm{d}u \wedge v - u \wedge \mathrm{d}v$

用线性以及与外积满足反 Leibniz 律使其扩充为 $E(V)$ 到自身的线性映射, 这样再加上 $\mathrm{d}^2 = 0$ 就可以定义一个微分运算了.

接着上面的讨论, 我们考虑线性空间的对偶:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^* : \bigwedge^2 V^* &\to V^* \\ \alpha \wedge \beta &\mapsto \mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) =: [\alpha, \beta] \end{aligned}$$

我们有意把 $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta)$ 记为 $[\alpha, \beta]$ 是有考量的, 因为我们有如下定理:

定理 1.4.1. d 满足 $\mathrm{d}^2 = 0$ 当且仅当 d^* 满足 Jacobi 恒等式, 此时 $(\mathfrak{g} = V^*, [\cdot, \cdot])$ 构成一个 Lie 代数

证明. 对 $\forall u \in V$, 设

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= \sum_{i=1}^{r} v_i \wedge w_i \\ \mathrm{d}v_i &= \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \wedge b_{ij} \\ \mathrm{d}w_i &= \sum_{k=1}^{t} c_{ik} \wedge d_{ik} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} &[[\alpha, \beta], \gamma](u) = \mathrm{d}^*(\mathrm{d}^*(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)(u) = (\mathrm{d}^*(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)(\mathrm{d}u) \\ =&(\mathrm{d}^*(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)(\sum_{i=1}^{r} v_i \wedge w_i) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{i=1}^{r}\Big(\mathrm{d}^*(\alpha\wedge\beta)(v_i)\gamma(w_i)-\mathrm{d}^*(\alpha\wedge\beta)(w_i)\gamma(v_i)\Big)\\
&=\sum_{i=1}^{r}\Big((\alpha\wedge\beta)(\mathrm{d}v_i)\gamma(w_i)-(\alpha\wedge\beta)(\mathrm{d}w_i)\gamma(v_i)\Big)\\
&=\sum_{i=1}^{r}\left((\alpha\wedge\beta)\left(\sum_{j=1}^{s}a_{ij}\wedge b_{ij}\right)\gamma(w_i)-(\alpha\wedge\beta)\left(\sum_{k=1}^{t}c_{ik}\wedge d_{ik}\right)\gamma(v_i)\right)\\
&=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\Big(\alpha(a_{ij})\beta(b_{ij})\gamma(w_i)-\alpha(b_{ij})\beta(a_{ij})\gamma(w_i)\Big)\\
&\quad-\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{t}\Big(\alpha(c_{ik})\beta(d_{ik})\gamma(v_i)-\alpha(d_{ik})\beta(c_{ik})\gamma(v_i)\Big)
\end{aligned}
$$

轮换相加后可得

$$
\begin{aligned}
&\Big([[\alpha,\beta],\gamma]+[[\beta,\gamma],\alpha]+[[\gamma,\alpha],\beta]\Big)(u)\\
=&\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\Big(\alpha(a_{ij})\beta(b_{ij})\gamma(w_i)-\alpha(b_{ij})\beta(a_{ij})\gamma(w_i)+\beta(a_{ij})\gamma(b_{ij})\alpha(w_i)\\
&\qquad-\beta(b_{ij})\gamma(a_{ij})\alpha(w_i)+\gamma(a_{ij})\alpha(b_{ij})\beta(w_i)-\gamma(b_{ij})\alpha(a_{ij})\beta(w_i)\Big)\\
&-\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{t}\Big(\alpha(c_{ik})\beta(d_{ik})\gamma(v_i)-\alpha(d_{ik})\beta(c_{ik})\gamma(v_i)+\beta(c_{ik})\gamma(d_{ik})\alpha(v_i)\\
&\qquad-\beta(d_{ik})\gamma(c_{ik})\alpha(v_i)+\gamma(c_{ik})\alpha(d_{ik})\beta(v_i)-\gamma(d_{ik})\alpha(c_{ik})\beta(v_i)\Big)\\
=&\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\alpha\wedge\beta\wedge\gamma)(a_{ij}\wedge b_{ij}\wedge w_i)-\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{t}(\alpha\wedge\beta\wedge\gamma)(c_{ik}\wedge d_{ik}\wedge v_i)\\
=&(\alpha\wedge\beta\wedge\gamma)\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}a_{ij}\wedge b_{ij}\wedge w_i-\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{t}c_{ik}\wedge d_{ik}\wedge v_i\right)\\
=&(\alpha\wedge\beta\wedge\gamma)(\mathrm{d}^2u)
\end{aligned}
$$

因此对 $\forall\, u\in V$,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}^2u=0\\
\iff&\left([[\alpha,\beta],\gamma]+[[\beta,\gamma],\alpha]+[[\gamma,\alpha],\beta]\right)(u)=0
\end{aligned}
$$

从而定理得证. □

定理 1.4.1 表明一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 可对应一个带有微分映射的外代数 $E(V)$, 而在 $E(V)$ 上我们可以做上同调, 这个上同调就叫 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的上同调.

Chapter 2

黎曼几何

2.1 仿射联络

在局部坐标 $(U;x^i)$ 下有

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma_{ji}^k\frac{\partial}{\partial x^k}$$

其中 Γ_{ji}^k 称为 D 在局部坐标下的**联络系数**.

我们进一步定义任意 (r,s) 型张量的协变导数, 首先定义 1 阶微分形式 α 的协变导数:

$$\begin{aligned}(D_X\alpha)(Y)&=C_1^1\left((D_X\alpha)\otimes Y\right)\\&=C_1^1\left(D_X(\alpha\otimes Y)-\alpha\otimes(D_XY)\right)\\&=X(\alpha(Y))-\alpha(D_XY)\end{aligned}$$

特别地,

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\mathrm{d}x^j=-\Gamma_{ki}^j\mathrm{d}x^k$$

对于一般的 (r,s) 型张量 $\tau\in\mathcal{T}_s^r(M)$, 定义它沿向量场 X 的协变导数为

$$\begin{aligned}&(D_X\tau)(\alpha^1,\dots,\alpha^r,X_1,\dots,X_s)\\=&X\left(\tau(\alpha^1,\dots,\alpha^r,X_1,\dots,X_s)\right)\\&-\sum_{a=1}^r\tau\left(\alpha^1,\dots,D_X\alpha^a,\dots,\alpha^r,X_1,\dots,X_s\right)\\&-\sum_{b=1}^s\tau\left(\alpha^1,\dots,\alpha^r,X_1,\dots,D_XX^b,\dots,X_s\right)\end{aligned}$$

定义一个 (r,s) 型张量场 τ 沿向量场 X 的协变微分为

$$(D\tau)(\alpha^1,\dots,\alpha^r,X_1,\dots,X_s,X) := (D_X\tau)(\alpha^1,\dots,\alpha^r,X_1,\dots,X_s)$$

可以看到 D 把 τ 变为一个 $(r,s+1)$ 型张量. 在局部坐标 $(U;x^i)$ 下的分量表达式为

$$\begin{aligned}\tau^{i_1\cdots i_r,i}_{j_1\cdots j_s} =& \frac{\partial \tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}}{\partial x^i} + \sum_{a=1}^{r} \tau^{i_1\cdots i_{a-1}k i_{a+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\Gamma^{i_a}_{ki}\\ &- \sum_{b=1}^{s} \tau^{i_1\cdots i_r}_{j_i\cdots j_{b-1}k j_{b+1}\cdots j_s}\Gamma^k_{j_b i}\end{aligned}$$

2.2 黎曼联络

定义挠率张量 T 为

$$T(X,Y) = D_XY - D_XY - [X,Y]$$

在局部坐标 $(U;x^i)$ 下 T 的表达式为

$$T = \left(\Gamma^k_{ji} - \Gamma^k_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\otimes \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$$

若由联络定义的挠率张量 T 恒等于零, 则称该联络是**无挠联络**. 由局部坐标表达式可知无挠联络的联络系数满足 $\Gamma^k_{ji} = \Gamma^k_{ij}$.

若联络 D 和度量 g 满足 g 的协变微分 $Dg \equiv 0$, 则称联络和度量是**相容的**. 该条件等价于 $(D_Zg)(X,Y) = 0,\ \forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ 因为

$$(D_Zg)(X,Y) = Z\langle X,Y\rangle - \langle D_ZX,Y\rangle - \langle X,D_ZY\rangle$$

所以联络和度量相容当且仅当

$$Z\langle X,Y\rangle = \langle D_ZX,Y\rangle + \langle X,D_ZY\rangle$$

2.2.1 黎曼几何基本定理

定理 2.2.1. *设 (M,g) 是黎曼流形, 则 M 上存在唯一一个与 g 相容的无挠联络 D, 我们称之为***黎曼联络***.*

定理 2.2.2 (Koszul 公式)**.** *若联络 D 满足无挠且与度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 相容, 则有公式*

$$\begin{aligned}2\langle D_XY,Z\rangle =& X\langle Y,Z\rangle + Y\langle X,Z\rangle - Z\langle X,Y\rangle\\ &+ \langle [X,Y],Z\rangle - \langle X,[Y,Z]\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle\end{aligned} \tag{2.1}$$

利用 Koszul 公式可以很容易证明黎曼几何基本定理.

2.3 黎曼联络系数的坐标变换

$$\Gamma^k_{ij}=\tilde{\Gamma}^r_{pq}\frac{\partial\tilde{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial\tilde{x}^q}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^r}+\frac{\partial^2\tilde{x}^r}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^r}$$

因为

$$\begin{aligned}0=&\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^r}\frac{\partial\tilde{x}^r}{\partial x^j}\right)\\=&\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^r}\right)\frac{\partial\tilde{x}^r}{\partial x^j}+\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^r}\frac{\partial^2\tilde{x}^r}{\partial x^i\partial x^j}\\=&\frac{\partial\tilde{x}^s}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^s}\left(\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^r}\right)\frac{\partial\tilde{x}^r}{\partial x^j}+\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^r}\frac{\partial^2\tilde{x}^r}{\partial x^i\partial x^j}\\=&\frac{\partial\tilde{x}^s}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^k}{\partial\tilde{x}^r\partial\tilde{x}^s}\frac{\partial\tilde{x}^r}{\partial x^j}+\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^r}\frac{\partial^2\tilde{x}^r}{\partial x^i\partial x^j}\end{aligned}$$

故

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial\tilde{x}^r\partial\tilde{x}^s}\frac{\partial\tilde{x}^s}{\partial x^i}\frac{\partial\tilde{x}^r}{\partial x^j}=-\frac{\partial^2\tilde{x}^r}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^r}\Big(\text{一般而言}\neq 0\Big)$$

2.4 由联络定义的各种微分算子

- **散度算子** div: $\mathrm{div}(X)=C^1_1(DX)$

$$(\mathrm{div}X)|_U=X^i_{,i}=\frac{\partial X^i}{\partial x^i}+X^k\Gamma^i_{ki}=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{G}X^i).$$

- **梯度算子** ∇: $\langle\nabla f,X\rangle:=\mathrm{d}f(X)=X(f)$

$$(\nabla f)|_U=f^i\frac{\partial}{\partial x^i}=f_jg^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}=g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

- **Laplace 算子** Δ: $\Delta:=\mathrm{div}\circ\nabla$

$$(\Delta f)|_U=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{G}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)$$

- **函数的 Hessian 算子** $\mathrm{Hess}(f):=D(Df)=D(\mathrm{d}f)$

$$(\mathrm{Hess}(f))(X,Y)=Y(X(f))-(D_YX)(f)$$

分量的局部坐标表达式为

$$\mathrm{Hess}(f)_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} = f_{i,j}$$

Hessian 算子与 Laplace 算子的关系是

$$\Delta f = \mathrm{tr}_g(\mathrm{Hess}(f)) = \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}(f))$$

用分量表示即

$$\Delta f = g^{ij} f_{i,j}$$

- **Hodge 星 $*$ 算子**: 设 $\omega \in A^r(M)$ 且

$$\omega|_U = \frac{1}{r!}\omega_{i_1}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}$$

命

$$(*\omega)|_U = \frac{\sqrt{G}}{r!(m-r)!}\delta_{i_1\cdots i_m}^{1\cdots m}\omega^{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_m}$$

- **余微分算子** $\delta := (-1)^{mr+1} * \circ \mathrm{d} \circ * = \mathrm{d}^*$

$$(\mathrm{d}\varphi, \psi) = (\varphi, \delta\psi)$$

- **Hodge-Laplace 算子** $\bar{\Delta} := \mathrm{d} \circ \delta + \delta \circ \mathrm{d}$

$$\bar{\Delta} f = \Delta f$$

命题 2.4.1. 在高等代数章节我们定义向量场 X 的散度为

$$(\mathrm{div}X)\mathrm{d}V := L_X \mathrm{d}V \tag{2.2}$$

这个定义与联络的定义实际上是一致的.

证明. 在局部坐标系 $\{U; x^1, \ldots, x^n\}$ 下, 体积元的表达式为

$$\mathrm{d}V = \sqrt{G}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n.$$

向量场 $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$. 于是

$$\begin{aligned}
L_X \mathrm{d}V &= L_X\left(\sqrt{G}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n\right) \\
&= X(\sqrt{G})\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n + \sqrt{G}\sum_{k=1}^n \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge L_X\mathrm{d}x^k \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\
&= \sum_{k=1}^n X^k \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x^k}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n + \sqrt{G}\sum_{k=1}^n \frac{\partial X^k}{\partial x^k}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\
&= \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{G}X^k)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{G}X^k)\mathrm{d}V
\end{aligned}$$

比较散度算子的局部表达式会发现这就是 (2.2) 式. □

2.5 不同双曲模型之间的等距同构

2.5.1 三种双曲模型

- Poincare 上半平面模型 $\mathbb{H}^n := \left\{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x^n > 0\right\}$

  其上的度量定义为

$$h = \frac{(\mathrm{d}x^1)^2 + \cdots + (\mathrm{d}x^n)^2}{(x^n)^2}$$

- Poincare 球模型 $D^n := \left\{(y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, |y| < 1\right\}$

  其上的度量定义为[1]

$$g_{-1} = \frac{4\left[(\mathrm{d}y^1)^2 + \cdots + (\mathrm{d}y^n)^2\right]}{(1 - |y|^2)^2}$$

- Minkowski 模型: $\mathbb{R}^{n+1}$ 上定义 Lorentz 内积 $l = \langle \cdot, \cdot \rangle$

$$l(x, y) = \langle x, y \rangle_1 = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i - x^{n+1} y^{n+1}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

  考虑 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中双叶双曲面的上半叶

$$M^n := \left\{z = \left(z^1, \ldots, z^{n+1}\right) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \langle z, z \rangle = -1 \text{ 且 } z^{n+1} > 0\right\},$$

  其上的度量定义为嵌入映射 i 诱导的拉回度量 $m = i^* l$.

2.5.2 双曲模型间的等距同构

- M^n 与 D^n 之间: 由球极投影给出

$$\begin{aligned}
\varphi : M^n &\to D^n \\
\left(z^1, \ldots, z^{n+1}\right) &\mapsto \left(y^1, \ldots, y^n\right) = \left(\frac{z^1}{1 + z^{n+1}}, \ldots, \frac{z^n}{1 + z^{n+1}}\right) \\
\varphi^{-1} : D^n &\to M^n \\
\left(y^1, \ldots, y^n\right) &\mapsto \left(z^1, \ldots, z^{n+1}\right) = \left(\frac{2y^1}{1 - |y|^2} \cdots \frac{2y^n}{1 - |y|^2}, \frac{1 + |y|^2}{1 - |y|^2}\right)
\end{aligned}$$

[1]注意这里有一个常数 4, 不加上就无法与上半平面模型同构.

- $\mathbb{H}^n$ 与 D^n 之间: 由分式线性变换的推广, Cayley 变换给出

$$\begin{aligned}
\psi : \mathbb{H}^n &\to D^n \\
\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R} \ni (\vec{x}, x^n) \mapsto (\vec{y}, y^n) &= \left(\frac{2\vec{x}}{|\vec{x}|^2+(x^n+1)^2}, \frac{|\vec{x}|^2+(x^n)^2-1}{|\vec{x}|^2+(x^n+1)^2}\right) \\
\psi^{-1} : D^n &\to \mathbb{H}^n \\
\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R} \ni (\vec{y}, y^n) \mapsto (\vec{x}, x^n) &= \left(\frac{2\vec{y}}{|\vec{y}|^2+(y^n-1)^2}, \frac{1-|\vec{y}|^2-(y^n)^2}{|\vec{y}|^2+(y^n-1)^2}\right)
\end{aligned}$$

可以试着用它们之间的同构给出 $\mathrm{SO}(2,1)$ 到 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 的显式同构.

2.6 黎曼几何中的各种曲率

2.6.1 曲率张量

缘起

在协变微分中我们引进记号

$$\nabla Z(X) := \nabla_X Z$$

于是可以考虑多次协变微分是否可换序的问题, 即

$$\nabla^2 Z(X,Y) \stackrel{?}{=} \nabla^2 Z(Y,X)$$

我们仔细地将等号两侧的式子展开

$$\begin{aligned}
\nabla^2 Z(X,Y) &= (\nabla_Y \nabla Z)(X) \\
{}^2 &= \nabla_Y((\nabla Z)(X)) - (\nabla Z)(\nabla_Y X) \\
&= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_Y X} Z
\end{aligned}$$

若该仿射联络是无挠联络, 则有

$$\begin{aligned}
&\nabla^2 Z(X,Y) - \nabla^2 Z(Y,X) \\
=&\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_Y X - \nabla_X Y} Z \\
=&\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_{[Y,X]} Z
\end{aligned}$$

受此启发, 我们定义曲率张量 $\mathcal{R}(\cdot,\cdot)\cdot : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ 为:

定义 2.6.1. $\mathcal{R}(X,Y)Z := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$

注. *仿射联络空间 (M, D) 的挠率张量和曲率张量实际上是判断它偏离仿射空间的量度.*

[2]这里出现了一些让人感到不适的 Leibniz 律, 实际上用求协变导数与张量缩并满足 Leibniz 律可以解释这一切. $C(\nabla_Y(\nabla T)\otimes X) = \nabla_Y(C(\nabla T\otimes X)) - C(\nabla T\otimes\nabla_Y X)$.

Ricci 恒等式

回顾 **缘起**中的内容, Z 作为一个 (1,0) 型张量场可自然与一个 (1,0) 型张量场 (即一次微分式) ω 做配合. 因为两次协变微分后 $\nabla 2Z$ 为一个 (1,2) 型张量. 那么一方面我们有

$$\nabla^2 Z(\omega, Y, X) - \nabla^2 Z(\omega, X, Y)$$

另一方面我们有

$$(\mathcal{R}(X,Y)Z)(\omega) = (\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z)(\omega)$$

经过一番激烈地运算会发现

$$\begin{aligned}\nabla^2 Z(\omega, Y, X) - \nabla^2 Z(\omega, X, Y) = Z(\mathcal{R}(Y,X)\omega)\\ (\mathcal{R}(X,Y)Z)(\omega) = -Z(\mathcal{R}(X,Y)\omega) = Z(\mathcal{R}(Y,X)\omega)\end{aligned}$$

在这个角度下它们确实是一样的.

定义 2.6.2 (曲率算子作用在张量场)**.** *我们先推导出曲率算子 $\mathcal{R}(X,Y)$ 作用在 $(0,0)$ 型 (即光滑函数)、$(1,0)$ 型 (即光滑向量场)、$(0,1)$ 型 (即一次微分式) 张量上是怎么样的. 然后设曲率算子满足:*

- *与张量积运算满足 Leibniz 法则*
- *与缩并运算可交换*

以此定义曲率算子在一般 (r,s) 型张量上 τ 的作用.

命题 2.6.3 (Ricci 恒等式)**.** *设 τ 为 (r,s) 型张量场, $\omega^1,\dots,\omega^r$ 是 r 个光滑 1 形式, $X_1,\dots,X_s$ 是 s 个光滑向量场, 设 Y, Z 为两个光滑向量场, 则*

$$\begin{aligned}&\nabla^2\tau(\cdots,\omega^i,\cdots;\cdots,X_j,\cdots;Z,Y) - \nabla^2\tau(\cdots,\omega^i,\cdots;\cdots,X_j,\cdots;Y,Z)\\ =&\tau(\cdots,\mathcal{R}(Z,Y)\omega^i,\cdots;\cdots,X_j,\cdots) + \tau(\cdots,\omega^i,\cdots;\cdots,\mathcal{R}(Z,Y)X_j,\cdots)\\ =&(\mathcal{R}(Y,Z)\tau)(\cdots,\omega^i,\cdots;\cdots,X_j,\cdots)\ (\text{注意}Y,Z\text{顺序})\end{aligned}$$

注. *注意 Ricci 恒等式并没有告诉我们更多的东西, 它只是反复推导定义式得到的.*

2.6.2 黎曼曲率张量的代数性质

对称性

设 V 为 n 维线性空间, 若 $R \in (V^*)^{\otimes 4}$ 且满足:

1. $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W) = -R(X,Y,W,Z) = R(Z,W,X,Y)$
2. 第一 Bianchi 恒等式: $R(X,Y,Z,W)+R(Y,Z,X,W)+R(Z,X,Y,W) = 0$

对 $\forall X, Y, Z, W \in V$ 均成立. 则称 R 为代数黎曼曲率张量, 全体代数黎曼曲率张量构成的线性空间记为 $\mathcal{R}(V^*)$.

我们分别记 $\Sigma^n(V^*)$, $\bigwedge^n(V^*)$ 为对偶空间 V^* 的对称张量积和反对称张量积, 则由第一条可知 $\mathcal{R}(V^*) \subset \Sigma^2(\bigwedge^2 V^*)$. 容易看出 $\bigwedge^4 V^*$ 也为 $\Sigma^2(\bigwedge^2 V^*)$ 的一个子空间, 而且若在 V 上有度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle_g$, 由第二条可推出

$$\Sigma^2(\bigwedge^2 V^*) = \mathcal{R}(V^*) \oplus \bigwedge^4 V^*$$

直和项互相正交.

我们分两步说明上述论断. 首先对 $\forall R \in \mathcal{R}(V^*)$, $S \in \bigwedge^4 V^*$, 设 e_i 为 V 的一组标准正交基, 则

$$\begin{aligned}
&\langle R, S\rangle_g \\
=&\sum_{i,j,k,l} R(e_i,e_j,e_k,e_l)S(e_i,e_j,e_k,e_l) \\
=&\frac{1}{3}\sum_{i,j,k,l}\left(R(e_i,e_j,e_k,e_l)+R(e_j,e_k,e_i,e_l)+R(e_k,e_i,e_j,e_l)\right)S(e_i,e_j,e_k,e_l) \\
=&0
\end{aligned}$$

其次, 对每一个 $T \in \Sigma^2(\bigwedge^2 V^*) \subset (V^*)^{\otimes 4}$, 我们原本就有一个将一般 (0,4) 型张量化为反对称张量的算子 $\mathcal{A}$, 在附加的对称性下, 反对称算子在 $\Sigma^2(\bigwedge^2 V^*)$ 上的作用可以写为

$$\mathcal{A}(T)(X,Y,Z,W) = \frac{1}{3}\left(T(X,Y,Z,W)+T(Y,Z,X,W)+T(Z,X,Y,W)\right)$$

可以验证这样定义的 $\mathcal{A}(T)$ 确实为一个反对称张量:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(T)(Y,Z,W,X) \\
=&\frac{1}{3}\left(T(Y,Z,W,X)+T(Z,W,Y,X)+T(W,Y,Z,X)\right) \\
=&-\frac{1}{3}\left(T(X,Y,Z,W)+T(Y,Z,X,W)+T(Z,X,Y,W)\right) \\
=&-\mathcal{A}(T)(X,Y,Z,W)
\end{aligned}$$

注. 因为 $S_4 = \langle (12), (1234) \rangle$ 而 (12), (1234) 在 $\mathcal{A}(T)$ 上的作用均符合反对称张量符号变化规律, 所以 $\mathcal{A}(T)$ 是反对称张量.

得到反对称张量的分量后就可以很容易得到代数黎曼曲率张量的分量了:

$$T_R := T - \mathcal{A}(T)$$

可以验证 $T_R \in \mathcal{R}(V^*)$

$$\begin{aligned}
&T_R(X,Y,Z,W) + T_R(Y,Z,X,W) + T_R(Z,X,Y,W) \\
=&T(X,Y,Z,W) + T(Y,Z,X,W) + T(Z,X,Y,W) - 3\mathcal{A}(T) \\
=&0
\end{aligned}$$

命题 2.6.4. n 维线性空间 V 上的代数黎曼曲率张量的维数为 $\dfrac{n^2(n^2-1)}{12}$

证明. 因为

$$\dim \mathcal{R}(V^*) = \dim \Sigma^2(\bigwedge^2 V^*) - \dim \bigwedge^4 V^*$$

所以

$$\dim \mathcal{R}(V^*) = \frac{1}{2}\binom{n}{2}\left(\binom{n}{2} - 1\right) - \binom{n}{4} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

□

Bianchi 恒等式

Bianchi 第一、第二恒等式有多种不同表现形式, 在这里统一说一下:

命题 2.6.5 (曲率算子形式的 Bianchi 恒等式)**.**
这里 $\mathcal{R}(\cdot,\cdot)\cdot$ 是一个 $(1,3)$-型张量.

1. $\mathcal{R}(X,Y)Z + \mathcal{R}(Y,Z)X + \mathcal{R}(Z,X)Y = 0$.
2. $(\nabla_X \mathcal{R})(Y,Z)W + (\nabla_Y \mathcal{R})(Z,X)W + (\nabla_Z \mathcal{R})(X,Y)W = 0$.

命题 2.6.6 (黎曼曲率张量形式的 Bianchi 恒等式)**.**
这里 $R(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot) = \langle \mathcal{R}(\cdot,\cdot)\cdot, \cdot \rangle$ 是一个 $(0,4)$-型张量.

1. $R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0$.

   事实上固定任何一个位置, 将其他三个位置轮换都正确.

2. $\nabla R(X,Y,Z,W,V) + \nabla R(Y,V,Z,W,X) + \nabla R(V,X,Z,W,Y) = 0$.

命题 2.6.7 (曲率算子在局部坐标表示下的 Bianchi 恒等式)**.**
在局部坐标下曲率算子

$$R = R^i_{jkl}\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k \otimes \mathrm{d}x^l,$$
$$\nabla R = R^i_{jkl,h}\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k \otimes \mathrm{d}x^l \otimes \mathrm{d}x^h.$$

1. $R^i_{jkl} + R^i_{klj} + R^i_{ljk} = 0.$
2. $R^i_{jkl,h} + R^i_{jlh,k} + R^i_{jhk,l} = 0.$

命题 2.6.8 (黎曼曲率张量在局部坐标表示下的 Bianchi 恒等式)**.**
在局部坐标下黎曼曲率张量

$$R = R_{ijkl}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k \otimes \mathrm{d}x^l,$$
$$\nabla R = R_{ijkl,h}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k \otimes \mathrm{d}x^l \otimes \mathrm{d}x^h.$$[2]

1. $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0.$
2. $R_{ijkl,h} + R_{jhkl,i} + R_{hikl,j} = 0.$[3]

命题 2.6.9 (曲率形式的 Bianchi 恒等式)**.** 详见 (2.4) 和 (2.5).

命题 2.6.10 (一般向量丛上联络的 Bianchi 恒等式)**.** $\nabla^3 = 0$.

2.6.3 相配二次型

2.6.4 曲率张量、挠率张量的坐标分量表示

设 (M, g) 为黎曼流形, Levi – Civita 联络为 ∇, (U, x^i) 为一个局部坐标邻域, 记 $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ 则:

- 挠率张量 $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$

  $$T\big|_U = T^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k} \otimes \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$$

  其中

  $$T^k_{ij} = \mathrm{d}x^k\left(T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)$$

[2]此处存疑.
[3]此处存疑.

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{d}x^k \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\
&= \Gamma^k_{ji} - \Gamma^k_{ij}
\end{aligned}
$$

于是

$$
T\big|_U = (\Gamma^k_{ji} - \Gamma^k_{ij}) \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j
$$

- 曲率张量 $\mathcal{R}(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$

$$
\mathcal{R}\big|_U = R^l_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^l} \otimes \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k
$$

其中

$$
\begin{aligned}
R^l_{ijk} &= \mathrm{d}x^l \left(\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\
&= \mathrm{d}x^l \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\
&= \mathrm{d}x^l \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^p} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\Gamma^p_{ki} \frac{\partial}{\partial x^p} \right) \right) \\
&= \mathrm{d}x^l \left(\frac{\partial \Gamma^p_{kj}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^p} + \Gamma^p_{kj} \Gamma^q_{pi} \frac{\partial}{\partial x^q} - \frac{\partial \Gamma^p_{ki}}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^p} - \Gamma^p_{ki} \Gamma^q_{pj} \frac{\partial}{\partial x^q} \right) \\
&= \frac{\partial \Gamma^l_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial x^j} + \Gamma^h_{kj} \Gamma^l_{hi} - \Gamma^h_{ki} \Gamma^l_{hj}
\end{aligned}
$$

因此

$$
\mathcal{R}\big|_U = \left(\frac{\partial \Gamma^l_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial x^j} + \Gamma^h_{kj} \Gamma^l_{hi} - \Gamma^h_{ki} \Gamma^l_{hj} \right) \frac{\partial}{\partial x^l} \otimes \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k
$$

- 黎曼曲率张量 $R(X,Y,Z,W) = \langle \mathcal{R}(X,Y)Z, W \rangle$

$$
R\big|_U = R_{ijkl} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j \mathrm{d}x^k \mathrm{d}x^l
$$

其中

$$
R_{ijkl} = R^h_{ijk} g_{hl}
$$

或者

$$
\begin{aligned}
&R_{ijkl} \\
&= \left\langle \mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k}-\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle\\
&=\frac{\partial}{\partial x^i}\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle-\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k},\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle\\
&\quad-\frac{\partial}{\partial x^j}\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle+\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k},\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle\\
&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\left\langle\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle+\frac{\partial}{\partial x^k}\left\langle\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle-\frac{\partial}{\partial x^l}\left\langle\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle\right)\\
&\quad-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left\langle\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle+\frac{\partial}{\partial x^k}\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle-\frac{\partial}{\partial x^l}\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle\right)\\
&\quad+\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k},\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle-\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k},\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^{jl^2}}+\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^{ik^2}}-\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^{jk^2}}-\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^{il^2}}\right)\\
&\quad+g_{pq}\Gamma^p_{ki}\Gamma^q_{lj}-g_{pq}\Gamma^p_{kj}\Gamma^q_{li}
\end{aligned}
$$

第四个等号用到了 Koszul 公式 2.2.2.

2.6.5 联络形式、挠率形式、曲率形式

除了用某个局部坐标给出的自然坐标标架场之外, 我们也经常用一般的标架场, 设 $\{e_i\}$ 为某个领域 U 上处处线性无关的 n 个向量场, $\{\omega^i\}$ 为其对偶一次微分式.

注. 一般地, $\{e_i\}$ 不能定义在整个 M 上, 因为这要求 M 的切丛平凡.

在这种一般的标架场下, 仍可以写出坐标分量表示, 设

$$\nabla_{e_i}e_j=\Gamma^k_{ji}e_k$$

则

$$\nabla e_j=\Gamma^k_{ji}\omega^i\otimes e_k$$

各个形式的定义

- 联络形式:

  令一次外微分式

  $$\omega^k_j:=\Gamma^k_{ji}\omega^i$$

  于是

  $$\nabla e_j=\omega^k_j\otimes e_k$$

  我们称 $\{\omega^k_j\}$ 为黎曼流形的联络形式.

- 挠率形式:
  令二次外微分式
  $$\Omega^i := \mathrm{d}\omega^i + \omega^i_j \wedge \omega^j$$
  可以验证
  $$\Omega^i = \frac{1}{2} T^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k$$
  其中 $T^i_{jk} = \omega^i \left(T\left(e_j, e_k\right)\right)$, 我们称 $\{\Omega^i\}$ 为挠率形式, 此时
  $$T\big|_U = \Omega^i \otimes e_i$$
  也即
  $$T(X,Y) = \Omega^i(X,Y)e_i$$
- 曲率形式:
  令二次外微分式
  $$\Omega^j_i := \mathrm{d}\omega^j_i + \omega^j_k \wedge \omega^k_i$$
  可以验证
  $$\Omega^j_i = \frac{1}{2} R^j_{ikl} \omega^k \omega^l$$
  其中 $R^j_{ikl} = \omega^l \left(\mathcal{R}(e_i, e_k)e_l\right)$, 我们称 $\{\Omega^j_i\}$ 为曲率形式, 此时
  $$\mathcal{R}\big|_U = \Omega^j_i \otimes \omega^i \otimes e_j$$
  也即
  $$\mathcal{R}(X,Y)e_i = \Omega^j_i(X,Y)e_j$$

定义 2.6.11 (结构方程). 我们称

$$\begin{cases} \mathrm{d}\omega^i = \Omega^i - \omega^i_j \wedge \omega^j \\ \mathrm{d}\omega^i_j = \Omega^i_j - \omega^i_k \wedge \omega^k_j \end{cases} \tag{2.3}$$

为仿射联络空间 (M, ∇) 的 **结构方程**

定理 2.6.12 (第一、第二 Bianchi 恒等式). 联络形式 ω^i_j、挠率形式 Ω^i 和曲率形式 Ω^i_j 满足关系式

$$\mathrm{d}\Omega^i = \omega^i_j \wedge \Omega^j - \Omega^i_j \wedge \omega^j \tag{2.4}$$

$$\mathrm{d}\Omega^i_j = \omega^i_k \wedge \Omega^k_j - \Omega^i_k \wedge \omega^k_j \tag{2.5}$$

其中式 *(2.4)* 对应第一 Bianchi 恒等式, 式 (2.5) 对应第二 Bianchi 恒等式.

坐标变换下各个形式的变换

设 $\{e_i\}$ 和 $\{\tilde{e_i}\}$ 都是开子集 U 上的切标架场, $\{\omega^i\}$ 和 $\{\tilde{\omega^i}\}$ 分别表示相应的余切标架场, $\{\omega^i_j\}$ 和 $\{\tilde{\omega^i_j}\}$ 表示相应的联络形式, 设坐标变换关系为

$$\tilde{e_i} = a^j_i e_j \qquad \tilde{\omega^i} = b^i_j \omega^j$$

其中矩阵 $b = (b^i_j)$ 是 $a = (a^j_i)$ 的逆矩阵. 则

$$\begin{gathered}\tilde{\omega}^i_j = b^i_k \omega^l_j + b^i_k \omega^k_l a^l_j \\ \Omega^i = a^i_j \tilde{\Omega}^j \\ \tilde{\Omega}^i_j = b^i_k \Omega^k_l a^l_j\end{gathered}$$

用矩阵表示即为

$$\tilde{\omega} = a^{-1}\mathrm{d}a + a^{-1}\omega a \qquad \tilde{\Omega} = a^{-1}\Omega a$$

用矩阵的语言重新表示联络形式

用分量表示以上微分式, 且用 Einstein 求和约定简写求和式总是不那么让人习惯, 这里用矩阵的语言重新封装一下, 能把一些复杂的计算看得更清楚.

形式上我们可以写出以向量、微分形式为元素的矩阵, 并定义这种矩阵之间的乘法、张量积、外积以及求外微分. 为了快速进入主题, 我们省略了这些运算的定义、性质等内容, 下面直接进入正题:

设 $e_1, \ldots, e_n$ 为局部标架场,

$$\nabla e_j = \Gamma^k_{ji} e_k \otimes \omega^i = (e_1, \cdots, e_n) \begin{pmatrix} \Gamma^1_{j1} & \cdots & \Gamma^1_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma^n_{j1} & \cdots & \Gamma^n_{jn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

令

$$\omega^i_j = (\Gamma^i_{j1}, \cdots, \Gamma^i_{jn}) \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$$

代入式 (2.6) 并打包整理可得到

$$\nabla(e_1, \cdots, e_n) = (e_1, \cdots, e_n) \begin{pmatrix} \omega^1_1 & \cdots & \omega^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ \omega^n_1 & \cdots & \omega^n_n \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

记 $w := (\omega^1, \cdots, \omega^n)'$, $W := (\omega^i_j)$, 它们分别是余切标架场构成的列向量和联络形式构成的矩阵.

定义挠率形式

$$\begin{pmatrix}\Omega^1\\ \vdots\\ \Omega^n\end{pmatrix}=\mathrm{d}\begin{pmatrix}\omega^1\\ \vdots\\ \omega^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\omega_1^1&\cdots&\omega_n^1\\ \vdots&&\vdots\\ \omega_1^n&\cdots&\omega_n^n\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\omega^1\\ \vdots\\ \omega^n\end{pmatrix}\tag{2.8}$$

定义曲率形式

$$\begin{pmatrix}\Omega_1^1&\cdots&\Omega_n^1\\ \vdots&&\vdots\\ \Omega_1^n&\cdots&\Omega_n^n\end{pmatrix}=\mathrm{d}\begin{pmatrix}\omega_1^1&\cdots&\omega_n^1\\ \vdots&&\vdots\\ \omega_1^n&\cdots&\omega_n^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\omega_1^1&\cdots&\omega_n^1\\ \vdots&&\vdots\\ \omega_1^n&\cdots&\omega_n^n\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\omega_1^1&\cdots&\omega_n^1\\ \vdots&&\vdots\\ \omega_1^n&\cdots&\omega_n^n\end{pmatrix}\tag{2.9}$$

记 $\omega:=(\Omega^1,\cdots,\Omega^n)'$, $\Omega:=(\Omega_j^i)$, 则式 (2.8) 和 (2.9) 可写为

$$\begin{cases}\omega=\mathrm{d}w+W\wedge w & (2.10)\\ \Omega=\mathrm{d}W+W\wedge W & (2.11)\end{cases}$$

注. 注意挠率形式向量 ω 和余切标架向量 w 长得很像, 暂时没想到更好的记号, 注意区分.

命题 2.6.13 (第一、第二 Bianchi 恒等式)**.**

$$\begin{cases}\mathrm{d}\omega=\Omega\wedge w-W\wedge w & (2.12)\\ \mathrm{d}\Omega=\Omega\wedge W-W\wedge\Omega & (2.13)\end{cases}$$

证明. 第一 Bianchi 恒等式:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega&=\mathrm{d}(\mathrm{d}w+W\wedge w)=\mathrm{d}W\wedge w-W\wedge\mathrm{d}w\\ &=(\Omega-W\wedge W)\wedge w-W\wedge(\omega-W\wedge w)\\ &=\Omega\wedge w-W\wedge\omega\end{aligned}$$

第二 Bianchi 恒等式:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Omega&=\mathrm{d}(\mathrm{d}W+W\wedge W)=\mathrm{d}W\wedge W-W\wedge\mathrm{d}W\\ &=(\Omega-W\wedge W)\wedge W-W\wedge(\Omega-W\wedge W)\\ &=\Omega\wedge W-W\wedge\Omega\end{aligned}$$

□

命题 2.6.14 (坐标变换)**.** 设 $\{e_i\}$、$\{\tilde{e}_i\}$ 是两个局部标架场, $\{\omega^i\}$、$\{\tilde{\omega^i}\}$ 分别对应它们的对偶 *1*-形式, 它们之间的坐标变换为

$$(e_1,\cdots,e_n)=(\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_n)\begin{pmatrix}a_1^1&\cdots&a_n^1\\ \vdots&&\vdots\\ a_1^n&\cdots&a_n^n\end{pmatrix}$$

则对偶 *1*-形式之间的变换为

$$\begin{pmatrix}\omega^1\\ \vdots\\ \omega^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1^1 & \cdots & a_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ a_1^n & \cdots & a_n^n\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{\omega}^1\\ \vdots\\ \tilde{\omega}^n\end{pmatrix}$$

记过渡矩阵 $a:=(a_j^i)$, 则上述式子可改写为

$$(e_1,\cdots,e_n)=(\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_n)a \tag{2.14}$$

和

$$\begin{pmatrix}\omega^1\\ \vdots\\ \omega^n\end{pmatrix}=a^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{\omega}^1\\ \vdots\\ \tilde{\omega}^n\end{pmatrix} \tag{2.15}$$

此时联络形式之间的变换为

$$\tilde{w}=a^{-1}\mathrm{d}a+a^{-1}wa \tag{2.16}$$

挠率形式之间的变换为

$$\tilde{\omega}=a^{-1}\omega \tag{2.17}$$

曲率形式之间的变换为

$$\tilde{\Omega}=a^{-1}\Omega a \tag{2.18}$$

证明. 对于式 (2.16), 因为

$$\begin{aligned}\nabla(\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_n)=&\nabla((e_1,\cdots,e_n)a)\\ =&\left(\nabla(e_1,\cdots,e_n)\right)a+(e_1,\cdots,e_n)\nabla a\\ =&(e_1,\cdots,e_n)wa+(e_1,\cdots,e_n)\mathrm{d}a\\ =&(\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_n)a^{-1}(wa+\mathrm{d}a)\\ =&(\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_n)\tilde{w}\end{aligned}$$

故

$$\tilde{w}=a^{-1}wa+a^{-1}\mathrm{d}a$$

对于式 (2.17), 因为

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}=&\mathrm{d}\tilde{w}+\tilde{W}\wedge\tilde{w}\\ =&\mathrm{d}(a^{-1}w)+(a^{-1}\mathrm{d}a+a^{-1}Wa)\wedge a^{-1}w\\ =&\mathrm{d}a^{-1}w+a^{-1}\mathrm{d}w+a^{-1}(\mathrm{d}a)a^{-1}\wedge w+a^{-1}W\wedge w\end{aligned}$$

由

$$0=\mathrm{d}(a^{-1}a)=(\mathrm{d}a^{-1})a+a^{-1}\mathrm{d}a$$

所以

$$\mathrm{d}a^{-1} = -a^{-1}(\mathrm{d}a)a^{-1} \tag{2.19}$$

代入可得

$$\tilde{\omega} = a^{-1}\mathrm{d}w + a^{-1}W \wedge w = a^{-1}\omega$$

对于式 (2.18), 因为

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega} =& \mathrm{d}\tilde{W} + \tilde{W} \wedge \tilde{W} \\ =& \mathrm{d}(a^{-1}\mathrm{d}a + a^{-1}Wa) + (a^{-1}\mathrm{d}a + a^{-1}Wa) \wedge (a^{-1}\mathrm{d}a + a^{-1}Wa) \\ =& \mathrm{d}a^{-1} \wedge \mathrm{d}a + \mathrm{d}a^{-1} \wedge Wa + a^{-1}\mathrm{d}Wa - a^{-1}W \wedge \mathrm{d}a \\ & + a^{-1}(\mathrm{d}a)a^{-1} \wedge \mathrm{d}a + a^{-1}(\mathrm{d}a)a^{-1} \wedge Wa + a^{-1}W \wedge \mathrm{d}a + a^{-1}W \wedge Wa \\ =& a^{-1}(\mathrm{d}W + W \wedge W)a\end{aligned}$$

其中第四个等式用到了式 (2.19), 所以

$$\tilde{\Omega} = a^{-1}\Omega a$$

□

Part II

杂题集萃

Part III

易错知识

Part IV

亟待整理

1. 李群正合列的分裂问题

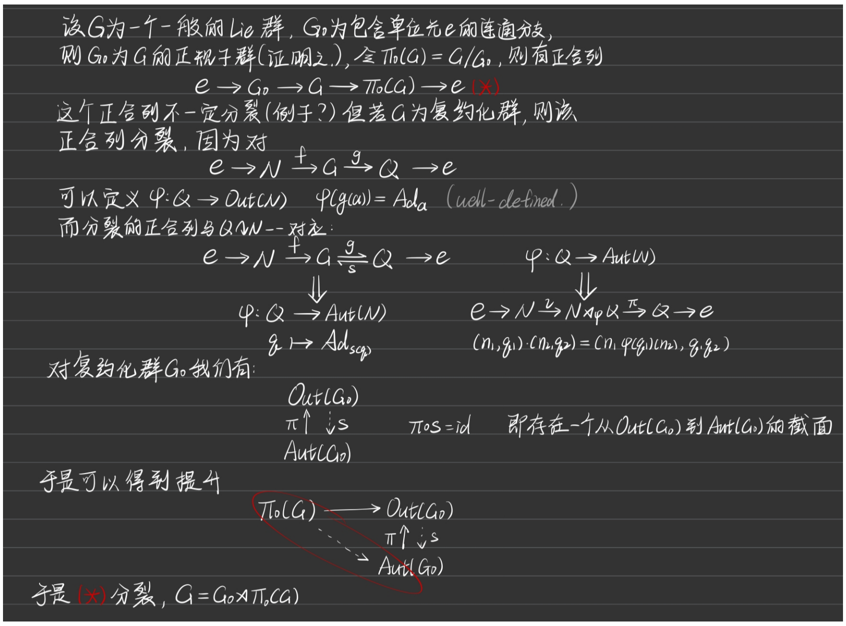

Figure 2.1: 李群的正合列何时分裂

2. Why is it called a twisting sheaf

3. $\mathfrak{UW}$