数学笔记

BeBop

September 22, 2024

Contents

Part I

知识整理

Part II

杂题集萃

Part III

易错知识

Chapter 1

Lie 群

1.1 Lie 群的连通性和单连通性在重要定理中的作用

开始前我们先叙述 Lie 群中的一个重要定理:

定理 1.1.1 (Lie 代数同态提升为 Lie 群同态)**.** *设 G, H 是 Lie 群, G 既连通又单连通, $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ 分别是 G, H 的 Lie 代数. 若 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是一个 Lie 代数同态, 则存在唯一的 Lie 群同态 $\Phi : G \to H$ 满足 $\mathrm{d}\Phi = \rho$.*

需要注意定理中 G 的单连通和连通的条件缺一不可.

例 1.1.2. *若 G 不是单连通的, 则这样的 Φ 不一定存在.*

Lie 群 $(S^1, \cdot)$ 和 $(\mathbb{R}, +)$ 的 Lie 代数均为 $\mathbb{R}$, 但不存在 S^1 到 $\mathbb{R}$ 的非平凡 Lie 群同态. 设 $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}$ 为 Lie 群同态, 取 S^1 的一个稠密子群 $\mathrm{e}^{i\pi\mathbb{Q}} := \left\{\mathrm{e}^{i\pi\theta} \,\middle|\, \theta \in \mathbb{Q}\right\}$, 则因为 $\mathrm{e}^{i\pi\mathbb{Q}}$ 中的元素都是有限阶的, $\varphi(\mathrm{e}^{i\pi\mathbb{Q}}) = \{0\}$. 由 φ 的连续性可得 $\varphi(S^1) = \{0\}$. 因此 φ 只能是平凡群同态.

例 1.1.3. *若 G 不是连通的, 则就算每个连通分支都是单连通的也不一定存在这样的 Φ.*

考虑 $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2$ 在 $\mathbb{R}$ 上的作用由 $0 \to \mathrm{id}$, $1 \to -\mathrm{id}$ 给出. $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2$ 和 $\mathbb{R}$ 的 Lie 代数均为 $\mathbb{R}$, 但 $\mathbb{R}$ 到自身的恒同映射无法提升为 $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2$ 到 $\mathbb{R}$ 的同态.

假设这样的同态 φ 存在, 取 $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2$ 包含 $(0,0)$ 的分支, 它是连通且单连通的 Lie 群, 因此由定理1.1.1的唯一性知

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \{0\} &\to \mathbb{R} \\ (t, 0) &\mapsto t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

又因为 $(0,1)$ 是 $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2$ 的 2 阶元, 因此

$$\varphi : (0,1) \mapsto 0$$

但是

$$\varphi\Big((0,1) \cdot (t,0)\Big) = \varphi(-t, 0) = -t \neq 0 + t = \varphi(0,1) + \varphi(t,0), \quad t \neq 0.$$

因此这样的群同态 φ 不可能存在.