数学笔记

BeBop

July 22, 2024

Contents

Chapter 1

代数拓扑

1.1 Brouwer 不动点定理与 Sperner 引理

我们首先叙述 Brouwer 不动点定理与 Sperner 引理:

定理 1.1.1 (Brouwer 不动点定理)**.** *设 f 是 n 维闭球 B^n 到自身的连续映射, 则 f 必有不动点.*

引理 1.1.2 (Sperner 引理)**.** *设 $K = [v_0, \ldots, v_n]$ 是 n 维单纯形, 考虑其三角剖分 T, 将 T 的顶点 $(n+1)$ 染色, 即定义 $\lambda : V(T) \to \{0, \ldots, n\}$, 且满足对任意指标子集 $\{i_0, \ldots, i_k\} \subseteq \{0, \ldots, n\}$, λ 在 $[v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}]$ 上的限制的值域包含于 $\{i_0, \ldots, i_k\}$. 则一定存在 $u_0, \ldots, u_n \in V(T)$, 使得 $[u_0, \ldots, u_n]$ 是三角剖分 T 的单形, 且 $\lambda(u_i)$ 互不相同.*

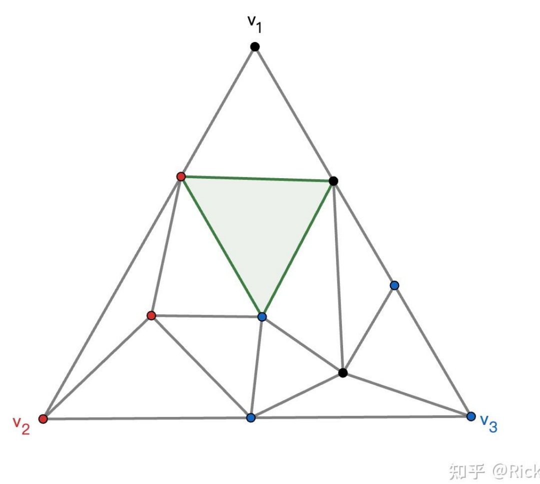

Figure 1.1: Sperner 引理示意图

它们一个是拓扑的定理, 一个是组合的定理, 看似没有联系, 但实际上我们能证明它们是等价的: 由于 $B^n \cong K$, 我们将 Brouwer 不动点定理的叙述改为 K 到自身的连续映射 f 必有不动点.

1°:Sperner 引理 $\Rightarrow$ Brouwer 不动点定理

设 $K = [v_0, \dots, v_n]$ 是 n 维单形, 对 $\forall x \in K$, $x = \sum_i \alpha_i v_i$, $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$. 设 $f(x) = \sum_i \beta_i v_i$, 定义染色映射 $\lambda(x)$ 为使得 $\alpha_i \geqslant \beta_i$ 且 $\alpha_i \neq 0$ 的最小下标 i. 我们首先观察到在任意集合 $\{i_0, \dots, i_k\} \subseteq \{0, \dots, n\}$ 中, 对 $\forall x \in [v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$, x 的坐标 α 满足 $\alpha_i = 0$, $i \notin \{i_0, \dots, i_k\}$, 因此 $\lambda(x)$ 只可能在 $\{i_0, \dots, i_k\}$ 中取值.

固定染色 λ, 取重心重分 $K^0, K^1, \dots$, 则在每一个 K^j 中 λ 均满足引理条件, 于是存在异色单形 $\Delta^j = [u_0^j, \dots, u_n^j]$, 不妨设 $\lambda(u_i^j) = i$. 因为 K 是紧集, 因此 $\{u_0^j\}_j$ 存在收敛子列, 不妨设就为序列本身, 由重心重分的性质知 Δ^j 的直径趋于零, 因此对所有 i, $\{u_i^j\}_j$ 均收敛于同一点 u, 即 $u = \lim\limits_{j\to\infty} u_i^j$, $\forall\, i = 0, \dots, n$. 由染色的定义知 u_i^j 的 v_i 坐标不等于零且大于等于 $f(u_i^j)$ 的, 根据极限的保号性知 u 的所有坐标 α_i 大于等于 $f(u)$ 对应的坐标 β_i, 但因为 $\sum_i \alpha_i = \sum_i \beta_i = 1$, 所以 $\alpha_i = \beta_i$, 因此 $u = f(u)$ 是 f 的不动点.

2°:Sperner 引理 $\Leftarrow$ Brouwer 不动点定理

设 $K = [v_0, \dots, v_n]$ 是 n 维单形, λ 为满足引理要求的染色, T 是 K 的一个三角剖分, 则可以定义单纯映射 $f: K \to K$ 如下: 对 $\forall x \in V(T)$, 定义 $f(x) = v_{\lambda(x)}$, 若 $x = \sum_{i=0}^k \alpha_i x_i$, 其中 $[x_0, \dots, x_k]$ 为 T 的 k 维单形, 定义 $f(x) = \sum_{i=0}^k \alpha_i v_{\lambda(x_i)}$.

若 T 中没有 n 维异色单形, 则 f 的像集包含于 ∂K 中, 且对于每个 $(n-1)$ 维面 $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ 均有 $f([v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]) \subset [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$. 不妨设 $\sum_{i=0}^n v_i = 0$, 即 K 的重心是原点. 定义 $g: \partial K \to \partial K$, $g(x)$ 为射线 xO 与 ∂K 的另一个交点, 类比对径映射. 则 $g([v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]) \cap [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] = \emptyset$ 则 $g \circ f$ 是 K 到自身的连续映射, 但没有不动点, 与 Brouwer 不动点定理矛盾.

现在我们回到 Sperner 引理本身的证明

证明. 对维数 n 做归纳, 我们证明对任意维数异色单形的个数均为奇数.

当 $n = 1$ 时, $K = [v_0, v_1]$ 可看做闭区间 $[0, 1]$, 设 $v_0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = v_1$ 是剖分 T 中的点, 则 $\#\text{异色单形} = \#\left\{i \,\middle|\, \lambda(x_{i-1}) \neq \lambda(x_i)\right\}$. 而

$$1 = \lambda(v_1) - \lambda(v_0) = \sum_{i=1}^m \lambda(x_i) - \lambda(x_{i-1}) = \sum_{\lambda(x_{i-1}) \neq \lambda(x_i)} \lambda(x_i) - \lambda(x_{i-1})$$

因此 $\#\text{异色单形}$ 是奇数.

假设维数为 $n-1$ 时命题成立, 我们称 T 中的 $(n-1)$ 维单形 $[x_0, \dots, x_{n-1}]$ 为一个好单形, 若 $\{\lambda(x_0), \dots, \lambda(x_{n-1})\} = \{0, \dots, n-1\}$. 对 T 中的 n 维单形 $\Delta_n = [u_0, \dots, u_n]$, 令 $c(\Delta_n)$ 为 Δ_n 中好单形的个数, 记 $S = \{\lambda(u_0), \dots, \lambda(u_n)\}$, 则

$$c(\Delta_n) = \begin{cases} 0, \{0, \dots, n-1\} \not\subseteq S \\ 2, \{0, \dots, n-1\} = S \\ 1, \{0, \dots, n\} = S \end{cases},$$

于是异色单形个数的奇偶性与 $\sum_{\Delta_n \subset T} c(\Delta_n)$ 的奇偶性相同. 而当好单形在 $\mathring{K}$ 内时, 它是两个 n 单形的公共面; 当好单形在 ∂K 上时, 它仅为一个 n 单形的面. 因此异色单形个数的奇偶性与 ∂K 上好单形的个数的奇偶性相同, 根据条件好单形仅在 $[v_0, \ldots, v_{n-1}]$ 中出现, 由归纳假设知 $[v_0, \ldots, v_{n-1}]$ 中好单形有奇数个, 命题成立. $\square$

1.2 区域不变性定理 (Invariance of domain)

该定理也是拓扑中的重要定理, 有人说它是欧式空间的内蕴性质, 用它可以区分不同维数的欧式空间.

定理 1.2.1. *设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集, $f : U \leftarrow \mathbb{R}^n$ 为连续单射, 则 $f(U)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的开子集且 f 为开映射, 即 f 为 U 到 $f(U)$ 的同胚.*