

数学笔记

BeBop

July 24, 2024

Contents

I	知识整理	5
1	微分流形	7
1.1	向量丛结构群的约化	7
1.1.1	流形可定向与结构群可约化至 $GL^+(k, \mathbb{R})$	8
1.1.2	黎曼度量与结构群可约化至正交群 $O(k)$	8
1.1.3	复向量丛与近复结构, 与结构群可约化至 $GL(k, \mathbb{C})$	8
1.2	向量丛分类定理	9
1.2.1	同伦的映射拉回同构的向量丛 (纤维丛)	9
II	杂题集萃	11
2	组合论	13
2.1	图论	13
2.1.1	一个关于二部图的小问题	13

Part I

知识整理

Chapter 1

微分流形

1.1 向量丛结构群的约化

定义 1.1.1 (向量丛的定义). 设 E, M 为微分流形, $\pi: E \rightarrow M$ 为光滑满射, 且有 M 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 及微分同胚 $\psi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$, 满足:

1. $\psi(\pi^{-1}(p)) = \{p\} \times \mathbb{R}^k, \forall p \in U_\alpha$,
2. 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时, 存在光滑映射 $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(k, \mathbb{R})$, 使得 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(p, v) = (p, g_{\beta\alpha}(p)v)$.

则称:

- E 是 M 上的光滑向量丛, k 为向量丛的秩, π 为丛投影;
- $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ 为局部平凡化, $g_{\beta\alpha}$ 为连接函数, $\text{GL}(k, \mathbb{R})$ 为结构群;
- $E_p := \pi^{-1}(p)$ 为点 p 上的纤维.

对每个 E_p , 由条件1可知 E_p 上可自然定义一个线性空间结构, 这看似依赖于局部平凡化 ψ_α 的选取, 不过由条件2可知线性结构并不依赖局部平凡化的选取.

若存在 $\text{GL}(k, \mathbb{R})$ 的闭 Lie 子群 H , 使得 $g_{\beta\alpha}(p) \in H, \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta$, 则称结构群可约化到子群 H .

连接函数 $g_{\beta\alpha}$ 在向量丛的定义中占据很重要的地位, 容易证明它满足性质:

$$g_{\alpha\alpha} = 1, \forall U_\alpha, \quad g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1, \forall U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset.$$

反之, 若有一族光滑函数 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 满足以上性质, 定义商空间 $E := \sqcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{R}^k) / \sim$, 其中等价关系定义为: $(p, v_\alpha) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^k, (q, v_\beta) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k$

$$(p, v_\alpha) \sim (q, v_\beta) \Leftrightarrow p = q, v_\beta = g_{\beta\alpha}(p)v_\alpha.$$

E 的拓扑由商拓扑给出, 记 $[p, v]$ 为 (p, v) 的等价类, 定义 $\pi: E \rightarrow M, \pi([p, v]) = p$. 则 E 在投影映射 π 下成为 M 上的秩 k 的向量丛.

1.1.1 流形可定向与结构群可约化至 $GL^+(k, \mathbb{R})$

略

1.1.2 黎曼度量与结构群可约化至正交群 $O(k)$

流形 M 上的黎曼度量是指光滑 $(0, 2)$ -张量场 g , g 在每个点的切空间处都是内积. 下面来说明 n 维流形 M 上存在黎曼结构与切丛 TM 的结构群可约化至正交群 $O(n)$ 是等价的.

1°. 设 (M, g) 为一个黎曼流形, 取 M 的一个局部坐标覆盖 $\{(U_\alpha; x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)\}$, 于是 $\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}$ 成为 U_α 上的一组标架, 因为 U_α 上有度量结构, 我们可对标架做 Gram-Schmidt 正交化得到单位正交标架 $e_{1\alpha}, \dots, e_{n\alpha}$, 令局部平凡化映射为

$$\begin{aligned} \psi_\alpha : TU_\alpha &\rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ (p, a^i e_{i\alpha}|_p) &\mapsto (p, a^i e_i) \end{aligned}$$

其中 e_1, \dots, e_n 表示 \mathbb{R}^n 上的自然基底. 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时, 对每个点 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, 因为 $\{e_{i\alpha}|_p\}$ 和 $\{e_{i\beta}|_p\}$ 都是 $T_p M$ 的一组标准正交基, 所以转移函数 $g_{\beta\alpha}(p)$ 是正交矩阵, 因此结构群可被约化至 $O(n)$.

2°. 假设 TM 的结构群可约化至正交群, 设 $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ 是对应的平凡化, 即 ψ_α 是从 TU_α 到 $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ 的微分同胚, 令 $e_{i\alpha} = \psi_\alpha^{-1}(U_\alpha \times \{e_i\})$, 其中 $\{e_i\}$ 为 \mathbb{R}^n 的自然基底. 我们得到了 TU_α 上处处线性无关的一组向量场 $\{e_{i\alpha}\}$, 命这组向量场构成 TU_α 的一个单位正交标架场, 这能唯一确定 TU_α 上的黎曼度量. 若 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 对 $\forall p \in U_\alpha \cap U_\beta$,

$$\begin{aligned} \langle e_{i\alpha}, e_{j\alpha} \rangle_p &= \langle \psi_\alpha(e_{i\alpha}|_p), \psi_\alpha(e_{j\alpha}|_p) \rangle \\ &= \langle g_{\alpha\beta}(p) \psi_\beta(e_{i\beta}|_p), g_{\alpha\beta}(p) \psi_\beta(e_{j\beta}|_p) \rangle \\ &= \langle \psi_\beta(e_{i\beta}|_p), \psi_\beta(e_{j\beta}|_p) \rangle \\ &= \langle e_{i\beta}, e_{j\beta} \rangle_p \end{aligned}$$

所以不同平凡化定义的黎曼结构是相容的, 因此能定义一个整体的黎曼度量 g .

注意到我们能单位分解在任意微分流形上构造黎曼度量, 这表明任意微分流形切丛的结构群都能约化到正交群.

1.1.3 复向量丛与近复结构, 与结构群可约化至 $GL(k, \mathbb{C})$

设 M 是 m 维流形, M 上的复向量丛 E 在定义上仅需要把纤维 \mathbb{R}^k 改为 \mathbb{C}^k , 结构群改为 $GL(k, \mathbb{C})$.

但如果把 \mathbb{C}^k 视为 \mathbb{R}^{2k} , 则结构群可约化至 $GL(2k, \mathbb{R})$ 的子群

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \mid |A|^2 + |B|^2 > 0 \right\}$$

我们仍把这个子群记为 $GL(k, \mathbb{C})$. 可以证明实的秩为 $2k$ 的向量丛 E 为复的秩为 k 的向量丛当且仅当结构群可约化至 $GL(k, \mathbb{C})$.

我们也可以从近复结构的视角理解复向量丛, 若实的秩为 $2k$ 的向量丛 E 上存在自同构 J (即 $\pi \circ J = \pi$), 使得 $J^2 = -\text{id}$, 则称 J 为 M 的近复结构. 可以证明 M 为复向量丛当且仅当 M 上存在近复结构.

一方面若 M 为复向量丛, 则可以逐点定义 $J_p(p, v) = (p, \sqrt{-1}v)$, 因为转移映射是复线性变换, 所以 J_p 良定, 且 $J_p^2 = -\text{id}$; 另一方面我们可以适当修改平凡化 ψ_α 使得 J 可局部表示为

$$J_\alpha(p, v_\alpha) = \left(p, \begin{pmatrix} & -I_k \\ I_k & \end{pmatrix} v_\alpha \right)$$

因为 $g_{\alpha\beta} \cdot J_\beta = J_\alpha \cdot g_{\alpha\beta}$, 所以

$$\begin{pmatrix} & -I_k \\ I_k & \end{pmatrix} \cdot g_{\alpha\beta}(p) = g_{\alpha\beta}(p) \cdot \begin{pmatrix} & -I_k \\ I_k & \end{pmatrix} \Rightarrow g_{\alpha\beta}(p) = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

从而结构群可约化至 $\text{GL}(k, \mathbb{C})$.

1.2 向量丛分类定理

1.2.1 同伦的映射拉回同构的向量丛 (纤维丛)

定义 1.2.1 (拉回丛的定义). 设 $f: X \rightarrow Y$, 且有向量丛 $p: E \rightarrow Y$, 则可以定义 X 上的拉回丛 $p': f^*E \rightarrow X$, 其中

$$f^*E := \{(x, e) \in X \times E \mid f(x) = p(e)\}$$

为 $X \times E$ 的子集, 且赋予子拓扑结构. 丛投影为映射到第一个分量的投影映射. 每根纤维的线性结构由 E 上每根纤维的线性结构给出. (有模糊的地方)

命题 1.2.2 (同伦的映射拉回同构的向量丛). 现有向量丛 $p: E \rightarrow Y$, 设 $f \simeq g: X \rightarrow Y$ 为同伦的光滑映射, 则拉回丛 f^*E 与 g^*E 丛同构.

在证明之前, 我们先分析一下命题. 设 $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ 是从 f 到 g 的光滑伦移, 即 $H|_{X \times \{0\}} = f$, $H|_{X \times \{1\}} = g$. 则有 $X \times [0, 1]$ 上的拉回丛 H^*E , 且 $H^*E|_{X \times \{0\}} = f^*E$, $H^*E|_{X \times \{1\}} = g^*E$. 因此为了证明 $f^*E \cong g^*E$, 只需证明:

命题 1.2.3 (向量丛在柱空间的上下底的限制是同构的). 当 X 仿紧时, 对任意 $X \times [0, 1]$ 上的向量丛 E , $E|_{X \times \{0\}} \cong E|_{X \times \{1\}}$.

证明. 我们需要两个关于向量丛的事实:

(1): 若 $p: E \rightarrow X \times [a, b]$ 在 $X \times [a, c]$ 和 $X \times [c, b]$ 上分别是平凡的, 则 E 在整个 $X \times [a, b]$ 上平凡. 只需分别写出在 $X \times [a, c]$ 和 $X \times [c, b]$ 上的平凡化 h_1 和 h_2 , 并修改 h_2 使得它们在 $p^{-1}(X \times \{c\})$ 上匹配, 则 h_1 和修改后的 h_2 合并成整个 $X \times [a, b]$ 上的平凡化.

(2): 对于向量丛 $p: E \rightarrow X \times [0, 1]$, 存在 X 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 使得 E 在每个 $U_\alpha \times [0, 1]$ 上都是平凡的. 对任意 $x \in X$, 存在 $U_{x,1}, \dots, U_{x,k}$ 以及 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ 使得 E 在 $U_{x,i} \times [t_{i-1}, t_i]$ 上平凡, 令 $U_x = U_{x,1} \cap \dots \cap U_{x,k}$, 则由 (1) 知 E 在 $U_x \times [0, 1]$ 上平凡.

下面我们来证明该命题, □

Part II

杂题集萃

Chapter 2

组合论

2.1 图论

2.1.1 一个关于二部图的小问题

问题 2.1.1. 设有二部图 (U, V) , U 的顶点数为 12, 且对任意 U 的 10 顶点子集 X , 集合 $\{v \mid v \text{ 与某个 } u \text{ 相邻}, u \in X\}$ 大小为 20; 对任意 U 的 8 顶点子集 Y , 集合 $\{v \mid v \text{ 与某个 } u \text{ 相邻}, u \in Y\}$ 大小为 16. 证明: 集合 $\{v \mid v \text{ 与某个 } u \text{ 相邻}, u \in U\}$ 大小为 24.

证明. 对 U 的任意子集 X , 记 $V_X = \{v \mid v \text{ 与某个 } u \text{ 相邻}, u \in X\}$, 并记 $n(X) = |V_X|$, 特别地, 当 X 仅有一个元素, 即 $X = \{u\}$ 时, $n(X)$ 写为 $n(u) = \deg(u)$. 继续记 U_n 为 U 的某个顶点数为 n 的子集, 则题设可写为:

$$\begin{aligned} n(U_{10}) &= 20, \quad \forall U_{10} \subset U \\ n(U_8) &= 16, \quad \forall U_8 \subset U \end{aligned}$$

对 U 的任意子集 X, Y ,

$$\begin{aligned} n(X \cup Y) &= |V_X \cup V_Y| = |V_X| + |V_Y| - |V_X \cap V_Y| \\ &\leq |V_X| + |V_Y| - |V_{X \cap Y}| = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y) \end{aligned}$$

于是

$$n(X) + n(Y) \geq n(X \cup Y) + n(X \cap Y)$$

我们将反复使用这个不等式推导出结论.

对 $\forall U_6$, 存在 U_8, U'_8 使得 $U_8 \cap U'_8 = U_6$, 则 $|U_8 \cup U'_8| = 10$, 于是

$$32 = n(U_8) + n(U'_8) \geq n(U_8 \cup U'_8) + n(U_6) = 32 + n(U_6)$$

即 $n(U_6) \leq 12$.

对 $\forall U_4$, 存在 U_6, U'_6 使得 $U_6 \cap U'_6 = U_4$, 则 $|U_6 \cup U'_6| = 8$, 于是

$$24 \geq n(U_6) + n(U'_6) \geq n(U_6 \cup U'_6) + n(U_4) = 16 + n(U_4)$$

即 $n(U_4) \leq 8$.

对 $\forall U_2$, 存在 U_4, U_6 使得 $U_4 \cap U_6 = U_2$, 则 $|U_4 \cup U_6| = 6$, 于是

$$20 \geq n(U_4) + n(U_6) \geq n(U_4 \cup U_6) + n(U_2) = 6 + n(U_2)$$

即 $n(U_2) \leq 4$.

另一方面对 $\forall U_2$, 存在 U_8 使得 $U_2 \cap U_8 = \emptyset$, 则 $|U_2 \cup U_8| = 10$, 于是

$$16 + n(U_2) = n(U_8) + n(U_2) \geq n(U_10) = 20$$

即 $n(U_2) \geq 4$. 于是 $n(U_2) = 4$, 从而前面的不等式全为等式, 进而 $n(U_4) = 8$, $n(U_6) = 12$. 对任意不相交的 U_2, U'_2 ,

$$8 = n(U_2 \cup U'_2) = n(U_2) + n(U'_2) - |V_{U_2} \cap V_{U'_2}| = 8 - |V_{U_2} \cap V_{U'_2}|$$

推出 $|V_{U_2} \cap V_{U'_2}| = 0$, 也即 $V_{U_2} \cap V_{U'_2} = \emptyset$, 到此就能推出 $n(U) = 24$ 了.

进一步研究二部图 (U, V) , 由上述不相交性质可知对任意不同两点 u, u' , $V_u \cap V_{u'} = \emptyset$, 于是 $n(u) + n(u') = n(\{u, u'\}) = 4$, 可推出所有的 $n(u) = 2$. 设 $U = \{u_1, \dots, u_{12}\}$, 二部图的连接情况为 $E = \{(u_i, v_{2i-1}), (u_i, v_{2i})\}_{1 \leq i \leq 12}$. \square