数学笔记

BeBop

February 20, 2025

Contents

Part I

知识整理

Part II

杂题集萃

Part III

易错知识

Chapter 1

Lie 群

1.1 Lie 群的连通性和单连通性在重要定理中的作用

开始前我们先叙述 Lie 群中的一个重要定理:

定理 1.1.1 (Lie 代数同态提升为 Lie 群同态)**.** 设 G, H 是 Lie 群, G 既连通又单连通, $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ 分别是 G, H 的 Lie 代数. 若 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是一个 Lie 代数同态, 则存在唯一的 Lie 群同态 $\Phi : G \to H$ 满足 $\mathrm{d}\Phi = \rho$.

需要注意定理中 G 的单连通和连通的条件缺一不可.

例 1.1.2. 若 G 不是单连通的, 则这样的 Φ 不一定存在.

Lie 群 $(S^1, \cdot)$ 和 $(\mathbb{R}, +)$ 的 Lie 代数均为 $\mathbb{R}$, 但不存在 S^1 到 $\mathbb{R}$ 的非平凡 Lie 群同态. 设 $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}$ 为 Lie 群同态, 取 S^1 的一个稠密子群 $\mathrm{e}^{i\pi\mathbb{Q}} := \left\{\mathrm{e}^{i\pi\theta} \,\middle|\, \theta \in \mathbb{Q}\right\}$, 则因为 $\mathrm{e}^{i\pi\mathbb{Q}}$ 中的元素都是有限阶的, $\varphi(\mathrm{e}^{i\pi\mathbb{Q}}) = \{0\}$. 由 φ 的连续性可得 $\varphi(S^1) = \{0\}$. 因此 φ 只能是平凡群同态.

例 1.1.3. 若 G 不是连通的, 则就算每个连通分支都是单连通的也不一定存在这样的 Φ.

考虑 $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2$ 在 $\mathbb{R}$ 上的作用由 $0 \to \mathrm{id}$, $1 \to -\mathrm{id}$ 给出. $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2$ 和 $\mathbb{R}$ 的 Lie 代数均为 $\mathbb{R}$, 但 $\mathbb{R}$ 到自身的恒同映射无法提升为 $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2$ 到 $\mathbb{R}$ 的同态.

假设这样的同态 φ 存在, 取 $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2$ 包含 $(0, 0)$ 的分支, 它是连通且单连通的 Lie 群, 因此由定理1.1.1的唯一性知

$$
\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{R} \times \{0\} &\to \mathbb{R} \\
(t, 0) &\mapsto t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

又因为 $(0,1)$ 是 $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2$ 的 2 阶元, 因此

$$\varphi : (0,1) \mapsto 0$$

但是

$$\varphi\Big((0,1)\cdot(t,0)\Big) = \varphi(-t,0) = -t \neq 0 + t = \varphi(0,1) + \varphi(t,0), \quad t \neq 0.$$

因此这样的群同态 φ 不可能存在.

1.2 非紧 Lie 群的非完全可约表示

例 1.2.1. 我们知道紧李群的有限维表示是完全可约的, 但是如果李群非紧, 则很容易找到反例.

比如考虑 $G = \mathbb{R}$ 的二维实表示 $V = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{v_1, v_2\}$:

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R} &\to \mathrm{GL}(V) \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

它有一个不可约表示 $V_1 = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{v_1\}$, 但是找不到 V_1 的补表示. 假设存在 V_1 的 G-不变补空间 V_2, 取 V_2 的基向量 $u = av_1 + bv_2$ $(b \neq 0)$, 则 $\rho(1)(u) = (a+b)v_1 + bv_2 \in V_2$, 而 $u, \rho(1)(u)$ 线性无关, 这表明 V_2 只能为整个 V, 矛盾!

1.3 非紧连通 Lie 群不一定存在非平凡环面子群

例 1.3.1. 对于紧连通李群 G 而言, 任取其中的某个元素 g, 考虑 g 生成的子群 H 的闭包 $\mathrm{cl}H$ 的单位连通分支 $(\mathrm{cl}H)_0$, 它是紧连通 Abel 群, 故为 G 的环面子群.

若 G 不紧, 则 G 不一定存在非平凡环面子群, 比如 $G = \mathbb{R}$. 一个不太平凡的例子是 Heisenberg 群 $H_3(\mathbb{R})$,

$$H_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ & 1 & b \\ & & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

它的李代数为

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ & 0 & b \\ & & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathfrak{h}$ 有一组基

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

它们之间满足

$$[X, Y] = Z, \quad [X, Z] = 0, \quad [Y, Z] = 0$$

且指数映射

$$\exp : \mathfrak{h} \to H_3(\mathbb{R})$$
$$\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ & 0 & b \\ & & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a & c + \frac{ab}{2} \\ & 1 & b \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

是 $1-1$ 映射. 由此可知 $\mathfrak{h}$ 的任何一个一维子空间经指数映射后都不可能对应一个环面子群.

Part IV

亟待整理