数学笔记

BeBop

October 17, 2024

Contents

Part I

知识整理

Chapter 1

表示论与结合代数

1.1 幂零代数、根基、幂等元

以下均设 $\mathcal{R}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的有限维结合代数.

定义 1.1.1. 幂零元: *若存在正整数 k 使得 $\alpha^k = 0$, 则称 α 为幂零元.*

幂零代数: *若存在正整数 k 使得 $\mathcal{R}^k = 0$, 则称代数 $\mathcal{R}$ 是幂零代数.*

特征幂零元: *若 $\alpha \in \mathcal{R}$ 满足对任意 $\gamma \in \mathcal{R}$, $\gamma\alpha$ 均为幂零元, 则称 α 为 $\mathcal{R}$ 的特征幂零元.*

根基: *$\mathcal{R}$ 的所有幂零左理想、幂零右理想、幂零理想都包含在一个更大的幂零理想中, $\mathcal{R}$ 存在唯一的极大幂零理想, 称这个极大幂零理想为 $\mathcal{R}$ 的根基, 记为 $\mathrm{rad}(\mathcal{R})$.*

定义 1.1.2. 幂等元: *若元素 $e \in \mathcal{R}$ 满足 $e^2 = e$, 则称 e 为幂等元.*

正交幂等元:

主幂等元:

本原幂等元:

中心幂等元:

命题 1.1.3. *$\mathcal{R}$ 是幂零代数当且仅当 $\mathcal{R}$ 中的所有元素都是幂零的.*

命题 1.1.4. *若代数 $\mathcal{R}$ 不是幂零的, 则 $\mathcal{R}$ 一定存在一个幂等元. 进一步还能得到 $\mathcal{R}$ 有主幂等元.*

命题 1.1.5. *$\mathcal{R}$ 的根基 $\mathrm{rad}(\mathcal{R})$ 恰为所有特征幂零元构成的集合.*

定理 1.1.6 (特征幂零元的判定方法)**.**

定理 1.1.7 (Pierce 分解)**.** *设 e 为 $\mathcal{R}$ 的幂等元, $\mathcal{N}$ 为 $\mathcal{R}$ 的根基. 则 $L_e = \{\alpha \in \mathcal{R} \,|\, \alpha e = 0\}$, $R_e = \{\beta \in \mathcal{R} \,|\, e\beta = 0\}$ 分别为 $\mathcal{R}$ 的左、右理想. $C_e = L_e \cap R_e$ 为 $\mathcal{R}$ 的子代数. 且*

1) 有子代数分解:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}e \dot{+} L_e = e\mathcal{R} \dot{+} R_e = e\mathcal{R}e \dot{+} eL_e \dot{+} R_e e \dot{+} C_e.$$

进一步若 e 为 $\mathcal{R}$ 的主幂等元, 则有 $eL_e \dot{+} R_e e \dot{+} C_e \in \mathcal{N}$.

定义 1.1.8. 半单结合代数: 根基为零的结合代数称为半单结合代数.
单结合代数: 不含非平凡理想的代数称为单结合代数.

注. 一个结合代数是半单的当且仅当它不含特征幂零元. 当 $\mathrm{char}\mathbb{F}=0$ 时, 这等价于代数的判别式不等于零.

定理 1.1.9. 半单结合代数的任意理想仍为半单的, 且任意理想都是理想直和项. 由此可知有限维半单结合代数**可分解为单代数的直和**, 且在不考虑次序的情况下该分解是**唯**一的.

Part II

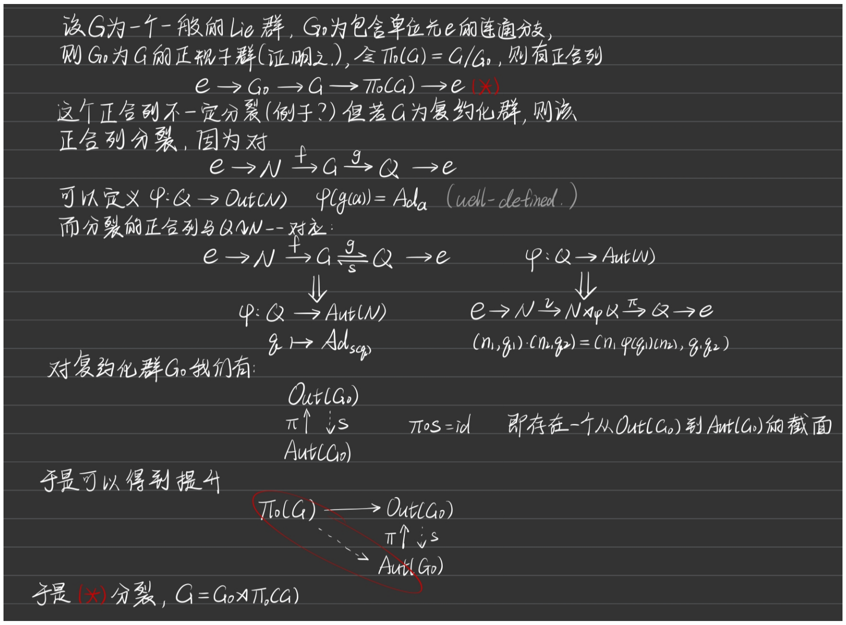
杂题集萃

Part III

易错知识

Part IV

亟待整理



设G为一个一般的Lie群，G_0为包含单位元e的连通分支，
则G_0为G的正规子群(证明之)，令$\pi_0(G) = G/G_0$，则有正合列

$$e \to G_0 \to G \to \pi_0(G) \to e \quad (*)$$

这个正合列不一定分裂(例子?) 但若G为复约化群，则该
正合列分裂，因为对

$$e \to N \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} Q \to e$$

可以定义 $\varphi: Q \to Out(N)$ $\quad \varphi(g(a)) = Ad_a$ (well-defined.)
而分裂的正合列与$Q \curvearrowright N$一一对应：

$$e \to N \xrightarrow{f} G \underset{s}{\overset{g}{\rightleftarrows}} Q \to e \qquad \varphi: Q \to Aut(N)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\varphi: Q \to Aut(N) \qquad e \to N \xrightarrow{i} N \rtimes_\varphi Q \xrightarrow{\pi} Q \to e$$

$$g \mapsto Ad_{s(g)} \qquad (n_1, g_1)\cdot(n_2, g_2) = (n_1 \varphi(g_1)(n_2), g_1 g_2)$$

对复约化群G_0我们有：

$$\begin{array}{c} Out(G_0) \\ \pi \uparrow \ \downarrow s \\ Aut(G_0) \end{array} \qquad \pi \circ s = id \qquad \text{即存在一个从}Out(G_0)\text{到}Aut(G_0)\text{的截面}$$

于是可以得到提升

$$\begin{tikzcd} \pi_0(G) \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & Out(G_0) \arrow[d, shift left, dashed, "s"] \\ & Aut(G_0) \arrow[u, shift left, "\pi"] \end{tikzcd}$$

于是 $(*)$ 分裂，$G = G_0 \rtimes \pi_0(G)$

Figure 1.1: 李群的正合列何时分裂