

数学笔记

BeBop

August 25, 2024

Contents

I	知识整理	5
1	微分流形	7
1.1	向量丛结构群的约化	7
1.1.1	流形可定向与结构群可约化至 $GL^+(k, \mathbb{R})$	8
1.1.2	黎曼度量与结构群可约化至正交群 $O(k)$	8
1.1.3	复向量丛与近复结构, 与结构群可约化至 $GL(k, \mathbb{C})$	8
1.2	向量丛分类定理	9
1.2.1	同伦的映射拉回同构的向量丛 (纤维丛)	9
1.3	Kunn�th 公式与 Leray-Hirsch 定理	10
II	杂题集萃	13
III	易错知识	15

Part I

知识整理

Chapter 1

微分流形

1.1 向量丛结构群的约化

定义 1.1.1 (向量丛的定义). 设 E, M 为微分流形, $\pi: E \rightarrow M$ 为光滑满射, 且有 M 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 及微分同胚 $\psi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$, 满足:

1. $\psi(\pi^{-1}(p)) = \{p\} \times \mathbb{R}^k, \forall p \in U_\alpha$,
2. 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时, 存在光滑映射 $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(k, \mathbb{R})$, 使得 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(p, v) = (p, g_{\beta\alpha}(p)v)$.

则称:

- E 是 M 上的光滑向量丛, k 为向量丛的秩, π 为丛投影;
- $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ 为局部平凡化, $g_{\beta\alpha}$ 为连接函数, $\text{GL}(k, \mathbb{R})$ 为结构群;
- $E_p := \pi^{-1}(p)$ 为点 p 上的纤维.

对每个 E_p , 由条件1可知 E_p 上可自然定义一个线性空间结构, 这看似依赖于局部平凡化 ψ_α 的选取, 不过由条件2可知线性结构并不依赖局部平凡化的选取.

若存在 $\text{GL}(k, \mathbb{R})$ 的闭 Lie 子群 H , 使得 $g_{\beta\alpha}(p) \in H, \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta$, 则称结构群可约化到子群 H .

连接函数 $g_{\beta\alpha}$ 在向量丛的定义中占据很重要的地位, 容易证明它满足性质:

$$g_{\alpha\alpha} = 1, \forall U_\alpha, \quad g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1, \forall U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset.$$

反之, 若有一族光滑函数 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 满足以上性质, 定义商空间 $E := \sqcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{R}^k) / \sim$, 其中等价关系定义为: $(p, v_\alpha) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^k, (q, v_\beta) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k$

$$(p, v_\alpha) \sim (q, v_\beta) \Leftrightarrow p = q, v_\beta = g_{\beta\alpha}(p)v_\alpha.$$

E 的拓扑由商拓扑给出, 记 $[p, v]$ 为 (p, v) 的等价类, 定义 $\pi: E \rightarrow M, \pi([p, v]) = p$. 则 E 在投影映射 π 下成为 M 上的秩 k 的向量丛.

1.1.1 流形可定向与结构群可约化至 $GL^+(k, \mathbb{R})$

略

1.1.2 黎曼度量与结构群可约化至正交群 $O(k)$

流形 M 上的黎曼度量是指光滑 $(0, 2)$ -张量场 g , g 在每个点的切空间处都是内积. 下面来说明 n 维流形 M 上存在黎曼结构与切丛 TM 的结构群可约化至正交群 $O(n)$ 是等价的.

1°. 设 (M, g) 为一个黎曼流形, 取 M 的一个局部坐标覆盖 $\{(U_\alpha; x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)\}$, 于是 $\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}$ 成为 U_α 上的一组标架, 因为 U_α 上有度量结构, 我们可对标架做 Gram-Schmidt 正交化得到单位正交标架 $e_{1\alpha}, \dots, e_{n\alpha}$, 令局部平凡化映射为

$$\begin{aligned} \psi_\alpha : TU_\alpha &\rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ (p, a^i e_{i\alpha}|_p) &\mapsto (p, a^i e_i) \end{aligned}$$

其中 e_1, \dots, e_n 表示 \mathbb{R}^n 上的自然基底. 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时, 对每个点 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, 因为 $\{e_{i\alpha}|_p\}$ 和 $\{e_{i\beta}|_p\}$ 都是 $T_p M$ 的一组标准正交基, 所以转移函数 $g_{\beta\alpha}(p)$ 是正交矩阵, 因此结构群可被约化至 $O(n)$.

2°. 假设 TM 的结构群可约化至正交群, 设 $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ 是对应的平凡化, 即 ψ_α 是从 TU_α 到 $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ 的微分同胚, 令 $e_{i\alpha} = \psi_\alpha^{-1}(U_\alpha \times \{e_i\})$, 其中 $\{e_i\}$ 为 \mathbb{R}^n 的自然基底. 我们得到了 TU_α 上处处线性无关的一组向量场 $\{e_{i\alpha}\}$, 命这组向量场构成 TU_α 的一个单位正交标架场, 这能唯一确定 TU_α 上的黎曼度量. 若 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 对 $\forall p \in U_\alpha \cap U_\beta$,

$$\begin{aligned} \langle e_{i\alpha}, e_{j\alpha} \rangle_p &= \langle \psi_\alpha(e_{i\alpha}|_p), \psi_\alpha(e_{j\alpha}|_p) \rangle \\ &= \langle g_{\alpha\beta}(p) \psi_\beta(e_{i\beta}|_p), g_{\alpha\beta}(p) \psi_\beta(e_{j\beta}|_p) \rangle \\ &= \langle \psi_\beta(e_{i\beta}|_p), \psi_\beta(e_{j\beta}|_p) \rangle \\ &= \langle e_{i\beta}, e_{j\beta} \rangle_p \end{aligned}$$

所以不同平凡化定义的黎曼结构是相容的, 因此能定义一个整体的黎曼度量 g .

注意到我们能单位分解在任意微分流形上构造黎曼度量, 这表明任意微分流形切丛的结构群都能约化到正交群.

1.1.3 复向量丛与近复结构, 与结构群可约化至 $GL(k, \mathbb{C})$

设 M 是 m 维流形, M 上的复向量丛 E 在定义上仅需要把纤维 \mathbb{R}^k 改为 \mathbb{C}^k , 结构群改为 $GL(k, \mathbb{C})$.

但如果把 \mathbb{C}^k 视为 \mathbb{R}^{2k} , 则结构群可约化至 $GL(2k, \mathbb{R})$ 的子群

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \mid |A|^2 + |B|^2 > 0 \right\}$$

我们仍把这个子群记为 $GL(k, \mathbb{C})$. 可以证明实的秩为 $2k$ 的向量丛 E 为复的秩为 k 的向量丛当且仅当结构群可约化至 $GL(k, \mathbb{C})$.

我们也可以从近复结构的视角理解复向量丛, 若实的秩为 $2k$ 的向量丛 E 上存在自同构 J (即 $\pi \circ J = \pi$), 使得 $J^2 = -\text{id}$, 则称 J 为 M 的近复结构. 可以证明 M 为复向量丛当且仅当 M 上存在近复结构.

一方面若 M 为复向量丛, 则可以逐点定义 $J_p(p, v) = (p, \sqrt{-1}v)$, 因为转移映射是复线性变换, 所以 J_p 良定, 且 $J_p^2 = -\text{id}$; 另一方面我们可以适当修改平凡化 ψ_α 使得 J 可局部表示为

$$J_\alpha(p, v_\alpha) = \left(p, \begin{pmatrix} & -I_k \\ I_k & \end{pmatrix} v_\alpha \right)$$

因为 $g_{\alpha\beta} \cdot J_\beta = J_\alpha \cdot g_{\alpha\beta}$, 所以

$$\begin{pmatrix} & -I_k \\ I_k & \end{pmatrix} \cdot g_{\alpha\beta}(p) = g_{\alpha\beta}(p) \cdot \begin{pmatrix} & -I_k \\ I_k & \end{pmatrix} \Rightarrow g_{\alpha\beta}(p) = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

从而结构群可约化至 $\text{GL}(k, \mathbb{C})$.

1.2 向量丛分类定理

1.2.1 同伦的映射拉回同构的向量丛 (纤维丛)

定义 1.2.1 (拉回丛的定义). 设 $f: X \rightarrow Y$, 且有向量丛 $p: E \rightarrow Y$, 则可以定义 X 上的拉回丛 $p': f^*E \rightarrow X$, 其中

$$f^*E := \{(x, e) \in X \times E \mid f(x) = p(e)\}$$

为 $X \times E$ 的子集, 且赋予拓扑结构. 丛投影为映射到第一个分量的投影映射. 每根纤维的线性结构由 E 上每根纤维的线性结构给出. (有模糊的地方)

命题 1.2.2 (同伦的映射拉回同构的向量丛). 现有向量丛 $p: E \rightarrow Y$, 设 $f \simeq g: X \rightarrow Y$ 为同伦的光滑映射, 则拉回丛 f^*E 与 g^*E 丛同构.

在证明之前, 我们先分析一下命题. 设 $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ 是从 f 到 g 的光滑伦移, 即 $H|_{X \times \{0\}} = f$, $H|_{X \times \{1\}} = g$. 则有 $X \times [0, 1]$ 上的拉回丛 H^*E , 且 $H^*E|_{X \times \{0\}} = f^*E$, $H^*E|_{X \times \{1\}} = g^*E$. 因此为了证明 $f^*E \cong g^*E$, 只需证明:

命题 1.2.3 (向量丛在柱空间的上下底的限制是同构的). 当 X 仿紧时, 对任意 $X \times [0, 1]$ 上的向量丛 E , $E|_{X \times \{0\}} \cong E|_{X \times \{1\}}$.

证明. 我们需要两个关于向量丛的事实:

(1): 若 $p: E \rightarrow X \times [a, b]$ 在 $X \times [a, c]$ 和 $X \times [c, b]$ 上分别是平凡的, 则 E 在整个 $X \times [a, b]$ 上平凡.

只需分别写出在 $X \times [a, c]$ 和 $X \times [c, b]$ 上的平凡化 h_1 和 h_2 , 并修改 h_2 使得它们在 $p^{-1}(X \times \{c\})$ 上匹配, 则 h_1 和修改后的 h_2 合并成整个 $X \times [a, b]$ 上的平凡化.

(2): 对于向量丛 $p: E \rightarrow X \times [0, 1]$, 存在 X 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 使得 E 在每个 $U_\alpha \times [0, 1]$ 上都是平凡的.

对任意 $x \in X$, 存在 $U_{x,1}, \dots, U_{x,k}$ 以及 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ 使得 E 在 $U_{x,i} \times [t_{i-1}, t_i]$ 上平凡, 令 $U_x = U_{x,1} \cap \dots \cap U_{x,k}$, 则由 (1) 知 E 在 $U_x \times [0, 1]$ 上平凡.

下面我们来证明该命题, □

1.3 Kunn eth 公式与 Leray-Hirsch 定理

定理 1.3.1 (Kunn eth 公式). 设流形 M 有有限好覆盖, F 是任意流形, 则

$$H^*(M \times F) \cong H^*(M) \otimes H^*(F)$$

证明概要. 设 $\pi : M \times F \rightarrow M$, $\rho : M \times F \rightarrow F$ 为乘积流形到两个分量的投影, 则可以定义

$$\begin{aligned} \psi : H^*(M) \otimes H^*(F) &\rightarrow H^*(M \times F) \\ \omega \otimes \tau &\mapsto \pi^* \omega \wedge \rho^* \tau \end{aligned}$$

由 M-V 论证, 可以得到如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{p+q=k} H^p(U \cup V) \otimes H^q(F) & \xrightarrow{\psi} & H^k((U \cup V) \times F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{p+q=k} ((H^p(U) \otimes H^q(F)) \oplus (H^p(V) \otimes H^q(F))) & \xrightarrow{\psi} & H^k(U \times F) \oplus H^k(V \times F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{p+q=k} H^p(U \cap V) \otimes H^q(F) & \xrightarrow{\psi} & H^k((U \cap V) \times F) \\ \downarrow d^* & & \downarrow d^* \\ \bigoplus_{p+q=k+1} H^p(U \cup V) \otimes H^q(F) & \xrightarrow{\psi} & H^{k+1}((U \cup V) \times F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

前两个圈的交换性显然, 第三个圈的交换性需要用到 d^* 的表达式. 由五引理能得到归纳递推, 归纳奠基是平凡的. \square

定理 1.3.2 (Leray-Hirsch 定理). 设 $\pi : E \rightarrow M$ 为纤维丛, 纤维为 F , 若存在 E 上的微分形式 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 满足将它们限制在每个纤维 F_x 上都能得到 $H^*(F_x)$ 的一组基, 则

$$H^*(E) \cong H^*(M) \otimes \{e_1, \dots, e_n\} \cong H^*(M) \otimes H^*(F).$$

证明概要. 这里的关键在于不存在 E 到 F 的整体投影 ρ , 也就无法通过这种方式定义 $\rho^* : H^*(F) \rightarrow H^*(E)$ 了. 但是借助 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 我们可以构造合适的映射 $\tilde{\rho}^*$, 做法如下: 固定某个点 $x \in M$, 也即固定某个纤维 F_x , 取 $H^*(F_x)$ 的一组基 $\{f_1, \dots, f_n\}$, 定义:

$$\tilde{\rho}^* : H^*(F) \rightarrow H^*(E)$$

$$\sum_i a_i f_i \mapsto \sum_i a_i e_i.$$

于是可以定义:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} : H^*(M) \otimes H^*(F) &\rightarrow H^*(E) \\ \omega \otimes \tau &\mapsto \pi^* \omega \wedge \tilde{\rho}^* \tau \end{aligned}$$

归纳递推仍由 M-V 论证给出;

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{p+q=k} H^p(U \cup V) \otimes H^q(F) & \xrightarrow{\psi} & H^k(\pi^{-1}(U \cup V)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{p+q=k} ((H^p(U) \otimes H^q(F)) \oplus (H^p(V) \otimes H^q(F))) & \xrightarrow{\psi} & H^k(\pi^{-1}(U)) \oplus H^k(\pi^{-1}(V)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{p+q=k} H^p(U \cap V) \otimes H^q(F) & \xrightarrow{\psi} & H^k(\pi^{-1}(U \cap V)) \\ \downarrow d^* & & \downarrow d^* \\ \bigoplus_{p+q=k+1} H^p(U \cup V) \otimes H^q(F) & \xrightarrow{\psi} & H^{k+1}(\pi^{-1}(U \cup V)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

因为 good cover 中的每个开集都同伦于单点, 而同伦映射诱导同构的拉回丛 (注意这里是纤维丛的版本), 因此 good cover 同时也是 locally trivialization. 故 $\pi^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times F$, 从而 $H^*(\pi^{-1}(U_\alpha)) \cong H^*(U_\alpha) \otimes H^*(F)$, 这给出了归纳奠基. \square

注. 实际上当底空间 M 连通时, 定理的条件可弱化为 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 限制在某个纤维 F_x 上得到 $H^*(F_x)$ 的一组基. 因为对不同的两点 x, y , 有道路 $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ 将他们相连, 于是嵌入映射 $\iota_x : F_x \hookrightarrow E$ 和 $\iota_y : F_y \hookrightarrow E$ 同伦. 因此拉回映射 $\iota_x^* : H^*(E) \rightarrow H^*(F_x)$ 与 $\iota_y^* : H^*(E) \rightarrow H^*(F_y)$ 相等.

注. 这里的同构 $H^*(E) \cong H^*(M) \otimes H^*(F)$ 并不保持环结构 (例如?) 因此只能说 $H^*(E)$ 可看成 $H^*(M)$ -模.

注. 存在不满足 Leray-Hirsch 定理条件的纤维丛, 比如 Hopf 纤维化:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^3 \\ & & \downarrow \\ & & S^2 \end{array}$$

其中

$$H^*(S^3) \neq H^*(S^1) \otimes H^*(S^2)$$

Part II

杂题集萃

Part III

易错知识

