数学笔记

BeBop

February 6, 2025

Contents

I 知识整理 **5**

1 代数拓扑 **7**

1.1 Brouwer 不动点定理与 Sperner 引理 7
1.2 Invariance of domain 9
1.3 Poincaré Lemma 9
1.4 Excision Theorem in Signular Homology 9

II 杂题集萃 **17**

III 易错知识 **19**

IV 亟待整理 **21**

Part I

知识整理

Chapter 1

代数拓扑

1.1 Brouwer 不动点定理与 Sperner 引理

我们首先叙述 Brouwer 不动点定理与 Sperner 引理:

定理 1.1.1 (Brouwer 不动点定理). *设 f 是 n 维闭球 B^n 到自身的连续映射, 则 f 必有不动点.*

引理 1.1.2 (Sperner 引理). *设 $K=[v_0,\ldots,v_n]$ 是 n 维单纯形, 考虑其三角剖分 T, 将 T 的顶点 $(n+1)$ 染色, 即定义 $\lambda: V(T)\to\{0,\ldots,n\}$, 且满足对任意指标子集 $\{i_0,\ldots,i_k\}\subseteq\{0,\ldots,n\}$, λ 在 $[v_{i_0},\ldots,v_{i_k}]$ 上的限制的值域包含于 $\{i_0,\ldots,i_k\}$. 则一定存在 $u_0,\ldots,u_n\in V(T)$, 使得 $[u_0,\ldots,u_n]$ 是三角剖分 T 的单形, 且 $\lambda(u_i)$ 互不相同.*

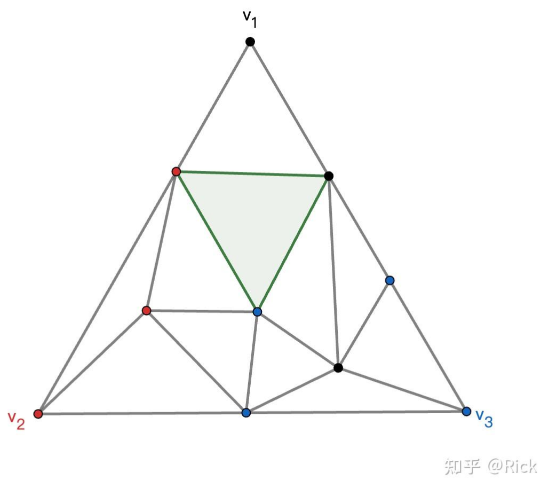

Figure 1.1: Sperner 引理示意图

它们一个是拓扑的定理, 一个是组合的定理, 看似没有联系, 但实际上我们能证明它们是等价的: 由于 $B^n \cong K$, 我们将 Brouwer 不动点定理的叙述改为 K 到自身的连续映射 f 必有不动点.

$1°$:Sperner 引理 $\Rightarrow$ Brouwer 不动点定理

设 $K = [v_0, \ldots, v_n]$ 是 n 维单形, 对 $\forall x \in K$, $x = \sum_i \alpha_i v_i$, $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$. 设 $f(x) = \sum_i \beta_i v_i$, 定义染色映射 $\lambda(x)$ 为使得 $\alpha_i \geqslant \beta_i$ 且 $\alpha_i \neq 0$ 的最小下标 i. 我们首先观察到在任意集合 $\{i_0, \ldots, i_k\} \subseteq \{0, \ldots, n\}$ 中, 对 $\forall x \in [v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}]$, x 的坐标 α 满足 $\alpha_i = 0$, $i \notin \{i_0, \ldots, i_k\}$, 因此 $\lambda(x)$ 只可能在 $\{i_0, \ldots, i_k\}$ 中取值.

固定染色 λ, 取重心重分 $K^0, K^1, \ldots$, 则在每一个 K^j 中 λ 均满足引理条件, 于是存在异色单形 $\Delta^j = [u_0^j, \ldots, u_n^j]$, 不妨设 $\lambda(u_i^j) = i$. 因为 K 是紧集, 因此 $\{u_0^j\}_j$ 存在收敛子列, 不妨设就为序列本身, 由重心重分的性质知 Δ^j 的直径趋于零, 因此对所有 i, $\{u_i^j\}_j$ 均收敛于同一点 u, 即 $u = \lim\limits_{j\to\infty} u_i^j, \forall i = 0, \ldots, n$. 由染色的定义知 u_i^j 的 v_i 坐标不等于零且大于等于 $f(u_i^j)$ 的, 根据极限的保号性知 u 的所有坐标 α_i 大于等于 $f(u)$ 对应的坐标 β_i, 但因为 $\sum_i \alpha_i = \sum_i \beta_i = 1$, 所以 $\alpha_i = \beta_i$, 因此 $u = f(u)$ 是 f 的不动点.

$2°$:Sperner 引理 $\Leftarrow$ Brouwer 不动点定理

设 $K = [v_0, \ldots, v_n]$ 是 n 维单形, λ 为满足引理要求的染色, T 是 K 的一个三角剖分, 则可以定义单纯映射 $f : K \to K$ 如下: 对 $\forall x \in V(T)$, 定义 $f(x) = v_{\lambda(x)}$, 若 $x = \sum_{i=0}^k \alpha_i x_i$, 其中 $[x_0, \ldots, x_k]$ 为 T 的 k 维单形, 定义 $f(x) = \sum_{i=0}^k \alpha_i v_{\lambda(x_i)}$.

若 T 中没有 n 维异色单形, 则 f 的像集包含于 ∂K 中, 且对于每个 $(n-1)$ 维面 $[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$ 均有 $f([v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]) \subset [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$. 不妨设 $\sum_{i=0}^n v_i = 0$, 即 K 的重心是原点. 定义 $g : \partial K \to \partial K$, $g(x)$ 为射线 xO 与 ∂K 的另一个交点, 类比对径映射. 则 $g([v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]) \cap [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n] = \emptyset$ 则 $g \circ f$ 是 K 到自身的连续映射, 但没有不动点, 与 Brouwer 不动点定理矛盾.

现在我们回到 Sperner 引理本身的证明

证明. 对维数 n 做归纳, 我们证明对任意维数异色单形的个数均为奇数.

当 $n = 1$ 时, $K = [v_0, v_1]$ 可看做闭区间 $[0, 1]$, 设 $v_0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = v_1$ 是剖分 T 中的点, 则 $\#\text{异色单形} = \#\{i \mid \lambda(x_{i-1}) \neq \lambda(x_i)\}$. 而

$$1 = \lambda(v_1) - \lambda(v_0) = \sum_{i=1}^m \lambda(x_i) - \lambda(x_{i-1}) = \sum_{\lambda(x_{i-1}) \neq \lambda(x_i)} \lambda(x_i) - \lambda(x_{i-1})$$

因此 $\#\text{异色单形}$ 是奇数.

假设维数为 $n-1$ 时命题成立, 我们称 T 中的 $(n-1)$ 维单形 $[x_0, \ldots, x_{n-1}]$ 为一个好单形, 若 $\{\lambda(x_0), \ldots, \lambda(x_{n-1})\} = \{0, \ldots, n-1\}$. 对 T 中的 n

维单形 $\Delta_n = [u_0, \ldots, u_n]$, 令 $c(\Delta_n)$ 为 Δ_n 中好单形的个数, 记 $S = \{\lambda(u_0), \ldots, \lambda(u_n)\}$, 则

$$c(\Delta_n) = \begin{cases} 0, \{0, \ldots, n-1\} \not\subseteq S \\ 2, \{0, \ldots, n-1\} = S \\ 1, \{0, \ldots, n\} = S \end{cases},$$

于是异色单形个数的奇偶性与 $\sum\limits_{\Delta_n \subset T} c(\Delta_n)$ 的奇偶性相同. 而当好单形在 $\mathring{K}$ 内时, 它是两个 n 单形的公共面; 当好单形在 ∂K 上时, 它仅为一个 n 单形的面. 因此异色单形个数的奇偶性与 ∂K 上好单形的个数的奇偶性相同, 根据条件好单形仅在 $[v_0, \ldots, v_{n-1}]$ 中出现, 由归纳假设知 $[v_0, \ldots, v_{n-1}]$ 中好单形有奇数个, 命题成立. □

1.2 区域不变性定理 (Invariance of domain)

该定理也是拓扑中的重要定理, 有人说它是欧式空间的内蕴性质, 用它可以区分不同维数的欧式空间.

定理 1.2.1. *设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集, $f : U \to \mathbb{R}^n$ 为连续单射, 则 $f(U)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的开子集且 f 为开映射, 即 f 为 U 到 $f(U)$ 的同胚.*

1.3 Poincaré Lemma 的另一种表述形式

引理 1.3.1 (d-Poincaré lemma)**.** *若整体有 $\mathrm{d}\omega = 0$, 则方程 $\mathrm{d}\eta = \omega$ 局部有解, 即在每点处存在邻域使得方程有解.*

引理 1.3.2 ($\overline{\partial}$-Poincaré lemma)**.** *若整体有 $\overline{\partial}\omega = 0$, 则方程 $\overline{\partial}\eta = \omega$ 局部有解, 即在每点处存在邻域使得方程有解.*

注. *因此若整体有 $\mathrm{d}\omega = 0$, 但方程 $\mathrm{d}\eta = \omega$ 在整体上没有解, 这就表明空间本身限制的整体解的存在性, 也就是说我们检测到一个拓扑上的障碍.*

1.4 切除定理 (Excision Theorem)

定理 1.4.1 (切除定理表述 1)**.** *设 $Z \subset A \subset X$ 满足 $\overline{Z} \subset A^\circ$, 则空间偶的嵌入 $(X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$ 诱导了相对同调群之间的同构:*

$$H_n(X - Z, A - Z) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A), \quad n \geq 0.$$

这个定理有一个等价的表述:

定理 1.4.2 (切除定理表述 2). *设 $A, B \subset X$ 且满足 $A^\circ \cup B^\circ = X$, 则空间偶的嵌入 $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ 诱导了相对同调群之间的同构:*

$$H_n(B, A \cap B) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A), \quad n \geq 0.$$

注. *两种表述靠 $B = X - Z$ ($Z = X - B$) 相互转化.*

为了证明这个定理, 我们需要先证明同调的 "局部性" (**locality principal**).

设 X 是一个拓扑空间, 我们称 X 的子集族 $\mathfrak{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ 是一个覆盖, 若 $\{U_j^\circ\}_{j \in J}$ 构成一个开覆盖 (注意 U_j 本身不必是开集).

定义 1.4.3 ($\mathfrak{U}$**-small chains).**

- *一个 n-单形 $\sigma : \Delta^n \to X$ 被称为 $\mathfrak{U}$-small 的, 若 $\operatorname{Im} \sigma$ 在某个 U_j 中.*
- *一个 n-复形 $c = \sum_i n_i \sigma_i$ 被称为 $\mathfrak{U}$-small 的, 若每个 σ_i 都是 $\mathfrak{U}$-small 的.*
- *所有 $\mathfrak{U}$-small 的 n-复形构成 $C_n(X)$ 的一个子群, 记为*

$$C_n^{\mathfrak{U}}(X) := \left\{ c \in C_n(X) \,\middle|\, c \text{ is } \mathfrak{U}\text{-small} \right\}.$$

- *若 $A \subset X$, 记*

$$C_n^{\mathfrak{U}}(X, A) := \frac{C_n^{\mathfrak{U}}(X)}{C_n^{\mathfrak{U}}(A)}.$$

若记 $\iota_j : U_j \hookrightarrow X$ 为 U_j 到 X 的嵌入, 那么 $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$ 也可以被定义为

$$C_n^{\mathfrak{U}}(X) = \operatorname{Im} \left(\bigoplus_{j \in J} C_n(U_j) \xrightarrow{\oplus_j (\iota_j)_*} C_n(X) \right).$$

这一概念的关键在于我们可以仅用 $\mathfrak{U}$-small 的链来计算原空间的同调群, 这体现了同调群的局部性.

定理 1.4.4 (**Locality Principle/Small Chain Theorem**). *设 $\mathfrak{U}$ 是 X 的一个覆盖, 则链复形的嵌入映射*

$$C_n^{\mathfrak{U}}(X) \subset C_n(X)$$

诱导了同调群之间的同构.

这个定理的证明需要用到重心剖分, 其证明过程有些繁琐, 所以我们跳过该定理的证明, 先看如何用这个定理推导出切除定理.

Proof of the Excision Axiom using small chains:

我们证明切除定理的表述 2, 令 $\mathfrak{U}=\{A,B\}$. 链复形的嵌入映射 $C_n^{\mathfrak{U}}(X)\subset C_n(X)$ 诱导了链复形短正合列之间的一个态射:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_*(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & C_*^{\mathfrak{U}}(X) \arrow[r] \arrow[d] & C_*^{\mathfrak{U}}(X)/C_*(A) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_*(A) \arrow[r] & C_*(X) \arrow[r] & C_*(X)/C_*(A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

因为中间竖直的映射诱导了同调群之间的同构映射 (定理1.4.4), 由根据短正合引长正合、同调群的自然性、五引理, 我们得到右侧竖直映射诱导了同调群的同构, 由此转化为比较 $C_*(B,A\cap B)$ 和 $C_*^{\mathfrak{U}}(X)/C_*(A)$.

注意到

$$C_*^{\mathfrak{U}}(X)=C_*(A)+C_*(B)\subset C_*(X),$$
$$C_*(A\cap B)=C_*(A)\cap C_*(B).$$

因此

$$\frac{C_*(B)}{C_*(A\cap B)}=\frac{C_*(B)}{C_*(A)\cap C_*(B)}\cong\frac{C_*(A)+C_*(B)}{C_*(A)}=\frac{C_*^{\mathfrak{U}}(X)}{C_*(A)}.$$

中间的同构源自同态基本定理.

因此链映射

$$C_*(B,A\cap B)\to C_*^{\mathfrak{U}}(X)/C_*(A)$$

诱导了同调群之间的同构, 原命题成立. □

Proof of Locality Principle. [1] 我们需要引入重心重分 (或叫重心剖分) 这一操作, 需要分几步定义:

Step 1: 首先定义什么是 n-单形 Δ^n 的重心重分. 为了方便我们使用坐标描述, 我们将 Δ^n 嵌入底空间 $\mathbb{R}^n$, 可用顶点集表示为 $[v_0,\dots,v_n]$, 其中的点可以表示为 $P=\sum_{i=0}^n t_iv_i$, $0\le t_i\le 1$, $\sum_{t_0}^n t_i=1$ 是点 P 的 $n+1$ 个坐标.

我们知道从几何图形上看 Δ^n 重心重分后是一些更小块的 n-单形 (带符号), 但是为了规范叙述重心重分, 我们需要将重分后的对象视为 $LC_n(Y)$ 中的元素, 其中 Y 是某个欧氏空间中的凸集[2]. 也即, 我们把原始的 Δ^n 视为 $\mathrm{id}:\Delta^n\to\Delta^n$, 重分后得到 $S\Delta^n\in LC_n(Y)$.

1° 锥映射 (cone map): 设 b 是 $\mathbb{R}^n$ 中的某一个点, 定义以 b 为顶点的锥映射, 写为

$$b:[v_0,\dots,v_n]\mapsto[b,v_0,\dots,v_n]$$

[1]证明源自 Hacter 的 Algebraic Topology, 此处是我总结凝练的个人理解.

[2]这里我很纠结到底用不用书上的记号, 我原本想把每个 Δ^n 视为 $C_n(\Delta^n)$ 中的元素, 但这样得不到一个链复形, S 和 T 无法定义在一个统一的 $C_*(?)$. 加上线性映射这一条件也是必要的, 否则映射的像就不是规则的图形了.

因此 $b([v_0,\dots,v_n])$ 中坐标为 $(t_0,\dots,t_{n+1})$ 的点是

$$t_0b+\sum_{t=1}^{n+1}t_iv_i=t_0b+(1-t_0)\sum_{t=1}^{n+1}\frac{t_i}{1-t_0}v_i.$$

2° 重心重分映射 $S:LC_n(\Delta^n)\to LC_n(\Delta^n)$. 设 λ 是一个 n-单形, 记 b_λ 为 λ 的重心, 即所有坐标都取 $\frac{1}{n+1}$ 的点. 我们归纳地定义

$$S\lambda=\begin{cases}[\varnothing] & ,n=-1;\\ b_\lambda S(\partial\lambda) & ,n\geq 0.\end{cases}$$

S 在小维数单形上的作用:

- 当 $n=-1$, 即 $\lambda=[\varnothing]$ 时, $S[\varnothing]=[\varnothing]$;
- 当 $n=0$, 即 $\lambda=[w_0]$ 时, $b_\lambda=w_0$, $S[w_0]=w_0S\partial[w_0]=w_0([\varnothing])=[w_0]$;
- 当 $n=1$, 即 $\lambda=[w_0,w_1]$ 时, $S[w_0,w_1]=b_\lambda S([w_1]-[w_0])=[b_\lambda,w_1]-[b_\lambda,w_0]$.

下面归纳地证明 S 是链映射, 即 $S\partial=\partial S$.

- 当 $n=-1,0$ 时, $S=\mathbb{1}$, 等式显然成立.
- 当 $n>0$ 时,

$$\begin{aligned}\partial S\lambda&=\partial b_\lambda(S\partial\lambda)\\&=S\partial\lambda-b_\lambda\partial(S\partial\lambda)\qquad\text{因为 }\partial b_\lambda=\mathbb{1}-b_\lambda\partial\\&=S\partial\lambda-b_\lambda(S\partial\partial\lambda)\qquad\text{因为归纳假设 }\partial S(\partial\lambda)=S\partial(\partial\lambda)\\&=S\partial\lambda\qquad\text{因为 }\partial\partial=0.\end{aligned}$$

3° id 和 S 的链同伦 $T:C_n(Y)\to C_{n+1}(Y)$, 我们归纳地定义

$$T\lambda=\begin{cases}0 & ,n=-1;\\ b_\lambda(\lambda-T\partial\lambda) & ,n\geq 0.\end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}\cdots \arrow[r] & LC_2(Y) \arrow[r] \arrow[d, "S"] & LC_1(Y) \arrow[r] \arrow[d, "S"] \arrow[dl, "T"'] & LC_0(Y) \arrow[r] \arrow[d, "S"', "\mathbb{1}"] \arrow[dl, "T"'] & LC_{-1}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "S"', "\mathbb{1}"] \arrow[dl, "T"', "0"] & 0\\ \cdots \arrow[r] & LC_2(Y) \arrow[r] & LC_1(Y) \arrow[r] & LC_0(Y) \arrow[r] & LC_{-1}(Y) \arrow[r] & 0\end{tikzcd}$$

T 在小维数单形上的作用:

- 当 $n = -1$, 即 $\lambda = [\varnothing]$ 时, $T[\varnothing] = 0$;
- 当 $n = 0$, 即 $\lambda = [w_0]$ 时, $b_\lambda = w_0$, $T[w_0] = w_0([w_0] - T\partial[w_0]) = w_0([w_0]) = [w_0.w_0]$;
- 当 $n = 1$, 即 $\lambda = [w_0, w_1]$ 时, $T[w_0, w_1] = b_\lambda\Big([w_0, w_1] - T([w_1] - [w_0])\Big) = [b_\lambda, w_0, w_1] - [w_1, w_1] + [w_0, w_0]$.

T 的几何解释如下: 将 $\Delta^n \times I$ 分成若干个 Δ^n, 满足下底 $\Delta^n \times \{0\}$ 仍为一整个 Δ^n(代表 id), 上底则成为重心重分后的图形 (代表 $S\Delta^n$). T 作用在某个 λ 上可能会出现 $[w_0, w_0]$ 这样的元素, 对此我们可以将前一个 w_0 视作时间参数 $t = 1$ 的点, 后一个视作 $t = 0$ 的点, 通过人为增添一个时间维度 (即乘以 I), 我们能更好地想象 T 的几何动机, T 实际作用的像是前文描述的图形在投影 $\Delta^n \times I \to \Delta^n$ 下的像. 下面归纳地验证 T 是连接 id 和 S 的链

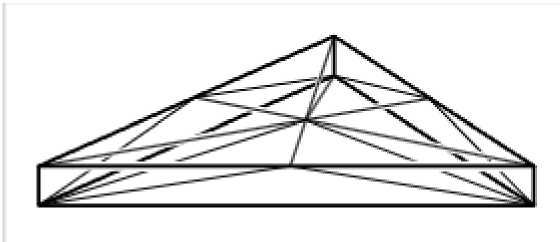

Figure 1.2: 重心重分与恒同的链同论

同论, 即 $\partial T + T\partial = \mathbb{1} - S$:

- 当 $n = -1$ 时, $S = \mathbb{1}, T = 0$, 显然成立.
- 当 $n \geq 0$ 时,

$$\begin{aligned}
\partial T\lambda &= \partial b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda) \\
&= (\lambda - T\partial\lambda) - b_\lambda\partial(\lambda - T\partial\lambda) && \text{因为 } \partial b_\lambda = \mathbb{1} - b_\lambda\partial \\
&= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda\partial\lambda + b_\lambda\partial T\partial\lambda \\
&= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda\partial\lambda + b_\lambda(\partial\lambda - S\partial\lambda - T\partial\partial\lambda) && \text{因为归纳假设} \\
&= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda(S\partial\lambda) \\
&= \lambda - S\lambda - T\partial\lambda.
\end{aligned}$$

Step 2: 对一般的链 $\sigma : \Delta^n \to X$ 定义重心重分.
1° 定义 $S : C_n(X) \to C_n(X)$ 为

$$S\sigma = \sigma_\sharp S\Delta^n$$

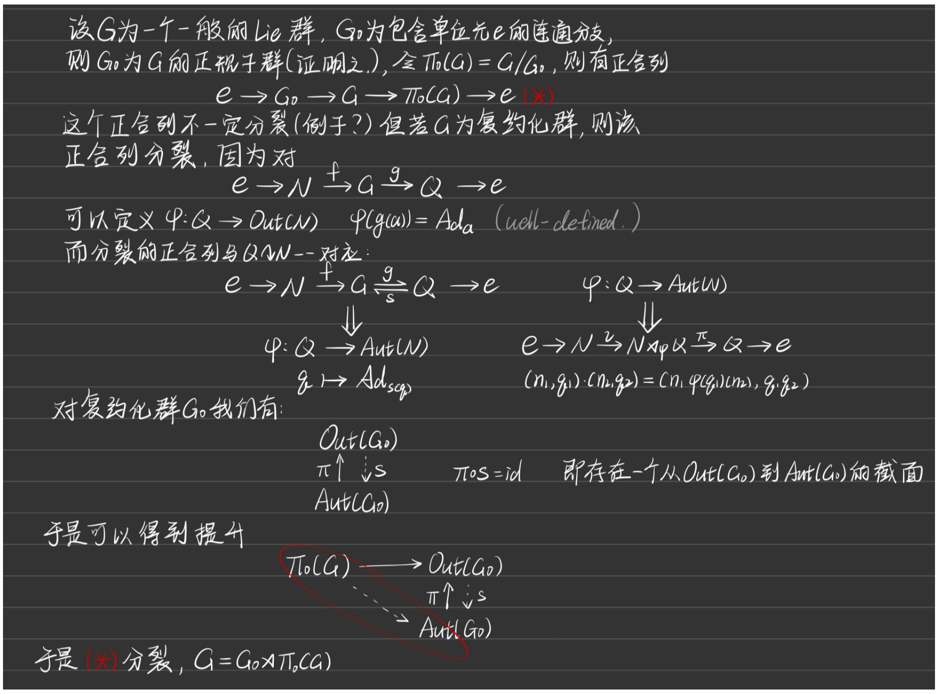

Figure 1.3: 重心重分与恒同的链同论

下面的示意图能帮助我们理解 S 的定义. 下面验证 S 是一个链映射, 即 $\partial S = S\partial$:

$$\begin{aligned}
\partial S\sigma &= \partial\sigma_\sharp S\Delta^n = \sigma_\sharp\partial S\Delta^n = \sigma_\sharp S\partial\Delta^n \\
&= \sigma_\sharp S\sum_{i=0}^n(-1)^i\Delta_i^n \\
&= \sum_{i=0}^n(-1)^i\sigma_\sharp S\Delta_i^n \\
&= \sum_{i=0}^n(-1)^i S(\sigma|_{\Delta^n}) \\
&= S\left(\sum_{i=0}^n(-1)^i\sigma|_{\Delta^n}\right) = S(\partial\sigma).
\end{aligned}$$

2° 类似地定义 $T: C_n(X)\to C_{n+1}(X)$ 为

$$T\sigma = \sigma_\sharp T\Delta^n$$

下面验证 T 是一个链同伦, 即 $\partial T + T\partial = \mathbb{1} - S$:

$$\partial T\sigma = \partial\sigma_\sharp T\Delta^n = \sigma_\sharp\partial T\Delta^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma_\sharp(\mathbb{1} - S - T\partial)\Delta^n \\
&= \sigma - S\sigma - \sigma_\sharp T\partial\Delta^n \qquad \text{和上面的过程类似} \\
&= \sigma - S\sigma - T\partial\sigma.
\end{aligned}
$$

Step 3: 迭代重心重分操作.

1° 可以证明对 Δ^n 做一次重心重分得到 $(n+1)!$ 个小的 n-复形, 这些 n-复形的最大直径不超过原复形的 $\frac{n}{n+1}$. 这个仅依赖于维数的严格小于 1 的常数是重心重分的一个关键性质. 它保证了只要重分足够多次, 每个 n-复形的直径可以任意小.

现设 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ 是 X 的一个覆盖, 则对单形 $\sigma : \Delta^n \to X$, $\{\sigma^{-1}U_\alpha\}_\alpha$ 构成 Δ^n 的一个开覆盖, 因为 Δ^n 是完备度量空间, 设 δ_σ 是 $\{\sigma^{-1}U_\alpha\}_\alpha$ 的 Lebesuge 数. 则当 m 充分大时, $S^m\Delta^n$ 中的每个单形的直径都小于 δ_σ. 对一般的链 $\sigma \in C_n(X)$, 记 $m(\sigma)$ 为最小的使得 $S^m\sigma \in C_n^{\mathfrak{U}}(X)$ 的迭代数 m.

连接 $\mathbb{1}$ 和 S^m 的链同论是 $D_m = \sum\limits_{i=0}^{m-1} TS^i$, 其验证如下:

$$
\begin{aligned}
\partial D_m + D_m\partial &= \sum_{i=0}^{m-1} \partial TS^i + \sum_{i=0}^{m-1} TS^i\partial \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} (\mathbb{1} - S - T\partial)S^i + \sum_{i=0}^{m-1} TS^i\partial \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} (\mathbb{1} - S)S^i - \sum_{i=0}^{m-1} T\partial S^i + \sum_{i=0}^{m-1} TS^i\partial \\
&= \mathbb{1} - S^m.
\end{aligned}
$$

对一般的链 σ, 若定义 $S\sigma = S^{m(\sigma)}\sigma$, 则不能良定义链同论 $D\sigma$, 因为如果定义 $D\sigma = D_{m(\sigma)}\sigma$, 公式 $\partial D\sigma + D\partial\sigma = \partial D_{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\partial\sigma)}\partial\sigma$, 下指标不全是 $m(\sigma)$.

因此我们得先定义 $D\sigma := D_{m(\sigma)}\sigma$, 再形式地定义 $\rho : C_n(X) \to C_n^{\mathfrak{U}}(X)$,

$$\rho := \mathbb{1} - \partial D - D\partial$$

需要验证 ρ 是链映射, 即 $\partial\rho = \rho\partial$:

$$
\begin{aligned}
\partial\rho\sigma &= \partial\sigma - \partial\partial D\sigma - \partial D\partial\sigma \\
&= \partial\sigma - \partial D\partial\sigma \\
&= \partial\sigma - \partial D\partial\sigma - D\partial\partial\sigma \\
&= (\mathbb{1} - \partial D - D\partial)\partial\sigma = \rho\partial\sigma.
\end{aligned}
$$

由 ρ 的定义易知 D 是 $\mathbb{1}$ 与 ρ 的链同论.

最后验证 ρ 确实将 $C_n(\Delta^n)$ 中的元素映到 $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$ 中:

$$\begin{aligned}\rho\sigma &= \sigma - \partial D_{m(\sigma)}\sigma - D_{m(\partial\sigma)}\partial\sigma \\ &= S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D_{m(\partial\sigma)}\partial\sigma \\ &= S^{m(\sigma)}\sigma + \sum_{m(\partial\sigma)\le i<m(\sigma)} TS^i\partial\sigma\end{aligned}$$

因为 $\partial\sigma \subset \sigma$, 所以 $m(\partial\sigma) \le m(\sigma)$, 由 $m(\sigma)$ 的定义以及 T 保持 $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$ 不动, 等号末项属于 $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$, 因此 ρ 就是我们想要的映射.

总结: 我们有嵌入映射 $\iota : C_n^{\mathfrak{U}}(X) \hookrightarrow C_n(X)$, 然后我们又定义了 $\rho : C_n(\Delta^n) \to C_n^{\mathfrak{U}}(X)$, 以及 $D : C_n(X) \to C_{n+1}(X)$, 使得 $\partial D + D\partial = \mathbb{1} - \rho$. 显然 $\rho\iota = \mathbb{1}$, 因此 ρ 是 ι 的同伦逆, 也即 $C_n^{\mathfrak{U}}(X) \hookrightarrow C_n(X)$ 诱导了同调群之间的同构. $\square$

Part II

杂题集萃

Part III
易错知识

Part IV

亟待整理

1. 李群正合列的分裂问题

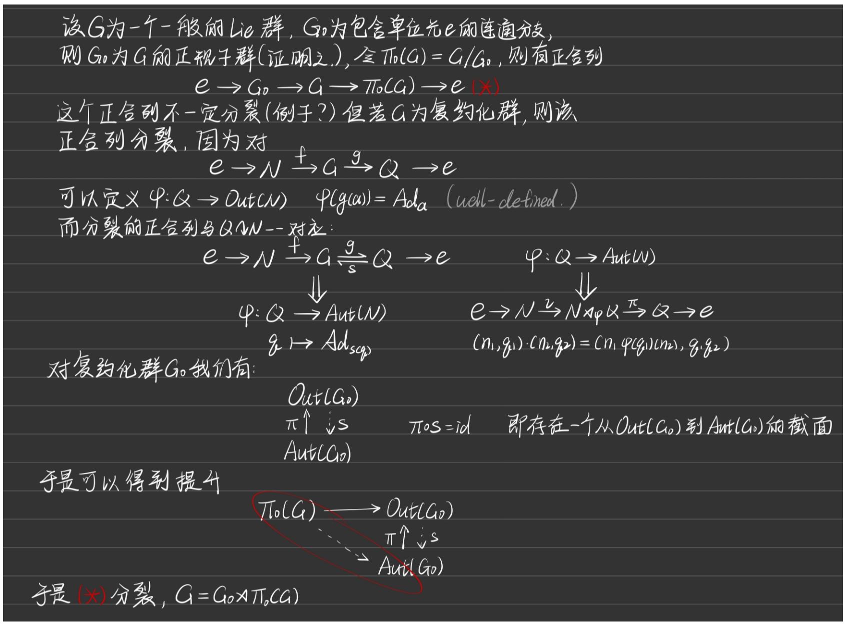

Figure 1.4: 李群的正合列何时分裂

2. Why is it called a twisting sheaf

3. $\mathfrak{UW}$