数学笔记

BeBop

July 20, 2024

Contents

Chapter 1

代数拓扑

1.1 Brouwer 不动点定理与 Sperner 引理

我们首先叙述 Brouwer 不动点定理与 Sperner 引理:

定理 1.1.1 (Brouwer 不动点定理)**.** 设 f 是 n 维闭球 B^n 到自身的连续映射, 则 f 必有不动点.

引理 1.1.2 (Sperner 引理)**.** 设 $K = [v_0, \ldots, v_n]$ 是 n 维单纯形, 考虑其三角剖分 T, 将 T 的顶点 $(n+1)$ 染色, 即定义 $\lambda : V(T) \to \{0, \ldots, n\}$, 且满足对任意指标子集 $\{i_0, \ldots, i_k\} \subseteq \{0, \ldots, n\}$, λ 在 $[v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}]$ 上的限制的值域包含于 $\{i_1, \ldots, i_k\}$. 则一定存在 $u_0, \ldots, u_n \in V(T)$, 使得 $[u_0, \ldots, u_n]$ 是三角剖分 T 的单形, 且 $\lambda(u_i)$ 互不相同.

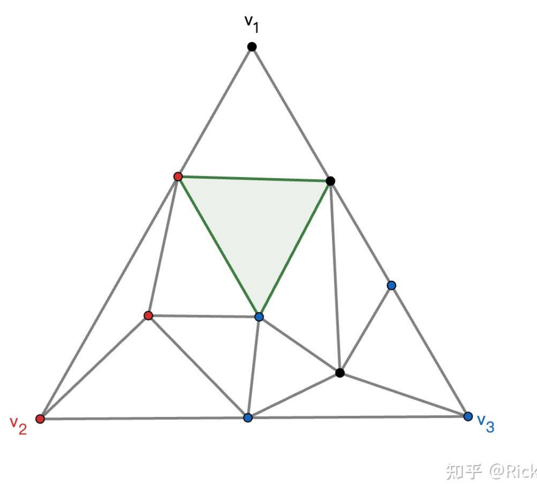

Figure 1.1: Sperner 引理示意图

它们一个是拓扑的定理, 一个是组合的定理, 看似没有联系, 但实际上我们能证明它们是等价的: 由于 $B^n \cong K$, 我们将 Brouwer 不动点定理的叙述改为 K 到自身的连续映射 f 必有不动点.

1°:Sperner 引理 $\Rightarrow$ Brouwer 不动点定理