数学笔记

BeBop

September 22, 2024

Contents

Part I

知识整理

0.1 乘积与扩张

定义 0.1.1 (群的正合列)**.** *设有群 N、Q, 则群 Q 过群 N 的扩张为如下群短正合列:*

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1$$

也即 ι 是一个单同态, π 是一个满同态, 且 $\mathrm{Im}\iota = \ker \pi$.

扩张得到的群 G 不一定能写成核与商群的直积, 比如下面介绍的半直积, 它给核一个“扭转”.

定义 0.1.2 (群的半直积)**.** *设有群 N、Q, 且有同态 $\varphi : Q \to \mathrm{Aut}(N)$ (也即群 Q 通过 φ 作用于 N 上). 则群的半直积 $N \rtimes_\varphi Q$ 作为集合就是笛卡尔积 $N \times Q$, 其乘法定义为:*

$$\begin{aligned}(N \rtimes_\varphi Q) \times (N \rtimes_\varphi Q) &\to (N \rtimes_\varphi Q)\\ (n_1, q_1) \cdot (n_2, q_2) &\mapsto (n_1 \cdot \varphi(q_1)(n_2),\, q_1 \cdot q_2)\end{aligned}$$

注. *可以验证上述定义的乘法确实构成一个群:*

- *结合律:*

$$\begin{aligned}&\Big((n_1, q_1) \cdot (n_2, q_2)\Big) \cdot (n_3, q_3)\\ =&\Big(n_1 \cdot \varphi(q_1)(n_2),\, q_1 q_2\Big) \cdot (n_3, q_3)\\ =&\Big(n_1 \cdot \varphi(q_1)(n_2) \cdot \varphi(q_2 q_3)(n_3),\, (q_1 q_2) q_3\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(n_1, q_1) \cdot \Big((n_2, q_2) \cdot (n_3, q_3)\Big)\\ =&(n_1, q_1) \cdot \Big(n_2 \cdot \varphi(q_2)(n_3),\, q_2 q_3\Big)\\ =&\Big(n_1 \cdot \varphi(q_1)(n_2 \cdot \varphi(q_2)(n_3)),\, q_1(q_2 q_3)\Big)\end{aligned}$$

  而

$$\begin{aligned}&n_1 \cdot \varphi(q_1)(n_2 \cdot \varphi(q_2)(n_3))\\ =&n_1 \cdot \varphi(q_1)(n_2) \cdot \varphi(q_1)\varphi(q_2)(n_3)\\ =&n_1 \cdot \varphi(q_1)(n_2) \cdot \varphi(q_2 q_3)(n_3)\end{aligned}$$

  因此上述乘法满足结合律.

- *我们也可以算一下在这个乘法下的逆:*

$$\begin{aligned}(n_1, q_1) \cdot (n_2, q_2) = \Big(n_1 \cdot \varphi(q_1)(n_2),\, q_1 q_2\Big) = (e_N, e_Q)\\ \Rightarrow q_2 = q_1^{-1}, \quad n_2 = \varphi(q_1^{-1})(n_1^{-1})\end{aligned}$$

定义 0.1.3 (分裂的正合列)**.** 我们称一个正合列

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1$$

分裂, 若存在群同态 $s: Q \to G$ 使得 $\pi \circ s = \mathrm{id}_Q$. 也即 Q 能嵌入 G 中.

注 (群的半直积与分裂的正合列)**.** 若有同态 $\varphi: Q \to \mathrm{Aut}(N)$, 则短正合列

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} N \rtimes_\varphi Q \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1$$

是分裂的.

这里 $\iota: N \to N \rtimes_\varphi Q$ 是嵌入到第一个分量给出的同态, $\pi: N \rtimes_\varphi Q \to Q$ 是投射到第二个分量给出的同态. 分裂映射由

$$\begin{aligned} Q &\to N \rtimes_\varphi Q \\ q &\mapsto (e, q) \end{aligned}$$

给出.

反过来, 在一个分裂的群扩张中, 扩张得到的群可以写成核与商群的半直积: 设有分裂的正合列

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} G \underset{s}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} Q \longrightarrow 1$$

则可以定义映射

$$\begin{aligned} N \rtimes_\varphi Q &\rightleftharpoons G \\ (n, q) &\mapsto n \cdot s(q) \\ \Big(g \cdot (s \circ \pi(g))^{-1}, \pi(g)\Big) &\leftarrow g \end{aligned}$$

可以验证它们是互逆的群同态, 其中 Q 在 N 上的作用为

$$\begin{aligned} \varphi: Q &\to \mathrm{Aut}(N) \\ q &\mapsto \big(n \mapsto s(q) \cdot n \cdot s(q)^{-1}\big). \end{aligned}$$

让我们仔细解释一下每个映射的由来, 在分裂的群扩张中, N 和 Q 均可视作 G 的一个子群, 从 $N \rtimes_\varphi Q$ 到 G 的映射就是将两个分量重新组合到一起的过程; 从 G 到 $N \rtimes_\varphi Q$ 的映射就是将两个分量提取出来的过程. 为了保证映射是群同态, 我们需要 $N \rtimes_\varphi Q$ 满足特定的乘法, 也就是说我们需要特定的群作用 $Q \curvearrowright N$. 群同态要求:

$$\begin{aligned} n_1 \cdot s(q_1) \cdot n_2 \cdot s(q_2) &= n_1 \cdot \varphi(q_1)(n_2) \cdot s(q_1 q_2) \\ \varphi(q_1)(n_2) &= s(q_1) \cdot n_2 \cdot s(q_1)^{-1} \end{aligned}$$

因此 φ 只能形如共轭作用, 这也解释了半直积比直积多出来的"扭转". 注意到若 N 和 Q 中的元素可交换, 群作用平凡, 此时 Q 自动成为 G 的正规子群, 且 $N \rtimes_\varphi Q = N \times Q$.

Part II

杂题集萃

Part III

易错知识