

# 数学笔记

BeBop

November 12, 2024



# Contents

I 知识整理	5
II 杂题集萃	7
III 易错知识	9
IV 亟待整理	11



Part I

**知识整理**



## Part II

## 杂题集萃





## Part III

# 易错知识



## Part IV

## 亟待整理



## 1. 李群正合列的分裂问题

设  $G$  为一个一般的 Lie 群,  $G_0$  为包含单位元  $e$  的连通分支,  
 则  $G_0$  为  $G$  的正视子群(证明之), 令  $\pi_0(G) = G/G_0$ , 则有正合列  

$$e \rightarrow G_0 \rightarrow G \rightarrow \pi_0(G) \rightarrow e \quad (\times)$$
 这个正合列不一定分裂(例子?) 但若  $G$  为复约化群, 则该  
 正合列分裂, 因为对  

$$e \rightarrow N \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} Q \rightarrow e$$
 可以定义  $\varphi: Q \rightarrow \text{Out}(N)$   $\varphi(g(u)) = \text{Ad}_u$  (well-defined.)  
 而分裂的正合列与  $Q \rtimes N$  一一对应:  

$$e \rightarrow N \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} Q \rightarrow e \quad \varphi: Q \rightarrow \text{Aut}(N)$$

$$\begin{array}{ccc} \varphi: Q \rightarrow \text{Aut}(N) & & e \rightarrow N \xrightarrow{\varphi} N \rtimes_{\varphi} Q \rightarrow e \\ g \mapsto \text{Ad}_{g(u)} & & (n, g_1) \cdot (n, g_2) = (n, \varphi(g_1)(n), g, g_2) \end{array}$$
 对复约化群  $G_0$  我们有:  

$$\begin{array}{ccc} \text{Out}(G_0) & & \\ \pi \uparrow \downarrow s & \pi \circ s = \text{id} & \text{即存在一个从 } \text{Out}(G_0) \text{ 到 } \text{Aut}(G_0) \text{ 的截面} \\ \text{Aut}(G_0) & & \end{array}$$
 于是可以得到提升  

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(G) & \xrightarrow{\quad} & \text{Out}(G_0) \\ & \nearrow \pi \uparrow \downarrow s & \\ & \text{Aut}(G_0) & \end{array}$$
 于是  $(\times)$  分裂,  $G = G_0 \rtimes \pi_0(G)$

Figure 1: 李群的正合列何时分裂

## 2. Why is it called a twisting sheaf