理论力学

Theroretical Mechanics

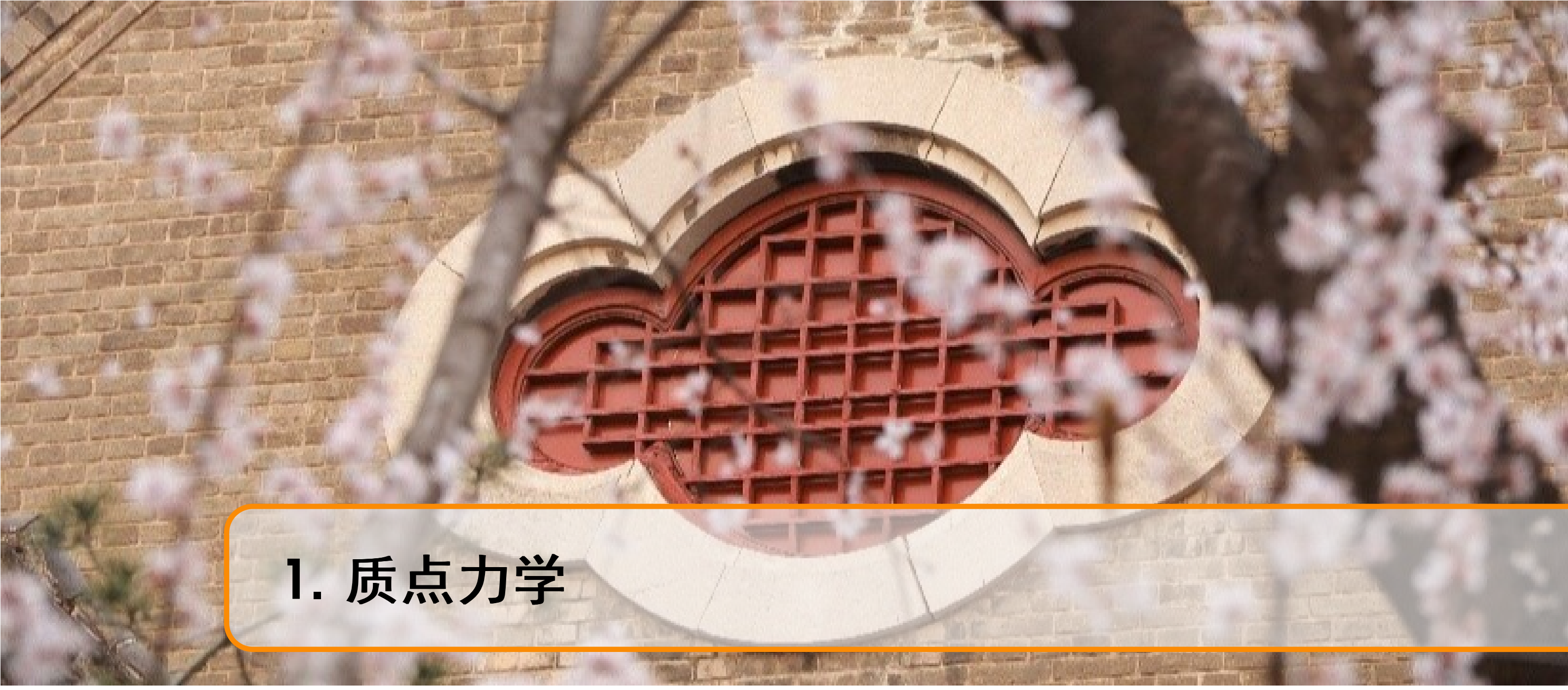
Bird-eating Cat

PUBLISHED BY PUBLISHER

First edition, June 2025

目录

理论力学



1. 质点力学

1.1 质点运动学

轨道方程式：将位置与时间的关系式中的参数t消去，得到诸变量之间的关系式

位移：在给定时间内，连接质点的初位置和末位置的向量

瞬时速度：位矢的时间变化率

加速度：速度的时间变化率

1.1.1 运动学方程

速度、加速度的分量表示式：（以下考虑二维）

直角坐标系中：

$$\vec{r}=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},\ \vec{v}=\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix},\ \vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$$

极坐标系中：

首先，考虑以下事实：

$$\mathrm{d}\vec{e}_r=\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta,\ \mathrm{d}\vec{e}_\theta=-\mathrm{d}\theta\vec{e}_r$$

代入运算：

$$\vec{r}=r\vec{e}_r,\quad \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta,\quad \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{r}\vec{e}_r+2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta+r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta-r\dot{\theta}^2\vec{e}_\theta$$

对比可以得到：

$$\begin{cases} v_r=\dot{r} \\ v_\theta=r\dot{\theta} \end{cases}\qquad \begin{cases} a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta=2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta} \end{cases}$$

自然坐标系中：

$$\mathrm{d}s=|\mathrm{d}\vec{r}|$$

$$\vec{v}=v\vec{e}_\tau=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau,\quad \vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_\tau+\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_n=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_\tau+\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\vec{e}_n$$

定义曲率半径$\rho=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$，那么加速度的两个分量可以写作简单的形式：

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\qquad a_n=\frac{v^2}{\rho}$$

1.1.2 相对运动

$$\text{绝对(相对于}S)=\text{相对(相对于}S')+\text{牵连(随}S'\text{一同运动，相对于}S)$$

那么有

$$\vec{r}=\vec{r}'+\vec{r}_0,\quad \vec{v}=\vec{v}'+\vec{v}_0$$

Galilean变换：在Galilean变换下，质点的加速度不变。

$$\begin{cases}\vec{r}'=\vec{r}-\vec{v_{O'}}t\\ t'=t\end{cases}$$

1.2 Newton运动定律

1.2.1 Newton运动定律

Newton第一定律：任何物体都将保持静止或匀速直线运动状态，如果没有受到其他物体的作用。

（惯性定律）惯性：物体在不受其他物体作用时保持运动状态不变的性质

Newton第二定律：当一物体受到外力作用时，该物体所获得的加速度和外力成正比，和物体本身的质量成反比，加速度的方向与外力的方向一致。($\vec{F}=m\vec{a}$)

Newton第三定律：当一个物体对另一个物体有一个作用力时，另一个物体同时对它有一个反作用力，作用力与反作用力大小相等，方向相反，且在同一条直线上。($\vec{F}=-\vec{F}'$)

同时还要提出相对性原理，即Newton运动定律能成立的参考系是惯性参考系。先考虑这样的非惯性系，它是相对于惯性参考系作加速直线运动的参考系。这样，Newton第二定律应该写作：$\vec{F}=m\vec{a}=m\vec{a}'+m\vec{a}_0$。由此引入了惯性力$m\vec{a}_0$。对于惯性力，有几点说明：

1. 惯性力反映参照系而不是惯性系
2. 惯性力不是物体间的相互作用，没有施力者，没有反作用力
3. 惯性力实质上是物体的惯性在非惯性系中的表现

1.2.2 几个常用的量及定理

功：作用在质点上的力，使质点沿力的方向产生一段位移 $W=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

功率：表征做功快慢程度的物理量，单位时间内所做的功 $P=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{v}$

能：具有做功的能力或本领。

保守力：力所做的功与中间路径无关，或沿任何闭合路径运行一周时，力所做的功为零

非保守力（涡旋力）：力所做的功与中间路径有关，或沿任何闭合路径运行一周时，力所做的功不为零

耗散力：力所做的功与路径有关，但总是作负功消耗能量

势能：由相互作用的物体的相对位置所确定的系统的能量

$$W_{AB} = -(V_B - V_A)$$

$$\vec{F} = -\nabla V,\quad \nabla\times\vec{F} = 0$$

动量：质点的质量和速度的乘积 $\vec{p} = m\vec{v}$

动量定理

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t},\quad \Rightarrow\quad \mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}\mathrm{d}t$$

动量守恒定律

$$若\vec{F} = 0, 则\mathrm{d}\vec{p} = 0,\quad \Rightarrow\quad \vec{p} = \mathrm{Const.}$$

力矩：位移和力的矢积 $\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$

角动量（动量矩）：动量对空间某点或某轴线的矩 $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{P}$

角动量定理

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p}) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p} + \vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0 + \vec{r}\times\vec{F} = \vec{M}$$

角动量守恒定律

$$若\vec{M} = 0, 则\mathrm{d}\vec{L} = 0,\quad \Rightarrow\quad \vec{L} = \mathrm{Const.}$$

动能定理

$$\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = m\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v} = \mathrm{d}(\frac{1}{2}mv^2)$$

机械能守恒定律：当质点所受的力都是保守力时，$T + V = E = \mathrm{Const.}$（$T = \frac{1}{2}mv^2$）。

1.3 有心力

有心力：运动质点所受的力的作用线始终通过某一个定点（力心）$\Rightarrow$ 在有心力作用下，质点始终在一个平面内运动。

$$\vec{F} = F(r)\frac{\vec{r}}{r},\quad \vec{F} = m\vec{a},\quad F_\theta = 0\ \Rightarrow\ a_\theta = 0$$

$$L = \vec{r}\times\vec{p} = r^2\dot{\theta}$$

1.3.1 Bénard公式

令$r^2\dot{\theta}=h$，h是一个常数，进行变量代换$u=\frac{1}{r}$：

$$F_r=ma_r=m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)$$

$$\dot{r}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{u}\right)}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\ddot{r}=\frac{\dot{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=-h\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-h\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}=-h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}$$

将这些代入便可得到Bénard公式：

$$h^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u\right)=-\frac{F}{m}$$

运用它便可以求解有心力运动的轨道方程。

1.3.2 平方反比力

设力F是与距离的平方成反比的力，例如万有引力$F=-G\frac{m_1m_2}{r^2}=-k^2mu^2$，将它代入Bénard公式求解轨道方程：

$$h^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u\right)=k^2u^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=\frac{k^2}{h^2}$$

$$\Rightarrow\quad u=C_1\cos\theta+C_2\sin\theta+\frac{k^2}{h^2}\quad\Rightarrow\quad r=\frac{h^2/k^2}{1+Ah^2/k^2\cos(\theta-\theta_0)}$$

对比圆锥曲线的极坐标方程（根据圆锥曲线的第二定义得出的普遍方程）

$$\rho=\frac{ep}{1\pm e\cos\theta}$$

可以得到轨道的离心率等。

1.3.3 运用机械能守恒得出轨道方程

$$\vec{F}=-\nabla V,\ F_r=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$$

取无穷远处为0，那么势能

$$V=-\int_r^\infty F\mathrm{d}r=-\frac{k^2m}{r}$$

代入机械能守恒

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\frac{k^2m}{r}=E$$

$$\dot{r}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{h}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\Rightarrow\quad\frac{h\mathrm{d}r}{r\sqrt{\frac{2Er^2}{m}+2k^2r-h^2}}=\mathrm{d}\theta$$

$$\Rightarrow\quad\arcsin\frac{k^2r-h^2}{r\sqrt{k^4r^2+\frac{2E}{m}h^2}}=\theta+\varphi\quad\Rightarrow\quad r=\frac{h^2/k^2}{1+\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{k^4m}}\cos(\theta-\theta_0)}$$

对比圆锥曲线的极坐标方程可以得到轨道的离心率等。

1.3.4 Kepler定律

Kepler第一定律：行星绕太阳作椭圆运动，太阳位于椭圆的一个焦点上。

Kepler第二定律：行星和太阳之间的连线在相等时间内所扫过的面积相等。

Kepler第三定律：行星公转的周期的平方和轨道半长轴的三次方成正比。

定义面积速度$\kappa = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$：

$$\kappa = \frac{1}{2}\frac{r \cdot r\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}|$$

考虑椭圆的面积$S = \pi ab$，那么：

$$\pi ab = \kappa T = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}T = \frac{1}{2}hT \quad \Rightarrow \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi b^2}{h^2 a}$$

考虑椭圆中诸参量之间的关系：

$$e = \frac{c}{a},\ p = \frac{a^2}{c} - c,\ \ ep = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

于是有

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{h^2}ep = \frac{4\pi^2}{k^2}$$

在实际应用中，常定义以下几个宇宙速度：

第一宇宙速度：从地球表面发射人造卫星或者火箭所需要的最低速度

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{k^2 m}{r} = -\frac{1}{2}\frac{k^2 m}{r},\ \Rightarrow\ \ v_1 = \sqrt{gr} \approx 7.9\mathrm{km/s}$$

第二宇宙速度：脱离地球的引力作用，成为环绕太阳的人造行星所需要的最低速度

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{k^2 m}{r} = 0,\ \Rightarrow\ \ v_2 = \sqrt{2gr} \approx 11.2\mathrm{km/s}$$

第三宇宙速度：脱离太阳系，飞到其他星系所需的最低速度

$$v_3 \approx 16.7\mathrm{km/s}$$

1.3.5 圆轨道的稳定性

首先考虑稳定状态所满足的方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right) = -\frac{F}{mh^2u^2}$$

将它简记为

$$h^2 = \frac{P(u)}{u^3}$$

考虑微小的扰动，即$u = u_0 + \xi$，u_0是满足Bénard公式的一圆轨道的值。代入Bénard公式可得

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}\theta^2} + u_0 + \xi = \frac{P(u_0 + \xi)}{h^2(u_0 + \xi)^2}$$

将右式进行Taylor展开：

$$\frac{P(u_0+\xi)}{h^2(u_0+\xi)^2}=\frac{1}{h^2u_0^2}(P(u_0)+P'(u_0)\xi+\ldots)(1+\frac{\xi}{u_0})^{-2}=\frac{P_0}{h^2u_0^2}[1+(\frac{P_0'}{P_0}-\frac{2}{u_0})\xi+\ldots]$$

取一阶小量，便得到一个二阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}\theta^2}+(3-\frac{P_0'}{P_0})\xi=0$$

根据常微分方程的理论不难看出，当且仅当$3-\frac{P_0'}{P_0}>0$时，解不会发散，是一个小量。如果设$P=\frac{k^2}{r^n}$，那么代入便得出稳定的条件即是$n<3$。

1.3.6 Rutherford散射公式

$$\vec{F}=m\vec{a}=\frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0r^3}\vec{r}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

而由于有心力的关系

$$mr^2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=L\ \ (\mathrm{Const.})$$

$$\frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0r^3}\vec{r}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\phi}\frac{L}{r^2}$$

即

$$\mathrm{d}\vec{v}=\frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0L}\hat{\vec{r}}\mathrm{d}\phi$$

注意到积分

$$\int\mathrm{d}\vec{v}=\vec{v}_f-\vec{v}_i=2v\sin\frac{\theta}{2}\vec{e}_\theta$$

$$\int_0^{\pi-\theta}\hat{\vec{r}}\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\pi-\theta}(\cos\phi\vec{i}+\sin\phi\vec{j})\mathrm{d}\phi=2\cos\frac{\theta}{2}(\sin\frac{\theta}{2}\vec{i}+\cos\frac{\theta}{2}\vec{j})=2\cos\frac{\theta}{2}\vec{e}_\theta$$

联立，并考虑初始入射半径为b，则角动量$L=mvb$

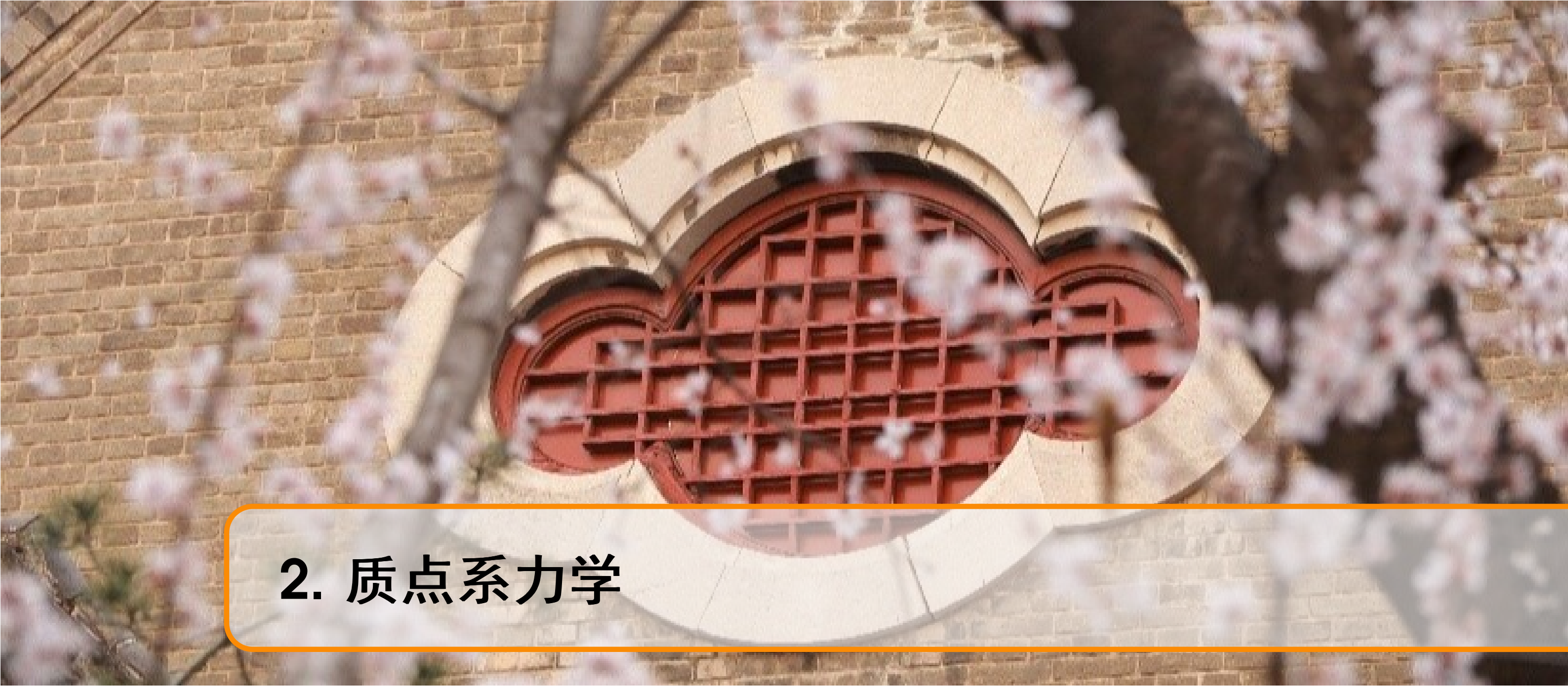
$$b=\cot\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z_1Z_2e^2}{E_k}=\cot\frac{\theta}{2}\cdot\frac{a}{2}$$

如果在$b+\mathrm{d}b$环上入射，那么

$$\mathrm{d}\sigma=2\pi b|\mathrm{d}b|=\frac{a^2 2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta}{16\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

$$\mathrm{d}\Omega=\frac{2\pi r\sin\theta r\mathrm{d}\theta}{r^2}=2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\sigma_c=\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{a^2}{16\sin^4\frac{\theta}{2}}$$



2. 质点系力学

质点系：相互联系着的质点组成的力学体系

内力：质点系中质点间的相互作用的力

外力：质点系以外的物体对质点系内任一质点的作用力

质心：质点系中恒存在一个特殊的点，它的运动很容易被确定，以这个点为参考点简化问题。

2.1 质点系中的一些定理

质点系动量定理

$$\vec{p}=\sum m_i\vec{v}_i,\ \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\sum m_i\frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t}=\sum m_i\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2}=\sum \vec{F}_i^{(e)}+\sum \vec{F}_i^{(i)}=\sum \vec{F}_i^{(e)}$$

质心运动定理

$$\sum m_i\vec{r}_i=\sum m_i\vec{r}_C,\ \sum m_i\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2}=\sum m_i\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_C}{\mathrm{d}t^2}=\sum \vec{F}_i^{(e)}$$

$$\Rightarrow\ \sum \vec{F}_i^{(e)}=m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2}$$

质点系动量守恒定律

$$若\sum \vec{F}_i^{(e)}=0,\ \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=0,\ \vec{p}=m\vec{v}_C\ \Rightarrow\ \vec{v}_C=\mathrm{Const.}$$

质点系角动量定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sum \vec{r}_i\times m_i\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t})=\sum(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}\times m_i\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}+\vec{r}_i\times\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2})=\sum[\vec{r}_i\times(\vec{F}_i^{(e)}+\vec{F}_i^{(i)})]=\sum \vec{r}_i\times\vec{F}_i^{(e)}$$

质点系角动量守恒定律

$$若\vec{M}=\sum \vec{r}_i\times\vec{F}_i^{(e)}=0,\ \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=0\ \Rightarrow\ \vec{L}=\mathrm{Const.}$$

质点系对质心的角动量定理

$$m_i\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i{}'}{\mathrm{d}t^2}=\vec{F}_i^{(e)}+\vec{F}_i^{(i)}+(-m\ddot{\vec{r}}_C)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sum\vec{r}_i{}'\times m_i\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i{}'}{\mathrm{d}t})=\sum\vec{r}_i{}'\times\vec{F}_i^{(e)}+\ddot{\vec{r}}_C\times\sum m_i\vec{r}_i{}'$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}'}{\mathrm{d}t}=\vec{M}'$$

质点系动能定理

$$\mathrm{d}(\sum\frac{1}{2}m_i\dot{r}_i{}^2)=\sum(\vec{F}_i^{(e)}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i+\vec{F}_i^{(i)}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i)$$

König定理

$$\vec{r}_i=\vec{r}_C+\vec{r}_i{}'$$

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i(\dot{\vec{r}}_C+\dot{\vec{r}}_i{}')^2=\frac{1}{2}m\dot{r}_C{}^2+\frac{1}{2}\sum m_i\dot{r}_i{}'^2+\dot{\vec{r}}_C\cdot\sum m_i\dot{\vec{r}}_i=\frac{1}{2}m\dot{r}_C{}^2+\frac{1}{2}\sum m_i\dot{r}_i{}'^2$$

质点系对质心的动能定理

$$\mathrm{d}(\sum\frac{1}{2}m_i\dot{r}_i{}'^2)=\sum(\vec{F}_i^{(e)}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i{}'+\vec{F}_i^{(i)}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i{}')+\sum-m_i\ddot{\vec{r}}_C\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i{}'=\sum(\vec{F}_i^{(e)}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i{}'+\vec{F}_i^{(i)}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i{}')$$

2.2 一些具体实例中的公式

2.2.1 散射公式

设质量为m_1的质点以速度v_0被另一质量为m_2的静止质点散射，两质点的质心在散射前后都将沿着v_0的方向以v_C运动。根据动量守恒，有

$$v_1\cos\theta=u_1\cos\alpha+v_C\qquad v_1\sin\theta=u_1\sin\alpha\quad\Rightarrow\quad\tan\theta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\frac{v_C}{u_1}}$$

而$m_1v_0=(m_1+m_2)v_C$，并且考虑到恢复系数$e=\frac{|u_1+u_2|}{|v_0-0|}=1$，那么可以求得

$$v_C=\frac{m_1}{m_1+m_2}v_0,\quad u_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}u_0$$

于是

$$\tan\theta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\frac{m_1}{m_2}}$$

2.2.2 变质量物体的运动

之前所讨论的都是物体的质量固定时的运动规律，这里讨论的不考虑相对论效应。

$$\vec{F}\cdot\Delta t=(m+\Delta m)(\vec{v}+\Delta\vec{v})-m\vec{v}-\Delta m\vec{u}$$

$$\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{u}=\vec{F}$$

2.2.3 位力定理

设量$G=\sum \vec{p}_i\cdot\vec{r}_i$，

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=\sum\dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{p}_i+\sum\dot{\vec{p}}_i\cdot\vec{r}_i$$

对时间求平均

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\overline{\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}}=0$$

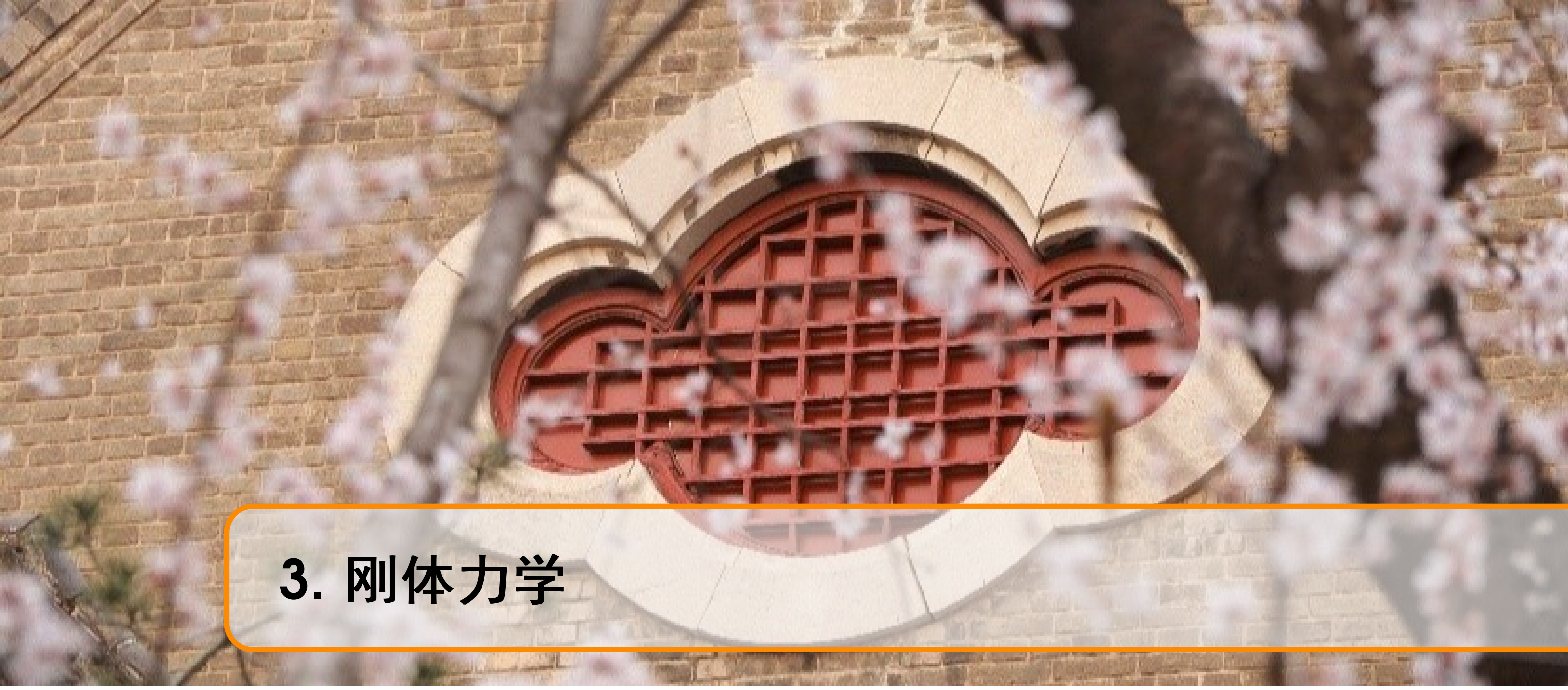
$$\overline{T}=-\frac{1}{2}\overline{\sum\vec{F}_i\cdot\vec{r}_i}$$

如果为保守力体系，那么$\vec{F}=-\nabla V$，这样

$$\overline{T}=\frac{1}{2}\overline{\sum(\nabla_i V)\cdot\vec{r}_i}$$

特别地，对于有心力，且势能是r的幂函数$V=ar^{n+1}$，那么

$$\overline{T}=\frac{1}{2}(n+1)\overline{V}$$



3. 刚体力学

3.1 角速度

现在，角速度不再简单的是一个标量，它变成了一个矢量：$\vec{\omega}=\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}t}$。

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

3.1.1 Euler角

将之前的坐标系先绕z轴转动角φ，再沿转动后的x轴（x_1）转动角θ，再沿转动后的z轴（z_2）转动角ψ，这样得到新的一组坐标，记现在的三个轴为x、y、z，那么这三个方向的角速度可以这样表示：

$$\begin{cases}\omega_x=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi\\ \omega_y=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi\\ \omega_z=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}\end{cases}$$

3.2 刚体的运动

首先先来引入转动惯量，这需要将之前的角速度矢量运用其中：

$$\vec{L}=\sum\vec{r}_i\times\vec{p}_i=\sum m_i[\vec{r}_i\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)]=\sum m_i[r_i^2\vec{\omega}-(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i)\vec{r}_i]$$

于是可以将它写为矩阵相乘的样式：

$$\begin{pmatrix}L_x\\L_y\\L_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum m_i(y_i^2+z_i^2) & -\sum m_ix_iy_i & -\sum m_ix_iz_i\\ -\sum m_iy_ix_i & \sum m_i(z_i^2+x_i^2) & -\sum m_iy_iz_i\\ -\sum m_iz_ix_i & -\sum m_iz_iy_i & \sum m_i(x_i^2+y_i^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}$$

式中的二阶张量称之为惯性张量，式中已经展现了它的各个分量

$$I=\begin{pmatrix}I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz}\\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz}\\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz}\end{pmatrix}$$

某一时刻，角速度矢量相对于三个轴的方向余弦值分别为α、β、γ，那么沿此轴线的转动惯量可以表示为：

$$\vec{\omega}=\omega\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz}\\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz}\\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$$

3.2.1 刚体的平衡

刚体的平衡需要满足以下条件

$$\begin{cases}\sum\vec{F}=0\\ \sum\vec{M}=0\end{cases}$$

即诸外力的矢量和为零，以及诸外力对任意一点的力矩为零。

3.2.2 刚体的平动

刚体运动时，如果在各个时刻，刚体中任意一条直线始终彼此平行，那么这种运动称之为平动。容易发现，刚体平动时，刚体内所有的点都具有相同的速度和加速度，于是可以用任何一点的运动代表全体，通常选用质心来代表刚体的运动。

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_C}{\mathrm{d}t^2}=\sum\vec{F}_i$$

$$\sum\vec{M}'=0$$

3.2.3 刚体的定轴转动

在定轴转动中，各点的角速度和角加速度都是一样的，并且只要确实角位移，便可以完全确定刚体的位置。

$$\vec{v}_i=\vec{\omega}\times\vec{r}_i,\quad \vec{a}_i=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}-\omega^2\vec{r}$$

这样可以将加速的两个分量表示出来：

$$a_{i\tau}=\dot{\omega}r_i=\beta r_i,\quad a_{in}=\omega^2 r_i$$

有了惯性张量之后，可以方便地表示以下的量：

$$\vec{L}=I\vec{\omega},\quad \vec{M}=I\vec{\beta}$$

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)=\frac{1}{2}\sum m_i\vec{\omega}\cdot[\vec{r}_i\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)]=\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}=\frac{1}{2}\omega^T I\omega$$

$$\frac{1}{2}\omega^T I\omega+V=E$$

3.2.4 刚体的定点转动

刚体转动时，如果刚体内只有一点始终保持不动，则称定点转动。

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+(\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{\omega}-\omega^2\vec{r}$$

3.2.5 刚体的一般运动

综合上述情况，可以将刚体的运动分解为上面的几种情况的叠加：

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v_0} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r_0})$$

$$\vec{a} = \vec{a_0} + \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}' + (\vec{\omega} \cdot \vec{r}')\vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}'$$

$$\frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} \omega^T I \omega + V = E$$

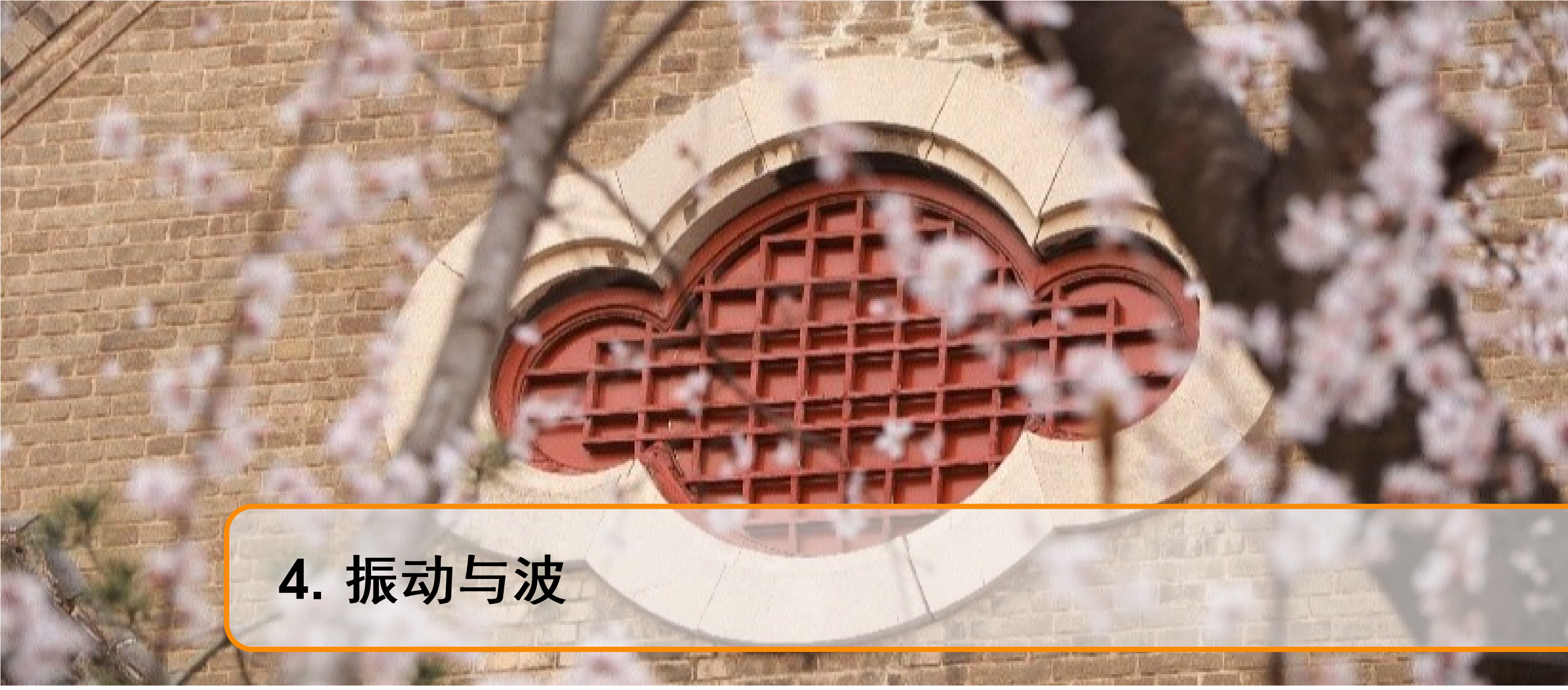
3.2.6 Euler运动学方程

之前所写出的角动量的分量的表达式，是选取固定在刚体上并跟随刚体一起转动的坐标系，这样各惯量系数都是常数，那么角动量随时间的变化除了其值对时间的微商，还应该有随着刚体转动对时间的微商$\vec{\omega} \times \vec{L}$。

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{L}}{\partial t} + \omega \times \vec{L}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_x - (I_2 - I_3)\omega_y \omega_z = M_x \\ I_2 \dot{\omega}_y - (I_3 - I_1)\omega_z \omega_x = M_y \\ I_3 \dot{\omega}_z - (I_1 - I_2)\omega_x \omega_y = M_z \end{cases}$$



4. 振动与波

4.1 振动

4.1.1 简谐振动

简谐振动是指：质点沿一方向的位移$x = A\cos(\omega t + \varphi)$。

现在先用弹簧振子模型来说明这一点。对于弹簧振子而言，质点在线性恢复力作用下围绕平衡位置的运动。根据这个定义，可以写出它所满足的运动方程：

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r}$$

现在为简便起见，考虑一维的振动，这样可以得到一个二阶常系数齐次线性微分方程

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

式中$\omega^2 = k/m$，不难求出这个方程的解：$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$，运用辅助角公式即可将它化为上述的形式。对于单摆、复摆也可以得到类似的方程，不过它们需要小角度近似，只有在这种情况下$\sin\theta \approx \theta$，才能化成上述的微分方程的样式。

对于这样的一个运动，根据三角函数的性质，不难发现：存在一个最小的正数T，使得$x(t+T) = x(t)$，且$\dot{x}(t+T) = \dot{x}(t)$。那么这个$T = 2\pi/\omega$就是简谐运动的周期。也可以定义频率$\nu$(或$f$)$= 1/T$，$\omega$称为角频率。也能发现，无论$t$如何变化，位移始终在$-A$和$A$之间变化，称$A$为振幅。

仍以弹簧振子为例，它具有动能和势能，各自随时间变化，代入运动的表达式，

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi), \qquad E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

注意到总能量是一个不随时间变化的量：$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$，这样得到简谐振动的普遍特征，即振动的能量总是正比与振幅的平方。

4.1.2 简谐振动的合成

4.1.2.1 同方向同频率的简谐振动

如果一个质点同时参与两个同方向同频率的简谐振动$x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$、$x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$，那么它的合振动就是这两个振动之和。

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) + A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

$$= A_1\cos\omega t\cos\varphi_1 - A_1\sin\omega t\sin\varphi_1 + A_2\cos\omega t\cos\varphi_2 - A_2\sin\omega t\sin\varphi_2$$

$$= (A_1\cos\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)\cos\omega t - (A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)\sin\omega t$$

此时再利用辅助角公式，可以看出合振动仍然是一个简谐振动，并且周期与原来的一致。

$$x = A\cos(\omega t+\varphi),\quad \begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)} \\ \tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{cases}$$

根据合振动的振幅的表达式，当两个简谐振动的初相位相差2π的整数倍时，合振幅最大$A = A_1 + A_2$；当两个简谐振动的初相位相差π的奇数倍时，合振幅最小$A = |A_1 - A_2|$。

4.1.2.2 同方向不同频率的简谐振动

在这里，为了表达式简洁，取两个简谐振动的振幅相同：$x_1 = A\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$、$x_2 = A\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$，那么它们的合振动就是这两个振动之和。

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + A\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$

$$= A\cos(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2})\cos(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1-\varphi_2}{2})$$

记$\overline{\varphi} = (\varphi_1+\varphi_2)/2$，$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$。由于角频率都是正数，那么$\omega_1+\omega_2$一定大于$|\omega_1 - \omega_2|$。现在将变化缓慢的那一部分作为振幅的"简谐振动"，那么就体现为合振动的强弱程度(振幅的平方)随时间作周期性变化，这样的现象称作拍，强弱程度变化的频率$\nu = |\nu_1 - \nu_2|$称为拍频。

4.1.2.3 方向互相垂直、同频率的简谐振动

设质点同时参与两个方向的两个相同频率的简谐振动$x = A_x\cos(\omega t+\varphi_x)$、$y = A_y\cos(\omega t+\varphi_y)$，现在消去时间$t$，可以得到运动的轨道。

$$\begin{cases} \cos\varphi_x\cos\omega t - \sin\varphi_x\sin\omega t = \frac{x}{A_x} \\ \cos\varphi_y\cos\omega t - \sin\varphi_y\sin\omega t = \frac{y}{A_y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\omega t = \frac{\frac{y}{A_y}\sin\varphi_x - \frac{x}{A_x}\sin\varphi_y}{\sin(\varphi_x-\varphi_y)} \\ \sin\omega t = \frac{\frac{y}{A_y}\cos\varphi_x - \frac{x}{A_x}\cos\varphi_y}{\sin(\varphi_x-\varphi_y)} \end{cases}$$

代入$\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$可得轨道方程

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2xy}{A_xA_y}\cos(\varphi_x-\varphi_y) = \sin^2(\varphi_x-\varphi_y)$$

这种样式的轨道可以通过化二次型为标准形的方式来确定，下面观察几个特殊的情形。

1. $\varphi_x - \varphi_y = k\pi$，这两种情形可以简化为方程

$$\frac{x}{A_x} = \pm\frac{y}{A_y}$$

不难看出这仍是在一条直线上的简谐振动。

2. $\varphi_x - \varphi_y = (k+\frac{1}{2})\pi$，此时化为方程

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1$$

这是一个椭圆轨道，运动方向需要由k的奇偶性来确定。一般而言，k为奇数时，沿椭圆顺时针运动；k为偶数时，沿椭圆逆时针运动。特别地，当$A_x = A_y$时，为圆轨道。

据此，对于一般的情形，由于二次型正定，对应的都是一个椭圆轨道。

4.1.2.4 方向互相垂直、不同频率的简谐振动

设质点同时参与两个方向的两个不同频率的简谐振动$x = A_x\cos(\omega_x t + \varphi_x)$、$y = A_y\cos(\omega_y t + \varphi_y)$，质点在$xy$平面上的合运动轨道较为复杂。当$\omega_x$与$\omega_y$之比为整数比时，合运动为周期运动，轨道或是有限的曲线段、或是闭合的曲线，这些曲线图称为Lissajous图形。

4.1.3 振动的分解

对于一个有周期的非简谐振动，它可以用Fourier级数展开

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t)$$

其中的Fourier系数可以这样求得

$$a_n = \tfrac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cos n\omega t\mathrm{d}t, \qquad b_n = \tfrac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\sin n\omega t\mathrm{d}t$$

这样就可以将它分解为一系列简谐振动的合成。

对于非周期性的振动，可以认为它是一个周期$T\to\infty$的周期振动，此时应当利用Fourier积分去求解它的各个组分。

$$x(t) = \int_0^{\infty} a(\omega)\cos\omega t\mathrm{d}\omega + \int_0^{\infty} b(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega$$

其中的系数可以这样确定

$$a(\omega) = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos\omega t\mathrm{d}t, \qquad b(\omega) = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin\omega t\mathrm{d}t$$

4.1.4 阻尼振动

物体在回复性保守力和阻力共同的作用下的运动，称为阻尼运动。

现在将讨论范围限制在直线方向的阻尼振动，设阻力与速度成正比，即$f = -\gamma\dot{x}$，那么根据Newton第二定律，有

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

其中$\beta=\gamma/2m$称为阻尼系数，ω_0称为固有角频率。求解这个二阶常系数齐次线性微分方程，可以得到它的解

$$x=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t},\ r_1=-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2},\ r_2=-\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$$

(1) $\beta>\omega_0$，即过阻尼情形，此时的通解化为

$$x=e^{-\beta t}(C_1e^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t}+C_2e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t})$$

可以看到，除去振幅随时间衰减的项，后面的部分已经没有振动特性。由于此时的阻尼非常大，振子的特性几乎已经丧失。

(2) $\beta=\omega_0$，即临界阻尼情形，此时得到了两个重根$x_1=e^{-\beta t}$，需要利用变易系数法求出另一个线性无关的解。代入可得$x_2=te^{-\beta t}$。那么通解就是

$$x=(C_1+C_2t)e^{-\beta t}$$

可以看到，这个解也没有振动特性，但是它比过阻尼情况能更快地趋向于平衡位置。

(3) $\beta<\omega_0$，即低阻尼情形，此时根式部分为虚数，对通解进行重新的线性组合，可以得到

$$x=Ae^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi)$$

式中的A和φ可以由初始条件确定。不难看出，此时振子仍在平衡位置两侧作往返振动，但阻尼使得振幅在不断减小。某时刻的振幅与经过一个周期后的振幅之比的自然对数称作对数减缩λ，根据定义，不难得出$\lambda=\beta T$。从能量方面来看，由于能量与振幅相关，那么经过一个周期后，能量也有所损耗。定义品质因数$Q=2\pi E/\Delta E$，E是t时刻振子的能量，经过一个周期后，振子的能量损失为ΔE，那么对于阻尼振动情形，代入这些可以求得$Q=2\pi/(1-e^{-2\beta T})\approx 2\pi/(2\beta T)=\omega_0/\beta$。

4.1.5 受迫振动

阻尼振动会使能量不断被消耗，如果施加一个力不断地对物体做正功，那么它仍可以保持振动。如果施加的这个力是周期性的（称为驱动力），那么这样形成的振动称为受迫振动。现在考虑最基本的驱动力$F=F_0\cos\omega t$，代入Newton第二定律，得到

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=f_0\cos\omega t$$

式中$f_0=F_0/m$，这个方程是一个二阶常数非齐次线性微分方程，求解它需要先求解相应的齐次线性方程的解，再通过变易系数法求得此非齐次的通解。

$$x=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}+A\cos(\omega t+\varphi),\ A=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}},\ \tan\varphi=-\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

如果希望振幅A非常大，那么可以看出，当$\beta<\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$、$\omega_r^2=\omega_0^2-2\beta^2$时，振幅$A$取极大，此时称为共振现象。

在峰值两侧取$A=\frac{A_m}{\sqrt{2}}$对应的频率ω_1、ω_2，称$\omega_2-\omega_1$为共振峰宽度，称$S=\omega_0/(\omega_2-\omega_1)$为共振曲线锐度，代入发现它正好等于低阻尼振动的品质因数Q。

4.2 波

波是振动状态传播形成的物理现象，初始时振动的物体称为波源，被带动的周围物质称为波的传播介质。电磁波属于非机械波，它既可以在介质中传播，也可以在真空中传播。

振动方向与传播方向垂直的波称为横波，振动方向与传播方向平行的波称为纵波。沿波的传播方向振动状态的传播速度称为波的相速度，简称波速。

某时刻振动相位相同的点组成的面称为波阵面，最前面的波阵面称为波前。根据波阵面的形状，分为平面波、球面波、柱面波。简谐振动状态传播形成的波称为简谐波。任意类型的波都可以分解为一系列平面简谐波的叠加。

4.2.1 平面简谐波

平面简谐波振动量y是位置x和时间t的函数，设波沿x轴正向传播，波速为$u(>0)$，如果t时刻0处的点的振动为$A\cos(\omega t+\varphi)$，那么传播至P处(位置为x)所需的时间是$\frac{x}{u}$，那么对于该点而言，在t时刻振动状态应该是$t-\frac{x}{u}$时刻0处的点传来的。那么存在关系$y(x,t)=y(0,t-\frac{x}{u})$。同理，对于沿$x$轴负向传播的波有类似过程，现给出平面简谐波的一般表达式

$$y(x,t)=A\cos[\omega(t\mp\frac{x}{u})+\varphi]$$

式中，取负号表示沿x轴正向传播的波，取正号表示沿x轴负向传播的波。定义波形图中两个相邻的同相位点之间的距离为波长λ，那么，不难看出$\lambda=\frac{2\pi\cdot u}{\omega}=uT$。定义波数$k=\frac{2\pi}{\lambda}$，那么它是沿着传播方向的“空间角频率”，也是空间传播方向上每个2π长度内包含的波长数量。据此可以将上式改写为更为简洁的形式：

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi)$$

这种情形就很容易推广到三维情形，此时，数k将变为矢量$\vec{k}$(称为波矢)，$\vec{r}$是空间中的位矢，则有

$$y(\vec{r},t)=A\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi)$$

4.2.2 波的叠加

波的独立传播定律：若干两列同种类的波在介质中传播时，一般情况下每一列波的传播不受其他列波的影响。波的独立传播定律成立时，介质中每一个点部位的振动是各列波单独传播到该点部位的振动量的叠加，这就是波的叠加原理。

4.2.2.1 波的干涉

如果各列波的初相位恒定、频率相同、振动方向一致，那么此时振幅大小的空间分布不会随时间变化，这样的现象称为波的干涉，这些波列称为相干波列，产生相干波列的波源称为相干波源。

现在用两列波的干涉来说明这一点，多列波的情形总可以化为两列波干涉的情形。两

列相干波分别为$y_1 = A_1\cos(\omega t - kr_1 + \varphi_1)$、$y_2 = A_2\cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2)$那么合振动便是

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t + \varphi), \quad \begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\phi} \\ \phi = \varphi_1 - \varphi_2 + k(r_2 - r_1) \end{cases}$$

从这个式子可以清晰地看出，振幅A的大小由r_1、r_2确定，即由该点的空间位置确定。

4.2.2.2 驻波

取两列振幅相同的相干平面简谐波，设分别沿x轴正、负方向传播。叠加后，有

$$y = 2A\cos(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2})\cos(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2})$$

这样就能发现，各处的振动量随时间按$\cos\omega t$变化，振幅随空间按$\cos kx$变化。这样两列波相干叠加后合成的波不再左行或者右行，而是"原地踏步"，称之为驻波。驻波中振幅为0处称为波节，振幅最大处称为波腹，相邻波节或相邻波腹的间距为$\lambda/2$。

4.2.3 波的衍射

波在一种介质中传播，遇到有小孔的挡板时，穿过小孔的那部分会朝各个方向散开，遇到障碍物时则会绕行。

Huyhgens原理：t时刻波前上的每一个点都可以看做是发生球面子波的新波源，这些子波在$t+\Delta t$时刻波前的包络面就是整个波在$t+\Delta t$时刻的波前。

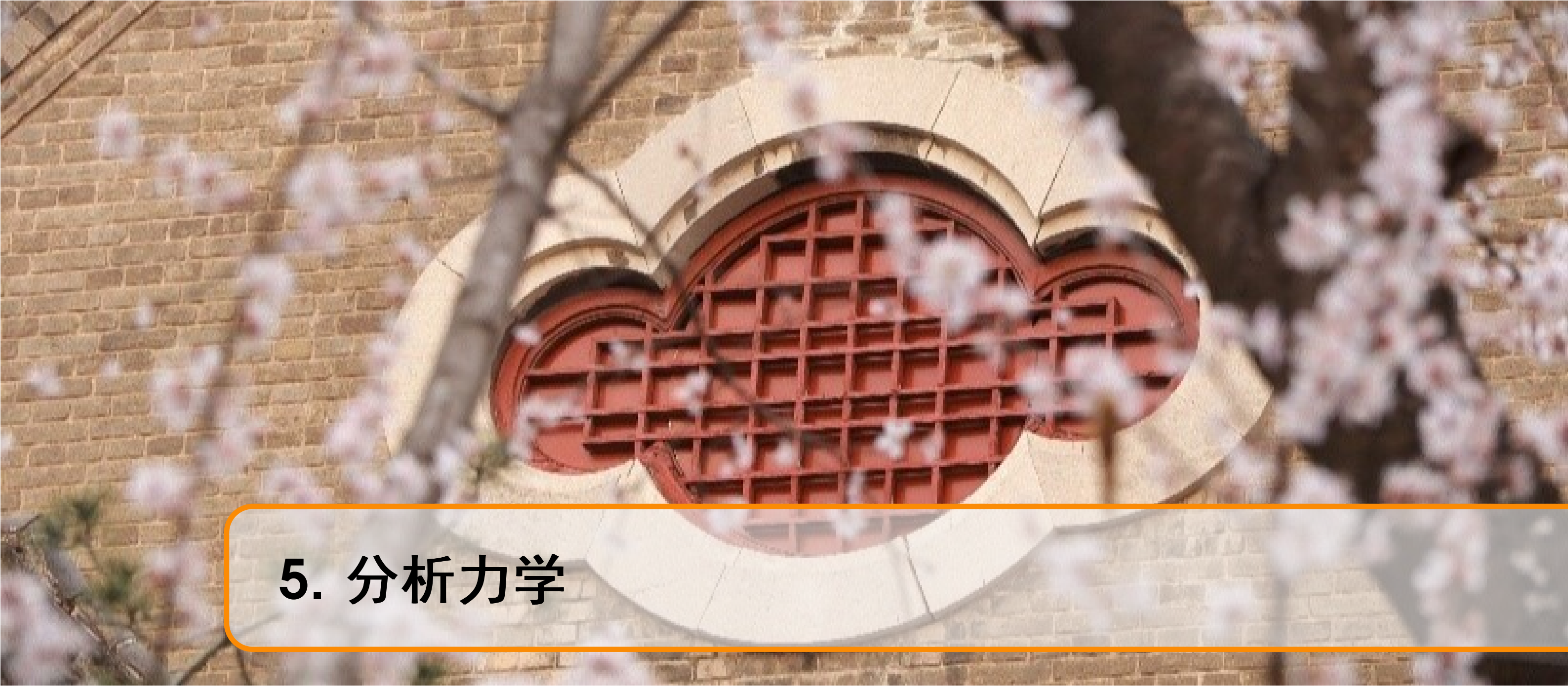
4.2.4 Doppler效应

波源发出的振动在介质中传播形成波，波经过的任一位置上的振动都可以被观察者接收。波源的频率为ν_0，观察者接收的频率为ν，在波源和观察者都相对介质相对静止时，一定有$\nu = \nu_0$，当它们相对介质运动时，这两个频率一般不相等。

考虑波源、观察者在它们连线的方向上相对于介质运动的情形。设波源不动，观察者在介质中以速度v朝着波源运动时，此时在单位时间内接收的波列长度为$u+v$，那么测得的频率$\nu = \frac{u+v}{\lambda} = \frac{u+v}{u}\nu_0 > \nu_0$；如果背着波源运动，那么测得的频率$\nu = \frac{u-v}{u}\nu_0 < \nu_0$（$v > u$不属于Doppler效应的范畴）。

如果是波源运动、观察者不动的情形，设初始时波源左右两侧相等距离处各有一个观察者，波源向右运动。那么两个观察者单位时间内接收的波列长度仍为u，但是由于波源的运动，右侧的波长被"压缩"为$\lambda - vT_0$，左侧的波长"延展"为$\lambda + vT_0$。那么对于右侧的观察者，接收的频率$\nu = \frac{u}{u-v}\nu_0 > \nu_0$；对于左侧的观察者，接收的频率$\nu = \frac{u}{u+v}\nu_0 < \nu_0$。

分析力学



5. 分析力学

5.1 约束与自由度

5.1.1 约束

限制各质点自由运动的条件。

稳定约束：约束方程不显含时间t，$f(x,y,z)=0$
不稳定约束：约束方程显含时间t，$f(x,y,z,t)=0$
不可解约束：质点始终不能脱离的约束，$f(x,y,z)=0$或$f(x,y,z,t)=0$
可解约束：在某一方向上可以脱离，$f(x,y,z)\le c$
几何约束（完整约束）：只含位置，不含速度，$f(x,y,z)=0$或$f(x,y,z,t)=0$
运动约束（微分约束）：除限制质点坐标外，还限制质点的速度，$f(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})=0$

微分约束若可积分，与几何约束无区别；若不能积分，为不完整约束

5.1.2 广义坐标

对于n个质点组成的体系，如果有k个几何约束，则只有$3n-k$个坐标是独立的，独立坐标的数目称为体系的自由度。

令$3n-k=s$，则可以用s个独立参数$q_1,q_2,\ldots,q_s$以及t来表示坐标，参数$q_1,q_2,\ldots,q_s$叫做Lagrange广义坐标。那么t时刻体系内各点的位矢可以写作这些广义坐标的函数：$\vec{r_i}=\vec{r_i}(q_1,q_2,\ldots,q_s,t)$，这些广义坐标随时间的变化率称为广义速度。

$\Rightarrow s$个广义速度也独立。注意广义坐标与广义速度之间也是独立的，即

$$\frac{\mathrm{d}\dot{q}_\alpha}{\mathrm{d}q_\alpha}=0$$

对于一个运动而言，知道了它的坐标与速度，那么这个运动就被完全地确定下来。后续引入广义动量后也可以将运动写作坐标与动量的函数。

5.2 虚功原理

5.2.1 虚位移

设n个质点组成的体系的约束方程$f_i(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\dots,\vec{r}_n,t)=0,i=1,2,\dots,m$，如果每个质点在$\mathrm{d}t$时间内有满足约束条件的实位移$\mathrm{d}\vec{r}_j$，那么

$$f_i(\vec{r}_1+\mathrm{d}\vec{r}_1,\vec{r}_2+\mathrm{d}\vec{r}_2,\dots,\vec{r}_n+\mathrm{d}\vec{r}_n,t)=0$$

对此式进行Taylor展开，保留至一阶项，则有

$$\sum_j \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}_j}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_j+\frac{\partial f_i}{\partial t}\cdot \mathrm{d}t=0$$

如果每个质点有满足约束条件的虚位移$\delta\vec{r}_j$，仿照上面的步骤，注意$\delta t=0$，有

$$f_i(\vec{r}_1+\delta\vec{r}_1,\vec{r}_2+\delta\vec{r}_2,\dots,\vec{r}_n+\delta\vec{r}_n,t)=0$$

$$\Rightarrow\ \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}_j}\cdot \delta\vec{r}_j=0$$

虚位移：是想象中可能发生的位移，只决定于质点在此时刻的位置和约束，而不是由于时间改变所引起的。在约束所许可的情况下，质点的虚位移可以有很多个（只满足约束条件）。

实位移：质点由于运动实际上所发生的位移，满足运动方程即可。

二者关系：在稳定约束下，实位移$\mathrm{d}\vec{r}$是许多虚位移$\delta\vec{r}$里面的一个；对于不稳定约束而言，实位移与虚位移并不一致。

5.2.2 虚功原理

如果作用在一力学体系上诸约束反力在任意虚位移$\delta\vec{r}$中所做的虚功之和为零，即

$$\sum \vec{F}_{r_i}\cdot\vec{r}_i=0$$

那么系统受到的约束称为理想约束。在理想约束下，体系处于平衡的条件为

$$\delta W=\sum \vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i=0$$

这称之为虚功原理。

5.2.3 广义力

为了引入广义力，需要将这些力学量改写为广义坐标的函数，那么

$$\delta W=\sum_i \vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_i \vec{F}_i\cdot(\sum_\alpha \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha)=\sum_\alpha(\sum_i \vec{F}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha})$$

现在已经将δW写成了关于广义坐标的函数，如果设广义力

$$Q_\alpha=\sum_i \vec{F}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

那么虚功δW就写成了广义力Q_α与虚位移δq_α的乘积$\delta W=\sum_\alpha Q_\alpha q\alpha$。

5.2.4 Lagrange未定乘数

考虑虚功原理和满足约束f_β的虚位移，

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0,\ \sum_i \nabla f_\beta \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

设一个常数λ_β，用它乘第二个式子并加在第一个式子上，有

$$\sum_i (\vec{F}_i + \lambda_\beta \nabla f_\beta) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

联立这些方程可以求出坐标和未定乘数。不定乘子和约束方程的散度乘积是对应的约束反力($\vec{F}_{r_\beta} + \nabla f_\beta = 0$)。

5.3 Lagrange方程

5.3.1 d'Alembert原理

仿照Newton第二定律($\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i = 0$)，不妨将$-m_i\ddot{\vec{r}}_i$看做是一种力（惯性力），那么根据虚功原理，有

$$\sum (\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

这个式子称为d'Alembert原理。

5.3.2 基本形式的Lagrange方程

首先先得到两个有用的关系式

(1) $\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha} = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t} + \sum_\alpha \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\frac{\mathrm{d}q_\alpha}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}q_\alpha}{\mathrm{d}t} = \dot{q}_\alpha,\ \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}_i$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha} = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}) = \frac{\partial}{\partial q_\alpha}(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t})$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}) = \frac{\partial^2\vec{r}_i}{\partial q_\alpha\partial t} + \sum_\beta \frac{\partial^2\vec{r}_i}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\dot{q}_\beta = \frac{\partial}{\partial q_\alpha}(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t} + \sum_\beta \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta)$$

$$\Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}) = \frac{\partial}{\partial q_\alpha}(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t})$$

现在运用这两个等式对d'Alembert原理方程进行变换。对于第一项，利用广义力的定义，有

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_\alpha Q_\alpha \cdot \delta q_\alpha$$

对于第二项

$$
\begin{aligned}
-\sum_i m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i &= -\sum_i m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot(\sum_\alpha\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}) = -\sum_\alpha\sum_i m_i\frac{\mathrm{d}\dot{\vec{r}}_i}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha \\
&= -\sum_\alpha\sum_i m_i[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}) - \dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha})]\delta q_\alpha \\
&= -\sum_\alpha\sum_i m_i[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}) - \dot{\vec{r}}_i\frac{\partial}{\partial q_\alpha}(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t})]\delta q_\alpha \\
&= -\sum_\alpha[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_\alpha}(\sum_i\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^2)) + \frac{\partial}{\partial q_\alpha}(\sum_i\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^2)]\delta q_\alpha
\end{aligned}
$$

而系统的动能$T=\sum_i\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^2$，于是综上得出基本形式的Lagrange方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha$$

5.3.3 保守系的Lagrange方程

如果外力$\vec{F}_i=-\nabla_i V$，即体系处于保守势场中，那么

$$Q_\alpha=\sum_i\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}=-\sum_i\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}=-\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$$

定义Lagrange量L

$$L=T-V$$

注意到V只是广义坐标的函数，与广义速度无关，于是有保守系的Lagrange方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$$

5.4 Hamilton正则方程

5.4.1 正则方程

类比于常见的坐标写法，定义广义动量$p_\alpha=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}$，则定义Hamilton量

$$H=-L+\sum_\alpha p_\alpha\dot{q}_\alpha$$

现在对其求全微分，并考虑Lagrange量的全微分

$$\mathrm{d}H=-\mathrm{d}L+\sum_\alpha p_\alpha\mathrm{d}\dot{q}_\alpha+\dot{q}_\alpha\mathrm{d}p_\alpha,\ \mathrm{d}L=\sum_\alpha\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\mathrm{d}q_\alpha+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\mathrm{d}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{d}H=\sum_\alpha\dot{q}_\alpha\mathrm{d}p_\alpha-\dot{p}_\alpha\mathrm{d}q_\alpha-\frac{\partial L}{\partial t}$$

那么就得到关系

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha \\ \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\dot{p}_\alpha \end{cases}$$

这称为正则方程，除此之外还能看出关系$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$。

5.4.2 能量积分

考虑动能$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2$，将其改写为广义坐标的函数

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_\alpha \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha)(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_\beta \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \sum_\alpha \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\dot{q}_\alpha + \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \sum_\alpha a_\alpha \dot{q}_\alpha + \frac{1}{2}a = T_2 + T_1 + T_0$$

现在将保守系的Lagrange方程进行变换，对等式两边同时乘$\dot{q}_\alpha$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\cdot \dot{q}_\alpha - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

如果T是广义速度的二次齐次函数，则$\sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = 2T$，而对于一个函数$\rho$，它可以写作关于广义坐标和广义速度的函数$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \sum_\alpha(\frac{\partial \rho}{\partial q_\alpha}\frac{\mathrm{d}q_\alpha}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \rho}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{\mathrm{d}\dot{q}_\alpha}{\mathrm{d}t})$。注意到$V$仅仅是广义坐标的函数，于是它的全微分中没有对广义速度求偏导的项。于是方程变换为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2T) - \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}, \ \Rightarrow \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+V) = 0$$

这个式子就是能量守恒的形式，总能量$E = T + V$不会随时间改变。

如果T不是广义速度的二次齐次函数，那么$\sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = 2T_2 + T_1$，代入式中可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T_2 - T_0 + V) = 0, \ T_2 - T_0 + V = h, \ h = \mathrm{Const.}$$

现在用上面求得的Hamilton量的全微分形式，并利用正则方程，有

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_\alpha(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha) = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_\alpha(-\dot{p}_\alpha \dot{q}_\alpha + \dot{q}_\alpha \dot{p}_\alpha) = \frac{\partial H}{\partial t}$$

从这个式子可以看出，如果Hamilton量不显含时间，那么它就是一个不随时间变化的量，同样，如果T是广义坐标的二次齐次函数，那么

$$H = -L + \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha = -L + 2T = T + V = E$$

对于完整的保守力学体系来说，若H不显含t而且体系受稳定约束时(即T不显含时间t)，体系的H是能量积分，这时体系的机械能守恒。
如果是不稳定的约束，即T显含时间，那么

$$H = -L + \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q_\alpha}} \dot{q_\alpha} = -L + 2T_2 + T_1 = T_2 - T_0 + V$$

同理，对于完整的保守力学体系来说，若H中不显含t，而且体系受不稳定约束时，体系的H是广义能量积分。

5.4.3 循环积分

在Lagrange量（或Hamilton量）中不出现的坐标称为循环坐标（可遗坐标）
对于任一循环坐标，都有一对应的积分（循环积分）

5.5 小振动

将势能在平衡位置附近展开，保留至二阶项。

$$V = V_0 + \sum_\alpha \left(\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\right)_0 q_\alpha + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\right)_0 q_\alpha q_\beta + \dots$$

令$c_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\right)_0$，并将$V_0$选做0，由于是平衡位置，所以$\left(\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\right)_0 = 0$，那么势能项便化为$V = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta$。

对于动能项，设T是广义速度的二阶齐次函数，即T不显含时间t，于是动能项便化为$T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\dot{q_\alpha}\dot{q_\beta}$。将势能和动能变换后，代入Lagrange方程。得到

$$\sum_\beta (a_{\alpha\beta}\ddot{q_\beta} + c_{\alpha\beta} q_\beta) = 0,\ \ \alpha = 1,2,\dots,s$$

对于这个方程，设其解为$q_\beta = A_\beta e^{\lambda t}$，代入后便得到一个矩阵方程

$$\begin{pmatrix} a_{11}\lambda^2 + c_{11} & a_{12}\lambda^2 + c_{12} & \dots \\ a_{21}\lambda^2 + c_{21} & a_{22}\lambda^2 + c_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = 0$$

有非零解的条件自然是要求

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + c_{11} & a_{12}\lambda^2 + c_{12} & \dots \\ a_{21}\lambda^2 + c_{21} & a_{22}\lambda^2 + c_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0$$

这样可以解出一系列“本征值”λ_l以及其对应的一组“特征向量”$(A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \dots)^T$，不过这时的系数并未完全确定下来，可以再利用其他的条件（类似于“归一化条件”）完全确定这s个参数。

求解完这些之后，还可以将原有的广义坐标进行线性组合，得到简正坐标，而每一简正坐标将作具有自己固有频率的谐振动。这与量子力学中的表象变换类似。

5.6 Poisson括号

5.6.1 Poisson括号

定义Poisson括号

$$[\varphi,\psi]=\sum_\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial q_\alpha}\right)$$

它有如下性质

i $[c,\psi]=0 \quad c=\text{Const.}$

ii $[\varphi,\psi]+[\psi,\varphi]=0$

iii $\psi=\sum_i\psi_i,\ [\varphi,\psi]=\sum_i[\varphi,\psi_i]$

iv $[-\varphi,\psi]=-[\varphi,\psi]$

v $\frac{\partial}{\partial t}[\varphi,\psi]=[\frac{\partial\varphi}{\partial t},\psi]+[\varphi,\frac{\partial\psi}{\partial t}]$

vi $[\theta,[\varphi,\psi]]+[\varphi,[\psi,\theta]]+[\psi,[\theta,\varphi]]=0$

vii $[q_\alpha,q_\beta]=\delta_{\alpha\beta}$

5.6.2 Liouville定理

考虑一个量ρ随时间的变化，由前面所述，它可以由这些广义坐标以及广义速度来表示，现在将广义速度换为广义动量，那么ρ随时间的变化可以写作

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_\alpha\left(\frac{\partial\rho}{\partial q_\alpha}\dot{q_\alpha}+\frac{\partial\rho}{\partial p_\alpha}\dot{p_\alpha}\right)$$

利用正则方程，将$\dot{p_\alpha}$和$\dot{q_\alpha}$代换，有

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_\alpha\left(\frac{\partial\rho}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial\rho}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)$$

利用Poisson括号，可以简单地写作

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+[\rho,H]$$

这就是Liouville定理

5.6.3 Poisson定理

如果函数φ和ψ都是相空间中的运动常数（不随时间变化），则它们的组合$[\varphi,\psi]$也是相空间中的运动常数。

根据Liouville定理，有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+[\varphi,H]=0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}+[\varphi,H]=0$$

而根据Poisson括号的性质

$$[[\varphi,\psi],H]=[\varphi,[\psi,H]]+[\psi,[H,\varphi]]=-[\varphi,\frac{\partial\psi}{\partial t}]+[\psi,\frac{\partial\varphi}{\partial t}]=-\frac{\partial}{\partial t}[\varphi,\psi]$$

这样就得到了$\frac{\partial}{\partial t}[\varphi,\psi]+[[\varphi,\psi],H]=0$，即$[\varphi,\psi]$也是一个运动常数。

5.7 Hamilton原理

定义作用量S

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t$$

则Hamilton原理表示为：力学系统从时刻t_1到时刻t_2的一切可能的运动之中，作用量S取极值的运动是实际发生的运动，即

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t=0$$

Lagrange方程、正则方程和Hamilton原理之间可以相互推出，此处略去相关推导。

Exercise 5.1 三大原理的互推

5.8 正则变换

取更为广义的“坐标”$Q_\alpha(p,q;t)$与“动量”$P_\alpha(p,q;t)$，它们也满足正则方程。如果变换满足

$$\sum_\alpha(p_\alpha\mathrm{d}q_\alpha-P_\alpha\mathrm{d}Q_\alpha)+(H^*-H)\mathrm{d}t=\mathrm{d}U$$

式中$\mathrm{d}U$是一个恰当微分，H^*是变换后的Hamilton量，则相应的变换是正则变换。

首先对等式两边除$\mathrm{d}t$，和将等式中的微分改为变分

$$\begin{cases}\sum_\alpha(p_\alpha\dot{q}_\alpha-P_\alpha\dot{Q}_\alpha)+(H^*-H)=\dot{U} & ①\\ \sum_\alpha(p_\alpha\delta q_\alpha-P_\alpha\delta Q_\alpha)=\delta U & ②\end{cases}$$

对①式求变分，②式对时间求导数，联立两式，可以得到

$$\dot{Q}_\alpha\delta P_\alpha-\dot{P}_\alpha\delta Q_\alpha-\delta H^*=\dot{q}_\alpha\delta p_\alpha-\dot{p}_\alpha\delta q_\alpha-\delta H$$

而由于正则方程，等式右端等于0，由于H^*是Q_α和P_α的函数，将其取变分不难发现

$$\begin{cases}\dot{Q}_\alpha=\frac{\partial H^*}{\partial P_\alpha}\\ \dot{P}_\alpha=-\frac{\partial H^*}{\partial Q_\alpha}\end{cases}$$

注意到正则变换有赖于U的选择，可以是$U(p,Q;t)$、$U(q,Q;t)$等。

5.9 Hamilton-Jacobi方程*

A. 矢量运算

A.1 矢量的矢积

矢量的一些线性运算与线性代数的内容一致，两个矢量的标积（内积、点乘）可以理解为一个行向量乘一个列向量得到一个数。而两个矢量的矢积（外积、叉乘）则这样定义：

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{cases}\text{大小：} & AB\sin\langle\vec{A},\vec{B}\rangle\\ \text{方向：} & \text{由右手定则确定，}\vec{A}\text{转向}\vec{B}\end{cases}$$

当然也可以使用左手系来确定计算出的结果的方向，只是一般习惯使用右手螺旋定则。矢量积乘法也有类似的性质，但尤其需要注意的是它符合反交换律（$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$）。对于三维空间中的矢量，将其在直角坐标系中分解，可以使用行列式来计算：

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

如果不是直角坐标系，那么可以通过基矢之间的矢积关系以及分配律来计算出结果。

事实上，两个不共线的向量可以确定一个平面，那么矢积的意义就是由这两个向量张成的平行四边形的面积，于是就不难得出三角形的面积公式：$S=\frac{1}{2}ab\sin C$。

A.2 混合积和三重积

向量的混合积定义为：

$$[\vec{A},\vec{B},\vec{C}]=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$$

有了上面提供的矢积的意义，那么不难看出混合积的意义就是由这三个向量张成的平行六面体的体积。利用上面给出的行列式算法，可以计算出混合积的值：

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

利用行列式的性质，立即可以得到混合积的性质：

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = -\vec{A}\cdot(\vec{C}\times\vec{B})$$

向量的三重积定义为：

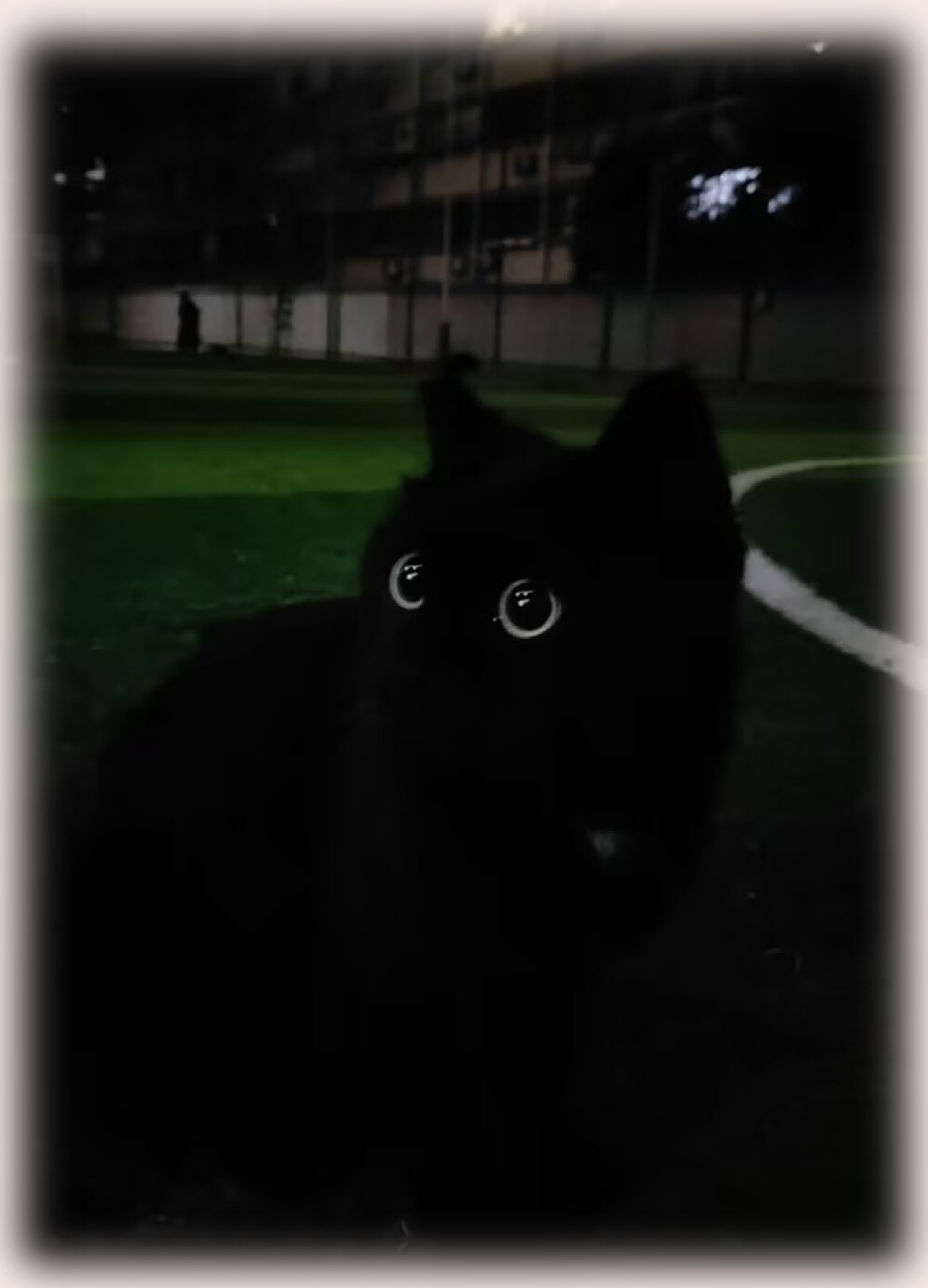
$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$$

根据前面给出的直角坐标下的公式，可以代入计算得出结果：

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

利用反交换律，也可以得到这样的三重积：

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} = (\vec{C}\cdot\vec{A})\vec{B} - (\vec{C}\cdot\vec{B})\vec{A}$$



Bird-eating Cat