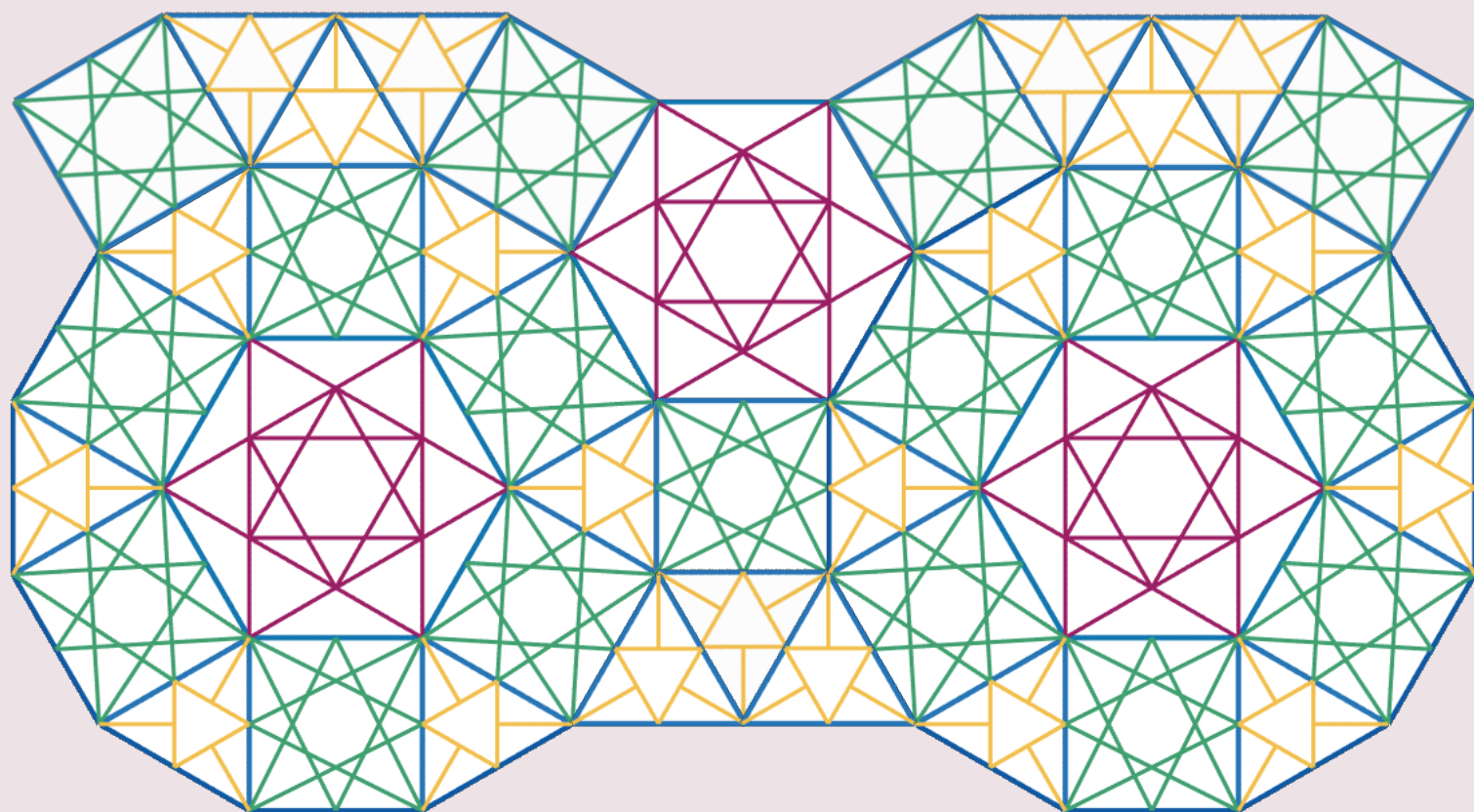


# 电动力学

Electrodynamics

**Bird-eating Cat**



Copyright © 2025 Bird-eating Cat

PUBLISHED BY PUBLISHER

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

*First edition, June 2025*



## 目录

### I

## 电磁学

<b>1</b>	<b>电磁现象的普遍规律 .....</b>	<b>3</b>
1.1	电场和磁场 .....	3
1.2	电介质和磁介质 .....	6
1.3	场的性质 .....	7

### II

## 静态场

<b>2</b>	<b>静电场 .....</b>	<b>13</b>
2.1	静电场理论 .....	13
2.2	求解静电场的方法 .....	15
2.2.1	镜像法 .....	15
2.2.2	分离变量法 .....	15
2.2.3	Green函数法* .....	15
2.2.4	电多极矩 .....	15
<b>3</b>	<b>静磁场 .....</b>	<b>17</b>
3.1	静磁场理论 .....	17
3.2	求解静磁场的方法 .....	18
3.2.1	磁标势 $\psi$ .....	18
3.2.2	磁多极矩 .....	18
3.3	Aharonov-Bohm效应 .....	20

3.4	超导理论*	20
-----	-------	----

### III

## 动态场

4	电磁波的传播	23
4.1	简单的电磁波理论	23
4.2	介质中的简单理论	25
4.3	有导体存在时的传播	28
4.4	应用举例	30
4.4.1	谐振腔	30
4.4.2	波导	31
5	电磁波的辐射	33
5.1	d'Alembert方程	33
5.2	推迟势	34
5.3	电磁波辐射	35
5.3.1	电偶极辐射	35
5.3.2	高阶项展开	36
5.3.3	磁偶极辐射	37
5.3.4	电四极辐射	37
5.4	天线辐射	37
6	带电粒子和电磁场的相互作用*	39
6.1	运动带电粒子的势*	39
6.2	Черенков辐射*	39
6.3	电磁波的散射和吸收	39
6.3.1	带电粒子的电磁场对粒子本身的反作用	39
6.3.2	电磁波的散射	40
6.3.3	电磁波的吸收	41
6.3.4	介质的色散	41

### IV

## 狭义相对论

7	狭义相对论	45
7.1	相对论的基本原理	45
7.2	Lorenz变换	45

<b>7.3</b>	<b>四维形式</b>	<b>47</b>
7.3.1	相对论电动力学	48
7.3.2	相对论力学	49
7.3.3	电磁场中带电粒子的Hamilton量和Lagrange量	51
	<b>Appendices</b>	<b>53</b>
<b>A</b>	<b>场论常用公式</b>	<b>53</b>
A.1	场论算符	53
A.2	$\nabla$ 算符公式	54
<b>B</b>	<b>电磁学单位制</b>	<b>55</b>
B.1	常用单位制	55
B.1.1	MKSA有理制	55
B.1.2	Gauss单位制	55
B.2	MKSA有理制和Gauss单位制常用公式对照表	56





# 电磁学

1	电磁现象的普遍规律 .....	3
1.1	电场和磁场 .....	3
1.2	电介质和磁介质 .....	6
1.3	场的性质 .....	7





# 1. 电磁现象的普遍规律

## 1.1 电场和磁场

**Coulomb定律** 真空中静止的点电荷 $Q$ 对另一个静止的点电荷 $Q'$ 的作用力 $\vec{F}$ 为

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ'}{r^3} \vec{r}$$

两种解释：超距作用✗ 相互作用通过场来传递✓

**场** 物质性： $\vec{F} = Q'\vec{E}$ ，具有能量、动量、角动量

**Gauss定理**

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0}$$

电荷是电场的源，电场线从正电荷发出而终止于负电荷。在没有电荷分布的地点，既没有电场线发出，也没有电场线终止。但可以有电场连续地通过该处。

Gauss定理可以通过如下的方法进行证明（通过面积元的电场强度通量 $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ ）：

1. 通过包围点电荷 $q$ 的同心球面的电场强度通量均为 $q/\epsilon_0$ ，
2. 通过包围点电荷 $q$ 的任意闭合曲面 $S$ 的电场强度通量均为 $q/\epsilon_0$ ，
3. 通过不包围点电荷的任意闭合曲面 $S$ 的电场强度通量均为0，
4. 多个点电荷的电场强度通量等于它们单独存在时的电场强度通量的和。

证明出积分形式后，微分形式立即就可以得到。

利用这些，也可以给出电场管的概念，即由一束电力线围成的管状区域，没有电场强度通量穿过其侧壁。

电荷对电场作用的局域性质：电荷只直接激发其邻近的场，而远处的场则是通过场本身内部作用传递出去的。只有在静电场情况下Coulomb定律成立；对于变化电荷，远处场不能用Coulomb定律，但Gauss定理成立。

**环路积分**

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

静电场是无旋场，无旋性只在静电情况下成立。在静电情形下电场没有旋涡状结构。

**电荷守恒定律**

$$\oiint \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

对于恒定电流： $\nabla \cdot \vec{j} = 0$  分布是无源的，流线必为闭合曲线。

**Biot-Savart定律**

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{r}}{r^3} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{Id\vec{l}}{r^3}$$

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

**Ampère环路定理**

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

**“Gauss”定理**

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

证明：（磁矢势 $\vec{A}$ ， $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ）

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{r}}{r^3} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{j}(\vec{r}') \times \nabla \left( \frac{1}{r} \right) dV'$$

注意到式中的 $\nabla$ 算符作用于 $\vec{r}$ ，与 $\vec{r}'$ 无关

$$\nabla \times \left[ \vec{j}(\vec{r}') \frac{1}{r} \right] = -\vec{j}(\vec{r}') \times \nabla \left( \frac{1}{r} \right)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{r} dV' = \nabla \times \vec{A}$$

由此表示了磁矢势 $\vec{A}$ ：

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{r} dV'$$

由此可以看出：

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

另一个式子：

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \nabla' \cdot [\vec{j}(\vec{r}') \frac{1}{r}] dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{j}(\vec{r}') dV'$$

第一项可以通过Stokes公式化为面积分，由于积分区域已包含所有电流，没有电流通过界面S，故第一项为0；第二项由于恒定电流的连续性也为0，故第二项也等于0，有

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

$$-\nabla^2 \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{j}(\vec{r}') \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} dV'$$

当 $r \neq 0$ 时，此式始终为0，考虑在 $\vec{r}'$ 点处的情形

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(\vec{r}) \iiint \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(\vec{r}) \oint \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(\vec{r}) \oint \frac{1}{r^2} \cdot d\vec{S}'$$

而

$$\oint \frac{1}{r^2} d\vec{S}' = \oint d\Omega = 4\pi$$

从而

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

需注意， $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 在一般变化磁场下也成立， $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ 只在恒定情况下成立。

### Faraday电磁感应定律

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

感应电场是有旋场。

**Maxwell位移电流** 假设存在一个 $j_D$ 满足：

$$\nabla \cdot (\vec{j} + \vec{j}_D) = 0$$

考虑电荷守恒定律，可以得到

$$\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

### Maxwell方程组（真空中）

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho_e dV \\ \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

这个方程是Maxwell方程组的最基本形式，虽然后续有更为简洁的介质中的形式，但这里的所有量，既可以理解为宏观量，也可以理解为微观量，而介质中的形式对应于宏观场的情形。

电荷和电流可以激发电磁场, 变化的电场和磁场也可以互相激发。  
电磁场可以独立于电荷之外而存在。

### Lorentz力公式

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{f} &= \rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}\end{aligned}$$

## 1.2 电介质和磁介质

### 电介质

$$\text{极化强度 } \vec{P} = \sum \frac{\vec{p}_i}{\Delta V}$$

$$-\oint \vec{P} \cdot d\vec{S} = \iiint \rho_p dV \quad \rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$$

$$dQ_+ = nq\vec{l} \cdot d\vec{S} = \vec{P} \cdot d\vec{S} = -dQ_- = -\rho_p dV$$

$$\Rightarrow \sigma_p dS = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot d\vec{S}$$

若  $\nabla \cdot \vec{P} = 0$ , 为均匀极化,  $\rho_p = 0$ , 极化电荷仅在表面

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f$$

电位移矢量:  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$\vec{E}$  的源是总电荷分布, 是电场的基本物理量;

$\vec{D}$  的源是自由电荷, 只是一个辅助物理量。

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

对于线性介质, 有

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0, \quad \epsilon_r = 1 + \chi_e$$

### 磁介质

$$\text{磁化强度 } \vec{M} = \sum \frac{\vec{m}_i}{\Delta V}$$

$$\begin{aligned}\oint \vec{M} \cdot d\vec{l} &= \iint \vec{j}_M \cdot d\vec{S} & \vec{j}_M &= \nabla \times \vec{M} \\ \vec{j}_p &= \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\end{aligned}$$

$$I_M = \oint ni\vec{a} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{j}_M d\vec{S}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{j}_f + \vec{j}_M + \vec{j}_p + \vec{j}_D$$

磁场强度： $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$

$\vec{B}$ 描述所有电流分布激发的场，是基本物理量；

$\vec{H}$ 并不代表介质内的场强，只是一个辅助物理量。

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

对于线性介质，有

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \mu = \mu_r \mu_0, \quad \mu_r = 1 + \chi_m$$

### 介质中的Maxwell方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint \rho dV \\ \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{j} d\vec{S} + \iint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{array} \right.$$

真空中，在无源区实施对偶变换 ( $\vec{E} = c\vec{B}'$ ,  $\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{E}'$ )，保持不变。在实际情况中，可以合理地选取变量以方便研究问题。

### 边值关系

对于边界处，应当用Maxwell方程组的积分形式处理

def:  $\Delta l = \vec{\alpha} \cdot \Delta \vec{l}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_n \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f \\ \vec{e}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ \vec{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}_f \end{array} \right.$$

同样还有：

$$\begin{aligned} \vec{e}_n \cdot \epsilon_0 (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= \sigma_f + \sigma_p \\ \vec{e}_n \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) / \mu_0 &= \vec{\alpha}_f + \vec{\alpha}_M \end{aligned}$$

## 1.3 场的性质

### 电磁场的能量和能流

$$p = \vec{f} \cdot \vec{v} = (\rho \vec{E} + \rho \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

利用Maxwell方程组，将 $\vec{j}$ 替换

$$\begin{aligned} &= (\nabla \times \vec{H}) \cdot \vec{E} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} \\ &= -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{H} \end{aligned}$$

再次利用Maxwell方程组

$$= -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H}$$

能流密度 (Poynting矢量):  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

能量密度变化率:  $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H}$

场对电荷系统做的功为  $\iiint \vec{f} \cdot \vec{v} dV$ , 体积  $V$  内, 场的能量增加率为  $\frac{d}{dt} \iiint w dV$ , 通过界面  $\vec{\sigma}$  流入  $V$  内的能量为  $-\oint \vec{S} \cdot d\vec{\sigma}$ 。

有能量守恒

$$\begin{aligned} -\oint \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} &= \iiint \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \frac{d}{dt} \iiint w dV \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial t} \iiint w dV - \oint \vec{S} d\vec{\sigma} \end{aligned}$$

### Exercise 1.1 电容器充电/放电时的能量

### Exercise 1.2 导线传导时的能量 (导线外侧电荷线密度 $\lambda$ )

## 电磁场动量

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\nabla \times \vec{H} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \times \mu_0 \vec{H}$$

利用另外两个方程, 将其写为对称形式

$$= \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \epsilon_0 (\nabla \times \vec{E}) \times \vec{E} + \mu_0 (\nabla \cdot \vec{H}) \vec{H} + \mu_0 (\nabla \times \vec{H}) \times \vec{H} - \mu_0 \epsilon_0 \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{H} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right)$$

利用矢量公式, 有

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\nabla \times \vec{E}) \times \vec{E} &= (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E} - \frac{1}{2} \nabla E^2 \\ &= \nabla \cdot (\vec{E} \vec{E}^T) - \frac{1}{2} \nabla E^2 \end{aligned}$$

电磁场的动量密度： $\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{S}$

动量流密度张量： $\mathcal{T} = -\epsilon_0 \vec{E} \vec{E}^T - \mu_0 \vec{H} \vec{H}^T + \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \mathbb{E}$

由以上可得：

$$\begin{aligned} \vec{f} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} &= -\nabla \cdot \mathcal{T} \\ \iiint \vec{f} dV + \frac{d}{dt} \iiint \vec{g} dV &= -\oint \vec{dS} \cdot \mathcal{T} \end{aligned}$$

即电磁场和电荷的动量守恒。张量 $\mathcal{T}$ 的分量 $T_{ij}$ 的意义是通过垂直于 $i$ 轴的单位面积流过的动量 $j$ 分量。





# 静态场

<b>2</b>	<b>静电场</b>	<b>13</b>
2.1	静电场理论	13
2.2	求解静电场的方法	15
<b>3</b>	<b>静磁场</b>	<b>17</b>
3.1	静磁场理论	17
3.2	求解静磁场的方法	18
3.3	Aharonov-Bohm效应	20
3.4	超导理论*	20



## 2. 静电场

在静止的情况下，电场与磁场无关。

### 2.1 静电场理论

由静电场中的Maxwell方程组，

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases}$$

根据场论公式，不妨设

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

于是，可以得到Poisson方程

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

当 $\rho = 0$ 时，就变为Laplace方程： $\nabla^2 \varphi = 0$

**电势** $\varphi$  只有两点的电势差有物理意义，一点处的电势绝对数值是没有意义的。

$$\varphi(P) = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

参考点的选择是任意的，在电荷分布于有限区域的情况下，常选无穷远点作为参考点。

电荷不是有限区域的分布可能会造成积分后电势无穷大。

**边值条件的转化**

介质中：

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ -(\epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}) = \sigma \end{cases}$$

导体中：

$$\begin{cases} \varphi = \text{Const.} \\ \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

1. 导体内部不带净电荷，电荷只能分布于导体表面。
2. 导体内部电场为0。
3. 导体表面上电场必沿法线方向，导体表面为等势面，整个导体是等势体。

### 静电场的能量

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \iiint \vec{D} \cdot \vec{E} dV \\ &= \frac{1}{2} \iiint \vec{D} \cdot (-\nabla \varphi) dV = \frac{1}{2} \iiint [-\nabla \cdot (\varphi \vec{D}) + \varphi \nabla \cdot \vec{D}] dV \\ &= \frac{1}{2} \iiint \rho \varphi dV - \oint \varphi \vec{D} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

由于面积分遍及无穷远处，有  $\varphi \sim \frac{1}{r}$ ， $D \sim \frac{1}{r^2}$ ， $S \sim r^2$ ，故  $r \rightarrow \infty$  时面积分趋于0。

$$= \frac{1}{2} \iiint \rho \varphi dV$$

该式仅为静电场情形的能量

积分只需遍及电荷分布区域  $V$ ， $W$  是静电场总能量才有意义， $\frac{1}{2}\rho\varphi$  不是能量密度。

**唯一性定理** 可均匀分区的区域  $V$ ，每一均匀区域的电容率为  $\varepsilon_i$ ， $V$  内有给定的自由电荷分布  $\rho(x)$ ，则在均匀区域  $V_i$  内  $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_i}$ ，在分界面上  $\varphi_i = \varphi_j$ ， $\varepsilon_i(\frac{\partial \varphi}{\partial n})_i - \varepsilon_j(\frac{\partial \varphi}{\partial n})_j = \sigma$ 。

则在  $V$  的边界上给定  $\varphi|_S$  或  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S$ ， $V$  内电场就唯一地确定。

可以这样简单地进行考虑：假设存在两组不同的解  $\varphi'$  和  $\varphi''$ ，设  $\varphi = \varphi' - \varphi''$ ，则：

$$\nabla^2 \varphi' = -\frac{\rho}{\varepsilon_i}, \nabla^2 \varphi'' = -\frac{\rho}{\varepsilon_i} \Rightarrow \nabla^2 \varphi = 0$$

这样，根据边值条件，有：

$$\varphi|_S = \varphi'|_S - \varphi''|_S = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S = \frac{\partial \varphi'}{\partial n}|_S - \frac{\partial \varphi''}{\partial n}|_S = 0$$

$$\oint_{S_i} \varepsilon_i \varphi \nabla \varphi \cdot d\vec{S} = \iiint \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 dV + \iiint \varphi \varepsilon_i \nabla^2 \varphi dV = \iiint_{V_i} \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 dV$$

$$\sum \oint_{S_i} \varepsilon_i \varphi \nabla \varphi \cdot d\vec{S} = \sum_i \iiint_{V_i} \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 dV = 0$$

$$\nabla \varphi = 0 \Rightarrow \varphi' - \varphi'' = \text{Const.}$$

若有导体存在时，需要条件

- I. 每个导体上的电势  $\varphi_i$
- II. 每个导体上的总电荷  $Q_i$

情况I: 与没有导体的情况类似

情况II: 给定导体之外的电荷分布 $\rho$ , 给定各导体上的总电荷 $Q_i$ 以及 $V$ 的边界 $S$ 上的 $\varphi$ 或 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 的值, 则 $V$ 内的电场唯一地确定。可以这样简单地进行考虑: 假设存在两组不同的解 $\varphi'$ 和 $\varphi''$ , 设 $\varphi = \varphi' - \varphi''$ , 则:

$$\begin{aligned}\nabla^2\varphi &= 0, \quad -\oint_{S_i} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = 0, \quad \varphi|_{S_i} = \text{Const.} \\ \Rightarrow \quad \varphi|_S &= 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S = 0 \\ \oint \varphi \nabla\varphi d\vec{S} &= \iiint (\nabla\varphi)^2 dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla\varphi = 0\end{aligned}$$

## 2.2 求解静电场的方法

### 2.2.1 镜像法

- i. 满足的方程和边界条件
- ii. 设想镜像电荷 $Q'$ 替代感应电荷或极化电荷
- iii. 原电荷和像电荷共同激发 $\varphi$
- iv. 由电场方程和边界条件确定 $Q'$ 大小和位置
- v. 讨论解的物理意义

### 2.2.2 分离变量法

- i. 按照表面或界面选择合适的坐标系
- ii. 分区域列出方程, 写出通解
- iii. 列出边界条件和边值关系
- iv. 根据边界条件或边值关系, 确定待定系数
- v. 讨论其物理意义

边界条件:

- a. 原点无电荷,  $\varphi|_{r \rightarrow 0}$ 有限
- b. 电荷分布在有限区域,  $\varphi|_{r \rightarrow \infty} = 0$
- c. 均匀电场, 不能 $\varphi = 0$ 选无穷远点,  $\varphi = E_0 z + C$
- d.  $Q = -\iint \epsilon \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS$

### 2.2.3 Green函数法\*

### 2.2.4 电多极矩

将函数进行Taylor展开:

$$f(\vec{R} - \vec{r}') = f(\vec{R}) + (-\vec{r}') \cdot \nabla f(\vec{R}) + \frac{1}{2!} (-\vec{r}')^T \cdot \nabla (\nabla f(\vec{R})^T) \cdot (-\vec{r}') + \dots$$

令 $f(\vec{r}) = \frac{1}{r}$ ,  $\vec{r} = \vec{R} - \vec{r}'$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + (-\vec{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{R}\right) + \frac{1}{2!} (-\vec{r}')^T \cdot \nabla (\nabla \left(\frac{1}{R}\right)^T) \cdot (-\vec{r}') + \dots$$

于是有

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho dV' \left[ \frac{1}{R} + (-\vec{r}') \cdot \nabla \left( \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{2!} (-\vec{r}')^T \cdot \nabla (\nabla \left( \frac{1}{R} \right)^T) \cdot (-\vec{r}') + \dots \right]$$

令

$$Q = \iiint \rho dV \quad \vec{p} = \iiint \rho \vec{r}' dV \quad \mathcal{D} = 3 \iiint \vec{r}' \rho \vec{r}'^T dV$$

可以将电势展开为

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \dots$$

$\varphi^{(0)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$  是在原点的点电荷  $Q$  激发的电势，即将电荷体系看做集中于原点处。

$\varphi^{(1)} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$  是电偶极矩  $\vec{p}$  产生的势。

$\varphi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \mathcal{D} : \nabla (\nabla \left( \frac{1}{R} \right)^T)$  是电四极矩  $\mathcal{D}$  产生的势。

重新定义电四极矩张量：

$$\mathcal{D} = \iiint (3\vec{r}' \vec{r}'^T - r'^2 \mathbb{E}) \rho dV$$

$$\Rightarrow \text{tr} \mathcal{D} = 0$$

$\mathcal{D}$  中只有5个独立变量

如果体系电荷分布对原点对称，则电偶极矩为0；若为球对称电荷分布，电四极矩为0，电四极矩的出现标志着电荷分布对球对称的偏移。

### 电荷体系的能量

$$W = \iiint \rho \varphi dV = Q\varphi(0) + \vec{p} \cdot \nabla \varphi(0) + \frac{1}{6} \mathcal{D} : \nabla (\nabla \varphi(0)^T) + \dots$$

$W^{(0)} = Q\varphi(0)$  是设想电荷集中于原点上时在外场中的能量。

$W^{(1)} = -\vec{p} \cdot \nabla \varphi(0) = -\vec{p} \cdot \vec{E}(0)$  是体系的电偶极矩在外场中的能量。

$W^{(2)} = -\frac{1}{6} \mathcal{D} : \nabla (\nabla \varphi(0)^T)$  是电四极子在外场中的能量。

由  $W^{(1)}$  可以得到电偶极子在外场中受到的力  $\vec{F}$  和力矩  $\vec{L}$

$$\vec{F} = -\nabla W^{(1)} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$$

$$L_\theta = -\frac{\partial W^{(1)}}{\partial \theta} = -pE \sin \theta$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \vec{p} \times \vec{E}$$

### 3. 静磁场

在静止的情况下，电场与磁场无关。

#### 3.1 静磁场理论

由静电场中的Maxwell方程组，

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} \end{cases}$$

根据场论公式，不妨设

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

磁场无源性的体现：通过一个曲面的磁通量只和边界 $\partial S$ 有关，而和曲面的具体形状无关。

**磁矢势** $\vec{A}$  只有 $\vec{A}$ 的环量有物理意义， $\vec{A}$ 沿任一闭合回路的环量代表通过以该回路为界的任一曲面的磁通量。

为确定磁矢势 $\vec{A}$ ，加以规范条件

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

若取规范条件 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ，可以将方程化为

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{j}$$

这样方程有类似于静电势方程的解

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}}{r} dV' \quad \vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \oint \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

**边值条件的转化** 选取规范 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

介质中：



$$\begin{cases} \vec{A}_1 = \vec{A}_2 \\ \vec{e}_n \times (\frac{1}{\mu_2} \nabla \times \vec{A}_2 - \frac{1}{\mu_1} \nabla \times \vec{A}_1) = \alpha \end{cases}$$

### 静磁场的能量

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \iiint \vec{B} \cdot \vec{H} dV \\ &= \frac{1}{2} \iiint (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{2} \iiint [\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H})] dV \\ &= \frac{1}{2} \iiint \vec{A} \cdot \vec{j} dV + \oint (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

由于面积分遍及无穷远处, 有  $A \sim \frac{1}{r}$ ,  $H \sim \frac{1}{r^2}$ ,  $S \sim r^2$ , 故  $r \rightarrow \infty$  时面积分趋于0。

$$= \frac{1}{2} \iiint \vec{A} \cdot \vec{j} dV$$

积分只需遍及电流分布区域  $V$ ,  $W$  是静磁场总能量才有意义,  $\frac{1}{2} \vec{A} \cdot \vec{j}$  不是能量密度。

矢势  $\vec{A}$  是电流分布  $\vec{j}$  激发的,  $\vec{j}$  在外场  $\vec{A}_e$  的相互作用能  $W_i = \iiint \vec{j} \cdot \vec{A}_e dV$

## 3.2 求解静磁场的方法

### 3.2.1 磁标势 $\psi$

区域内没有自由电流分布, 可引入标势  $\psi$ , 磁偶极子  $\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}$

电场与磁场情形的类比

静电场	静磁场
$\nabla \times \vec{E} = 0$	$\nabla \times \vec{H} = 0$
$\nabla \cdot \vec{E} = (\rho_f + \rho_p)/\epsilon_0$	$\nabla \cdot \vec{H} = \rho_m/\mu_0$
$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$	$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}$
$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$
$\vec{E} = -\nabla \varphi$	$\vec{H} = -\nabla \psi$

求解的过程类比静电场情形

### 3.2.2 磁多极矩

如果电流分布于小区域内, 且距离场点较远用Taylor展开的方法

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{j} dV' \left[ \frac{1}{R} + (-\vec{r}') \cdot \nabla \left( \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{2!} (-\vec{r}')^T \cdot \nabla (\nabla \left( \frac{1}{R} \right)^T) \cdot (-\vec{r}') + \dots \right]$$

由恒定电流的连续性, 有  $\vec{A}^{(0)} = 0$ , 即不含磁单极项。

$$\vec{A}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla \left( \frac{1}{R} \right) dV' = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \vec{r}' \cdot \nabla \left( \frac{1}{R} \right) d\vec{l}'$$



$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \vec{r}' \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} d\vec{l}'$$

而  $d\vec{r}' = d\vec{l}'$ , 于是有

$$0 = \oint d[(\vec{r}' \cdot \vec{R})\vec{r}'] = \oint (\vec{r}' \cdot \vec{R})d\vec{l}' + \oint (d\vec{l}' \cdot \vec{R})\vec{r}'$$

令

$$\text{电流线圈磁矩 } \vec{m} = \frac{I}{2} \oint \vec{r}' \times d\vec{l}'$$

$$\Delta \vec{S} = \frac{1}{2} \oint \vec{r}' \times d\vec{l}'$$

$$\vec{m} = I \Delta \vec{S}$$

有

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{R}}{R^3}$$

据此可以计算出磁偶极矩的场和标势

$$\vec{B}^{(1)} = \nabla \times \vec{A}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$\vec{B}^{(1)} = -\mu_0 \nabla \psi^{(1)}$$

$$\psi^{(1)} = \frac{\vec{m} \cdot \vec{R}}{4\pi R^3}$$

**电流分布在外磁场中的能量**  $W_i$ 、 $W_e$  为自能,  $W_{ie}$  为相互作用能

$$W_m = W_i + W_e + W_{ie}$$

若保持电流  $I$  和  $I_e$  不变, 有

$$dW = \frac{1}{2} (I d\Phi_e + I_e d\Phi)$$

$$d\Phi = I_e dM, \quad d\Phi_e = I dM$$

式中的  $M$  为互感系数。故有

$$dW_i + dW_e = -2dW_{ie}$$

$$dW_m = -dW_{ie} = -d(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

于是有

$$W_m = -\vec{m} \cdot \vec{B}_e$$

$$\vec{F} = -\nabla W_m = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B}_e$$

$$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}$$

### 3.3 Aharonov-Bohm效应

当螺线管不通电时，有相位差 $\Delta\varphi_0$

当螺线管通电时，相位差 $\Delta\varphi$ ，此时波函数应用正则动量 ( $\vec{P} = \vec{p} + q\vec{A}$ ) 描述

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \Delta\varphi_0 - \frac{e}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \\ &= \Delta\varphi_0 - \frac{e}{\hbar} \Phi\end{aligned}$$

A-B效应表明，仅用 $\vec{B}$ 来描述磁场是不够的，而用 $\vec{A}$ 来描述磁场又过多了。能够完全恰当地描述磁场中的物理量是相因子 $\exp(i\frac{e}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l})$ ，对于单连通区域，相因子描述等价于 $\vec{B}$ 的描述；对于非单连通区域，不能用 $\vec{B}$ 来描述。

### 3.4 超导理论\*

**超导体** 超导体的基本现象：

1. 超导电性 不同材料有不同的临界温度。
2. 临界磁场 当外磁场增大到某一临界值时，超导电性将受到破坏。（此曲线亦为相变曲线）
3. Meissner效应 材料处于超导态时，随着进入超导体内部深度增加磁场迅速衰减，可以认为超导体内部 $\vec{B} = 0$ ，超导体的抗磁性与其所经历的过程无关。
4. 临界电流 电流达到某个临界值时，超导体将从超导态转变为正常态。
5. 第一类和第二类超导体 第一类超导体存在一个临界磁场 $H_c$ ；第二类超导体存在两个临界磁场 $H_{c1} < H_{c2}$ ，当 $H < H_{c1}$ 时，处于超导态；当 $H_{c1} < H < H_{c2}$ 时，磁场以量子化磁通线的形式进入导体内，处于超导态和正常态并存的混合态；当 $H_{c2} < H$ 时，处于正常态。
6. 第一类复连通超导体和第二类超导体，磁通量只能是基本值的整数倍 $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ 。（一个Cooper对）

**London唯象理论\*** 二流体模型

超导体内存在两种载流电子，分别形成正常的传导电流 $\vec{j}_n$ 和超导电流 $\vec{j}_s$ ，设磁化电流和极化电流可以忽略不计，总电流密度为 $\vec{j} = \vec{j}_n + \vec{j}_s$ 。假设超导电子的运动不受阻力，遵从经典力学方程，那么

$$\frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} = \frac{\partial(-n_s e \vec{v})}{\partial t} = -n_s e \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{n_s e^2}{m} \vec{E} = \alpha \vec{E}$$

这称之为London第一方程。

由零电阻状态下超导体内部的 $\vec{E} = 0$ 可以得出， $\vec{B}$ 是一个与时间无关的常量，这与之前所述的超导体的性质相违，故Meissner效应与超导电性是两个独立的效应。对London第一方程取旋度，London理论假设：

$$\nabla \times \vec{j}_s = -\alpha \vec{B}$$

这称之为London第二方程。

# 动态场

<b>4</b>	<b>电磁波的传播</b>	<b>23</b>
4.1	简单的电磁波理论	23
4.2	介质中的简单理论	25
4.3	有导体存在时的传播	28
4.4	应用举例	30
<b>5</b>	<b>电磁波的辐射</b>	<b>33</b>
5.1	d'Alembert方程	33
5.2	推迟势	34
5.3	电磁波辐射	35
5.4	天线辐射	37
<b>6</b>	<b>带电粒子和电磁场的相互作用*</b>	<b>39</b>
6.1	运动带电粒子的势*	39
6.2	Черенков辐射*	39
6.3	电磁波的散射和吸收	39



## 4. 电磁波的传播

### 4.1 简单的电磁波理论

#### 波动方程

考虑没有电荷和电流的空间

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

这里考虑简单、无色散的介质，即 $\epsilon_r$ 和 $\mu_r$ 只是简单的数，不是张量。

将这些方程联立，可以得到

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

这里的电磁波速度 $v = c/n$ ， $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ ， $n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$

电场和磁场可以脱离电荷和电流存在，具有波动性、物质性

- 波动方程的形式预言了电磁波的存在；
- 电磁波以光速传播，统一了电和磁、电磁学和光学，光是电磁波；
- 若无电磁场的变化，变为Laplace方程，假定全空间成立， $\vec{E} = \vec{B} = 0$  ( $\vec{r} \rightarrow \infty$ )，表明恒定条件下场和源之间的关系，无源无场。

在介质情形中， $\epsilon$ 和 $\mu$ 随频率变而变，称为色散，不能推出 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 的一般波动方程。

**时谐电磁波** 以一定频率作正弦振荡的波

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

将它们代入Maxwell方程组，发现Maxwell方程组中只有两个独立的方程

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = -i\omega\epsilon\vec{E} \end{cases}$$

可以将两式联立，得到Helmholtz方程

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{B} = \frac{1}{i\omega} (\nabla \times \vec{E}) \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla^2 \vec{B} + k^2 \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{E} = -\frac{1}{i\omega\mu\epsilon} (\nabla \times \vec{B}) \end{cases} \quad k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

### 平面电磁波

设电磁波沿 $z$ 轴方向传播， $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 仅与 $z$ 、 $t$ 有关，与 $x$ 、 $y$ 无关

可以将Helmholtz方程化为一维的常微分方程，容易解出一个解

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_0 e^{ikz}$$

对于一般的传播方向，我们可以写成

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

考虑到条件 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ ，有

$$\nabla \cdot \vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \nabla e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = i\vec{k} \cdot \vec{E}$$

于是有

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

同样可以取旋度

$$\nabla \times \vec{E} = i \times \vec{E}$$

代入Helmholtz方程，得到

$$\vec{B} = \sqrt{\mu\epsilon} \hat{k} \times \vec{E}$$

进而可以得到

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = v$$

考虑电场和磁场的能量

$$w = \frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}) = \frac{1}{2} (\epsilon E^2 + \mu H^2)$$

不难看出 $\frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}\mu H^2$ ，即电场能量和磁场能量相等。

- i. 电磁波为横波， $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 均与传播方向垂直；
- ii.  $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 相互垂直， $\vec{S}$ 沿 $\vec{k}$ 方向；
- iii.  $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 同相，振幅比为 $v$ ；
- iv. 电场能量和磁场能量相等。

$$\text{能量密度的平均值 } \bar{w} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \mu H^2$$

$$\text{能流密度的平均值 } \bar{S} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}^* \times \vec{H}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \hat{k}$$

## 4.2 介质中的简单理论

### 电磁波在介质界面上的反射和折射

边值条件中只有两个独立的方程

$$\begin{cases} \vec{e}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \vec{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha} \end{cases}$$

入射波、反射波和折射波的频率相同

#### 光传播的基本规律

1. 光的直线传播 光在均匀介质中沿直线传播
2. 光的反射定律  $i = \gamma$
3. 光的折射定律  $\frac{\sin i}{\sin \gamma} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$

#### Fresnel公式

振动方向垂直于入射面称为s态；振动方向在入射面之内称为p态。

$\vec{E}$ 为s态、 $\vec{H}$ 为p态的波称为TE波； $\vec{H}$ 为s态、 $\vec{E}$ 为p态的波称为TM波。

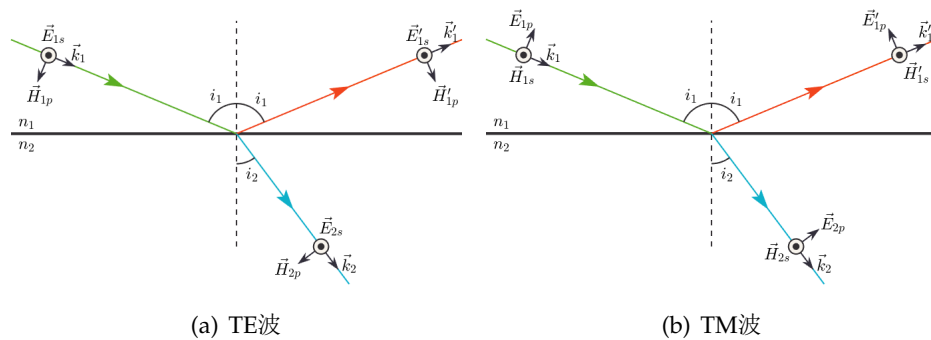


图 4.1: TE与TM波。

对于TE波，考虑边界条件，有

$$\begin{cases} E_{1s} + E_{1s}' = E_{2s} \\ -H_{1p} \cos i + H_{1p}' \cos i = -H_{2p} \cos \gamma \end{cases}$$

考虑电场和磁场之间的关系

$$H = \frac{n}{\mu_0 c} E$$

代入，解得

$$\begin{cases} r_s = \frac{n_1 \cos i - n_2 \cos \gamma}{n_1 \cos i + n_2 \cos \gamma} \\ t_s = \frac{2n_1 \cos i}{n_1 \cos i + n_2 \cos \gamma} \end{cases}$$

式中  $r_s = \frac{E'_{1s}}{E_{1s}}$  称为s光的振幅反射率,  $t_s = \frac{E_{2s}}{E_{1s}}$  称为s光的振幅透射率。

同理, 对于TM波, 可以解得

$$\begin{cases} r_p = \frac{n_2 \cos i - n_1 \cos \gamma}{n_2 \cos i + n_1 \cos \gamma} \\ t_p = \frac{2n_1 \cos i}{n_2 \cos i + n_1 \cos \gamma} \end{cases}$$

式中  $r_p = \frac{E'_{1p}}{E_{1p}}$  称为p光的振幅反射率,  $t_p = \frac{E_{2p}}{E_{1p}}$  称为p光的振幅透射率。

根据折射公式, 消去上式中的  $\gamma$

$$\begin{cases} r_s = \frac{\cos i - \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 i}}{\cos i + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 i}} \\ t_s = \frac{2 \cos i}{\cos i + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 i}} \\ r_p = \frac{n_{21}^2 \cos i - \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 i}}{n_{21}^2 \cos i + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 i}} \\ t_p = \frac{2n_{21} \cos i}{n_{21}^2 \cos i + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 i}} \end{cases}$$

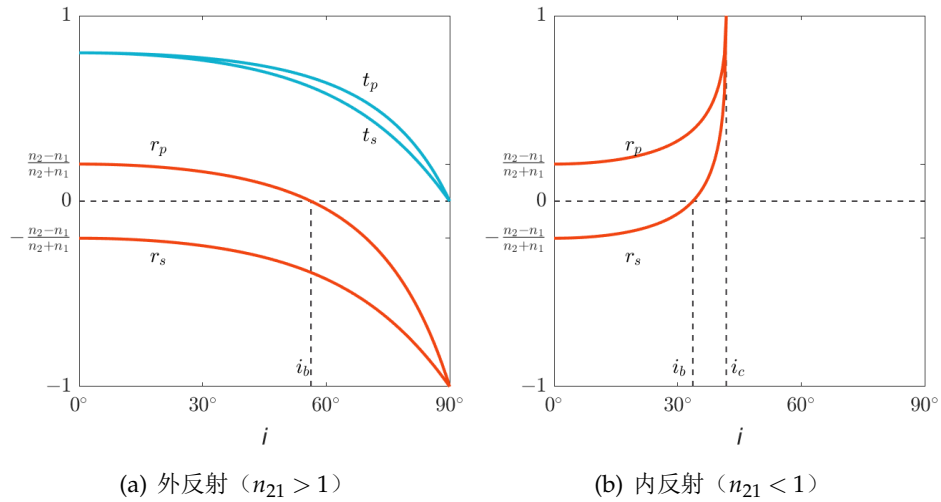


图 4.2: 反射及折射时的振幅比。

### Brewster角

考虑一个特殊的角度能使  $r_p = 0$ , 不难解出

$$\tan i_b = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$$

该角度称为Brewster角。

### 全反射临界角

对于内反射 ( $n_2 < n_1$ ), 存在一特殊角度, 使得  $r_s = r_p = 1$ , 不难解出

$$\sin i_c = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$$

该角度称为全反射临界角。



**反射光的光强与能流比**

s光的光强反射率

$$R_s = \frac{I'_{1s}}{I_{1s}} = \frac{n_1 |E'_{1s}|^2}{n_1 |E_{1s}|^2} = |r_s|^2$$

p光的光强反射率

$$R_p = \frac{I'_{1p}}{I_{1p}} = \frac{n_1 |E'_{1p}|^2}{n_1 |E_{1p}|^2} = |r_p|^2$$

s光的光强透射率

$$T_s = \frac{I_{2s}}{I_{1s}} = \frac{n_2 |E_{2s}|^2}{n_1 |E_{1s}|^2} = \frac{n_2}{n_1} |r_s|^2$$

p光的光强透射率

$$T_p = \frac{I_{2p}}{I_{1p}} = \frac{n_2 |E_{2p}|^2}{n_1 |E_{1p}|^2} = \frac{n_2}{n_1} |r_p|^2$$

注意！这些不是能量，当然不守恒

考虑照射面积，这样能量  $W = I \cdot S_{\perp}$ 

s光的能流反射率

$$\mathcal{R}_s = \frac{W'_{1s}}{W_{1s}} = \frac{I'_{1s}}{I_{1s}} = R_s$$

p光的能流反射率

$$\mathcal{R}_p = \frac{W'_{1p}}{W_{1p}} = \frac{I'_{1p}}{I_{1p}} = R_p$$

s光的能流透射率

$$\mathcal{T}_s = \frac{W_{2s}}{W_{1s}} = \frac{I_{2s} \cos \gamma}{I_{1s} \cos i} = \frac{\cos \gamma}{\cos i} T_s$$

p光的能流透射率

$$\mathcal{T}_p = \frac{W_{2p}}{W_{1p}} = \frac{I_{2p} \cos \gamma}{I_{1p} \cos i} = \frac{\cos \gamma}{\cos i} T_p$$

电磁波存在于界面附近的一薄层内，层厚度  $\sim \kappa^{-1}$ 

反射波与入射波具有相同振幅，但有一定的相位差，反射波平均能流密度数值上和入射波平均能流密度相等，瞬时能流值不同。透射光永远与入射光同相。

对于内反射而言，当入射角大于Brewster角时（全反射情形），可以求得s光和p光的相移：

$$\begin{cases} \delta_s = -2 \arctan \frac{\sqrt{\sin^2 i - n_{21}^2}}{\cos i} \\ \delta_p = -2 \arctan \frac{\sqrt{\sin^2 i - n_{21}^2}}{n_{21}^2 \cos i} \end{cases}$$

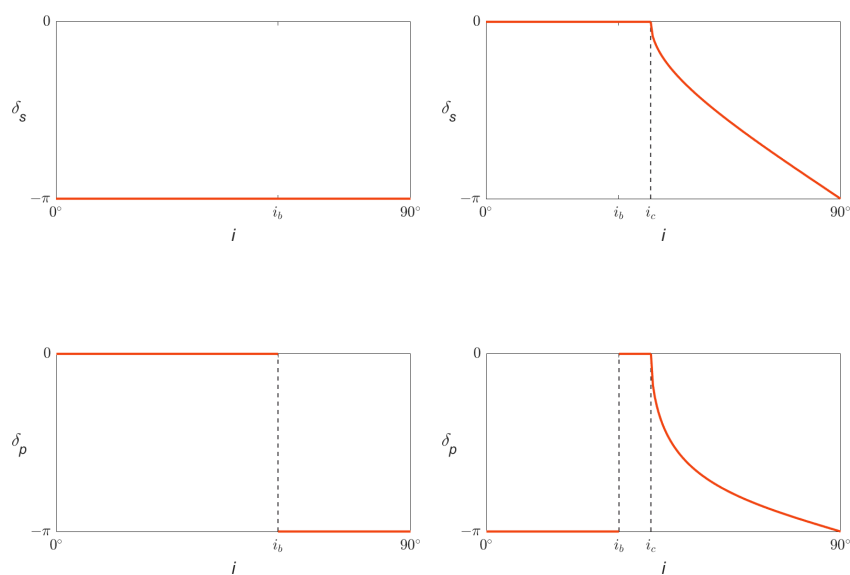


图 4.3: 反射引起的附加相移。

### 4.3 有导体存在时的传播

#### 良导体条件

$$\varepsilon(\nabla \cdot \vec{E}) = \rho$$

有Ohm定律

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

代入，并考虑电荷守恒定律

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho$$

解之得

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}$$

衰减周期  $\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$

只要电磁波的频率满足  $\omega \ll \tau^{-1}$ ，就认为  $\rho(t) = 0$ ，即良导体条件

$$\frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \gg 1$$

#### 复电容率

对于有一定频率的电磁波，考虑Helmholtz方程

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = i\omega \mu \vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = -i\omega \varepsilon \vec{E} + \sigma \vec{E} \end{cases}$$

令复电容率  $\epsilon' = \epsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$

其实部使位移电流与电场有  $\pi/2$  的相位差，虚部使能量耗散。

进而波矢  $\vec{k}$  为复矢量， $\vec{k} = \vec{\beta} + i\vec{\alpha}$ ，实部描述波的传播关系，虚部描述波幅衰减，对比，可以得到

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \mu \epsilon \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2} \omega \mu \sigma \end{cases}$$

### 趋肤效应

对于良导体，垂直入射， $\vec{\alpha}$ 、 $\vec{\beta}$  均沿  $z$  方向

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

考虑良导体条件，有  $\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$

穿透深度  $\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$ ，对于高频的电磁波，电磁场以及和它相互作用的高频电流只集中于表面的一薄层内。

现在求磁场与电场的关系

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega \mu} \vec{k} \times \vec{E} \approx \sqrt{\frac{\sigma}{\omega \mu}} e^{i\frac{\pi}{4}} \vec{e}_n \times \vec{E}$$

$$\frac{\sqrt{\mu} |\vec{H}|}{\sqrt{\epsilon} |\vec{E}|} = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega \epsilon}} \gg 1$$

磁场相位比电场滞后  $\pi/4$ ，磁场的作用更为明显。

### 导体表面上的反射

考虑边值条件

$$E_1 + E'_1 = E_2, \quad H_1 - H'_1 = H_2$$

考虑良导体条件，将磁场的边值条件转化为电场的

$$\frac{E'_1}{E_1} = - \frac{1 + i - \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}}{1 + i + \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}}$$

反射系数  $R = \frac{|E'_1|}{|E_1|}$

$$R = \frac{(1 - \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}})^2 + 1}{(1 + \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}})^2 + 1} \approx 1 - 2\sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}$$

良导体条件下，反射系数接近于1。

### 导体中电磁波传播特点

- i. 垂直入射时,  $\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon} [\frac{1}{2}(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} + 1)]^{\frac{1}{2}}$ ,  $v = \frac{\omega}{\beta}$ ,  $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$
- ii.  $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$ 、 $\vec{k}$ 相互垂直
- iii.  $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$ 相位不同, 磁场相位滞后 $\pi/4$
- iv.  $W_m \gg W_e$ , 良导体条件下
- v. 趋肤效应及导体表面上的反射

## 4.4 应用举例

### 4.4.1 谐振腔

能产生高频电磁振荡的中空金属腔

理想金属一侧 $\vec{E}_1 = \vec{H}_1 = 0$ , 真空一侧 $\vec{e}_n \times \vec{E} = 0$ ,  $\vec{e}_n \times \vec{H} = 0$ 。

电场方向与界面垂直, 磁场方向与界面平行。

设 $u$ 为 $\vec{E}$ 或 $\vec{H}$ 的任一分量, 谐振腔由平面 $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x = L_1$ ,  $y = L_2$ ,  $z = L_3$ 围成有 $\nabla^2 u + k^2 u = 0$ , 分离变量 $u = X(x)Y(y)Z(z)$

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0 \end{cases} \quad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

有驻波解

$$u(x, y, z) = (C_{1x} \cos k_x x + C_{2x} \sin k_x x)(C_{1y} \cos k_y y + C_{2y} \sin k_y y)(C_{1z} \cos k_z z + C_{2z} \sin k_z z)$$

再考虑边界条件, 例如 $E_x$ , 有

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 & x = 0 \\ E_x = 0 & y = 0, z = 0 \end{cases}$$

对其他分量有类似的考虑, 再考虑 $x = L_1$ ,  $y = L_2$ ,  $z = L_3$ 面上的边界条件, 即驻波要求, 有

$$\begin{cases} E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \\ E_y = A_2 \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \\ E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \end{cases} \quad k_x = \frac{l\pi}{L_1}, \quad k_y = \frac{m\pi}{L_2}, \quad k_z = \frac{n\pi}{L_3}, \quad l, m, n \in \mathbb{N}$$

$l, m, n$ 分别代表沿矩形三边所含的半波数目

由 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ , 常量满足关系 $k_x A_1 + k_y A_2 + k_z A_3 = 0$ , 即 $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 只有两个是独立的  
谐振腔的本征频率 $\omega$

$$\omega_{lmn} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{l}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_3}\right)^2}$$

### 4.4.2 波导

低频电力传输可以用同轴传输线；频率更高时，内导线热损耗严重，改用波导代替。波导是一根空心金属管，截面通常为矩形或圆形，波导的传输适用于微波范围。

矩形波导中的电磁波 波导内壁面为 $x=0$ ,  $y=0$ ,  $x=a$ ,  $y=b$ 围成的曲面， $z$ 轴沿传输方向

$$\vec{E}(x,y,z) = \vec{E}(x,y)e^{ik_z z}$$

设 $u$ 为 $\vec{E}$ 或 $\vec{H}$ 的任一分量，分离变量 $u(x,y) = X(x)Y(y)$

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0 \end{cases} \quad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

有驻波解

$$u(x,y,z) = (C_{1x} \cos k_x x + C_{2x} \sin k_x x)(C_{1y} \cos k_y y + C_{2y} \sin k_y y)$$

考虑边界条件

$$\begin{cases} E_y = E_z = 0, \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 & x = 0, a \\ E_x = E_z = 0, \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 & y = 0, b \end{cases}$$

再考虑 $x=a$ 和 $y=b$ 上的边界条件，即驻波要求，有

$$\begin{cases} E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \\ E_y = A_2 \sin k_x x \cos k_y y e^{ik_z z} \\ E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \end{cases} \quad k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

$m, n$ 分别代表沿矩形两边所含的半波数目

由 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ ，常量满足关系 $k_x A_1 + k_y A_2 - ik_z A_3 = 0$ ，即 $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 只有两个是独立的  
如果 $E_z = 0$ ，则 $H_z = \frac{1}{i\omega\mu} (\nabla \times \vec{E})_z = \frac{1}{\omega\mu} (A_2 k_y - A_1 k_x) \sin k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \neq 0$

电场和磁场不能同时为横波，不能是TEM波，是TM、TE波的混合体

管截面的几何尺寸决定了波模的 $(m,n)$ 数以及 $k_x$ 、 $k_y$ 的值，如果 $k < \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ ，则 $k_z$ 变为虚数，沿 $z$ 轴方向振幅不断衰减，能够在波导内传播的波的最低频率 $\omega_c$ 称为该波模的截止频率。

$$\omega_{c,mn} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

**TE<sub>10</sub>波的电磁场和管壁电流**

$m=1$ ,  $n=0$ ,  $k_x = \pi/a$ ,  $k_y = 0$ 。对于TE波有 $E_z = 0$

$$A_3 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{i\omega\mu a}{\pi} H_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_z = H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \\ E_y = \frac{i\omega\mu a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a} \\ H_x = -\frac{ik_z a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a} \\ E_x = E_z = H_y = 0 \end{array} \right.$$

**Exercise 4.1** 证明不存在 $\text{TM}_{m0}$ 或 $\text{TM}_{0n}$ 波

**Exercise 4.2** 尝试用 $\vec{H}$ 来表示波导中的电磁波

## 5. 电磁波的辐射

本章不考虑介质体系

### 5.1 d'Alembert方程

#### 电磁场的标势和矢势

根据Maxwell方程组，我们考虑电场的新形式

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

- i.  $\vec{E}$ 不再是保守力场， $\varphi$ 失去电场中势能的意义，高频系统中电压也失去确切的意义
- ii. 在变化场中，磁场和电场是相互作用着的整体，必须把矢势和标势作为一个整体来描述电磁场

#### 规范变换

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

势作规范变换时，所有的物理量和物理规律都应该保持不变——规范不变性

#### Coulomb规范

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

$\vec{E}$ 的无旋部分用 $\varphi$ 描述，无源场部分用 $\vec{A}$ 描述  
— $\nabla\varphi$ 对应Coulomb场， $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ 对应感生电场

#### Lorenz规范

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

有简单的对称形式，物理意义也较明显，在相对论中显示协变性

**d'Alembert方程**

若采用Coulomb规范, 有

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi = -\mu_0 \vec{j} \\ \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{A} = 0 \end{cases}$$

若采用Lorenz规范, 有

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \\ \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

**Exercise 5.1** 用平面电磁波的势来比较两种规范

**5.2 推迟势**

设原点处有一假想的变化电荷,  $\rho = Q(t)\delta(\vec{r})$ , 则

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} Q(t)\delta(\vec{r})$$

考虑球对称性, 用球坐标表示

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} Q(t)\delta(\vec{r})$$

$\vec{r} \neq 0$ 时, 满足波动方程

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

考虑为球面波, 作代换

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{u(\vec{r}, t)}{r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

解出

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{f(t - \frac{r}{c})}{r} + \frac{g(t + \frac{r}{c})}{r}$$



第一项代表向外发射的球面波，第二项代表向内收敛的球面波

如果电荷不在原点，对于一般变化电荷分布 $\rho(\vec{r}', t - \frac{r}{c})$ 、 $\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c})$ 有

$$\begin{cases} \varphi(\vec{r}, t) = \iiint \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{r}{c})}{4\pi\epsilon_0 r} dV' \\ \vec{A}(\vec{r}, t) = \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c})}{4\pi/\mu_0 r} dV' \end{cases}$$

推迟势的意义 反映了❶电磁作用具有一定的传播速度，❷光速是电磁作用的传播速度，❸不存在瞬时的超距作用

### 推迟势的多级展开

设 $\vec{j}(\vec{r}', t) = \vec{j}(\vec{r}')e^{-i\omega t}$ ，有 $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r})e^{-i\omega t}$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}')e^{ikr}}{r} dV'$$

在一定频率的交变电流情形中有

$$i\omega\rho = \nabla \cdot \vec{j}$$

据此，有了矢势 $\vec{A}$ ，就可以根据Maxwell方程组完全确定电磁场

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \vec{E} = \frac{ic}{k} \nabla \times \vec{B}$$

取小区域，线度 $l \ll \lambda$ 。

- (1) 近区 $r \ll \lambda$ ， $e^{ikr} \sim 1$ ，恒定场；
- (2) 感应区 $r \sim \lambda$ ；
- (3) 远区 $r \gg \lambda$ ，横向辐射场。

$r$ 是从源点 $\vec{r}'$ 到场点 $\vec{r}$ 的距离， $R$ 为原点到场点的距离

$$r = R - \vec{e}_R \cdot \vec{r}'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}')e^{ik(R - \vec{e}_R \cdot \vec{r}')}}{R - \vec{e}_R \cdot \vec{r}'} dV'$$

分母中的小量可以忽略，但相因子中的不可忽略

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \iiint \vec{j}(\vec{r}') (1 - ik\vec{e}_R \cdot \vec{r}' + \dots) dV'$$

计算时，可以将 $\nabla$ 算符和对时间的偏导算符作用在相因子上，即

$$\nabla \rightarrow ik\vec{e}_R \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$$

## 5.3 电磁波辐射

### 5.3.1 电偶极辐射

$$\vec{A}^{(0)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \iiint \vec{j}(\vec{r}') dV'$$

$$\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i$$

$$\iiint \vec{j}(\vec{r}') dV' = \sum q \vec{v} = \frac{d}{dt} \sum q \vec{l} = \dot{\vec{p}}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}^{(0)}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \dot{\vec{p}} \\ \vec{B} &= \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} \ddot{\vec{p}} \times \vec{e}_R \\ \vec{E} &= \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{e}_R) \times \vec{e}_R\end{aligned}$$

若 $\vec{p}$ 沿z轴方向

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{e^{ikR}}{4\pi/\mu_0 c^3 R} \ddot{p} \cos \varphi \vec{e}_\theta \\ \vec{E} &= \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \ddot{p} \cos \varphi \vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

$\vec{B}$ 总是横向的, 沿纬线方向,  $\vec{E}$ 沿经线方向,  $\vec{E}$ 线必须闭合( $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ ), 但 $\vec{E}$ 不可能完全横向, 只有略去 $1/R$ 高次项后,  $\vec{E}$ 才近似为横向, 是空间中的TEM波。

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}^* \times \vec{H})$$

$$\vec{S} = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} \cos^2 \varphi \vec{e}_R$$

$$P = \oint |\vec{S}| R^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{3c^3}$$

辐射功率正比于 $\omega$ 的4次方

### 5.3.2 高阶项展开

$$\vec{A}^{(1)} = -\frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \iiint \vec{j}(\vec{r}') (\vec{e}_R \cdot \vec{r}') dV'$$

对于连续闭合电流环, 不带净电荷, 线圈上有振荡电流, 产生磁多极辐射

对于四个导体球体系, 在四个导体上交替出现正负电荷, 产生电四极辐射

$$\begin{aligned}\iiint \vec{j}(\vec{r}') (\vec{e}_R \cdot \vec{r}') dV' &= \frac{1}{2} \iiint [\vec{j}(\vec{e}_R \cdot \vec{r}') + (\vec{j} \cdot \vec{e}_R) \vec{r}'] dV' + \frac{1}{2} \iiint [\vec{j}(\vec{e}_R \cdot \vec{r}') - (\vec{j} \cdot \vec{e}_R) \vec{r}'] dV' \\ \frac{1}{2} \iiint [\vec{j}(\vec{e}_R \cdot \vec{r}') - (\vec{j} \cdot \vec{e}_R) \vec{r}'] dV' &= -\frac{1}{2} \vec{e}_R \times \iiint (\vec{r}' \times \vec{j}) dV' = -\vec{e}_R \times \vec{m} \\ \frac{1}{2} \iiint [\vec{j}(\vec{e}_R \cdot \vec{r}') + (\vec{j} \cdot \vec{e}_R) \vec{r}'] dV' &= \frac{1}{2} \sum q [\vec{v}(\vec{e}_R \cdot \vec{r}') + (\vec{v} \cdot \vec{e}_R) \vec{r}']\end{aligned}$$

而 $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$

$$= \frac{1}{6} \vec{e}_R \cdot \vec{D}$$

于是磁矢势的一级展开可以写成

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{r}) = -\frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} (-\vec{e}_R \times \vec{m} + \frac{1}{6} \vec{e}_R \cdot \vec{D})$$

### 5.3.3 磁偶极辐射

取 $\vec{A}^{(1)}$ 中的磁偶极项

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \vec{e}_R \times \vec{m} \\ \vec{B} &= \frac{e^{ikR}}{4\pi/\mu_0 c^2 R} (\ddot{\vec{m}} \times \vec{e}_R) \times \vec{e}_R \\ \vec{E} &= -\frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} (\ddot{\vec{m}} \times \vec{e}_R)\end{aligned}$$

若 $\vec{m}$ 沿z轴方向

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{e^{ikR}}{4\pi/\mu_0 c^2 R} \ddot{m} \cos \varphi \vec{e}_\varphi \\ \vec{E} &= -\frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} (\ddot{m} \cos \varphi \vec{e}_\theta)\end{aligned}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}^* \times \vec{H})$$

$$\vec{S} = \frac{|\ddot{m}|^2}{32\pi^2/\mu_0 c^3 R^2} \cos^2 \varphi \vec{e}_R$$

$$P = \oint |\vec{S}| R^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi/\mu_0} \frac{|\ddot{m}|^2}{3c^3}$$

辐射功率正比于 $\omega$ 的4次方

### 5.3.4 电四极辐射

取 $\vec{A}^{(1)}$ 中的电四极项

取 $\mathcal{D}(\vec{e}_R) = \vec{e}_R \cdot \mathcal{D}$

$$\begin{aligned}\vec{A}^{(1)}(\vec{r}) &= -\frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{24\pi R} \mathcal{D} = \frac{e^{ikR}}{24\pi\epsilon_0 c^3 R} \ddot{\mathcal{D}} \\ \vec{B} &= \frac{e^{ikR}}{4\pi/\mu_0 c^2 R} \ddot{\mathcal{D}} \times \vec{e}_R \\ \vec{E} &= \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} (\ddot{\mathcal{D}} \times \vec{e}_R) \times \vec{e}_R\end{aligned}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}^* \times \vec{H})$$

$$\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{288\pi c^5 R^2} (\ddot{\mathcal{D}} \times \vec{e}_R)^2 \vec{e}_R$$

辐射角分布比较复杂，这里不做计算。

## 5.4 天线辐射

天线上的电流分布：取天线沿z轴，天线表面的电流 $\vec{j}$ 沿z轴方向， $\vec{A}$ 仅有z分量

当天线的长度远小于 $\lambda$ 时，沿天线上的电流分布近似为线性形式

当天线长度与 $\lambda$ 同级时，沿天线表面， $A_z(z)$ 是一种波动的形式

**短天线辐射**  $l \ll \lambda$ 

沿天线的上的电流分布近似为线性形式

$$I(z) = I_0(1 - \frac{2}{l}|z|), \quad |z| \leq l/2$$


$$P = \frac{\mu_0 I_0^2 \omega^2 l^2}{48\pi c} = \frac{\pi}{12} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} I_0^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$$

辐射功率相当于一个等效电阻上的损耗功率  $P = \frac{1}{2} R_L I_0^2$

$$R_L = \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$$

**半波天线\***

$$I(z) = I_0 \sin k\left(\frac{l}{2} - |z|\right), \quad |z| \leq l/2$$



## 6. 带电粒子和电磁场的相互作用\*

注：本章的基本理论建议先了解狭义相对论的基础知识。

### 6.1 运动带电粒子的势\*

Liénard-Wiechert势：

$$\vec{A} = \frac{q\vec{v}}{4\pi\epsilon_0 c^2 \left(r - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{r}\right)}, \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(r - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{r}\right)}$$

将势对场点的时空坐标求导可得电磁场强。

### 6.2 Черенков辐射\*

在真空中，匀速运动的带电粒子不产生辐射的电磁场。但当带电粒子在介质内运动时，介质内产生诱导电流，由这些诱导电流激发次波，当带电粒子的速度超过介质内的光速时，这些次波与运动粒子的电磁场互相干涉，可形成辐射电磁场，这种辐射称之为Черенков辐射。

### 6.3 电磁波的散射和吸收

当一定频率的外来电磁波投射到电子上时，电磁波的振荡电场作用到电子上，使电子以相同的频率作受迫振动。振动的电子向外辐射出电磁波，将原来的入射波的部分能量辐射出去。

#### 6.3.1 带电粒子的电磁场对粒子本身的反作用

辐射阻尼：当电子受外力作用而加速时，它辐射出电磁波，把部分能量辐射出去，因而受到一个阻尼力。对于一个周期的平均效应而言，可以取粒子激发的场对粒子本身的反

作用力 $\vec{F}_s$ :

$$\vec{F}_s = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\vec{v}}$$

这个式子并不是对每一瞬时成立，只代表一种平均效应。

通常定义经典电子半径为

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 2.81794092 \times 10^{-15} \text{m}$$

### 6.3.2 电磁波的散射

#### 6.3.2.1 自由电子的散射

设电子在外来电磁波的作用下，其运动速度 $v \ll c$ ，这样可以写出电子的运动方程：

$$\ddot{\vec{x}} - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m} \ddot{\vec{x}} = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

该方程的稳态解是频率为 $\omega$ 的受迫振动，那么 $\ddot{\vec{x}} = -\omega^2 \vec{x}$ ，令 $\gamma = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m}$ ，那么微分方程简化为：

$$\ddot{\vec{x}} + \gamma \dot{\vec{x}} = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

由此可以解得

$$\vec{x} = -\frac{e \vec{E}_0}{m(\omega^2 + i\gamma)} e^{-i\omega t} = \vec{x}_0 e^{-i\omega t}$$

如果入射波长 $\lambda \gg r_e$ ，则 $\gamma \ll \omega$ ，从而阻尼项可以忽略，那么由此可以求得电子振动时所辐射的电场强度

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \ddot{\vec{x}})$$

定义散射波能流：

$$\bar{S} = \frac{r_e^2}{r^2} \cos^2 \alpha \cdot \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

积分得散射波的平均总功率 $P = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \cdot \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$ 。

#### 6.3.2.2 束缚电子的散射

以谐振子作为原子中束缚电子的模型，设振子的固有频率为 $\omega_0$ ，则振子的运动方程

$$\ddot{\vec{x}} + \gamma \dot{\vec{x}} + \omega_0^2 \vec{x} = \frac{e}{m} \vec{E} e^{-i\omega t}$$

解得

$$\vec{x} = \frac{e}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma} \vec{E}_0 e^{-i\omega t} = \frac{e}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}} \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \delta)}$$

其中  $\tan \delta = \frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}$ 。同理可以计算出辐射功率:

$$P = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \cdot \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

为了讨论方便起见, 定义散射截面  $\sigma$ , 即散射功率除去单位  $\frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$ , 那么可以分以下情况:

(1)  $\omega \ll \omega_0$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4$$

低频的散射截面和  $\omega^4$  成正比, 这称之为Rayleigh散射。

(2)  $\omega \gg \omega_0$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2$$

这过渡到自由电子散射。

(3)  $\omega = \omega_0$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \left( \frac{\omega}{\gamma} \right)^2$$

由于  $\omega_0 \gg \gamma$ , 此时的散射截面有尖锐的极大值, 称为共振现象。

### 6.3.3 电磁波的吸收

在共振情形下, 入射波的能量被振子强烈地吸收, 当具有连续谱的电磁波投射到电子上时, 只有  $\omega \approx \omega_0$  的部分才会被强烈地吸收, 形成一条吸收谱线。设入射波单位频率间隔入射于单位面积的能量为  $I_0(\omega)$ , 那么振子辐射的总能量

$$W = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \int_0^\infty \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} I_0(\omega) d\omega$$

在上式中, 由于主要的贡献来自  $\omega \approx \omega_0$ , 于是可以将  $I_0(\omega)$  换为  $I_0(\omega_0)$ , 并将除  $\omega_0 - \omega$  之外的  $\omega$  全部换为  $\omega_0$ , 这样得到

$$W = 2\pi^2 r_e c I_0(\omega_0)$$

该能量也是振子从入射波中吸收的总能量。

### 6.3.4 介质的色散

当电磁波入射到介质内时, 由电子散射的次波互相叠加, 形成在介质内传播的电磁波。在此只研究非铁磁物质的稀薄气体情形。由先前求解的微分方程, 介质的电极化强度为

$$\vec{P} = Ne\vec{x} = \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \vec{E}$$

那么介质的电容率

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}$$

据此分别算出相对介电常数的实部和虚部

$$\begin{cases} \varepsilon'_r = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \\ \varepsilon''_r = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \end{cases}$$

实部 $\varepsilon'_r$ 对 $\omega$ 的关系称为色散，虚部 $\varepsilon''_r$ 引起电磁波的吸收。

以上假设电子只有一个固有频率，事实上在原子中电子有多个固有频率 $\omega_i$ ，设单位体积内固有频率为 $\omega_i$ 的电子数目为 $Nf_i$ ，那么 $\sum f_i = 1$ ，这样

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \sum_i \frac{Ne^2}{m} \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i}$$

介质的复折射率 $n + i\kappa$ 为

$$n + i\kappa = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{\varepsilon'_r + i\varepsilon''_r}$$



# IV

## 狭义相对论

<b>7</b>	<b>狭义相对论</b> .....	<b>45</b>
7.1	相对论的基本原理 .....	45
7.2	Lorenz变换 .....	45
7.3	四维形式 .....	47



## 7. 狭义相对论

### 7.1 相对论的基本原理

- i. 相对性原理：物理规律对于所有的惯性参考系都可以表示成相同形式
- ii. 光速不变原理：真空中的光速相对于任何惯性系沿任一方向恒为 $c$ ，与光源运动无关

### 7.2 Lorentz变换

条件：坐标变换必须是线性的；空间是均匀的，各向同性的，时间是均匀的  
考虑沿 $x$ 轴方向的运动，即 $y' = y$ ， $z' = z$

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

可以求出其逆变换

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} a_{44} & -a_{14} \\ -a_{41} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}$$

① $\Sigma$ 系中 $\Sigma'$ 系中的 $O'$ 点

$$\begin{aligned} x' = 0 &\Rightarrow a_{11}x + a_{14}t = 0 \Rightarrow \frac{x}{t} = -\frac{a_{14}}{a_{11}} = v \\ &\Rightarrow a_{14} = -va_{11} \end{aligned}$$

② $\Sigma'$ 系中 $\Sigma$ 系中的 $O$ 点

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow a_{44}x' - a_{14}t' = 0 \Rightarrow \frac{x'}{t'} = \frac{a_{14}}{a_{44}} = -v \\ &\Rightarrow a_{44} = a_{11} \end{aligned}$$

③光速不变原理

$$\begin{cases} x = ct \\ x' = ct' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ct' = (a_{11}c + a_{14})t \\ t' = (a_{41}c + a_{44})t \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{41} = \frac{1}{c^2} a_{14} = -\frac{v}{c^2} a_{11}$$

④相对性原理 ( $v \rightarrow -v$ , 逆变换)

$$D = a_{11}a_{44} - a_{14}a_{41} = 1$$

$$\text{令 } \beta = \frac{v}{c}$$

$$D = a_{11}^2(1 - \beta^2) = 1$$

$$\Rightarrow a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma$$

于是解得

$$a_{11} = \gamma, \quad a_{14} = -v\gamma, \quad a_{41} = -\frac{v}{c^2}\gamma, \quad a_{44} = \gamma$$

即

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -v\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v}{c^2}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

其逆变换的形式只需要将矩阵中的 $v$ 改为 $-v$ 即可 (相对性原理)

间隔不变性

$$s^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2), \quad s'^2 = c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

$$s'^2 = s^2, \quad \Delta s'^2 = \Delta s^2$$

间隔的划分  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $r$  事件的空间距离, 划分不因参考系而转变

两事件可以用光波联系	$r = ct$	$s^2 = 0$	事件在光锥上	类光间隔	
两事件可以用低于光速作用联系	$r < ct$	$s^2 > 0$	事件在光锥内	类时间隔	因果不可颠倒
两事件的空间距离超过光波在时间 $t$ 内所能传播的距离	$r > ct$	$s^2 < 0$	事件在光锥外	类空间隔	非因果联系

因果关系是绝对的 ( $t_2 > t_1$ )

$$t_2'^2 - t_1'^2 = \gamma[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)]$$

若保持因果关系, 则有  $t_2' > t_1'$  设  $|x_2 - x_1| = u(t_2 - t_1)$

$$uv < c^2 \Rightarrow u < c, v < c$$

真空中光速 $c$ 是物质运动的最大速度, 也是一切相互作用传播的极限速度

**同时的相对性** 具有类空间隔的两事件, 由于不可能发生因果关系, 其时间次序的先后或同时, 都没有绝对意义, 若两事件对 $\Sigma$ 同时, 对 $\Sigma'$ 不同时。

**Exercise 7.1** 运动尺度的缩短**Exercise 7.2** 运动时钟的延缓  $\Sigma'$  系是物体的静止坐标系

在  $\Sigma$  中看  $\Sigma'$  系中的运动时钟变慢，在  $\Sigma'$  系中看  $\Sigma$  系中的时钟同样变慢

**双生子佯谬** 当一个时钟绕闭合路径作加速运动最后返回原地，它所经历的总时间小于在原地静止时钟所经历的时间（非惯性系，狭义相对论不可解释）

**速度变换公式**

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

将诸量的微分求出，代入得

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

**7.3 四维形式**

三维空间中的正交变换  $\vec{x}' = A\vec{x}$ ,  $A$  为正交矩阵物理量的分类

- (1) 标量  $u' = u$ ，在空间中没有取向关系，当坐标系转动时，这些量保持不变
- (2) 矢量  $\vec{v}' = A\vec{v}$
- (3) 二阶张量  $\mathcal{T} = A\mathcal{T}A^T$

**Lorenz变换**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix}$$

这里我们引入一个变换矩阵

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

该矩阵是Hermite的, 满足 $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^T$

**四维协变量** 在Lorenz变换下不变的物理量称为Lorenz标量或不变量, 物理量在Lorenz变换下具有确定的变换性质, 称为协变量。

**物理规律的协变性** 在参考系变换下, 方程形式不变的性质称为协变性

Lorenz标量举例

间隔 $ds^2 = -\sum dx_\mu dx_\mu$ 、固有时 $d\tau = \frac{1}{c}ds$ ,  $dt = \gamma d\tau$

速度 $u_i = \frac{dx_i}{dt}$ , 适用于参考系 $\Sigma$ 的时间量度的位移变化率

四维速度矢量 $\mathcal{U}_i = \frac{dx_i}{d\tau}$ , 适用于固有时量度的位移变化率

$$\mathcal{U} = \gamma_u(u_1, u_2, u_3, ic)^T$$

相位是一个不变量 $\varphi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$

### 7.3.1 相对论电动力学

实验表明, 带电粒子的电荷与它运动的速度无关, 即 $Q$ 是一个Lorenz标量

$$Q = \iiint \rho dV = \text{Const.}$$

体积尺缩效应 $dV = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dV_0$  电荷密度增大 $\rho = \gamma_u \rho_0$  四维电流密度矢量

$$\vec{j} = \rho \vec{u}$$

引入第四个分量 $\mathcal{J}_4 = ic\rho$

$$\mathcal{J} = (\vec{j}, ic\rho)$$

电荷守恒定理表示为

$$\sum_\mu \frac{\partial \mathcal{J}_\mu}{\partial \mathcal{X}_\mu} = 0$$

由d'Alembert方程中Lorenz规范形式, 引入

$$\mathcal{A} = (\vec{A}, \frac{i}{c}\varphi)$$

将Lorenz规范改写为

$$\sum_\mu \frac{\partial \mathcal{A}_\mu}{\partial \mathcal{X}_\mu} = 0$$

引入记号

$$\square \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \mathcal{X}_\mu} \frac{\partial}{\partial \mathcal{X}_\mu}$$

则d'Alembert方程写为

$$\square \mathcal{A} = -\mu_0 \mathcal{J}$$

由矢势和标势引入电磁场张量矩阵元

$$\mathcal{F}_{mn} = \frac{\partial \mathcal{A}_n}{\partial x_m} - \frac{\partial \mathcal{A}_m}{\partial x_n}$$

得

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0 \end{pmatrix}$$

由此将Maxwell方程组写为两对

$$\begin{cases} \sum \frac{\partial \mathcal{F}_{mn}}{\partial x_n} = \mu_0 \mathcal{J}_m \\ \sum \frac{\partial \mathcal{F}_{mn}}{\partial x_l} + \frac{\partial \mathcal{F}_{nl}}{\partial x_m} + \frac{\partial \mathcal{F}_{lm}}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

同样可以进行参考系变换，用Lorentz变换矩阵进行运算即可

### 7.3.2 相对论力学

四维动量矢量

利用速度四维矢量来定义四维动量矢量

$$\mathcal{P} = m_0 \mathcal{U}, \quad \vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}, \quad \mathcal{P}_4 = \frac{i}{c} \gamma m_0 c^2$$

设 $v \ll c$ ，将 $\mathcal{P}_4$ 展开

$$\mathcal{P}_4 = \frac{i}{c} (m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots)$$

物体静止时具有能量 $E_0 = m_0 c^2$ ，相对论中物体的动能

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2$$

$$\text{总能量 } E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

**质能关系**

结合能：一组粒子构成复合物的总能量一般不等于所有粒子静止质量之和

$$\Delta W = \sum_i m_{i0} c^2 - W_0$$

质量亏损：物体的质量亦不等于组成它的各粒子静止质量之和

$$\Delta W = \Delta m_0 c^2$$

引入  $m = \gamma m_0$ ,  $m$  称为运动质量, 不是不变量,  $m_0$  是 Lorentz 标量

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad E = mc^2$$

根据这些不难推出以下关系

$$E_0 = m_0 c^2, \quad E = mc^2, \quad p = mv, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

则有关系:

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2$$

将上面的表达式代入不难验证。

### 相对论力学方程

四维力矢量  $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} = \frac{d\mathcal{P}}{d\tau}, \quad \vec{K} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}, \quad \frac{dE}{d\tau} = \vec{K} \cdot \vec{v}, \quad \mathcal{K}_4 = \frac{i}{c} \vec{K} \cdot \vec{v}$$

$$\mathcal{K} = (\vec{K}, \frac{i}{c} \vec{K} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dE}{dt}, \quad dt = \gamma d\tau$$

$$\vec{K} = \gamma \vec{F}$$

### Lorentz 力

$$f_4 = \frac{i}{c} \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$f = \mathcal{F}\mathcal{J}$$

还可以定义一个电磁场能量动量张量, 它可以表示为:

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{T} & i\frac{\vec{S}}{c} \\ i\frac{\vec{S}^T}{c} & -w \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{K} = -\frac{\partial \mathbb{T}}{\partial \mathcal{X}}$$

#### Exercise 7.3 带电粒子在均匀恒定磁场中的运动



### 7.3.3 电磁场中带粒子的Hamilton量和Lagrange量

对于自由粒子情形，粒子的状态由速度决定，作用量 $S = \int L dt = \int \gamma L d\tau$ 是一个不变量。由此 $\gamma L$ 是一个Lorenz不变量，当 $v \ll c$ 时，上式趋于非相对论的动能，由此得到

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

考虑作用量 $S = \int L dt$ 在电磁场中的作用量将有如下形式

$$S = \int (L_0 dt + q \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}) = \int (L_0 dt + q \vec{A} \cdot d\vec{r} - q \phi dt) = \int (L_0 + q \vec{A} \cdot \vec{v} - q \phi) dt$$

令Lagrange量

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q \vec{A} \cdot \vec{v} - q \phi$$

广义动量

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{q}_\alpha} = \vec{p} + q \vec{A}$$

式中的 $\vec{p}$ 是粒子的普通动量，Hamilton量不应用速度表示，而应该用广义动量表示。

$$H = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\vec{P} - q \vec{A})^2} + q \phi$$

对于低速情况，即在经典力学的近似下，可以求出Hamilton量

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{P} - q \vec{A})^2 + q \phi$$

之后在量子力学当中，我们只需要将广义动量化作 $-i\hbar \nabla$ 即可

下面利用这些来推导电场和磁场的表达式

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = q \nabla (\vec{A} \cdot \vec{v}) - q \nabla \phi$$

由矢量分析公式可得（注意 $q_\alpha$ 和 $q_\alpha$ 的独立性）

$$= q (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A} + q \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) - q \nabla \phi$$

代入Lagrange方程，注意

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sum_\alpha \frac{\partial \vec{A}}{\partial q_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A}$$

得到

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q (-\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) + q \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A})$$

这正是Lorenz力的表示形式，于是不难看出

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

可以从这个角度入手推出电动力学的各种方程，这正是Ландау的思路。这些内容则参考Ландау的《Теория Поля》。



## A. 场论常用公式

### A.1 场论算符

$$\nabla \varphi = \mathbf{grad} \varphi$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \mathbf{div} \vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \mathbf{rot} \vec{A}$$

球坐标系 $(r, \varphi, \theta)$ 下的公式:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_r) + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos \varphi f_\varphi) + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} f_\theta$$

$$\nabla \times \vec{f} = \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\varphi & r \cos \varphi \vec{e}_\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ f_r & r f_\varphi & r \cos \varphi f_\theta \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi}) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

一般曲线正交坐标系下的公式:

$$\nabla f = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \vec{e}_3$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 f_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 f_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 f_3) \right]$$

$$\nabla \times \vec{f} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 f_1 & h_2 f_2 & h_3 f_3 \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \right) \right]$$

## A.2 $\nabla$ 算符公式

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$$

$$\nabla \cdot (\varphi\vec{f}) = (\nabla\varphi) \cdot \vec{f} + \varphi\nabla \cdot \vec{f}$$

$$\nabla \times (\varphi\vec{f}) = (\nabla\varphi) \times \vec{f} + \varphi\nabla \times \vec{f}$$

$$\nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) = (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{g} - \vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{g})$$

$$\nabla \times (\vec{f} \times \vec{g}) = (\vec{g} \cdot \nabla)\vec{f} + (\nabla \cdot \vec{g})\vec{f} - (\vec{f} \cdot \nabla)\vec{g} - (\nabla \cdot \vec{f})\vec{g}$$

$$\nabla(\vec{f} \cdot \vec{g}) = \vec{f} \times (\nabla \times \vec{g}) + (\vec{f} \cdot \nabla)\vec{g} + \vec{g} \times (\nabla \times \vec{f}) + (\vec{g} \cdot \nabla)\vec{f}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{f}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{f}) - \nabla^2 \vec{f}$$


以下默认向量为列向量，用矩阵乘法的运算规则。

$$\nabla \vec{A} = \vec{i} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \right)^T + \vec{j} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \right)^T + \vec{k} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \right)^T$$

$$\nabla \cdot \mathcal{T} = \frac{\partial}{\partial x} (\vec{j} \cdot \mathcal{T}) + \frac{\partial}{\partial y} (\vec{k} \cdot \mathcal{T}) + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{i} \cdot \mathcal{T})$$

$$\nabla \times \mathcal{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{i} \cdot \mathcal{T} & \vec{j} \cdot \mathcal{T} & \vec{k} \cdot \mathcal{T} \end{vmatrix}$$





## B. 电磁学单位制

### B.1 常用单位制

#### B.1.1 MKSA有理制

基本量：长度(m)，质量(kg)，时间(s)，电流强度(A)  
力的单位N， $1\text{ N} = 10^5\text{ dyn}$ 。

#### B.1.2 Gauss单位制

##### B.1.2.1 CGSE单位制

基本量：长度(cm)，质量(g)，时间(s)。电荷量(e.s.u.)  
对于真空中的Coulomb定律 $F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$ ，令 $k = 1$ ，当具有相同电量的( $q_1 = q_2$ )两个静止的点电荷在真空中相距1 cm、相互作用为1 dyn时，每个电荷的电量为1 e.s.u.。

##### B.1.2.2 CGSM单位制

基本量：长度(cm)，质量(g)，时间(s)。电流强度(e.m.u.)  
对于真空中两根无限长平行载流导线，其相互作用 $F = k \frac{2I_1 I_2}{a}$ ，令 $k = 1$ ，当两根无限长平行细导线相距2 cm时，相同的电流( $I_1 = I_2$ )时，若使得每1 cm导线长度上所受的力恰为1 dyn，则每根导线中通过的电流强度为1 e.m.u.。

##### B.1.2.3 Gauss单位制

- (1)所有的电学量都用CGSE单位制，所有的磁学量都用CGSM单位制。
- (2) $\epsilon$ 和 $\mu$ 都是量纲为1的纯数， $\epsilon_0$ 和 $\mu_0$ 都等于1。 $\epsilon_r$ 和 $\mu_r$ 在MKSA和CGSE中的数值相同。
- (3)在同时包含电学量和磁学量的公式中，比例系数不能任意选取，只能由实验测定。这些比例系数实质上是两种单位制相应单位的换算系数。
- (4)Gauss单位制只有三个基本量，可能会造成量纲上的混乱（电容C、电感L都是长度单位）

(5)Gauss单位制中与电荷有关的公式都比较简单，且较多地出现光速 $c$ ；MKSA有理制使得常用的公式中不出现 $4\pi$ ，即“有理制”名称的由来。

B.2 MKSA有理制和Gauss单位制常用公式对照表

物理量名称	单位名称	量纲
电荷量 $q$	C	TI
电势 $\varphi$	V	$L^2MT^{-3}I^{-1}$
电场强度 $E$	V/m或N/C	$LMT^{-3}I^{-1}$
电位移矢量 $D$	C/m <sup>2</sup>	$L^{-2}TI$
电容 $C$	F	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$
$\epsilon_0$	F/m	$L^{-3}M^{-1}T^4I^2$
电阻 $R$	$\Omega$	$L^2MT^{-3}I^{-2}$
电导 $G$	S	$L^{-2}M^{-1}T^3I^2$
电导率 $\sigma$	S/m	$L^{-3}M^{-1}T^3I^2$
磁通量 $\Phi$	Wb	$L^2MT^{-2}I^{-1}$
磁矢势 $A$	T·m	$L^{-1}MT^{-2}I^{-1}$
磁感应强度 $B$	T	$MT^{-2}I^{-1}$
磁场强度 $H$	A/m	$L^{-1}I$
电感 $L$	H	$L^2MT^{-2}I^{-2}$
$\mu_0$	H/m	$LMT^{-2}I^{-2}$

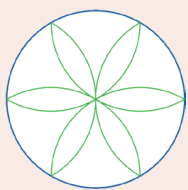
表 B.1: MKSA有理制中部分量的导出单位

MKSA有理制	Gauss单位制
$\mathcal{A} = (\vec{A}, \frac{i}{c}\varphi)$ $\mathcal{J} = (\vec{j}, ic\rho)$	$\mathcal{A} = (\vec{A}, i\varphi)$ $\mathcal{J} = (\vec{j}, ic\rho)$
$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0 \end{pmatrix}$	$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix}$

表 B.3: MKSA有理制和Gauss单位制常用公式对照表(续表)

MKSA有理制	Gauss单位制
$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$	$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$
$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$	$E = \frac{q}{r^2}$
$E = \frac{\sigma_e}{\epsilon_r \epsilon_0}$	$E = \frac{4\pi\sigma_e}{\epsilon_r}$
$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$	$U = \frac{q}{r}$
$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d}$	$C = \frac{\epsilon_r S}{4\pi d}$
$\vec{p} = q\vec{l}$	$\vec{p} = q\vec{l}$
$\vec{P} = \sum \frac{\vec{p}}{\Delta V}$	$\vec{P} = \sum \frac{\vec{p}}{\Delta V}$
$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$
$\epsilon_r = 1 + \chi_e$	$\epsilon_r = 1 + 4\pi \chi_e$
$U = IR$	$U = IR$
$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$	$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B})$
$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$	$d\vec{B} = \frac{1}{c} \frac{Id\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$
$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{a}$	$\frac{F}{l} = \frac{1}{c^2} \frac{2I_1 I_2}{a}$
$B = \mu_r \mu_0 n I$	$H = \frac{4\pi}{c} \mu_r n I$
$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$	$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$
$L = \mu_r \mu_0 n^2 V$	$L = 4\pi \mu_r n^2 V$
$\vec{m} = I\vec{S}$	$\vec{m} = \frac{1}{c} I\vec{S}$
$\vec{M} = \sum \frac{\vec{m}}{\Delta V}$	$\vec{M} = \sum \frac{\vec{m}}{\Delta V}$
$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$	$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M}$
$\mu_r = 1 + \chi_m$	$\mu_r = 1 + 4\pi \chi_m$
$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = 4\pi \rho \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$
$w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$	$w_e = \frac{1}{8\pi} \vec{D} \cdot \vec{E}$
$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$	$w_m = \frac{1}{8\pi} \vec{B} \cdot \vec{H}$
$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$	$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H})$
$\vec{g} = \frac{1}{c^2} (\vec{E} \times \vec{H})$	$\vec{g} = \frac{1}{4\pi c} (\vec{E} \times \vec{H})$
$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \end{array} \right.$
$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$	$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$
$\left\{ \begin{array}{l} \square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \\ \square \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \square \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \square \varphi = -4\pi \rho \end{array} \right.$

表 B.2: MKSA有理制和Gauss单位制常用公式对照表



*Bird-eating Cat*