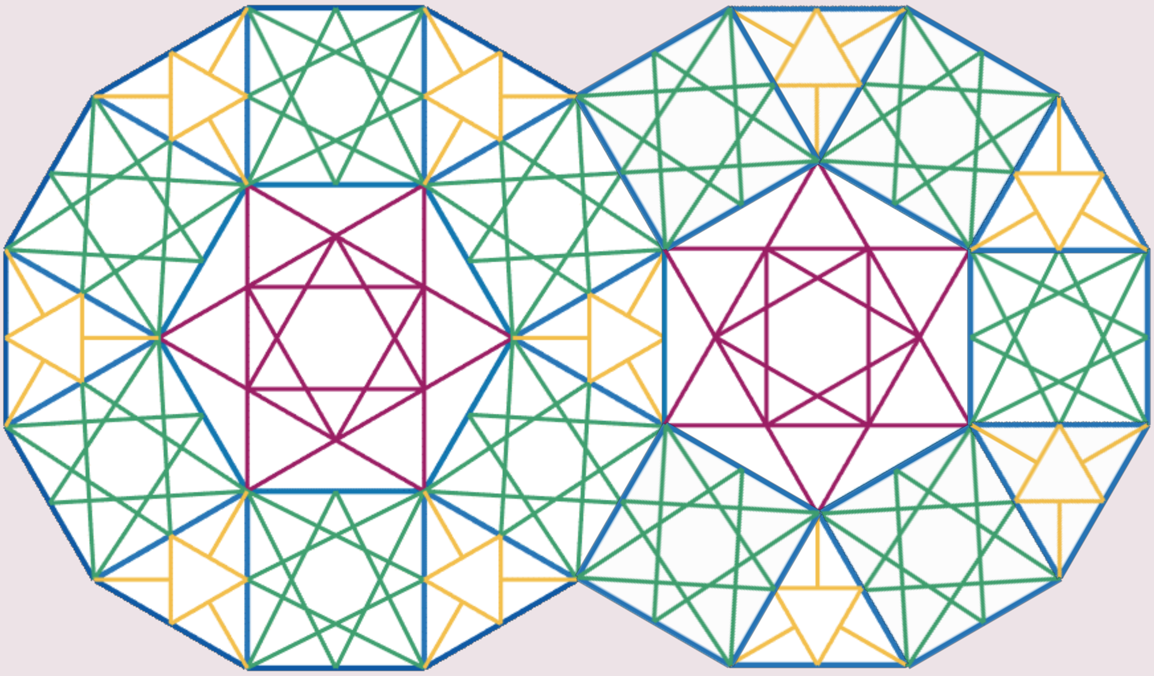
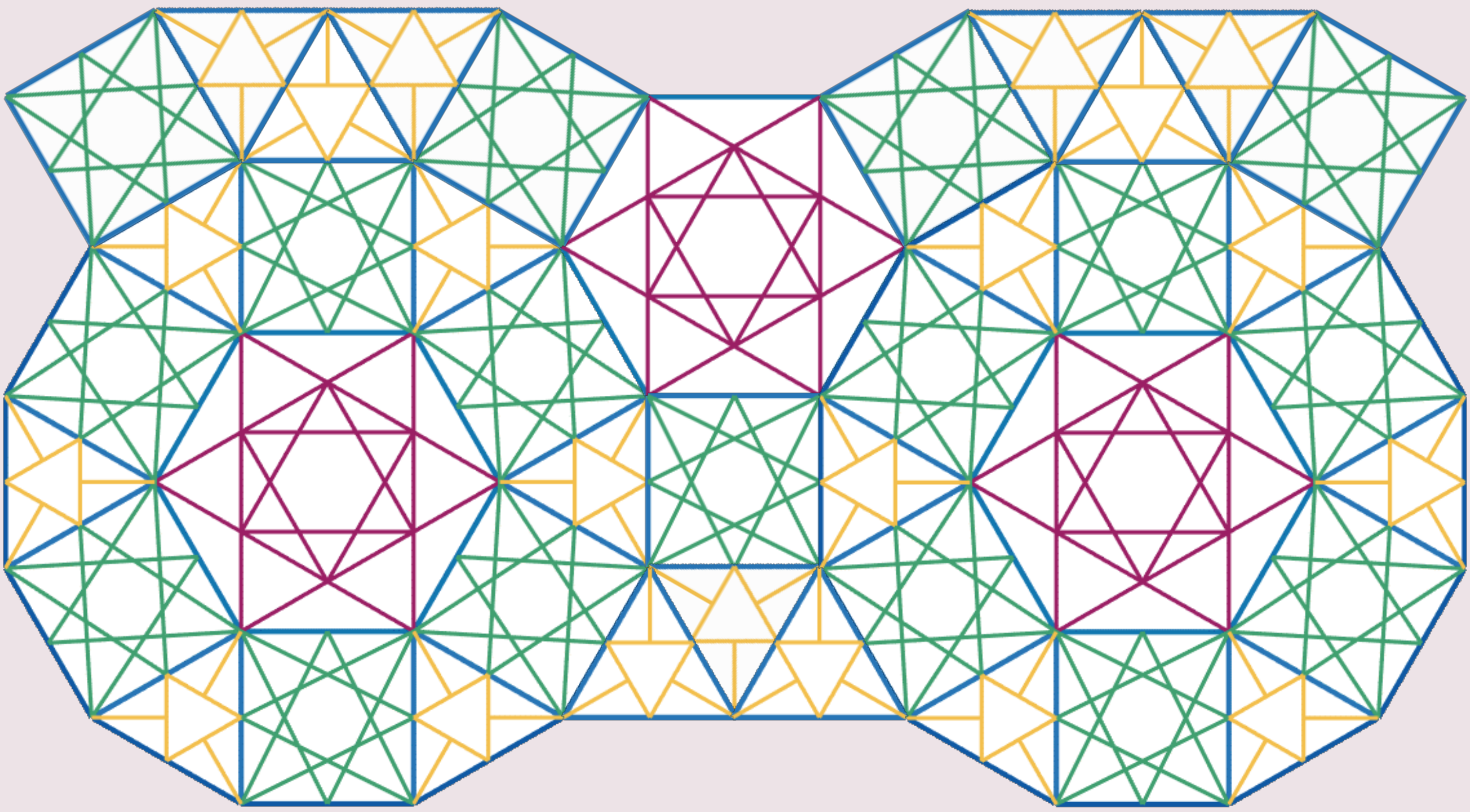


电动力学

Electrodynamics

Bird-eating Cat



Published by Publisher

First edition, June 2025

目录

电磁学

1. 电磁现象的普遍规律

1.1 电场和磁场

Coulomb定律 真空中静止的点电荷Q对另一个静止的点电荷Q'的作用力$\vec{F}$为

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ'}{r^3}\vec{r}$$

两种解释：超距作用✗　　相互作用通过场来传递✔

场 物质性：$\vec{F} = Q'\vec{E}$，具有能量、动量、角动量

Gauss定理

$$\oiint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$$

电荷是电场的源，电场线从正电荷发出而终止于负电荷。在没有电荷分布的地点，既没有电场线发出，也没有电场线终止。但可以有电场连续地通过该处。

电荷对电场作用的局域性质：电荷只直接激发其邻近的场，而远处的场则是通过场本身内部作用传递出去的。只有在静电场情况下Coulomb定律成立；对于变化电荷，远处场不能用Coulomb定律，但Gauss定理成立。

环路积分

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$
$$\nabla\times\vec{E} = 0$$

静电场是无旋场，无旋性只在静电情况下成立。在静电情形下电场没有旋涡状结构。

电荷守恒定律

$$\oiint \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}V$$
$$\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

对于恒定电流：$\nabla\cdot\vec{j}=0$ 分布是无源的，流线必为闭合曲线。

Biot-Savart定律

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\vec{j}(\vec{r}')\times\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V'=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{I\mathrm{d}\vec{l}}{r^3}$$
$$\mathrm{d}\vec{F}=I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$$

Ampère环路定理

$$\oint\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$
$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}$$

“Gauss”定理

$$\oiint\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$$
$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

证明：（磁矢势$\vec{A}$，$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$）

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\vec{j}(\vec{r}')\times\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V'=-\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\vec{j}(\vec{r}')\times\nabla(\frac{1}{r})\mathrm{d}V'$$

注意到式中的∇算符作用于$\vec{r}$，与$\vec{r}'$无关

$$\nabla\times[\vec{j}(\vec{r}')\frac{1}{r}]=-\vec{j}(\vec{r}')\times\nabla(\frac{1}{r})$$

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\iiint\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{r}\mathrm{d}V'=\nabla\times\vec{A}$$

由此表示了磁矢势$\vec{A}$：

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{r}\mathrm{d}V'$$

由此可以看出：

$$\nabla\cdot\vec{B}=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$$

另一个式子：

$$\nabla\times\vec{B}=\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$$

$$\nabla\cdot\vec{A}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\nabla'\cdot[\vec{j}(\vec{r}')\frac{1}{r}]\mathrm{d}V'+\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}')\mathrm{d}V'$$

第一项可以通过Stokes公式化为面积分，由于积分区域已包含所有电流，没有电流通过界面S，故第一项为0；第二项由于恒定电流的连续性也为0，故第二项也等于0，有

$$\nabla\cdot\vec{A}=0$$

$$-\nabla^2\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\vec{j}(\vec{r}')\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V'$$

当$r\neq 0$时，此式始终为0，考虑在$\vec{r}'$点处的情形

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{j}(\vec{r})\iiint\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V'=-\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{j}(\vec{r})\oiint\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\mathrm{d}\vec{S}'=\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{j}(\vec{r})\oiint\frac{1}{r^2}\cdot\mathrm{d}S'$$

而

$$\oiint\frac{1}{r^2}\mathrm{d}S'=\oiint\mathrm{d}\Omega=4\pi$$

从而

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}$$

需注意，$\nabla\cdot\vec{B}=0$在一般变化磁场下也成立，$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}$只在恒定情况下成立。

Faraday电磁感应定律

$$\mathcal{E}=\oint\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$
$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

感应电场是有旋场。

Maxwell位移电流 假设存在一个j_D满足：

$$\nabla\cdot(\vec{j}+\vec{j_D})=0$$

考虑电荷守恒定律，可以得到

$$\vec{j_D}=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Maxwell方程组 （真空中）

$$\begin{cases}\oiint\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint\rho_e\mathrm{d}V\\ \oint\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\iint\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\mathrm{d}\vec{S}\\ \oiint\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0\\ \oint\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0\iint\vec{j}\mathrm{d}\vec{S}+\mu_0\varepsilon_0\iint\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\mathrm{d}\vec{S}\end{cases}\qquad\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}\\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{cases}$$

电荷和电流可以激发电磁场，变化的电场和磁场也可以互相激发。

电磁场可以独立于电荷之外而存在。

Lorentz力公式

$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}$$
$$\vec{f}=\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B}$$

1.2 电介质和磁介质

电介质

极化强度$\vec{P}=\sum\frac{\vec{p}_i}{\Delta V}$

$$-\oiint \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\iiint \rho_p \mathrm{d}V \qquad \rho_p=-\nabla\cdot\vec{P}$$

$$\mathrm{d}Q_+ = nq\vec{l}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=-\mathrm{d}Q_- = -\rho_p\mathrm{d}V$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_p\mathrm{d}S=-(\vec{P}_2-\vec{P}_1)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

若$\nabla\cdot\vec{P}=0$，为均匀极化，$\rho_p=0$，极化电荷仅在表面

$$\nabla\cdot(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})=\rho_f$$

电位移矢量：$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$
$\vec{E}$的源是总电荷分布，是电场的基本物理量；
$\vec{D}$的源是自由电荷，只是一个辅助物理量。

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f$$

对于线性介质，有

$$\boxed{\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E},\quad \vec{D}=\varepsilon\vec{E},\quad \varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0,\quad \varepsilon_r=1+\chi_e}$$

磁介质

磁化强度$\vec{M}=\sum\frac{\vec{m}_i}{\Delta V}$

$$\oint \vec{M}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\iint \vec{j}_M\cdot\mathrm{d}\vec{S} \qquad \vec{j}_M=\nabla\times\vec{M}$$
$$\vec{j}_p=\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$$

$$I_M=\oint ni\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint\vec{M}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\iint\vec{j}_M\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B}=\vec{j}_f+\vec{j}_M+\vec{j}_p+\vec{j}_D$$

磁场强度：$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$
$\vec{B}$描述所有电流分布激发的场，是基本物理量；
$\vec{H}$并不代表介质内的场强，只是一个辅助物理量。

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

对于线性介质，有

$\vec{M}=\chi_m\vec{H},\quad \vec{B}=\mu\vec{H},\quad \mu=\mu_r\mu_0,\quad \mu_r=1+\chi_m$

介质中的Maxwell方程组

$$\begin{cases}\oiint \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iiint\rho\mathrm{d}V\\ \oint\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\iint\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\mathrm{d}\vec{S}\\ \oiint\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0\\ \oint\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\iint\vec{j}\mathrm{d}\vec{S}+\iint\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\mathrm{d}\vec{S}\end{cases}\quad\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho\\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases}\quad\begin{cases}\vec{D}=\varepsilon\vec{E}\\ \vec{B}=\mu\vec{H}\\ \vec{j}=\sigma\vec{E}\end{cases}$$

真空中，在无源区实施对偶变换（$\vec{E}=c\vec{B}'$, $\vec{B}=\frac{1}{c}\vec{E}'$），保持不变。

边值关系

对于边界处，应当用Maxwell方程组的积分形式处理

def: $\Delta I=\vec{\alpha}\cdot\Delta\vec{l}$

$$\begin{cases}\vec{e_n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma_f\\ \vec{e_n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0\\ \vec{e_n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0\\ \vec{e_n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha_f}\end{cases}$$

同样还有：

$$\vec{e_n}\cdot\varepsilon_0(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=\sigma_f+\sigma_p$$
$$\vec{e_n}\times(\vec{B}_2-\vec{B}_1)/\mu_0=\vec{\alpha_f}+\vec{\alpha_M}$$

1.3 场的性质

电磁场的能量和能流

$$p=\vec{f}\cdot\vec{v}=(\rho\vec{E}+\rho\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v}=\vec{j}\cdot\vec{E}$$

利用Maxwell方程组，将$\vec{j}$替换

$$=(\nabla\times\vec{H})\cdot\vec{E}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot\vec{E}$$

$$=-\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})+(\nabla\times\vec{E})\cdot\vec{H}$$

再次利用Maxwell方程组

$$=-\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot\vec{E}-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{H}$$

能流密度（Poynting矢量）：$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$

能量密度变化率：$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{H}$

场对电荷系统做的功为$\iiint \vec{f}\cdot\vec{v}\mathrm{d}V$，体积$V$内，场的能量增加率为$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint w\mathrm{d}V$，通过界面$\vec{\sigma}$流入$V$内的能量为$-\oiint \vec{S}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}$。

有能量守恒

$$-\oiint \vec{S}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma} = \iiint \vec{f}\cdot\vec{v}\mathrm{d}V + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint w\mathrm{d}V$$
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint w\mathrm{d}V - \oiint \vec{S}\mathrm{d}\vec{\sigma}$$

Exercise 1.1 电容器充电/放电时的能量

Exercise 1.2 导线传导时的能量（导线外侧电荷线密度λ）

电磁场动量

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B} = \varepsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} + (\nabla\times\vec{H} - \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})\times\mu_0\vec{H}$$

利用另外两个方程，将其写为对称形式

$$= \varepsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} + \varepsilon_0(\nabla\times\vec{E})\times\vec{E} + \mu_0(\nabla\cdot\vec{H})\vec{H} + \mu_0(\nabla\times\vec{H})\times\vec{H} - \mu_0\varepsilon_0(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{H} + \vec{E}\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t})$$

利用矢量公式，有

$$(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} + (\nabla\times\vec{E})\times\vec{E} = (\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} + (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E} - \frac{1}{2}\nabla E^2$$

$$= \nabla\cdot(\vec{E}\vec{E}^T) - \frac{1}{2}\nabla E^2$$

电磁场的动量密度：$\vec{g} = \frac{1}{c^2}\vec{S}$
动量流密度张量：$\mathcal{T} = -\varepsilon_0\vec{E}\vec{E}^T - \mu_0\vec{H}\vec{H}^T + \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)\mathbb{E}$

由以上可得：

$$\vec{f} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathcal{T}$$
$$\iiint \vec{f} \mathrm{d}V + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint \vec{g} \mathrm{d}V = -\oiint \mathrm{d}\vec{S} \cdot \mathcal{T}$$

即电磁场和电荷的动量守恒。张量$\mathcal{T}$的分量T_{ij}的意义是通过垂直于i轴的单位面积流过的动量j分量。

II 静态场

2. 静电场

在静止的情况下，电场与磁场无关。

2.1 静电场理论

由静电场中的Maxwell方程组，

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases}$$

根据场论公式，不妨设

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

于是，可以得到Poisson方程

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

当$\rho = 0$时，就变为Laplace方程：$\nabla^2 \varphi = 0$

电势φ 只有两点的电势差有物理意义，一点处的电势绝对数值是没有意义的。

$$\varphi(P) = \int_P^\infty \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

参考点的选择是任意的，**在电荷分布于有限区域的情况下**，常选无穷远点作为参考点。

电荷不是有限区域的分布可能会造成积分后电势无穷大。

边值条件的转化

介质中：

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ -(\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}) = \sigma \end{cases}$$

导体中：

$$\begin{cases} \varphi = \text{Const.} \\ \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

1. 导体内部不带净电荷，电荷只能分布于导体表面。
2. 导体内部电场为0。
3. 导体表面上电场必沿法线方向，导体表面为等势面，整个导体是等势体。

静电场的能量

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\iiint \vec{D}\cdot\vec{E}\mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2}\iiint \vec{D}\cdot(-\nabla\varphi)\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\iiint[-\nabla\cdot(\varphi\vec{D}) + \varphi\nabla\cdot\vec{D}]\mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2}\iiint \rho\varphi\mathrm{d}V - \oiint \varphi\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \end{aligned}$$

由于面积分遍及无穷远处，有$\varphi\sim\frac{1}{r}$，$D\sim\frac{1}{r^2}$，$S\sim r^2$，故$r\to\infty$时面积分趋于0。

$$= \frac{1}{2}\iiint \rho\varphi\mathrm{d}V$$

该式仅为静电场情形的能量

积分只需遍及电荷分布区域V，W是静电场总能量才有意义，$\frac{1}{2}\rho\varphi$不是能量密度。

唯一性定理 可均匀分区的区域V，每一均匀区域的电容率为ε_i，V内有给定的自由电荷分布$\rho(x)$，则在均匀区域V_i内$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_i}$，在分界面上$\varphi_i = \varphi_j$，$\varepsilon_i(\frac{\partial\varphi}{\partial n})_i - \varepsilon_j(\frac{\partial\varphi}{\partial n})_j = \sigma$。

则在V的边界上给定$\varphi|_S$或$\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S$，$V$内电场就唯一地确定。

可以这样简单地进行考虑：假设存在两组不同的解φ'和φ''，设$\varphi = \varphi' - \varphi''$，则：

$$\nabla^2\varphi' = -\frac{\rho}{\varepsilon_i},\ \nabla^2\varphi'' = -\frac{\rho}{\varepsilon_i} \quad\Rightarrow\quad \nabla^2\varphi = 0$$

这样，根据边值条件，有：

$$\begin{aligned} &\varphi|_S = \varphi'|_S - \varphi''|_S = 0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S = \frac{\partial\varphi'}{\partial n}|_S - \frac{\partial\varphi''}{\partial n}|_S = 0 \\ &\oint_{S_i}\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi\ \cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint\varepsilon_i(\nabla\varphi)^2\mathrm{d}V + \iiint\varphi\varepsilon_i\nabla^2\varphi\mathrm{d}V = \iiint_{V_i}\varepsilon_i(\nabla\varphi)^2\mathrm{d}V \\ &\sum\oint_{S_i}\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi\ \cdot\mathrm{d}\vec{S} = \sum_i\iiint_{V_i}\varepsilon_i(\nabla\varphi)^2\mathrm{d}V = 0 \\ &\nabla\varphi = 0 \quad\Rightarrow\quad \varphi' - \varphi'' = \text{Const.} \end{aligned}$$

若有导体存在时，需要条件

I. 每个导体上的电势φ_i

II. 每个导体上的总电荷Q_i

情况I：与没有导体的情况类似

情况II：给定导体之外的电荷分布ρ，给定各导体上的总电荷Q_i以及V的边界S上的φ或$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$的值，则$V$内的电场唯一地确定。可以这样简单地进行考虑：假设存在两组不同的解φ'和φ''，设$\varphi = \varphi' - \varphi''$，则：

$$\nabla^2\varphi = 0, \quad -\oint_{S_i}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S = 0, \quad \varphi|_{S_i} = \mathrm{Const.}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi|_S = 0, \ \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S = 0$$

$$\oint \varphi\nabla\varphi\mathrm{d}\vec{S} = \iiint(\nabla\varphi)^2\mathrm{d}V = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla\varphi = 0$$

2.2 求解静电场的方法

2.2.1 镜像法

i. 满足的方程和边界条件
ii. 设想镜像电荷Q'替代感应电荷或极化电荷
iii. 原电荷和像电荷共同激发φ
iv. 由电场方程和边界条件确定Q'大小和位置
v. 讨论解的物理意义

2.2.2 分离变量法

i. 按照表面或界面选择合适的坐标系
ii. 分区域列出方程，写出通解
iii. 列出边界条件和边值关系
iv. 根据边界条件或边值关系，确定待定系数
v. 讨论其物理意义

边界条件：

a. 原点无电荷，$\varphi|_{r\to 0}$有限
b. 电荷分布在有限区域，$\varphi|_{r\to\infty} = 0$
c. 均匀电场，不能$\varphi = 0$选无穷远点，$\varphi = E_0 z + C$
d. $Q = -\iint \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S$

2.2.3 Green函数法*

2.2.4 电多极矩

将函数进行Taylor展开：

$$f(\vec{R}-\vec{r}') = f(\vec{R}) + (-\vec{r}')\cdot\nabla f(\vec{R}) + \frac{1}{2!}(-\vec{r}')^T\cdot\nabla(\nabla f(\vec{R})^T)\cdot(-\vec{r}') + \dots$$

令$f(\vec{r}) = \frac{1}{r}$，$\vec{r} = \vec{R} - \vec{r}'$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + (-\vec{r}')\cdot\nabla(\frac{1}{R}) + \frac{1}{2!}(-\vec{r}')^T\cdot\nabla(\nabla(\frac{1}{R})^T)\cdot(-\vec{r}') + \dots$$

于是有

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\rho\mathrm{d}V'[\frac{1}{R}+(-\vec{r}')\cdot\nabla(\frac{1}{R})+\frac{1}{2!}(-\vec{r}')^T\cdot\nabla(\nabla(\frac{1}{R})^T)\cdot(-\vec{r}')+\ldots]$$

令

$$Q=\iiint\rho\mathrm{d}V\qquad\vec{p}=\iiint\rho\vec{r}'\mathrm{d}V\qquad\mathcal{D}=3\iiint\vec{r}'\rho\vec{r}'^T\mathrm{d}V$$

可以将电势展开为

$$\varphi=\varphi^{(0)}+\varphi^{(1)}+\varphi^{(2)}+\ldots$$

$\varphi^{(0)}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$是在原点的点电荷$Q$激发的电势，即将电荷体系看做集中于原点处。

$\varphi^{(1)}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$是电偶极矩$\vec{p}$产生的势。

$\varphi^{(2)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\mathcal{D}:\nabla(\nabla(\frac{1}{R})^T)$是电四极矩$\mathcal{D}$产生的势。

重新定义电四极矩张量：

$$\mathcal{D}=\iiint(3\vec{r}'\vec{r}'^T-r'^2\mathbb{E})\rho\mathrm{d}V$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{tr}\mathcal{D}=0$$

$\mathcal{D}$中只有5个独立变量

如果体系电荷分布对原点对称，则电偶极矩为0；若为球对称电荷分布，电四极矩为0，电四极矩的出现标志着电荷分布对球对称的偏移。

电荷体系的能量

$$W=\iiint\rho\varphi\mathrm{d}V=Q\varphi(0)+\vec{p}\cdot\nabla\varphi(0)+\frac{1}{6}\mathcal{D}:\nabla(\nabla\varphi(0)^T)+\ldots$$

$W^{(0)}=Q\varphi(0)$是设想电荷集中于原点上时在外场中的能量。

$W^{(1)}=-\vec{p}\cdot\nabla\varphi(0)=-\vec{p}\cdot\vec{E}(0)$是体系的电偶极矩在外场中的能量。

$W^{(2)}=-\frac{1}{6}\mathcal{D}:\nabla(\nabla\varphi(0)^T)$是电四极子在外场中的能量。

由$W^{(1)}$可以得到电偶极子在外场中受到的力$\vec{F}$和力矩$\vec{L}$

$$\vec{F}=-\nabla W^{(1)}=(\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}$$

$$L_\theta=-\frac{\partial W^{(1)}}{\partial\theta}=-pE\sin\theta$$

$$\Rightarrow\quad \vec{L}=\vec{p}\times\vec{E}$$

3. 静磁场

在静止的情况下，电场与磁场无关。

3.1 静磁场理论

由静电场中的Maxwell方程组，

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} \end{cases}$$

根据场论公式，不妨设

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

磁场无源性的体现：通过一个曲面的磁通量只和边界∂S有关，而和曲面的具体形状无关。
磁矢势$\vec{A}$ 只有$\vec{A}$的环量有物理意义，$\vec{A}$沿任一闭合回路的环量代表通过以该回路为界的任一曲面的磁通量。
为确定磁矢势$\vec{A}$，加以规范条件

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

若取规范条件$\nabla \cdot \vec{A} = 0$，可以将方程化为

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{j}$$

这样方程有类似于静电势方程的解

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}}{r} \mathrm{d}V' \qquad \vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \oint \frac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

边值条件的转化 选取规范$\nabla \cdot \vec{A} = 0$

介质中：

$$\begin{cases} \vec{A}_1 = \vec{A}_2 \\ \vec{e}_n \times (\frac{1}{\mu_2}\nabla \times \vec{A}_2 - \frac{1}{\mu_1}\nabla \times \vec{A}_1) = \alpha \end{cases}$$

静磁场的能量

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\iiint \vec{B}\cdot\vec{H}\mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2}\iiint (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{H}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\iiint [\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H}) + \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{H})]\mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2}\iiint \vec{A}\cdot\vec{j}\mathrm{d}V + \oiint (\vec{A}\times\vec{H})\cdot\mathrm{d}\vec{S} \end{aligned}$$

由于面积分遍及无穷远处，有$A\sim\frac{1}{r}$，$H\sim\frac{1}{r^2}$，$S\sim r^2$，故$r\to\infty$时面积分趋于0。

$$= \frac{1}{2}\iiint \vec{A}\cdot\vec{j}\mathrm{d}V$$

积分只需遍及电流分布区域V，W是静磁场总能量才有意义，$\frac{1}{2}\vec{A}\cdot\vec{j}$不是能量密度。
矢势$\vec{A}$是电流分布$\vec{j}$激发的，$\vec{j}$在外场$\vec{A}_e$的相互作用能$W_i = \iiint \vec{j}\cdot\vec{A}_e\mathrm{d}V$

3.2 求解静磁场的方法

3.2.1 磁标势ψ

区域内没有自由电流分布，可引入标势ψ，磁偶极子$\rho_m = -\mu_0\nabla\cdot\vec{M}$
电场与磁场情形的类比

静电场	静磁场
$\nabla\times\vec{E} = 0$	$\nabla\times\vec{H} = 0$
$\nabla\cdot\vec{E} = (\rho_f+\rho_p)/\varepsilon_0$	$\nabla\cdot\vec{H} = \rho_m/\mu_0$
$\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P}$	$\rho_m = -\mu_0\nabla\cdot\vec{M}$
$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$	$\vec{B} = \mu_0\vec{H}+\mu_0\vec{M}$
$\vec{E} = -\nabla\varphi$	$\vec{H} = -\nabla\psi$

求解的过程类比静电场情形

3.2.2 磁多极矩

如果电流分布于小区域内，且距离场点较远用Taylor展开的方法

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \vec{j}\mathrm{d}V'[\frac{1}{R} + (-\vec{r}')\cdot\nabla(\frac{1}{R}) + \frac{1}{2!}(-\vec{r}')^T\cdot\nabla(\nabla(\frac{1}{R})^T)\cdot(-\vec{r}') + \ldots]$$

由恒定电流的连续性，有$\vec{A}^{(0)} = 0$，即不含磁单极项。

$$\vec{A}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \vec{j}(\vec{r}'\cdot\nabla(\frac{1}{R}))\mathrm{d}V' = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \vec{r}'\cdot\nabla(\frac{1}{R})\mathrm{d}\vec{l}'$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \vec{r}' \cdot \frac{\vec{R}}{R^3}\mathrm{d}\vec{l}'$$

而$\mathrm{d}\vec{r}' = \mathrm{d}\vec{l}'$，于是有

$$0 = \oint \mathrm{d}[(\vec{r}' \cdot \vec{R})\vec{r}'] = \oint (\vec{r}' \cdot \vec{R})\mathrm{d}\vec{l}' + \oint (\mathrm{d}\vec{l}' \cdot \vec{R})\vec{r}'$$

令

> 电流线圈磁矩$\vec{m} = \frac{I}{2}\oint \vec{r}' \times \mathrm{d}\vec{l}'$
> $\Delta\vec{S} = \frac{1}{2}\oint \vec{r}' \times \mathrm{d}\vec{l}'$
> $\vec{m} = I\Delta\vec{S}$

有

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \times \vec{R}}{R^3}$$

据此可以计算出磁偶极矩的场和标势

$$\vec{B}^{(1)} = \nabla \times \vec{A}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi}(\vec{m} \cdot \nabla)\frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$\vec{B}^{(1)} = -\mu_0 \nabla \psi^{(1)}$$

$$\psi^{(1)} = \frac{\vec{m} \cdot \vec{R}}{4\pi R^3}$$

电流分布在外磁场中的能量 W_i、W_e为自能，W_ie为相互作用能

$$W_m = W_i + W_e + W_{ie}$$

若保持电流I和I_e不变，有

$$\mathrm{d}W = \frac{1}{2}(I\mathrm{d}\Phi_e + I_e\mathrm{d}\Phi)$$

$$\mathrm{d}\Phi = I_e\mathrm{d}M, \quad \mathrm{d}\Phi_e = I\mathrm{d}M$$

式中的M为互感系数。故有

$$\mathrm{d}W_i + \mathrm{d}W_e = -2\mathrm{d}W_{ie}$$

$$\mathrm{d}W_m = -\mathrm{d}W_{ie} = -\mathrm{d}(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

于是有

$$W_m = -\vec{m} \cdot \vec{B}_e$$

$$\vec{F} = -\nabla W_m = (\vec{m} \cdot \nabla)\vec{B}_e$$

$$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}$$

3.3 Aharonov-Bohm效应

当螺线管不通电时，有相位差$\Delta\varphi_0$

当螺线管通电时，相位差$\Delta\varphi$，此时波函数应用正则动量（$\vec{P}=\vec{p}+q\vec{A}$）描述

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \Delta\varphi_0 - \frac{e}{\hbar}\oint\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l} \\ &= \Delta\varphi_0 - \frac{e}{\hbar}\Phi\end{aligned}$$

A-B效应表明，仅用$\vec{B}$来描述磁场是不够的，而用$\vec{A}$来描述磁场又过多了。能够完全恰当地描述磁场中的物理量是相因子$\exp(\mathrm{i}\frac{e}{\hbar}\oint\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l})$，对于单连通区域，相因子描述等价于$\vec{B}$的描述；对于非单连通区域，不能用$\vec{B}$来描述。

3.4 超导理论*

超导体 超导体的基本现象：

1. 超导电性 不同材料有不同的临界温度。
2. 临界磁场 当外磁场增大到某一临界值时，超导电性将受到破坏。(此曲线亦为相变曲线）
3. Meissner效应 材料处于超导态时，随着进入超导体内部深度增加磁场迅速衰减，可以认为超导体内部$\vec{B}=0$，超导体的抗磁性与其所经历的过程无关。
4. 临界电流 电流达到某个临界值时，超导体将从超导态转变为正常态。
5. 第一类和第二类超导体 第一类超导体存在一个临界磁场H_c；第二类超导体存在两个临界磁场$H_{c1}<H_{c2}$，当$H<H_{c1}$时，处于超导态；当$H_{c1}<H<H_{c2}$时，磁场以量子化磁通线的形式进入导体内，处于超导态和正常态并存的混合态；当$H_{c2}<H$时，处于正常态。
6. 第一类复连通超导体和第二类超导体，磁通量只能是基本值的整数倍$\Phi_0=\frac{h}{2e}$。(一个Cooper对）

London唯象理论*

III 动态场

4. 电磁波的传播

4.1 简单的电磁波理论

波动方程

考虑没有电荷和电流的空间

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D}=0 \\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

这里考虑简单、无色散的介质，即ε_r和μ_r只是简单的数，不是张量。

将这些方程联立，可以得到

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{E}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0 \\ \nabla^2\vec{B}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0 \end{cases}$$

这里的电磁波速度$v=c/n$，$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$，$n=\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$

电场和磁场可以脱离电荷和电流存在，具有波动性、物质性

i. 波动方程的形式预言了电磁波的存在；
ii. 电磁波以光速传播，统一了电和磁、电磁学和光学，光是电磁波；
iii. 若无电磁场的变化，变为Laplace方程，假定全空间成立，$\vec{E}=\vec{B}=0\ (\vec{r}\to\infty)$，表明恒定条件下场和源之间的关系，无源无场。

在介质情形中，ε和μ随频率变而变，称为色散，不能推出$\vec{E}$和$\vec{B}$的一般波动方程。

时谐电磁波 以一定频率作正弦振荡的波

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r})e^{-\mathrm{i}\omega t} \qquad \vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}(\vec{r})e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

将它们代入Maxwell方程组，发现Maxwell方程组中只有两个独立的方程

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E}=\mathrm{i}\omega\mu\vec{H} \\ \nabla\times\vec{H}=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\vec{E} \end{cases}$$

可以将两式联立，得到Helmholtz方程

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0 \\ \nabla\cdot\vec{E}=0 \\ \vec{B}=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}(\nabla\times\vec{E}) \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla^2\vec{B}+k^2\vec{B}=0 \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \vec{E}=-\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu\varepsilon}(\nabla\times\vec{B}) \end{cases} \quad k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

平面电磁波

设电磁波沿z轴方向传播，$\vec{E}$与$\vec{B}$仅与z、t有关，与x，y无关
可以将Helmholtz方程化为一维的常微分方程，容易解出一个解

$$\vec{E}(z)=\vec{E}_0e^{\mathrm{i}kz}$$

对于一般的传播方向，我们可以写成

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0e^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

考虑到条件$\nabla\cdot\vec{E}=0$，有

$$\nabla\cdot\vec{E}=\vec{E}_0\cdot\nabla e^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}=\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{E}$$

于是有

$$\vec{k}\cdot\vec{E}=0$$

同样可以取旋度

$$\nabla\times\vec{E}=\mathrm{i}\times\vec{E}$$

代入Helmholtz方程，得到

$$\vec{B}=\sqrt{\mu\varepsilon}\hat{\vec{k}}\times\vec{E}$$

进而可以得到

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|}=v$$

考虑电场和磁场的能量

$$w=\frac{1}{2}(\vec{D}\cdot\vec{E}+\vec{B}\cdot\vec{H})=\frac{1}{2}(\varepsilon E^2+\mu H^2)$$

不难看出$\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}\mu H^2$，即电场能量和磁场能量相等。

i. 电磁波为横波，$\vec{E}$和$\vec{B}$均与传播方向垂直；
ii. $\vec{E}$和$\vec{B}$相互垂直，$\vec{S}$沿$\vec{k}$方向；
iii. $\vec{E}$和$\vec{B}$同相，振幅比为v；
iv. 电场能量和磁场能量相等。
能量密度的平均值$\bar{w}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}\mu H^2$
能流密度的平均值$\bar{S}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^*\times\vec{H})=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2\hat{\vec{k}}$

4.2 介质中的简单理论

电磁波在介质界面上的反射和折射

边值条件中只有两个独立的方程

$$\begin{cases} \vec{e}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \vec{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha} \end{cases}$$

入射波、反射波和折射波的频率相同

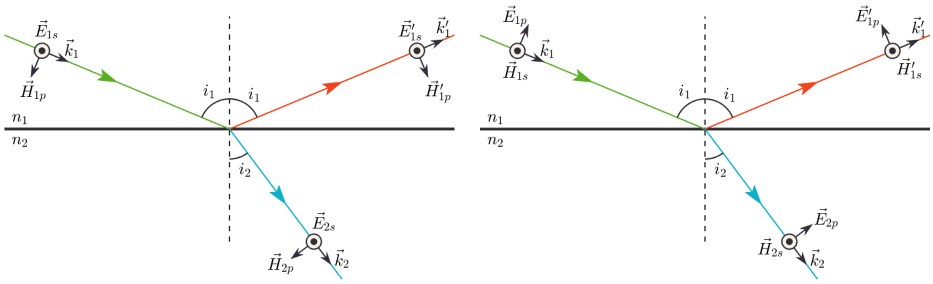
光传播的基本规律

1. **光的直线传播** 光在均匀介质中沿直线传播
2. **光的反射定律** $i = \gamma$
3. **光的折射定律** $\frac{\sin i}{\sin \gamma} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$

Fresnel公式

振动方向垂直于入射面称为s态；振动方向在入射面之内称为p态。

$\vec{E}$为s态、$\vec{H}$为p态的波称为TE波；$\vec{H}$为s态、$\vec{E}$为s态的波称为TM波。



(a) TE波 (b) TM波

图 4.1: TE与TM波。

对于TE波，考虑边界条件，有

$$\begin{cases} E_{1s} + E'_{1s} = E_{2s} \\ -H_{1p}\cos i + H'_{1p}\cos i = -H_{2p}\cos\gamma \end{cases}$$

考虑电场和磁场之间的关系

$$H = \frac{n}{\mu_0 c} E$$

代入，解得

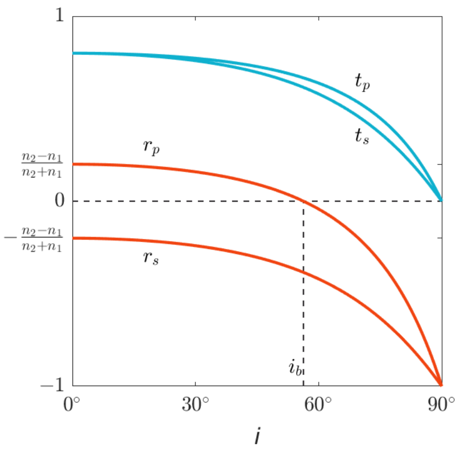
$$\begin{cases} r_s = \frac{n_1\cos i - n_2\cos\gamma}{n_1\cos i + n_2\cos\gamma} \\ t_s = \frac{2n_1\cos i}{n_1\cos i + n_2\cos\gamma} \end{cases}$$

式中$r_s=\frac{E'_{1s}}{E_{1s}}$称为s光的振幅反射率，$t_s=\frac{E_{2s}}{E_{1s}}$称为s光的振幅透射率。
同理，对于TM波，可以解得

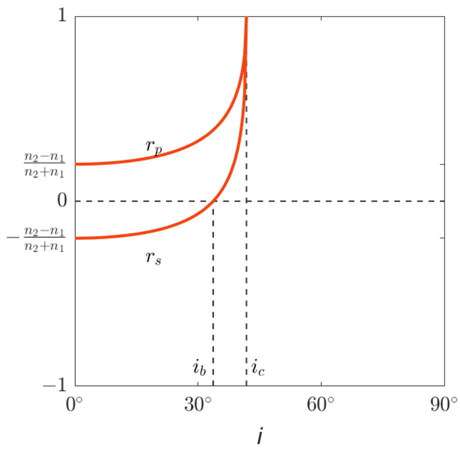
$$\begin{cases} r_p=\frac{n_2\cos i-n_1\cos\gamma}{n_2\cos i+n_1\cos\gamma} \\ t_p=\frac{2n_1\cos i}{n_2\cos i+n_1\cos\gamma} \end{cases}$$

式中$r_p=\frac{E'_{1p}}{E_{1p}}$称为p光的振幅反射率，$t_p=\frac{E_{2p}}{E_{1p}}$称为p光的振幅透射率。
根据折射公式，消去上式中的γ

$$\begin{cases} r_s=\frac{\cos i-\sqrt{n_{21}^2-\sin^2 i}}{\cos i+\sqrt{n_{21}^2-\sin^2 i}} \\ t_s=\frac{2\cos i}{\cos i+\sqrt{n_{21}^2-\sin^2 i}} \\ r_p=\frac{n_{21}^2\cos i-\sqrt{n_{21}^2-\sin^2 i}}{n_{21}^2\cos i+\sqrt{n_{21}^2-\sin^2 i}} \\ t_p=\frac{2n_{21}\cos i}{n_{21}^2\cos i+\sqrt{n_{21}^2-\sin^2 i}} \end{cases}$$



(a) 外反射（$n_{21}>1$）



(b) 内反射（$n_{21}<1$）

图 4.2: 反射及折射时的振幅比。

Brewster角

考虑一个特殊的角度能使$r_p=0$，不难解出

$$\tan i_b=n_{21}=\frac{n_2}{n_1}$$

该角度称为Brewster角。

全反射临界角

对于内反射（$n_2<n_1$），存在一特殊角度，使得$r_s=r_p=1$，不难解出

$$\sin i_c=n_{21}=\frac{n_2}{n_1}$$

该角度称为全反射临界角。

反射光的光强与能流比

s光的光强反射率

$$R_s=\frac{I'_{1s}}{I_{1s}}=\frac{n_1|E'_{1s}|^2}{n_1|E_{1s}|^2}=|r_s|^2$$

p光的光强反射率

$$R_p=\frac{I'_{1p}}{I_{1p}}=\frac{n_1|E'_{1p}|^2}{n_1|E_{1p}|^2}=|r_p|^2$$

s光的光强透射率

$$T_s=\frac{I_{2s}}{I_{1s}}=\frac{n_2|E_{2s}|^2}{n_1|E_{1s}|^2}=\frac{n_2}{n_1}|r_s|^2$$

p光的光强透射率

$$T_p=\frac{I_{2p}}{I_{1p}}=\frac{n_2|E_{2p}|^2}{n_1|E_{1p}|^2}=\frac{n_2}{n_1}|r_p|^2$$

注意！这些不是能量，当然不守恒

考虑照射面积，这样能量$W=I\cdot S_\perp$

s光的能流反射率

$$\mathcal{R}_s=\frac{W'_{1s}}{W_{1s}}=\frac{I'_{1s}}{I_{1s}}=R_s$$

p光的能流反射率

$$\mathcal{R}_p=\frac{W'_{1p}}{W_{1p}}=\frac{I'_{1p}}{I_{1p}}=R_p$$

s光的能流透射率

$$\mathcal{T}_s=\frac{W_{2s}}{W_{1s}}=\frac{I_{2s}\cos\gamma}{I_{1s}\cos i}=\frac{\cos\gamma}{\cos i}T_s$$

p光的能流透射率

$$\mathcal{T}_p=\frac{W_{2p}}{W_{1p}}=\frac{I_{2p}\cos\gamma}{I_{1p}\cos i}=\frac{\cos\gamma}{\cos i}T_p$$

电磁波存在于界面附近的一薄层内，层厚度$\sim\kappa^{-1}$

反射波与入射波具有相同振幅，但有一定的相位差，反射波平均能流密度数值上和入射波平均能流密度相等，瞬时能流值不同。透射光永远与入射光同相。

对于内反射而言，当入射角大于Brewster角时（全反射情形），可以求得s光和p光的相移：

$$\begin{cases}\delta_s=-2\arctan\frac{\sqrt{\sin^2 i-n_{21}^2}}{\cos i}\\ \delta_p=-2\arctan\frac{\sqrt{\sin^2 i-n_{21}^2}}{n_{21}^2\cos i}\end{cases}$$

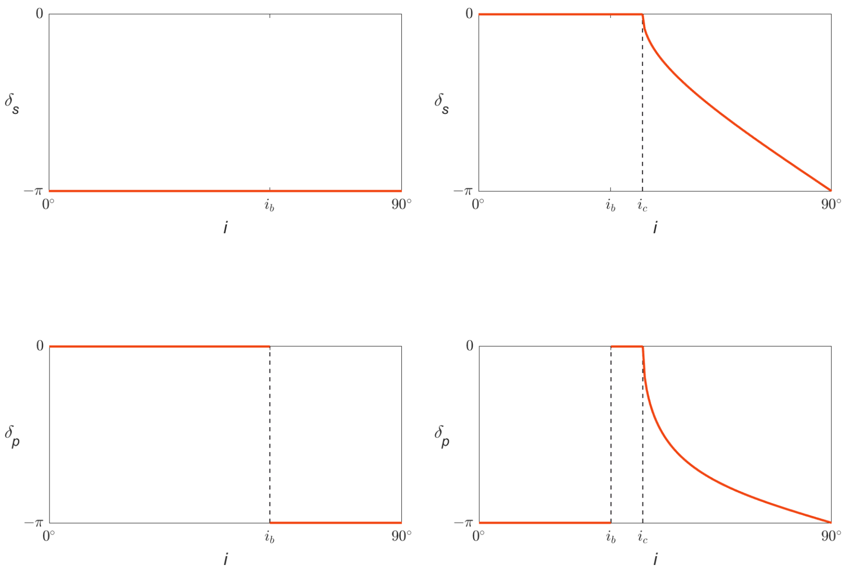


图 4.3: 反射引起的附加相移。

4.3 有导体存在时的传播

良导体条件

$$\varepsilon(\nabla\cdot\vec{E})=\rho$$

有Ohm定律

$$\vec{j}=\sigma\vec{E}$$

代入，并考虑电荷守恒定律

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\nabla\cdot\vec{j}=-\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho$$

解之得

$$\rho(t)=\rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

衰减周期$\tau=\frac{\varepsilon}{\sigma}$

只要电磁波的频率满足$\omega\ll\tau^{-1}$，就认为$\rho(t)=0$，即良导体条件

$$\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\gg 1$$

复电容率

对于有一定频率的电磁波，考虑Helmholtz方程

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=\mathrm{i}\omega\mu\vec{H}\\ \nabla\times\vec{H}=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\vec{E}+\sigma\vec{E}\end{cases}$$

令复电容率$\varepsilon' = \varepsilon + \mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega}$

其实部使位移电流与电场有$\pi/2$的相位差，虚部使能量耗散。

进而波矢$\vec{k}$为复矢量，$\vec{k} = \vec{\beta} + \mathrm{i}\vec{\alpha}$，实部描述波的传播关系，虚部描述波幅衰减，对比，可以得到

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2\mu\varepsilon \\ \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \frac{1}{2}\omega\mu\sigma \end{cases}$$

趋肤效应

对于良导体，垂直入射，$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$均沿z方向

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}[\frac{1}{2}(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}+1)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}[\frac{1}{2}(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1)]^{\frac{1}{2}}$$

考虑良导体条件，有$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$

穿透深度$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$，对于高频的电磁波，电磁场以及和它相互作用的高频电流只集中于表面的一薄层内。

现在求磁场与电场的关系

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega\mu}\vec{k}\times\vec{E} \approx \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\vec{e_n}\times\vec{E}$$

$$\frac{\sqrt{\mu}|\vec{H}|}{\sqrt{\varepsilon}|\vec{E}|} = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} \gg 1$$

磁场相位比电场滞后$\pi/4$，磁场的作用更为明显。

导体表面上的反射

考虑边值条件

$$E_1 + E_1' = E_2,\ H_1 - H_1' = H_2$$

考虑良导体条件，将磁场的边值条件转化为电场的

$$\frac{E_1'}{E_1} = -\frac{1+\mathrm{i}-\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}{1+\mathrm{i}+\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}$$

反射系数$R = \frac{|E_1'|}{|E_1|}$

$$R = \frac{(1-\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}})^2+1}{(1+\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}})^2+1} \approx 1 - 2\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}$$

良导体条件下，反射系数接近于1。

导体中电磁波传播特点

i. 垂直入射时，$\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}[\frac{1}{2}(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}+1)]^{\frac{1}{2}}$，$v=\frac{\omega}{\beta}$，$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}$

ii. $\vec{E}$、$\vec{B}$、$\vec{k}$相互垂直

iii. $\vec{E}$、$\vec{B}$相位不同，磁场相位滞后$\pi/4$

iv. $W_m\gg W_e$，良导体条件下

v. 趋肤效应及导体表面上的反射

4.4 应用举例

4.4.1 谐振腔

能产生高频电磁振荡的中空金属腔

理想金属一侧$\vec{E_1}=\vec{H_1}=0$，真空一侧$\vec{e_n}\times\vec{E}=0$，$\vec{e_n}\times\vec{H}=0$。

电场方向与界面垂直，磁场方向与界面平行。

设u为$\vec{E}$或$\vec{H}$的任一分量，谐振腔由平面$x=0$，$y=0$，$z=0$，$x=L_1$，$y=L_2$，$z=L_3$围成有$\nabla^2u+k^2u=0$，分离变量$u=X(x)Y(y)Z(z)$

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}+k_x^2X=0\\ \frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}+k_y^2Y=0\\ \frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}+k_z^2Z=0\end{cases}\qquad k_x^2+k_y^2+k_z^2=\omega^2\mu\varepsilon$$

有驻波解

$$u(x,y,z)=(C_{1x}\cos k_xx+C_{2x}\sin k_xx)(C_{1y}\cos k_yy+C_{2y}\sin k_yy)(C_{1z}\cos k_zz+C_{2z}\sin k_zz)$$

再考虑边界条件，例如E_x，有

$$\begin{cases}\frac{\partial E_x}{\partial x}=0 & x=0\\ E_x=0 & y=0,z=0\end{cases}$$

对其他分量有类似的考虑，再考虑$x=L_1$，$y=L_2$，$z=L_3$面上的边界条件，即驻波要求，有

$$\begin{cases}E_x=A_1\cos k_xx\sin k_yy\sin k_zz\\ E_y=A_2\sin k_xx\cos k_yy\sin k_zz\\ E_z=A_3\sin k_xx\sin k_yy\cos k_zz\end{cases}\quad k_x=\frac{l\pi}{L_1},\ k_y=\frac{m\pi}{L_2},\ k_z=\frac{n\pi}{L_3}.\ l,m,n\in\mathbb{N}$$

l,m,n分别代表沿矩形三边所含的半波数目

由$\nabla\cdot\vec{E}=0$，常量满足关系$k_xA_1+k_yA_2+k_zA_3=0$，即A_1、A_2、A_3只有两个是独立的

谐振腔的本征频率ω

$$\omega_{lmn}=\frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{(\frac{l}{L_1})^2+(\frac{m}{L_2})^2+(\frac{n}{L_3})^2}$$

4.4.2 波导

低频电力传输可以用同轴传输线；频率更高时，内导线热损耗严重，改用波导代替。波导是一根空心金属管，截面通常为矩形或圆形，波导的传输适用于微波范围。

矩形波导中的电磁波 波导内壁面为$x=0$，$y=0$，$x=a$，$y=b$围成的曲面，z轴沿传输方向

$$\vec{E}(x,y,z)=\vec{E}(x,y)e^{\mathrm{i}k_z z}$$

设u为$\vec{E}$或$\vec{H}$的任一分量，分离变量$u(x,y)=X(x)Y(y)$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}+k_x^2X=0 \\ \frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}+k_y^2Y=0 \end{cases} \qquad k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2$$

有驻波解

$$u(x,y,z)=(C_{1x}\cos k_x x+C_{2x}\sin k_x x)(C_{1y}\cos k_y y+C_{2y}\sin k_y y)$$

考虑边界条件

$$\begin{cases} E_y=E_z=0, \frac{\partial E_x}{\partial x}=0 & x=0,a \\ E_x=E_z=0, \frac{\partial E_y}{\partial y}=0 & y=0,b \end{cases}$$

再考虑$x=a$和$y=b$上的边界条件，即驻波要求，有

$$\begin{cases} E_x=A_1\cos k_x x\sin k_y y e^{\mathrm{i}k_z z} \\ E_y=A_2\sin k_x x\cos k_y y e^{\mathrm{i}k_z z} \\ E_z=A_3\sin k_x x\sin k_y y e^{\mathrm{i}k_z z} \end{cases} \qquad k_x=\frac{m\pi}{a},\ k_y=\frac{n\pi}{b}.\ m,n\in\mathbb{N}$$

m,n分别代表沿矩形两边所含的半波数目

由$\nabla\cdot\vec{E}=0$，常量满足关系$k_xA_1+k_yA_2-\mathrm{i}k_zA_3=0$，即$A_1$、$A_2$、$A_3$只有两个是独立的

如果$E_z=0$，则$H_z=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}(\nabla\times\vec{E})_z=\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu}(A_2k_y-A_1k_x)\sin k_x x\sin k_y y e^{\mathrm{i}k_z z}\neq 0$

电场和磁场不能同时为横波，不能是TEM波，是TM、TE波的混合体

管截面的几何尺寸决定了波模的(m,n)数以及k_x、k_y的值，如果$k<\sqrt{k_x^2+k_y^2}$，则k_z变为虚数，沿z轴方向振幅不断衰减，能够在波导内传播的波的最低频率ω_c称为该波模的截止频率。

$$\omega_{c,mn}=\frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{(\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2}$$

$$\lambda_c=\frac{2}{\sqrt{(\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2}}$$

TE_{10}波的电磁场和管壁电流

$m=1$，$n=0$，$k_x=\pi/a$，$k_y=0$。对于TE波有$E_z=0$

$$A_3=0,\ A_1=0,\ A_2=\frac{\mathrm{i}\omega\mu a}{\pi}H_0$$

$$\begin{cases} H_z = H_0 \cos\frac{\pi x}{a} \\ E_y = \frac{\mathrm{i}\omega\mu a}{\pi} H_0 \sin\frac{\pi x}{a} \\ H_x = -\frac{\mathrm{i}k_z a}{\pi} H_0 \sin\frac{\pi x}{a} \\ E_x = E_z = H_y = 0 \end{cases}$$

Exercise 4.1 证明不存在$\mathrm{TM}_{\mathrm{m0}}$或$\mathrm{TM}_{\mathrm{0n}}$波 ■

Exercise 4.2 尝试用$\vec{H}$来表示波导中的电磁波 ■

5. 电磁波的辐射

本章不考虑介质体系

5.1 d'Alembert方程

电磁场的标势和矢势

根据Maxwell方程组，我们考虑电场的新形式

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

i. $\vec{E}$不再是保守力场，φ失去电场中势能的意义，高频系统中电压也失去确切的意义
ii. 在变化场中，磁场和电场是相互作用着的整体，必须把矢势和标势作为一个整体来描述电磁场

规范变换

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi, \;\; \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

势作规范变换时，所有的物理量和物理规律都应该保持不变—— 规范不变性

Coulomb规范

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

$\vec{E}$的无旋部分用φ描述，无源场部分用$\vec{A}$描述
$-\nabla\varphi$对应Coulomb场，$-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$对应感生电场

Lorenz规范

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

有简单的对称形式，物理意义也较明显，在相对论中显示协变性

d'Alembert方程

若采用**Coulomb**规范，有

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi=-\mu_0\vec{j} \\ \nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla\cdot\vec{A}=0 \end{cases}$$

若采用**Lorenz**规范，有

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{j} \\ \nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \end{cases}$$

Exercise 5.1 用平面电磁波的势来比较两种规范

5.2 推迟势

设原点处有一假想的变化电荷，$\rho=Q(t)\delta(\vec{r})$，则

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}Q(t)\delta(\vec{r})$$

考虑球对称性，用球坐标表示

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}Q(t)\delta(\vec{r})$$

$\vec{r}\neq 0$时，满足波动方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0$$

考虑为球面波，作代换

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{u(\vec{r},t)}{r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

解出

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{f(t-\frac{r}{c})}{r}+\frac{g(t+\frac{r}{c})}{r}$$

第一项代表向外发射的球面波，第二项代表向内收敛的球面波

如果电荷不在原点，对于一般变化电荷分布$\rho(\vec{r}',t-\frac{r}{c})$、$\vec{j}(\vec{r}',t-\frac{r}{c})$有

$$\begin{cases} \varphi(\vec{r},t)=\iiint\frac{\rho(\vec{r},t-\frac{r}{c})}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}V' \\ \vec{A}(\vec{r},t)=\iiint\frac{\vec{j}(\vec{r},t-\frac{r}{c})}{4\pi/\mu_0 r}\mathrm{d}V' \end{cases}$$

推迟势的意义　反映了❶电磁作用具有一定的传播速度，❷光速是电磁作用的传播速度，❸不存在瞬时的超距作用

推迟势的多级展开

设$\vec{j}(\vec{r}',t)=\vec{j}(\vec{r}')e^{-\mathrm{i}\omega t}$，有$\vec{A}(\vec{r},t)=\vec{A}(\vec{r})e^{-\mathrm{i}\omega t}$

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\vec{j}(\vec{r}')e^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}V'$$

在一定频率的交变电流情形中有

$$\mathrm{i}\omega\rho=\nabla\cdot\vec{j}$$

据此，有了矢势$\vec{A}$，就可以根据Maxwell方程组完全确定电磁场

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\qquad\vec{E}=\frac{\mathrm{i}c}{k}\nabla\times\vec{B}$$

取小区域，线度$l\ll\lambda$。

(1) 近区$r\ll\lambda$，$e^{ikr}\sim 1$，恒定场；

(2) 感应区$r\sim\lambda$；

(3) 远区$r\gg\lambda$，横向辐射场。

r是从源点$\vec{r}'$到场点$\vec{r}$的距离，R为原点到场点的距离

$$r=R-\vec{e_R}\cdot\vec{r}'$$

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\vec{j}(\vec{r}')e^{\mathrm{i}k(R-\vec{e_R}\cdot\vec{r}')}}{R-\vec{e_R}\cdot\vec{r}'}\mathrm{d}V'$$

分母中的小量可以忽略，但相因子中的不可忽略

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0 e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\iiint\vec{j}(\vec{r}')(1-\mathrm{i}k\vec{e_R}\cdot\vec{r}'+\ldots)\mathrm{d}V'$$

计算时，可以将∇算符和对时间的偏导算符作用在相因子上，即

$$\nabla\to\mathrm{i}k\vec{e_R}\qquad\frac{\partial}{\partial t}\to-\mathrm{i}\omega$$

5.3 电磁波辐射

5.3.1 电偶极辐射

$$\vec{A}^{(0)}(\vec{r})=\frac{\mu_0 e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\iiint\vec{j}(\vec{r}')\mathrm{d}V'$$

$$\vec{j}=\sum_i n_i q_i \vec{v}_i$$

$$\iiint \vec{j}(\vec{r}')\mathrm{d}V'=\sum q\vec{v}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum q\vec{l}=\dot{\vec{p}}$$

$$\vec{A}^{(0)}(\vec{r})=\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\dot{\vec{p}}$$
$$\vec{B}=\frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}\ddot{\vec{p}}\times\vec{e_R}$$
$$\vec{E}=\frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}(\ddot{\vec{p}}\times\vec{e_R})\times\vec{e_R}$$

若$\vec{p}$沿z轴方向

$$\vec{B}=\frac{e^{ikR}}{4\pi/\mu_0 cR}\ddot{\vec{p}}\cos\varphi\vec{e_\theta}$$
$$\vec{E}=\frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}\ddot{\vec{p}}\cos\varphi\vec{e_\varphi}$$

$\vec{B}$总是横向的，沿纬线方向，$\vec{E}$沿经线方向，$\vec{E}$线必须闭合($\nabla\cdot\vec{E}=0$)，但$\vec{E}$不可能完全横向，只有略去$1/R$高次项后，$\vec{E}$才近似为横向，是空间中的TEM波。

$$\bar{\vec{S}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^*\times\vec{H})$$

$$\bar{\vec{S}}=\frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 R^2}\cos^2\varphi\vec{e_R}$$

$$P=\oiint|\bar{\vec{S}}|R^2\mathrm{d}\Omega=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{3c^3}$$

辐射功率正比于ω的4次方

5.3.2 高阶项展开

$$\vec{A}^{(1)}=-\frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\iiint\vec{j}(\vec{r}')(\vec{e_R}\cdot\vec{r}')\mathrm{d}V'$$

对于连续闭合电流环，不带净电荷，线圈上有振荡电流，产生磁多极辐射

对于四个导体球体系，在四个导体上交替出现正负电荷，产生电四极辐射

$$\iiint\vec{j}(\vec{r}')(\vec{e_R}\cdot\vec{r}')\mathrm{d}V'=\frac{1}{2}\iiint[\vec{j}(\vec{e_R}\cdot\vec{r}')+(\vec{j}\cdot\vec{e_R})\vec{r}']\mathrm{d}V'+\frac{1}{2}\iiint[\vec{j}(\vec{e_R}\cdot\vec{r}')-(\vec{j}\cdot\vec{e_R})\vec{r}']\mathrm{d}V'$$

$$\frac{1}{2}\iiint[\vec{j}(\vec{e_R}\cdot\vec{r}')-(\vec{j}\cdot\vec{e_R})\vec{r}']\mathrm{d}V'=-\frac{1}{2}\vec{e_R}\times\iiint(\vec{r}'\times\vec{j})\mathrm{d}V'=-\vec{e_R}\times\vec{m}$$

$$\frac{1}{2}\iiint[\vec{j}(\vec{e_R}\cdot\vec{r}')+(\vec{j}\cdot\vec{e_R})\vec{r}']\mathrm{d}V'=\frac{1}{2}\sum q[\vec{v}(\vec{e_R}\cdot\vec{r}')+(\vec{v}\cdot\vec{e_R})\vec{r}']$$

而$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$

$$=\frac{1}{6}\vec{e_R}\cdot\dot{\mathcal{D}}$$

于是磁矢势的一级展开可以写成

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{r})=-\frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}(-\vec{e_R}\times\vec{m}+\frac{1}{6}\vec{e_R}\cdot\dot{\mathcal{D}})$$

5.3.3 磁偶极辐射

取$\vec{A}^{(1)}$中的磁偶极项

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mathrm{i}k\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\vec{e_R} \times \vec{m}$$
$$\vec{B} = \frac{e^{ikR}}{4\pi/\mu_0 c^2 R}(\ddot{\vec{m}} \times \vec{e_R}) \times \vec{e_R}$$
$$\vec{E} = -\frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}(\ddot{\vec{m}} \times \vec{e_R})$$

若$\vec{m}$沿z轴方向

$$\vec{B} = \frac{e^{ikR}}{4\pi/\mu_0 c^2 R}\ddot{\vec{m}}\cos\varphi\vec{e_\varphi}$$
$$\vec{E} = -\frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}(\ddot{\vec{m}}\cos\varphi\vec{e_\theta}$$

$$\bar{\vec{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^* \times \vec{H})$$

$$\bar{\vec{S}} = \frac{|\ddot{\vec{m}}|^2}{32\pi^2/\mu_0 c^3 R^2}\cos^2\varphi\vec{e_R}$$

$$P = \oiint |\bar{\vec{S}}|R^2\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{4\pi/\mu_0}\frac{|\ddot{\vec{m}}|^2}{3c^3}$$

辐射功率正比于ω的4次方

5.3.4 电四极辐射

取$\vec{A}^{(1)}$中的电四极项

取$\mathcal{D}(\vec{e_R}) = \vec{e_R}\cdot\mathcal{D}$

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{r}) = -\frac{\mathrm{i}k\mu_0 e^{ikR}}{24\pi R}\dot{\mathcal{D}} = \frac{e^{ikR}}{24\pi\varepsilon_0 c^3 R}\ddot{\mathcal{D}}$$
$$\vec{B} = \frac{e^{ikR}}{4\pi/\mu_0 c^2 R}\dddot{\mathcal{D}} \times \vec{e_R}$$
$$\vec{E} = \frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}(\dddot{\mathcal{D}} \times \vec{e_R}) \times \vec{e_R}$$

$$\bar{\vec{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^* \times \vec{H})$$

$$\bar{\vec{S}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{288\pi c^5 R^2}(\dddot{\mathcal{D}} \times \vec{e_R})^2\vec{e_R}$$

辐射角分布比较复杂，这里不做计算。

5.4 天线辐射

天线上的电流分布：取天线沿z轴，天线表面的电流$\vec{J}$沿z轴方向，$\vec{A}$仅有z分量

当天线的长度远小于λ时，沿天线上的电流分布近似为线性形式

当天线长度与λ同级时，沿天线表面，$A_z(z)$是一种波动的形式

短天线辐射 $l \ll \lambda$

沿天线的上的电流分布近似为线性形式

$$I(z) = I_0(1 - \frac{2}{l}|z|), \ |z| \le l/2$$

$$P = \frac{\mu_0 I_0^2 \omega^2 l^2}{48\pi c} = \frac{\pi}{12}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} I_0^2 (\frac{l}{\lambda})^2$$

辐射功率相当于一个等效电阻上的损耗功率$P = \frac{1}{2} R_L I_0^2$

$$R_L = \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}(\frac{l}{\lambda})^2$$

半波天线*

$$I(z) = I_0 \sin k(\frac{l}{2} - |z|), \ |z| \le l/2$$

6. 带电粒子和电磁场的相互作用*

注：本章的基本理论建议先了解狭义相对论的基础知识。

6.1 运动带电粒子的势*

6.2 Черенков辐射*

6.3 电磁波的散射和吸收*

6.3.1 电磁波的散射

6.3.2 电磁波的吸收

6.3.3 介质的色散

IV

狭义相对论

7. 狭义相对论

7.1 相对论的基本原理

i. 相对性原理：物理规律对于所有的惯性参考系都可以表示成相同形式

ii. 光速不变原理：真空中的光速相对于任何惯性系沿任一方向恒为c，与光源运动无关

7.2 Lorenz变换

条件：坐标变换必须是线性的；空间是均匀的，各向同性的，时间是均匀的

考虑沿x轴方向的运动，即$y'=y$，$z'=z$

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

可以求出其逆变换

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} a_{44} & -a_{14} \\ -a_{41} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}$$

①Σ系中Σ'系中的O'点

$$x'=0 \quad \Rightarrow \quad a_{11}x + a_{14}t = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{t} = -\frac{a_{14}}{a_{11}} = v$$

$$\Rightarrow \quad a_{14} = -va_{11}$$

②Σ'系中Σ系中的O点

$$x=0 \quad \Rightarrow \quad a_{44}x' - a_{14}t' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x'}{t'} = \frac{a_{14}}{a_{44}} = -v$$

$$\Rightarrow \quad a_{44} = a_{11}$$

③光速不变原理

$$\begin{cases} x = ct \\ x' = ct' \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ct' = (a_{11}c + a_{14})t \\ t' = (a_{41}c + a_{44})t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a_{41} = \frac{1}{c^2}a_{14} = -\frac{v}{c^2}a_{11}$$

④相对性原理（$v \to -v$，逆变换）

$$D = a_{11}a_{44} - a_{14}a_{41} = 1$$

令$\beta = \frac{v}{c}$

$$D = a_{11}^2(1-\beta^2) = 1$$

$$\Rightarrow \quad a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$$

于是解得

$$a_{11} = \gamma,\ a_{14} = -v\gamma,\ a_{41} = -\frac{v}{c^2}\gamma,\ a_{44} = \gamma$$

即

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -v\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v}{c^2}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

其逆变换的形式只需要将矩阵中的v改为$-v$即可（相对性原理）

间隔不变性

$$s^2 = c^2t^2 - (x^2+y^2+z^2), \quad s'^2 = c^2t'^2 - (x'^2+y'^2+z'^2)$$

$$s'^2 = s^2,\ \Delta s'^2 = \Delta s^2$$

间隔的划分$r^2 = x^2+y^2+z^2$，r事件的空间距离，划分不因参考系而转变

两事件可以用光波联系	$r = ct$	$s^2 = 0$	事件在光锥上	类光间隔	
两事件可以用低于光速作用联系	$r < ct$	$s^2 > 0$	事件在光锥内	类时间隔	因果不可颠倒
两事件的空间距离超过光波在时间t内所能传播的距离	$r > ct$	$s^2 < 0$	事件在光锥外	类空间隔	非因果联系

因果关系是绝对的（$t_2 > t_1$）

$$t_2'^2 - t_1'^2 = \gamma[(t_2-t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2-x_1)]$$

若保持因果关系，则有$t_2' > t_1'$设$|x_2-x_1| = u(t_2-t_1)$

$$uv < c^2 \quad \Rightarrow \quad u < c, v < c$$

真空中光速c是物质运动的最大速度，也是一切相互作用传播的极限速度

同时的相对性 具有类空间隔的两事件，由于不可能发生因果关系，其时间次序的先后或同时，都没有绝对意义，若两事件对Σ同时，对Σ'不同时。

Exercise 7.1 运动尺度的缩短

■

Exercise 7.2 运动时钟的延缓 Σ'系是物体的静止坐标系

在Σ中看Σ'系中的运动时钟变慢，在Σ'系中看Σ系中的时钟同样变慢

■

双生子佯谬 当一个时钟绕闭合路径作加速运动最后返回原地，它所经历的总时间小于在原地静止时钟所经历的时间（非惯性系，狭义相对论不可解释）

速度变换公式

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad u_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad u_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

$$u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'},\quad u'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'},\quad u'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}$$

将诸量的微分求出，代入得

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-\frac{vu_x}{c^2}},\quad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{vu_x}{c^2}},\quad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{vu_x}{c^2}}$$

7.3 四维形式

三维空间中的正交变换 $\vec{x}' = A\vec{x}$，A为正交矩阵物理量的分类

(1) 标量 $u' = u$，在空间中没有取向关系，当坐标系转动时，这些量保持不变

(2) 矢量 $\vec{v}' = A\vec{v}$

(3) 二阶张量 $\mathcal{T} = A\mathcal{T}A^T$

Lorenz变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ \mathrm{i}ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \mathrm{i}ct \end{pmatrix}$$

这里我们引入一个变换矩阵

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\beta\gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}$$

该矩阵是Hermite的，满足$\mathcal{A}^{-1}=\mathcal{A}^T$

四维协变量 在Lorenz变换下不变的物理量称为Lorenz标量或不变量，物理量在Lorenz变换下具有确定的变换性质，称为协变量。

物理规律的协变性 在参考系变换下，方程形式不变的性质称为协变性

Lorenz标量举例

间隔$\mathrm{d}s^2=-\sum \mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x_\mu$、固有时$\mathrm{d}\tau=\frac{1}{c}\mathrm{d}s$，$\mathrm{d}t=\gamma\mathrm{d}\tau$

速度$u_i=\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}$，适用于参考系$\Sigma$的时间量度的位移变化率

四维速度矢量$\mathcal{U}_i=\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau}$，适用于固有时量度的位移变化率

$$\mathcal{U}=\gamma_u(u_1,u_2,u_3,\mathrm{i}c)^T$$

相位是一个不变量$\varphi=\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t$

7.3.1 相对论电动力学

实验表明，带电粒子的电荷与它运动的速度无关，即Q是一个Lorenz标量

$$Q=\iiint\rho\mathrm{d}V=\mathrm{Const.}$$

体积尺缩效应$\mathrm{d}V=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\mathrm{d}V_0$ 电荷密度增大$\rho=\gamma_u\rho_0$ 四维电流密度矢量

$$\vec{j}=\rho\vec{u}$$

引入第四个分量$\mathcal{J}_4=\mathrm{i}c\rho$

$$\mathcal{J}=(\vec{j},\mathrm{i}c\rho)$$

电荷守恒定理表示为

$$\sum_\mu\frac{\partial\mathcal{J}_\mu}{\partial\mathcal{X}_\mu}=0$$

由d'Alembert方程中Lorenz规范形式，引入

$$\mathcal{A}=(\vec{A},\frac{\mathrm{i}}{c}\varphi)$$

将Lorenz规范改写为

$$\sum_\mu\frac{\partial\mathcal{A}_\mu}{\partial\mathcal{X}_\mu}=0$$

引入记号

$$\Box\equiv\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial\mathcal{X}_\mu}\frac{\partial}{\partial\mathcal{X}_\mu}$$

则d'Alembert方程写为

$$\Box\mathcal{A}=-\mu_0\mathcal{J}$$

由矢势和标势引入电磁场张量矩阵元

$$\mathcal{F}_{mn}=\frac{\partial\mathcal{A}_n}{\partial\mathcal{X}_m}-\frac{\partial\mathcal{A}_m}{\partial\mathcal{X}_n}$$

得

$$\mathcal{F}=\begin{pmatrix}0 & B_3 & -B_2 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_1\\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_2\\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_3\\ \frac{\mathrm{i}}{c}E_1 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_2 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_3 & 0\end{pmatrix}$$

由此将Maxwell方程组写为两对

$$\begin{cases}\sum\frac{\partial\mathcal{F}_{mn}}{\partial\mathcal{X}_n}=\mu_0\mathcal{J}_m\\ \sum\frac{\partial\mathcal{F}_{mn}}{\partial\mathcal{X}_l}+\frac{\partial\mathcal{F}_{nl}}{\partial\mathcal{X}_m}+\frac{\partial\mathcal{F}_{lm}}{\partial\mathcal{X}_n}=0\end{cases}$$

同样可以进行参考系变换，用Lorenz变换矩阵进行运算即可

7.3.2 相对论力学

四维动量矢量

利用速度四维矢量来定义四维动量矢量

$$\mathcal{P}=m_0\mathcal{U},\quad \vec{p}=\gamma m_0\vec{v},\quad \mathcal{P}_4=\frac{\mathrm{i}}{c}\gamma m_0c^2$$

设$v\ll c$，将$\mathcal{P}_4$展开

$$\mathcal{P}_4=\frac{\mathrm{i}}{c}(m_0c^2+\frac{1}{2}m_0v^2+\dots)$$

物体静止时具有能量$E_0=m_0c^2$，相对论中物体的动能

$$T=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-m_0c^2$$

总能量$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

质能关系

结合能：一组粒子构成复合物的总能量一般不等于所有粒子静止质量之和

$$\Delta W=\sum_i m_{i0}c^2-W_0$$

质量亏损：物体的质量亦不等于组成它的各粒子静止质量之和

$$\Delta W=\Delta m_0c^2$$

引入$m=\gamma m_0$，m称为运动质量，不是不变量，m_0是Lorenz标量

$$\vec{p}=m\vec{v},\ E=mc^2$$

根据这些不难推出以下关系

$$E_0=m_0c^2,\ E=mc^2,\ p=mv,\ m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

则有关系：

$$E^2=E_0^2+p^2c^2$$

将上面的表达式代入不难验证。

相对论力学方程

四维力矢量$\mathcal{K}$

$$\mathcal{K}=\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}\tau},\quad \vec{K}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}\tau},\quad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\tau}=\vec{K}\cdot\vec{v},\quad \mathcal{K}_4=\frac{\mathrm{i}}{c}\vec{K}\cdot\vec{v}$$

$$\mathcal{K}=(\vec{K},\frac{\mathrm{i}}{c}\vec{K}\cdot\vec{v})$$

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t},\ \vec{F}\cdot\vec{v}=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t},\ \mathrm{d}t=\gamma\mathrm{d}\tau$$

$$\vec{K}=\gamma\vec{F}$$

Lorenz力

$$f_4=\frac{\mathrm{i}}{c}\vec{j}\cdot\vec{E}$$

$$f=\mathcal{F}\mathcal{J}$$

还可以定义一个电磁场能量动量张量，它可以表示为：

$$\mathbb{T}=\begin{pmatrix}\mathcal{T} & \mathrm{i}\frac{\vec{S}}{c}\\ \mathrm{i}\frac{\vec{S}^T}{c} & -w\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{K}=-\frac{\partial\mathbb{T}}{\partial\mathcal{X}}$$

Exercise 7.3 带电粒子在均匀恒定磁场中的运动

7.3.3 电磁场中带电粒子的Hamilton量和Lagrange量

对于自由粒子情形，粒子的状态由速度决定，作用量$S=\int L\mathrm{d}t=\int\gamma L\mathrm{d}\tau$是一个不变量。由此$\gamma L$是一个Lorenz不变量，当$v\ll c$时，上式趋于非相对论的动能，由此得到

$$L=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

考虑作用量$S=\int L\mathrm{d}t$ 在电磁场中的作用量将有如下形式

$$S=\int(L_0\mathrm{d}t+q\mathcal{A}\cdot\mathrm{d}\mathcal{X})=\int(L_0\mathrm{d}t+q\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r}-q\varphi\mathrm{d}t)=\int(L_0+q\vec{A}\cdot\vec{v}-q\varphi)\mathrm{d}t$$

令Lagrange量

$$L=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+q\vec{A}\cdot\vec{v}-q\varphi$$

广义动量

$$\vec{P}=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}=\vec{p}+q\vec{A}$$

式中的$\vec{p}$是粒子的普通动量，Hamilton量不应用速度表示，而应该用广义动量表示。

$$H=\sqrt{m^2c^4+c^2(\vec{P}-q\vec{A})^2}+q\varphi$$

对于低速情况，即在经典力学的近似下，可以求出Hamilton量

$$H=\frac{1}{2m}(\vec{P}-q\vec{A})^2+q\varphi$$

之后在量子力学当中，我们只需要将**广义动量**化作$-i\hbar\nabla$即可

下面利用这些来推导电场和磁场的表达式

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=q\nabla(\vec{A}\cdot\vec{v})-q\nabla\varphi$$

由矢量分析公式可得（注意q_α和$\dot{q}_\alpha$的独立性）

$$=q(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}+q\vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})-q\nabla\varphi$$

代入Lagrange方程，注意

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\sum_\alpha\frac{\partial\vec{A}}{\partial q_\alpha}\frac{\partial q_\alpha}{\partial t}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=q(-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})+q\vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})$$

这正是Lorenz力的表示形式，于是不难看出

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

可以从这个角度入手推出电动力学的各种方程，这正是Ландау的思路。
这些内容则参考Ландау的《Теория Поля》。

A. 场论常用公式

A.1 场论算符

$$\nabla\varphi = \textbf{grad}\ \varphi$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \textbf{div}\ \vec{A}$$

$$\nabla\times\vec{A} = \textbf{rot}\ \vec{A}$$

球坐标系(r,φ,θ)下的公式：

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e_\varphi} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e_\theta}$$

$$\nabla\cdot\vec{f} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_r) + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\varphi f_\varphi) + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\theta}f_\theta$$

$$\nabla\times\vec{f} = \frac{1}{r^2\cos\varphi}\begin{vmatrix} \vec{e_r} & r\vec{e_\varphi} & r\cos\varphi\vec{e_\theta} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial\theta} \\ f_r & rf_\varphi & r\cos\varphi f_\theta \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial\varphi}) + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$$

一般曲线正交坐标系下的公式：

$$\nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\vec{e_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\vec{e_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\vec{e_3}$$

$$\nabla\cdot\vec{f} = \frac{1}{h_1h_2h_3}[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3f_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1f_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2f_3)]$$

$$\nabla\times\vec{f} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{e_1} & h_2\vec{e_2} & h_3\vec{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1f_1 & h_2f_2 & h_3f_3 \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1h_2h_3}[\frac{\partial}{\partial u_1}(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}) + \frac{\partial}{\partial u_2}(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}) + \frac{\partial}{\partial u_3}(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3})]$$

A.2 ∇算符公式

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$$

$$\nabla \cdot (\varphi\vec{f}) = (\nabla\varphi) \cdot \vec{f} + \varphi\nabla \cdot \vec{f}$$

$$\nabla \times (\varphi\vec{f}) = (\nabla\varphi) \times \vec{f} + \varphi\nabla \times \vec{f}$$

$$\nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) = (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{g} - \vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{g})$$

$$\nabla \times (\vec{f} \times \vec{g}) = (\vec{g} \cdot \nabla)\vec{f} + (\nabla \cdot \vec{g})\vec{f} - (\vec{f} \cdot \nabla)\vec{g} - (\nabla \cdot \vec{f}) \cdot \vec{g}$$

$$\nabla(\vec{f} \cdot \vec{g}) = \vec{f} \times (\nabla \times \vec{g}) + (\vec{f} \cdot \nabla)\vec{g} + \vec{g} \times (\nabla \times \vec{f}) + (\vec{g} \cdot \nabla)\vec{f}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{f}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{f}) - \nabla^2\vec{f}$$

以下默认向量为列向量，用矩阵乘法的运算规则。

$$\nabla\vec{A} = \vec{i}(\frac{\partial\vec{A}}{\partial x})^T + \vec{j}(\frac{\partial\vec{A}}{\partial y})^T + \vec{k}(\frac{\partial\vec{A}}{\partial z})^T$$

$$\nabla \cdot \mathcal{T} = \frac{\partial}{\partial x}(\vec{j} \cdot \mathcal{T}) + \frac{\partial}{\partial y}(\vec{k} \cdot \mathcal{T}) + \frac{\partial}{\partial z}(\vec{i} \cdot \mathcal{T})$$

$$\nabla \times \mathcal{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{i} \cdot \mathcal{T} & \vec{j} \cdot \mathcal{T} & \vec{k} \cdot \mathcal{T} \end{vmatrix}$$

B. 电磁学单位制

B.1 常用单位制

B.1.1 MKSA有理制

基本量：长度(m)，质量(kg)，时间(s)，电流强度(A)
力的单位N，$1\ \mathrm{N} = 10^5\ \mathrm{dyn}$。

B.1.2 Gauss单位制

B.1.2.1 CGSE单位制

基本量：长度(cm)，质量(g)，时间(s)。电荷量(e.s.u.)
对于真空中的Coulomb定律$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$，令$k = 1$，当具有相同电量的$(q_1 = q_2)$两个静止的点电荷在真空中相距1 cm、相互作用为1 dyn时，每个电荷的电量为1 e.s.u.。

B.1.2.2 CGSM单位制

基本量：长度(cm)，质量(g)，时间(s)。电流强度(e.m.u.)
对于真空中两根无限长平行载流导线，其相互作用$F = k\frac{2lI_1 I_2}{a}$，令$k = 1$，当两根无限长平行细导线相距2 cm时，相同的电流$(I_1 = I_2)$时，若使得每1 cm导线长度上所受的力恰为1 dyn，则每根导线中通过的电流强度为1 e.m.u.。

B.1.2.3 Gauss单位制

(1)所有的电学量都用CGSE单位制，所有的磁学量都用CGSM单位制。

(2)ε和μ都是量纲为1的纯数，ε_0和μ_0都等于1。ε_r和μ_r在MKSA和CGSE中的数值相同。

(3)在同时包含电学量和磁学量的公式中，比例系数不能任意选取，只能由实验测定。这些比例系数实质上是两种单位制相应单位的换算系数。

(4)Gauss单位制只有三个基本量，可能会造成量纲上的混乱（电容C、电感L都是长度单位）

(5)Gauss单位制中与电荷有关的公式都比较简单，且较多地出现光速c；MKSA有理制使得常用的公式中不出现4π，即"有理制"名称的由来。

B.2 MKSA有理制和Gauss单位制常用公式对照表

物理量名称	单位名称	量纲
电荷量q	C	TI
电势φ	V	$\mathrm{L^2MT^{-3}I^{-1}}$
电场强度E	V/m或N/C	$\mathrm{LMT^{-3}I^{-1}}$
电位移矢量D	$\mathrm{C/m^2}$	$\mathrm{L^{-2}TI}$
电容C	F	$\mathrm{L^{-2}M^{-1}T^4I^2}$
ε_0	F/m	$\mathrm{L^{-3}M^{-1}T^4I^2}$
电阻R	Ω	$\mathrm{L^2MT^{-3}I^{-2}}$
电导G	S	$\mathrm{L^{-2}M^{-1}T^3I^2}$
电导率σ	S/m	$\mathrm{L^{-3}M^{-1}T^3I^2}$
磁通量Φ	Wb	$\mathrm{L^2MT^{-2}I^{-1}}$
磁矢势A	T·m	$\mathrm{L^{-1}MT^{-2}I^{-1}}$
磁感应强度B	T	$\mathrm{MT^{-2}I^{-1}}$
磁场强度H	A/m	$\mathrm{L^{-1}I}$
电感L	H	$\mathrm{L^2MT^{-2}I^{-2}}$
μ_0	H/m	$\mathrm{LMT^{-2}I^{-2}}$

表 B.1: MKSA有理制中部分量的导出单位

MKSA有理制	Gauss单位制
$\mathcal{A}=(\vec{A},\frac{\mathrm{i}}{c}\varphi)$	$\mathcal{A}=(\vec{A},\mathrm{i}\varphi)$
$\mathcal{J}=(\vec{j},\mathrm{i}c\rho)$	$\mathcal{J}=(\vec{j},\mathrm{i}c\rho)$
$\mathcal{F}=\begin{pmatrix}0 & B_3 & -B_2 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_1\\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_2\\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_3\\ \frac{\mathrm{i}}{c}E_1 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_2 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_3 & 0\end{pmatrix}$	$\mathcal{F}=\begin{pmatrix}0 & B_3 & -B_2 & -\mathrm{i}E_1\\ -B_3 & 0 & B_1 & -\mathrm{i}E_2\\ B_2 & -B_1 & 0 & -\mathrm{i}E_3\\ \mathrm{i}E_1 & \mathrm{i}E_2 & \mathrm{i}E_3 & 0\end{pmatrix}$

表 B.3: MKSA有理制和Gauss单位制常用公式对照表(续表)

MKSA有理制	Gauss单位制
$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$	$F=\frac{q_1q_2}{r^2}$
$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$	$E=\frac{q}{r^2}$
$E=\frac{\sigma_e}{\varepsilon_r\varepsilon_0}$	$E=\frac{4\pi\sigma_e}{\varepsilon_r}$
$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$	$U=\frac{q}{r}$
$C=\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{d}$	$C=\frac{\varepsilon_r S}{4\pi d}$
$\vec{p}=q\vec{l}$	$\vec{p}=q\vec{l}$
$\vec{P}=\sum\frac{\vec{p}}{\Delta V}$	$\vec{P}=\sum\frac{\vec{p}}{\Delta V}$
$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$	$\vec{D}=\vec{E}+4\pi\vec{P}$
$\varepsilon_r=1+\chi_e$	$\varepsilon_r=1+4\pi\chi_e$
$U=IR$	$U=IR$
$\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$	$\vec{F}=q(\vec{E}+\frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B})$
$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}$	$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{1}{c}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}$
$\frac{F}{l}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1I_2}{a}$	$\frac{F}{l}=\frac{1}{c^2}\frac{2I_1I_2}{a}$
$B=\mu_r\mu_0 nI$	$H=\frac{4\pi}{c}\mu_r nI$
$\mathcal{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$	$\mathcal{E}=-\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$
$L=\mu_r\mu_0 n^2V$	$L=4\pi\mu_r n^2V$
$\vec{m}=I\vec{S}$	$\vec{m}=\frac{1}{c}I\vec{S}$
$\vec{M}=\sum\frac{\vec{m}}{\Delta V}$	$\vec{M}=\sum\frac{\vec{m}}{\Delta V}$
$\vec{B}=\mu_0\vec{H}+\mu_0\vec{M}$	$\vec{B}=\vec{H}+4\pi\vec{M}$
$\mu_r=1+\chi_m$	$\mu_r=1+4\pi\chi_m$
$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho\\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases}$	$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=4\pi\rho\\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases}$
$w_e=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$	$w_e=\frac{1}{8\pi}\vec{D}\cdot\vec{E}$
$w_m=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$	$w_m=\frac{1}{8\pi}\vec{B}\cdot\vec{H}$
$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$	$\vec{S}=\frac{c}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{H})$
$\vec{g}=\frac{1}{c^2}(\vec{E}\times\vec{H})$	$\vec{g}=\frac{1}{4\pi c}(\vec{E}\times\vec{H})$
$\begin{cases}\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\\ \vec{B}=\nabla\times\vec{A}\end{cases}$	$\begin{cases}\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\\ \vec{B}=\nabla\times\vec{A}\end{cases}$
$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$	$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$
$\begin{cases}\Box\vec{A}=-\mu_0\vec{j}\\ \Box\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{cases}$	$\begin{cases}\Box\vec{A}=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}\\ \Box\varphi=-4\pi\rho\end{cases}$

表 B.2: MKSA有理制和Gauss单位制常用公式对照表

Bird-eating Cat