Modellierung dynamischer Systeme
Abgabe der Praktikumsaufgabe 1

Maria Lüdemann und Birger Kamp

March 29, 2016

1 Teilaufgabe 1

Die folgende DGL ist gegeben: $y' = 10 - 500y + 5000x$, $y(0) = 1$

Schaltbild

Das Simulink-Schaltbild zu dieser Gleichung ist:

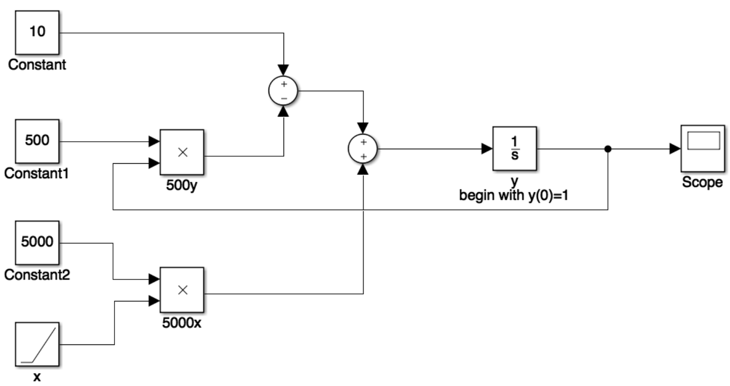

Figure 1: Simulink Schaltbild DGL1

1.1 Iterationsgleichungen

Im Folgenden die Iterationsgleichungen der jeweiligen Verfahren.

1.1.1 Euler-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n + h \tag{1}$$
$$y_{n+1} = y_n + h * f(x_n, y_n) \tag{2}$$
$$y_{n+1} = y_n + h * (10 - 500y_n + 5000x_n) \tag{3}$$

1.1.2 Runge-Kutta-Verfahren 2.Ordnung

$$x_{n+1} = x_n + h \tag{4}$$
$$k_1 = h * f(x_n, y_n) \tag{5}$$
$$k_1 = h * (10 - 500y_n + 5000x_n) \tag{6}$$
$$k_2 = h * f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \tag{7}$$
$$k_2 = h * (10 - 500 * (y_n + \frac{k_1}{2}) + 5000 * (x_n + \frac{h}{2})) \tag{8}$$
$$y_{n+1} = y_n + k_2 \tag{9}$$

1.2 Plot der Lösungen

Im Folgenden sind alle Plots der Ergebnisse der Verfahren dargestellt. Es wird außerdem jeweils die Ergebnis-Differenz eines Verfahrens zur analytischen Lösung gezeigt.

1.2.1 h=0.001

Das Ergebnis zeigt, dass die Verfahren bis x=0.01 sehr ähnliche Ergebnisse liefern und haben eine max. Differenz von ca. 0.12. Danach laufen alle Kurven kongruent.

1.2.2 h=0.003

Das Ergebnis zeigt, dass die Verfahren bis ca. x=0.03 unterschiedliche Ergebnisse liefern. Die Ergebnisse des Runge-Kutta-Verfahrens verlaufen bis ca. x=0.03 nahezu parallel zur analytischen Lösung. In diesem Wertebereich liefert das explizite Euler-Verfahren sehr schwankende Werte. Ab ca. x=0.03 laufen alle Kurven kongruent.

1.2.3 h=0.004

Bis ca. x=0.01 laufen alle Kurven unterschiedlich. Ab dort laufen die Kurven des Runge-Kutta-Verfahrens und der analytischen Lösung kongruent. Während der ganzen Laufzeit liefert das explizite Euler-Verfahren sehr schwankende Werte, die sich mit einer Differenz von +/- 1 in der Nähe der analytischen Lösung befinden.

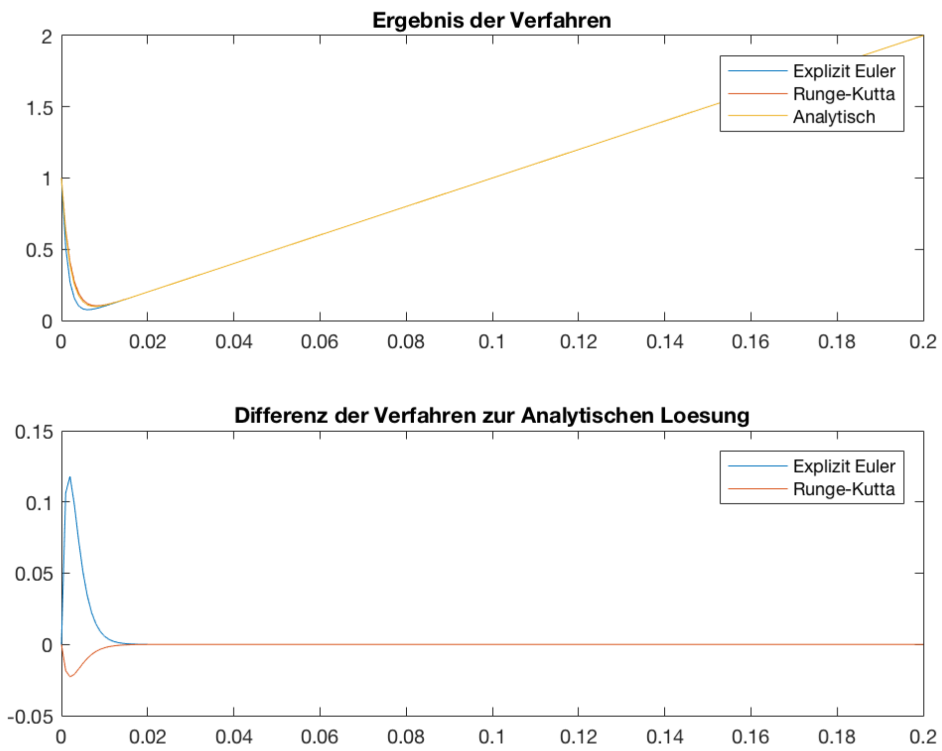

Figure 2: h=0.001

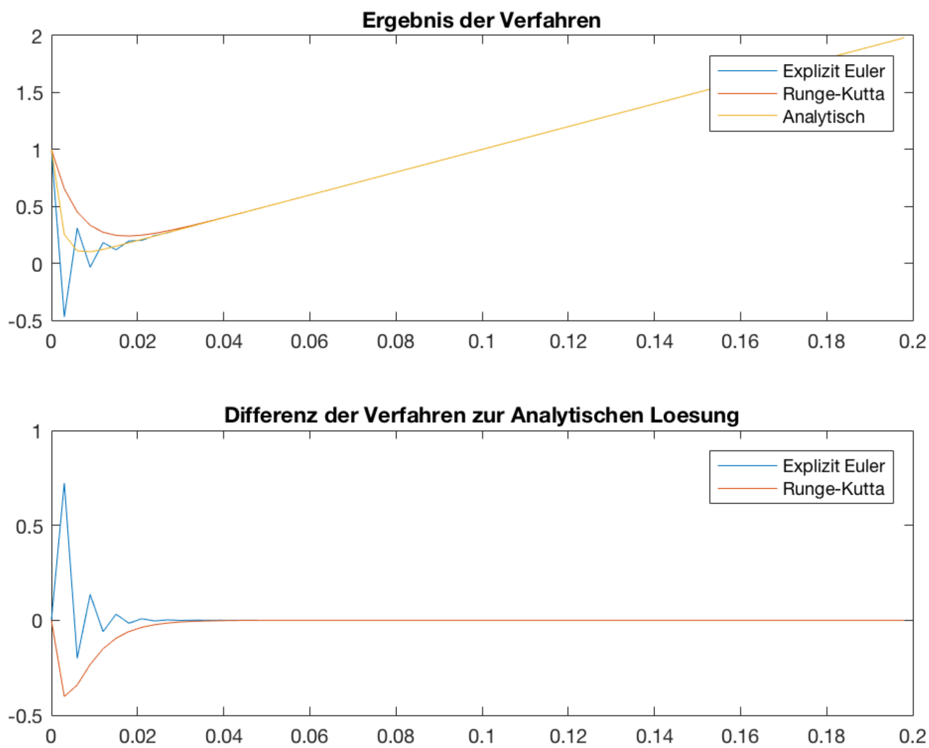

Figure 3: h=0.003

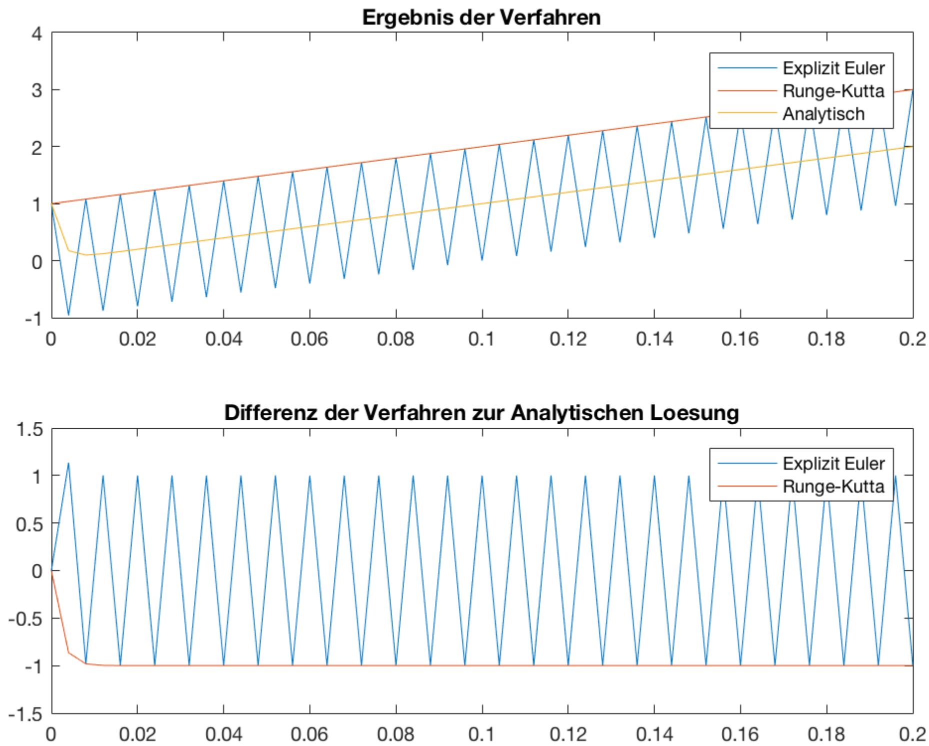

Figure 4: h=0.004

1.2.4 h=0.005

Bis ca. x=0.15 laufen alle Kurven kongruent. Ab dort schwanken die Werte des expliziten Euler-Verfahrens mit einer Differenz von ca. +/- 0.1 um die Werte der analytischen Lösung. Die Werte des Runge-Kutta-Verfahrens hingegen werden ab ca. x=0.15 exponentiell größer.

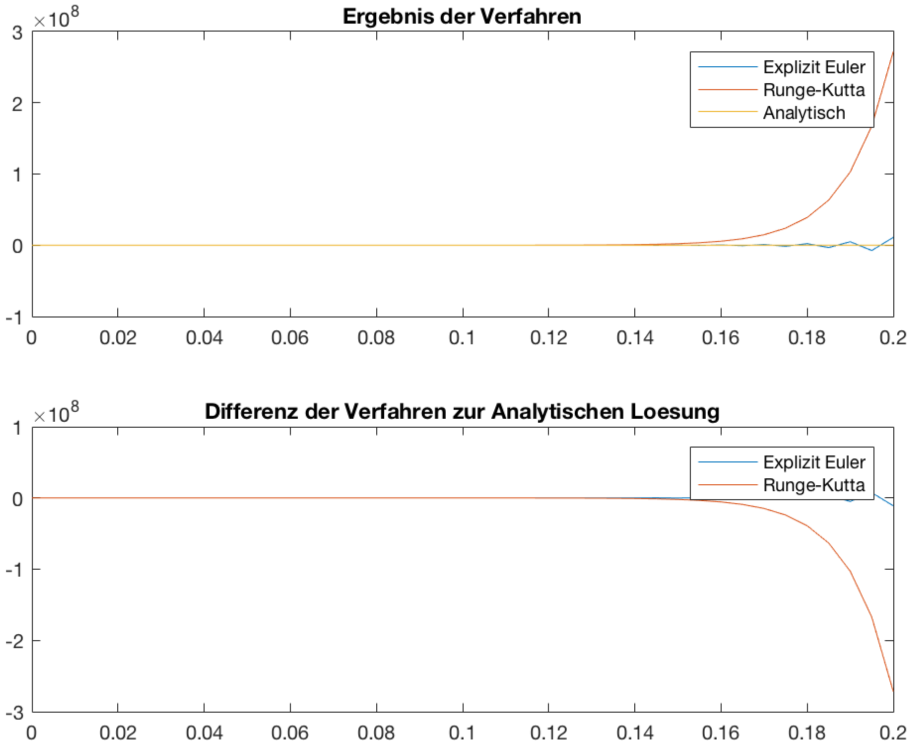

Figure 5: h=0.005

1.3 Interpretation der Ergebnisse

1.3.1 Explizites Euler-Verfahren

Die Ergebnisse zeigen, dass dieses Verfahren bei einer geringen Schrittweite genauere Ergebnisse liefert. Allerdings wird dadurch die benötigte Rechenzeit erhöht.

1.3.2 Runge-Kutta-Verfahren 2ter Ordnung

Die Ergebnisse zeigen, dass dieses Verfahren bei einer geringen Schrittweite genauere Ergebnisse liefert. Allerdings wird dadurch die benötigte Rechenzeit erhöht.

2 Teilaufgabe 2

Die folgende DGL ist gegeben: $y'' = 6 * (1 - y^2) * y' - y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

2.1 Schaltbild

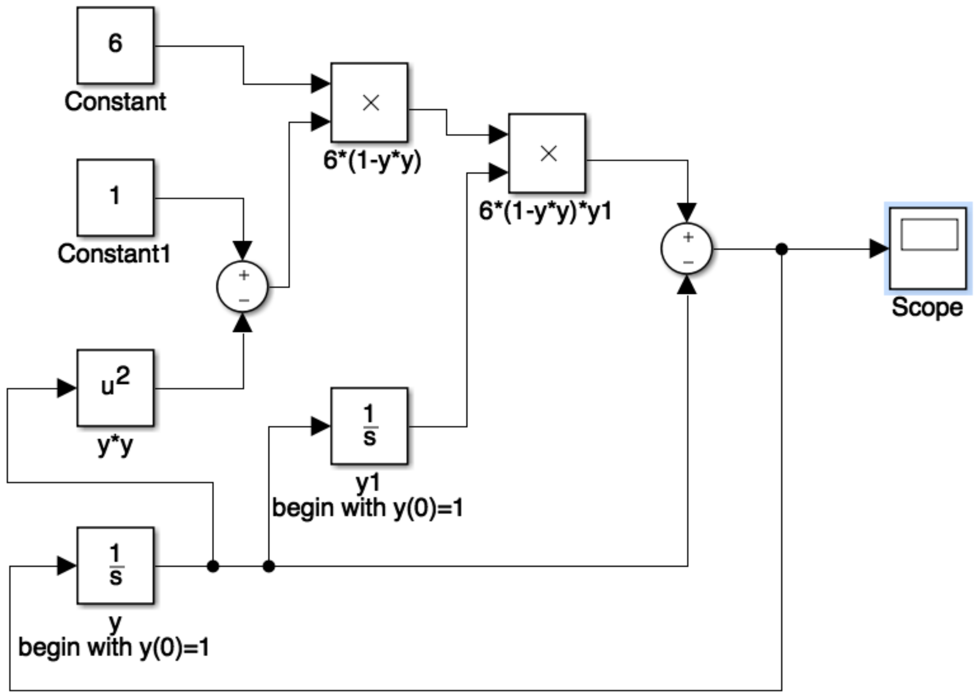

Figure 6: Simulink Schaltbild

2.2 DGLn der 1.Ordnung

$$\tilde{y} = y' \tag{10}$$
$$\tilde{y}' = 6 * (1 - y^2) * \tilde{y} - y \tag{11}$$
$$y(0) = 0 \tag{12}$$
$$\tilde{y}(0) = 1 \tag{13}$$

2.3 Iterationsgleichungen

2.3.1 Euler-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n + h \tag{14}$$
$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h * (6 * (1 - y_n^2) * \tilde{y}_n - y_n) \tag{15}$$
$$y_{n+1} = y_n + h * \tilde{y}_n \tag{16}$$

2.3.2 Runge-Kutta-Verfahren 2.Ordnung

$$x_{n+1} = x_n + h \tag{17}$$
$$\tilde{k}_1 = h * (6 * (1 - y_n^2) * \tilde{y}_n - y_n) \tag{18}$$
$$k_1 = h * \tilde{y}_n \tag{19}$$
$$\tilde{k}_2 = h * (6 * (1 - (y_n + \frac{k_1}{2})^2) * (\tilde{y}_n + \frac{\tilde{k}_1}{2}) - (y_n + \frac{k_1}{2})) \tag{20}$$
$$k_2 = h * (\tilde{y}_n + \frac{k_1}{2}) \tag{21}$$
$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + \tilde{k}_2 \tag{22}$$
$$y_{n+1} = y_n + k_2 \tag{23}$$

2.4 Plot der Lösungen

2.4.1 Euler-Verfahren

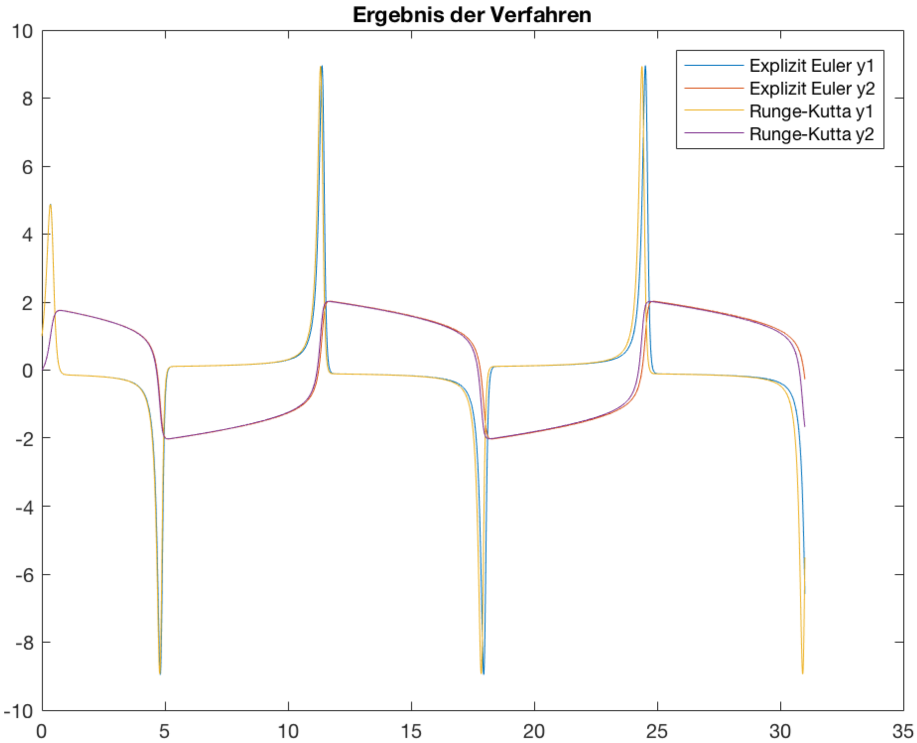

Figure 7: h=0.001

2.4.2 Runge-Kutta-Verfahren 2.Ordnung

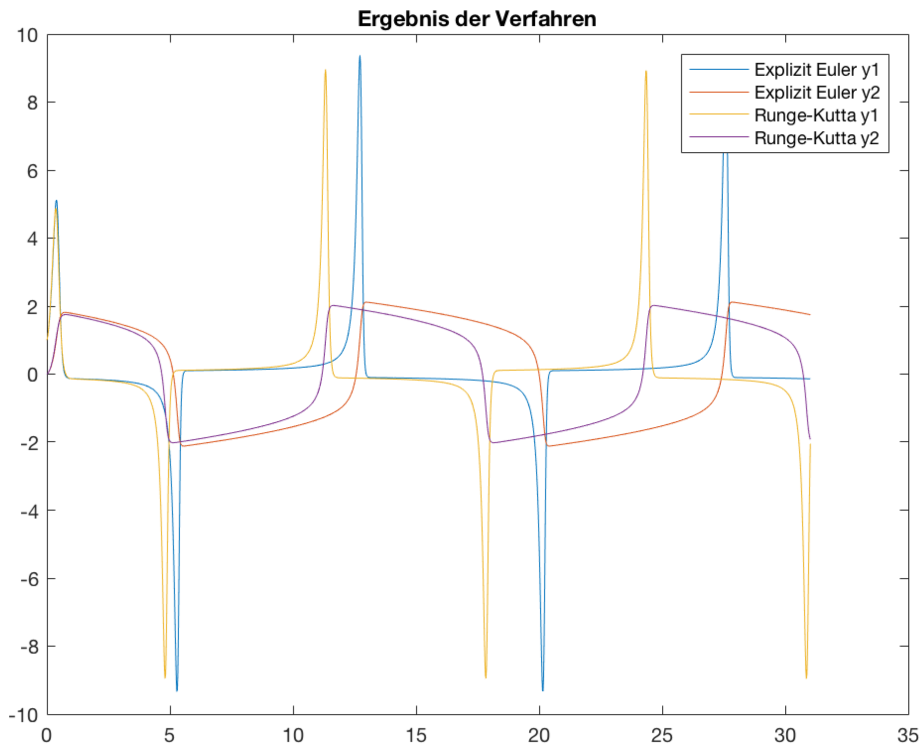

Figure 8: h=0.02

3 Teilaufgabe 3

Es ist folgendes DGL-System gegeben:
$x' = -10 * (x * y)$, $x(0) = 0,01$
$y' = (40 - z) * x - y$, $y(0) = 0,01$
$z' = x * y - 2,67 * z$, $z(0) = 0,00$

3.1 Iterationsgleichungen

Im Folgenden die Iterationsgleichungen für das Runge-Kutta-Verfahren 2ter Ordnung bezogen auf das gegebene DGL-System.

$$k_1 = h * (-10 * (x_n * y_n)) \tag{24}$$
$$l_1 = h * ((40 - z) * x_n - y_n) \tag{25}$$
$$m_1 = h * (x_n * y_n - 2,67 * z_n) \tag{26}$$
$$k_2 = h * f(x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}, z_n + \frac{m_1}{2}) \tag{27}$$
$$k_2 = h * (-10 * ((x_n + \frac{k_1}{2}) * (y_n + \frac{l_1}{2})) \tag{28}$$
$$l_2 = h * f(x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}, z_n + \frac{m_1}{2}) \tag{29}$$
$$l_2 = h * ((40 - (z_n + \frac{m_1}{2})) * (x_n + \frac{k_1}{2}) - (y_n + \frac{l_1}{2})) \tag{30}$$
$$m_2 = h * f(x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}, z_n + \frac{m_1}{2}) \tag{31}$$
$$m_2 = h * ((x_n + \frac{k_1}{2}) * (y_n + \frac{l_1}{2}) - 2,67 * (z_n + \frac{m_1}{2})) \tag{32}$$
$$x_{n+1} = x_n + k2 \tag{33}$$
$$y_{n+1} = y_n + l2 \tag{34}$$
$$z_{n+1} = z_n + m2 \tag{35}$$

3.2 Plot der Lösung

Gelöst durch das Runge-Kutta-Verfahren 2ter Ordnung.

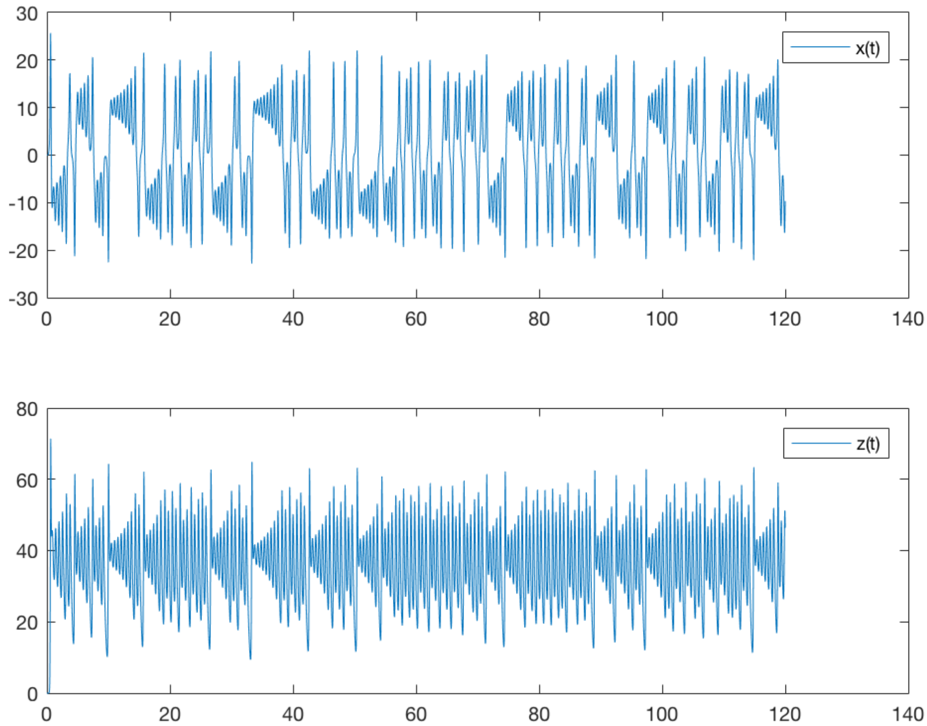

Figure 9: Vergleich von x(t) und z(t), h=0.002, $t_{end} = 120$

3.3 Schaltbild

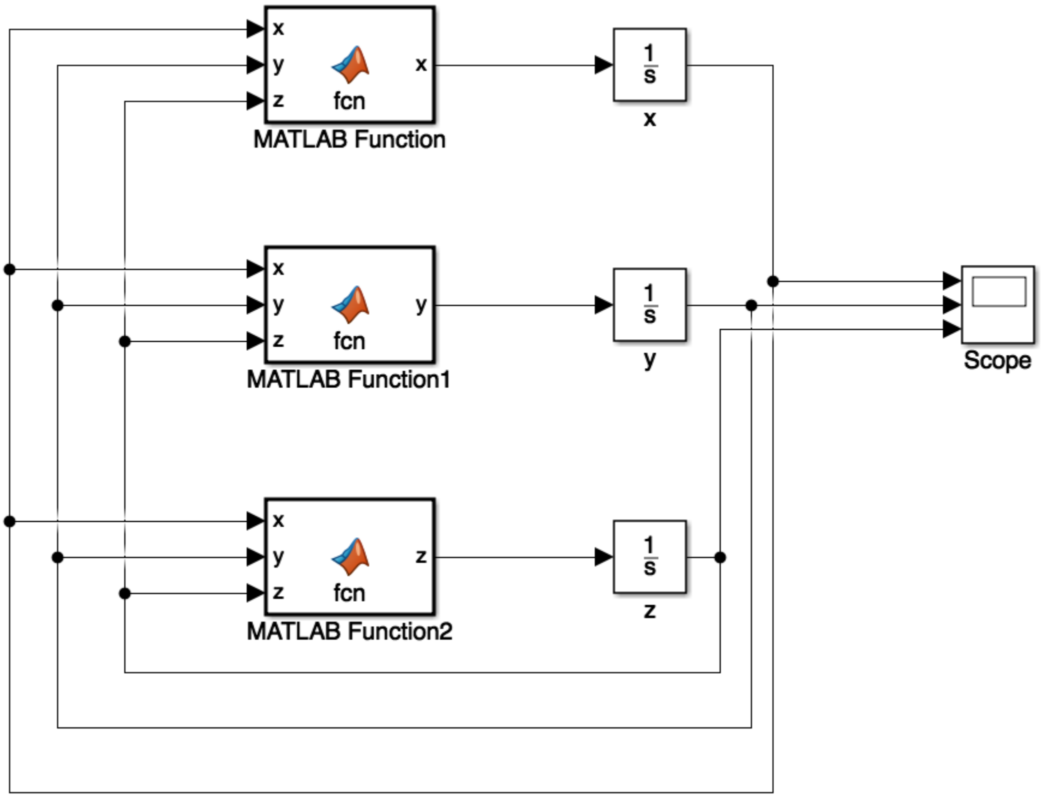

Figure 10: Simulink Schaltbild

3.4 Vergleich der Simulationen

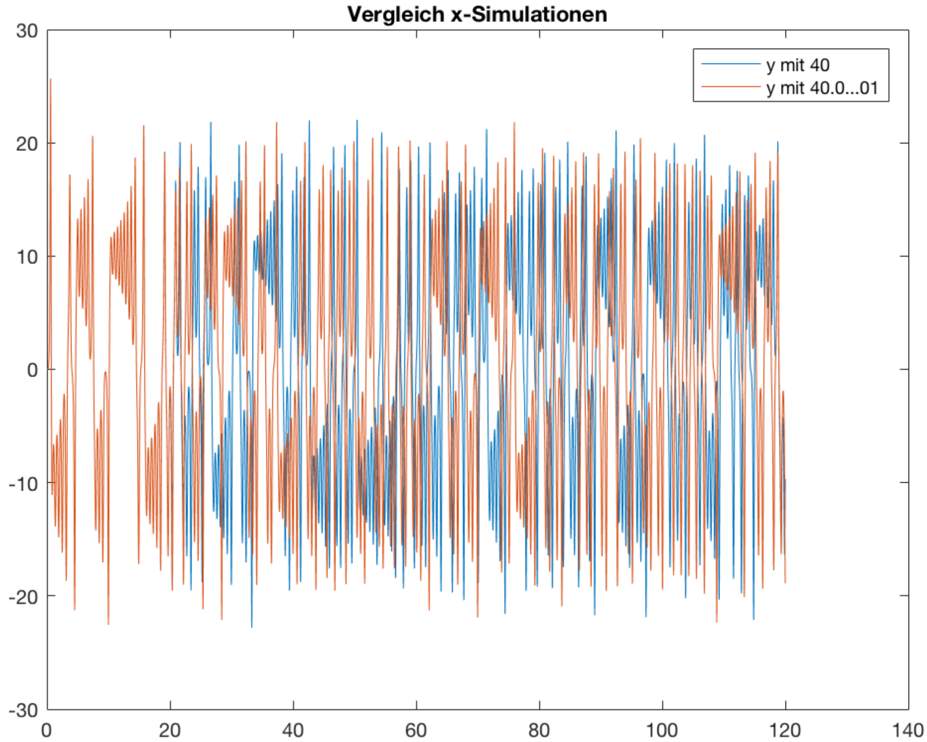

Figure 11: