

# Modellierung dynamischer Systeme

## Abgabe der Praktikumsaufgabe 2

Maria Lüdemann und Birger Kamp

April 26, 2016

### Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Teilaufgabe 1 - Erdumkreisung, Fluchtgeschwindigkeit und geostationäre Bahn</b>	<b>3</b>
1.1	Gegebene Formeln und Konstanten . . . . .	3
1.2	Konfigurierbare Parameter . . . . .	4
1.3	Funktionen . . . . .	4
1.3.1	Startposition . . . . .	4
1.3.2	vStart . . . . .	4
1.3.3	Beschleunigung . . . . .	4
1.3.4	Kontakt . . . . .	5
1.4	Simulink-Modell . . . . .	5
1.5	Versuchsdurchführungen . . . . .	6
1.5.1	Versuch 1 - Gleichmäßige Kreisbahn . . . . .	6
1.5.2	Versuch 2 - Entfliehung der Erde . . . . .	6
1.5.3	Versuch 3 - Erdumrundung innerhalb eines Tages . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Teilaufgabe 2 - Mondumkreisung</b>	<b>8</b>
2.1	Veränderungen am Modell - Beschleunigung . . . . .	8
2.2	Durchführung . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Teilaufgabe 3 - Crazy Pendulum</b>	<b>10</b>
3.1	Gegebene Versuchskonfiguration . . . . .	11
3.2	Freikörperbild . . . . .	12
3.3	Formeln . . . . .	12
3.4	Simulink-Modell . . . . .	12
3.5	Plot des Ergebnis . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Teilaufgabe 4 - Schwingungsgedämpfter Tisch</b>	<b>13</b>
4.1	Gegebene Versuchskonfiguration . . . . .	13
4.2	Freikörperbild . . . . .	14

4.3	Formeln . . . . .	14
4.4	Simulink-Modell . . . . .	14
4.5	Plot des Ergebnis . . . . .	15

# 1 Teilaufgabe 1 - Erdumkreisung, Fluchtgeschwindigkeit und geostationäre Bahn

In dieser Aufgabe ist es das Ziel den Flug eines Satelliten zu modellieren die von einer Trägerrakete in eine Startposition  $x_0$  gebracht wird. Von dort soll der Satellit antriebslos mit einer Geschwindigkeit von  $v_0$  und einem Flugwinkel  $\Theta$  weiterfliegen und die Erde umrunden. Ab der antriebslosen Phase  $x_0$  startet unsere Simulation. Dabei haben wir wie vorgegeben den Einfluss des Satelliten auf die Erde vernachlässigt und die Simulation mithilfe des gegebenen MatLab-Skripts *Erdbahn.m* visualisiert. Die gegebenen Werte werden in Abb 1 veranschaulicht. Für die Simulation wurde aus den gegebenen Werten und angeforderten Funktionen ein Simulink Schaltbild entworfen das die Simulation durchführt.

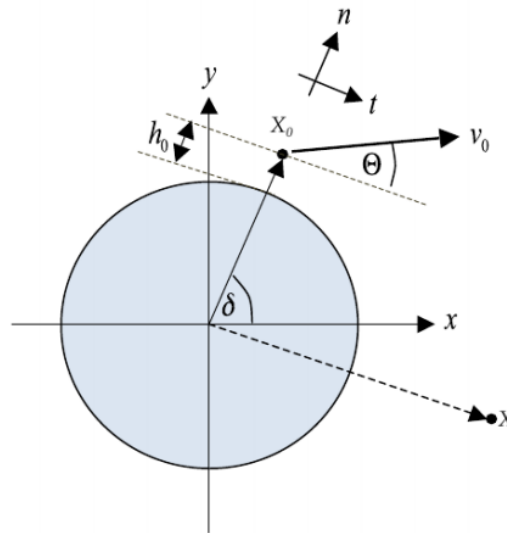


Abbildung 1:

## 1.1 Gegebene Formeln und Konstanten

Kraft auf den Satelliten

$$\vec{F}_S = G \cdot \frac{m_E \cdot m_S}{r^2} \cdot \vec{e}_{SE} \quad (1)$$

Erdradius

$$r_E = 6378 km \quad (2)$$

Erdmasse

$$m_E = 5,9736 \cdot 10^{24} kg \quad (3)$$

Gravitationskonstante

$$G = 66,743 \cdot 10^{-12} m^3 kg^{-1} s^{-2} \quad (4)$$

## 1.2 Konfigurierbare Parameter

Folgende Parameter müssen mindestens bei der Simulation konfigurierbar sein:

- $v_0$  Startgeschwindigkeit [ $km/s$ ]
- $\Theta$  Flugwinkel [ $^\circ$ ]
- $\delta$  Startwinkel [ $^\circ$ ]
- $h_0$  Starthöhe [ $km$ ]

## 1.3 Funktionen

Im Folgenden werden die benötigten Funktionen erklärt.

### 1.3.1 Startposition

Die Funktion *Startposition* berechnet den Startpositionsvektor  $x_0$  aus den gegebenen Parametern  $\gamma(^\circ)$ , der Starthöhe  $h_0$  (km) und der Konstante Erdradius.

Dafür verwenden wir eine Formel die sich aus der Geometrie ableitet da hier mithilfe der Winkel die Ankathete und Gegenkathete der Hypotenuse von  $r+h_0$  berechnet werden aus denen sich die Position ableiten lässt.

Die Formel dazu beschreibt sich als

$$\vec{x} = [\cos(\delta) \cdot (r + h_0), \sin(\delta) \cdot (r + h_0)] \quad (5)$$

### 1.3.2 vStart

Die Funktion *vStart* berechnet den Startgeschwindigkeitsvektor  $\vec{v}_0$  aus dem Startpositionsvektor  $v_0$ , dem Flugwinkel  $\theta$  und dem durch die Funktion *Startposition* berechneten Startpositionsvektor  $x_0$ .

Um den Vektor bestimmen zu können werden zuerst die Einheitsvektoren in Tangential- und Normalrichtung ( $\vec{t}, \vec{n}$  aus  $x_0$  konstruiert. Danach werden die Tangential- und Normalkomponenten der Startgeschwindigkeit ( $v_t, v_n$ ) berechnet. Aus diesen Parametern lässt sich dann die Startgeschwindigkeit zusammenbauen.

Die genaue Durchführung findet sich im MatLab Code

### 1.3.3 Beschleunigung

Diese Funktion berechnet aus der Satellitenposition  $\vec{x}$  die Satellitenbeschleunigung. Die Kräfte die auf den Satelliten wirken summieren sich.

$$\Sigma F = m \cdot a \quad (6)$$

Daraus ergibt sich

$$a = \frac{\Sigma F}{m} \quad (7)$$

Wobei hier  $m$  die Masse des Satelliten ist und sich heraus kürzt. Daraus folgt:

$$a = \Sigma F_{SE} \quad (8)$$

Daraus ergibt sich

$$a = G \cdot \frac{m_E \cdot m_S}{r_{SE}^2} \cdot e_{SE} \quad (9)$$

hierbei ist  $m_E$  die Masse der Erde,  $m_S$  die Masse des Satelliten,  $G$  die Gravitationskonstante,  $e_{SE}$  der Einheitsvektor vom Satelliten zur Erde und  $r_{SE}$  der Abstand vom Erdmittelpunkt zum Satelliten. Auch hier ist die Masse des Satelliten vernachlässigbar und wird in der Berechnung nicht berücksichtigt.

### 1.3.4 Kontakt

Der Kontakt ist eine recht simple Funktion deren Aufgabe es ist festzustellen ob der Satellit einen Erdkontakt hergestellt hat. Dies wird verwendet um die Simulation zu beenden wenn der Satellit abgestürzt ist.

Die Funktion benutzt den aktuellen Positionsvektor des Satelliten  $\vec{x}$  um daraus zu bestimmen ob die aktuelle Höhe größer ist als der Radius der Erde  $r_E$ .

## 1.4 Simulink-Modell

Das folgende Modell veranschaulicht das Simulink-Modell das die Simulation durchführt.

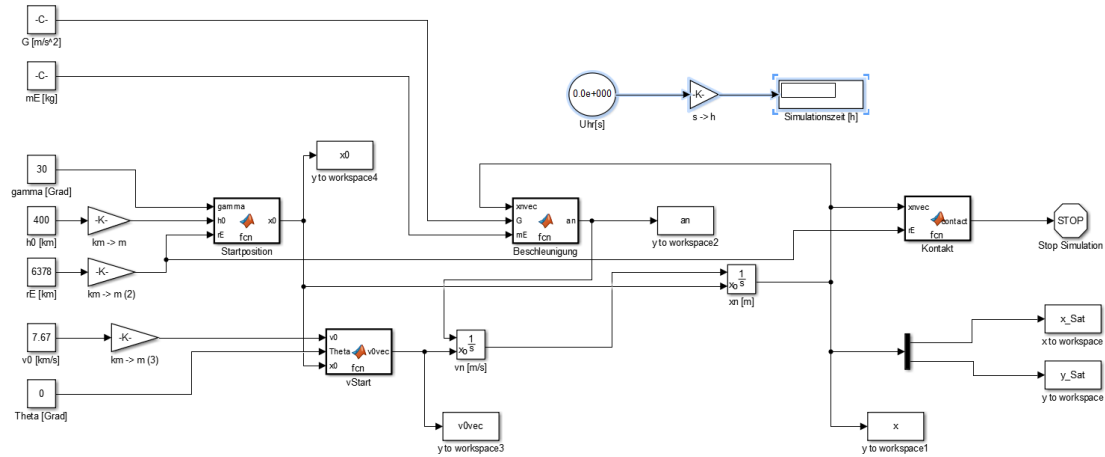


Abbildung 2: Simulink Modell für die Erdumrundung

## 1.5 Versuchsdurchführungen

Es wurden drei Versuche durchgeführt um mit unterschiedlichen Anfangsparametern diverses Verhalten zu provozieren.

### 1.5.1 Versuch 1 - Gleichmäßige Kreisbahn

Dieser Versuch wurde mit den Versuchsparametern  $\delta = 30^\circ$ ,  $h_0 = 400\text{km}$ ,  $\Theta = 0^\circ$  durchgeführt. Dabei beschreibt der Satellit bei einer Startgeschwindigkeit  $v_0$  von  $7,65 \frac{\text{km}}{\text{s}}$  und einer Simulationszeit von  $1,543h$  wie in Abb. 3 zu sehen eine Kreisbahn um die Erde.

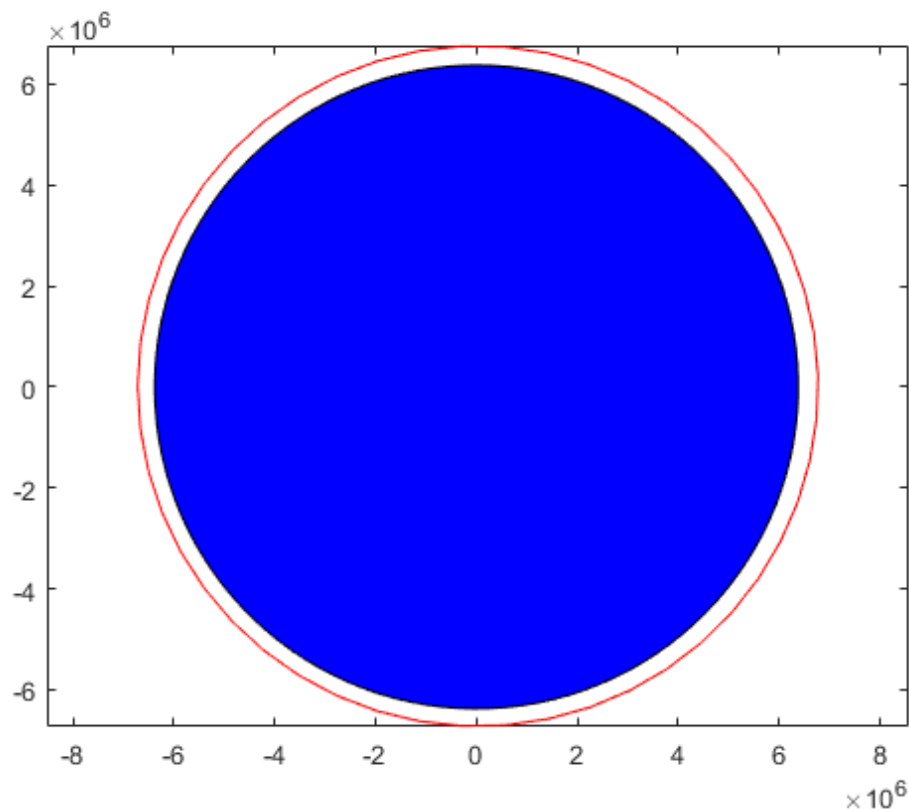


Abbildung 3: Eine Kreisbahn um die Erde

### 1.5.2 Versuch 2 - Entfliehung der Erde

In diesem Versuch soll der Parameter  $v_0$  bestimmt werden, sodass der Satellit gerade der Erde entflieht. Dafür werden folgende Startparameter  $\delta = 30^\circ$ ,  $h_0 = 400\text{km}$ ,  $\Theta = 0^\circ$  und eine Simulationszeit  $1 \cdot 10^6$  von angenommen werden.

Das gewünschte Verhalten zeigt sich bei einer Startgeschwindigkeit  $v_0$  von  $10,85 \frac{\text{km}}{\text{s}}$  und einer Simulationszeit von  $1 \cdot 10^6$  wie in Abb. 4.

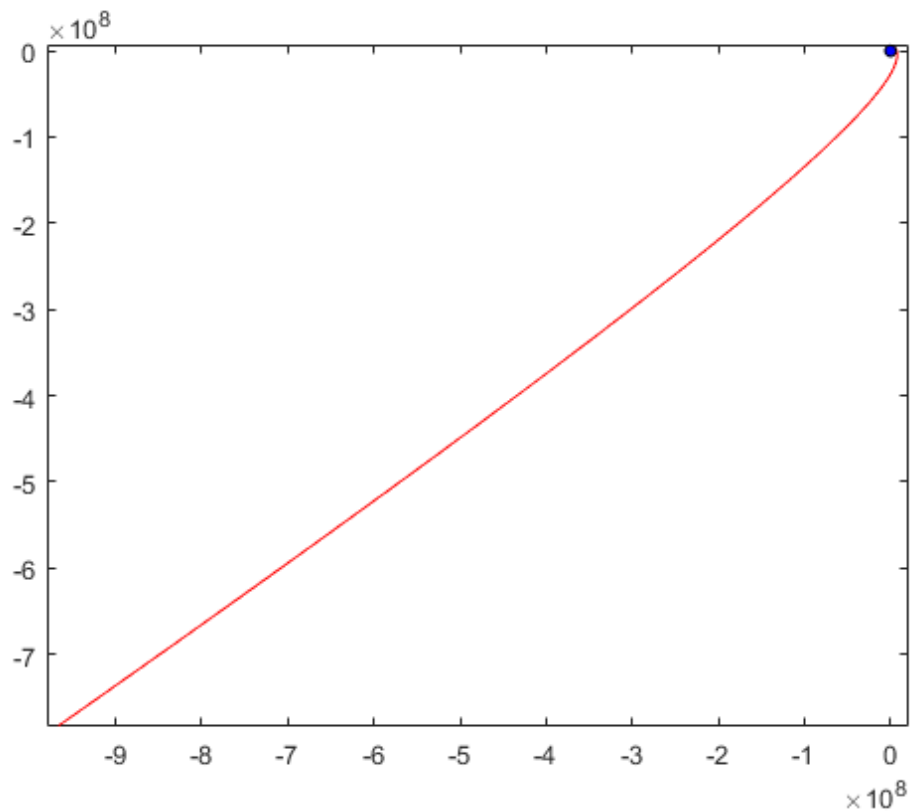


Abbildung 4: Der Satellit entflieht gerade der Erde

### 1.5.3 Versuch 3 - Erdumrundung innerhalb eines Tages

In diesem Versuch sollen die Parameter  $h_0$  und  $v_0$  so gewählt werden, dass der Satellit genau einen Tag benötigt um die Erde zu umkreisen.

Es ergab sich, dass der Versuch mit den folgenden Parametern durchgeführt werden muss um das gewünschte Ergebnis zu erreichen.  $\delta = 30^\circ, h_0 = \Theta = 0^\circ$

Um die Erde in genau einem Tag zu umrunden haben wir die Parameter  $h_0 = 38.000\text{km}$  und  $v_0 = 2,85 \frac{\text{km}}{\text{s}}$  genutzt. Das Ergebnis ist in Abb. 5 dargestellt.

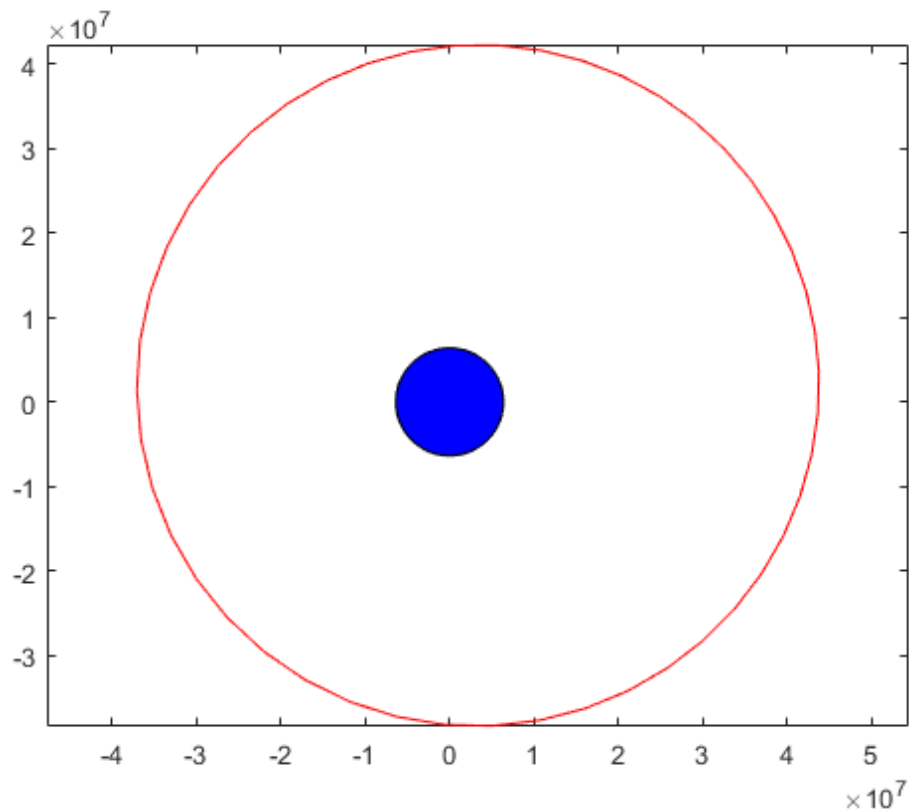


Abbildung 5: Der Satellit umkreist innerhalb eines Tages die Erde

## 2 Teilaufgabe 2 - Mondumkreisung

In der Teilaufgabe 2 ging es darum das Modell aus Aufgabe 1 so umzubauen, dass der Satellit nicht mehr nur um die Erde sondern nun auch um den Mond kreist. Dafür wurden folgende Parameter hinzugefügt:

Mondposition(fest)

$$x_M = (0, -380000)^T km \quad (10)$$

Mondmasse

$$m_M = 7,3480 \cdot 10^{22} kg \quad (11)$$

Dabei ist zu beachten, dass der Mond als feststehend angesehen wird.

### 2.1 Veränderungen am Modell - Beschleunigung

Um der Simulation eine Mondumkreisung hinzuzufügen muss die Funktion Beschleunigung modifiziert werden in dem der jetzigen Formel der Einfluss des Mondes hinzugefügt wird.



Die Beschleunigungs-Formel der Erde beschreibt sich als:

$$a = G \cdot \frac{m_E \cdot m_S}{r_{SE}^2} \cdot e_{SE} \quad (12)$$

Die Formel des Mondes wäre dann

$$a = G \cdot \frac{m_M \cdot m_S}{r_{SM}^2} \cdot e_{SM} \quad (13)$$

dabei ist  $m_M$  die Masse des Mondes,  $r_{SM}$  die Entfernung des Satelliten zum Mond und  $e_{SM}$  der Einheitsvektor vom Satelliten zum Mond. Aus der Formel zur Berechnung der Kraft

$$\Sigma F = m \cdot a \quad (14)$$

Ergibt sich wie bereits vorher die Berechnung, nur das hier die Kräfte addiert werden die auf den Satelliten wirken.

$$a = \Sigma F_{SE} + \Sigma F_{SM} \quad (15)$$

Somit wird, genau wie für die Erde auch für den Mond die Kraft berechnet die auf den Satelliten wirkt und addiert. Daraus ergibt sich die Beschleunigung.

## 2.2 Durchführung

Für die Darstellung der Simulation wird das bereitgestellte Matlab-Script *ErdMondBahn.m* genutzt und die Simulation mit den Voreinstellungen  $\delta = 30^\circ$ ,  $h_0 = 150km$

Mit einer Startgeschwindigkeit  $v_0 = 10,95$  und einem Flugwinkel von  $\Theta = 26^\circ$  fliegt der Satellit eine 8-förmige Schleife um den Mond und zurück zur Erde. Dabei dauert die Mondmission 9 Tage. Folgende Abbildung veranschaulicht das Ergebnis.

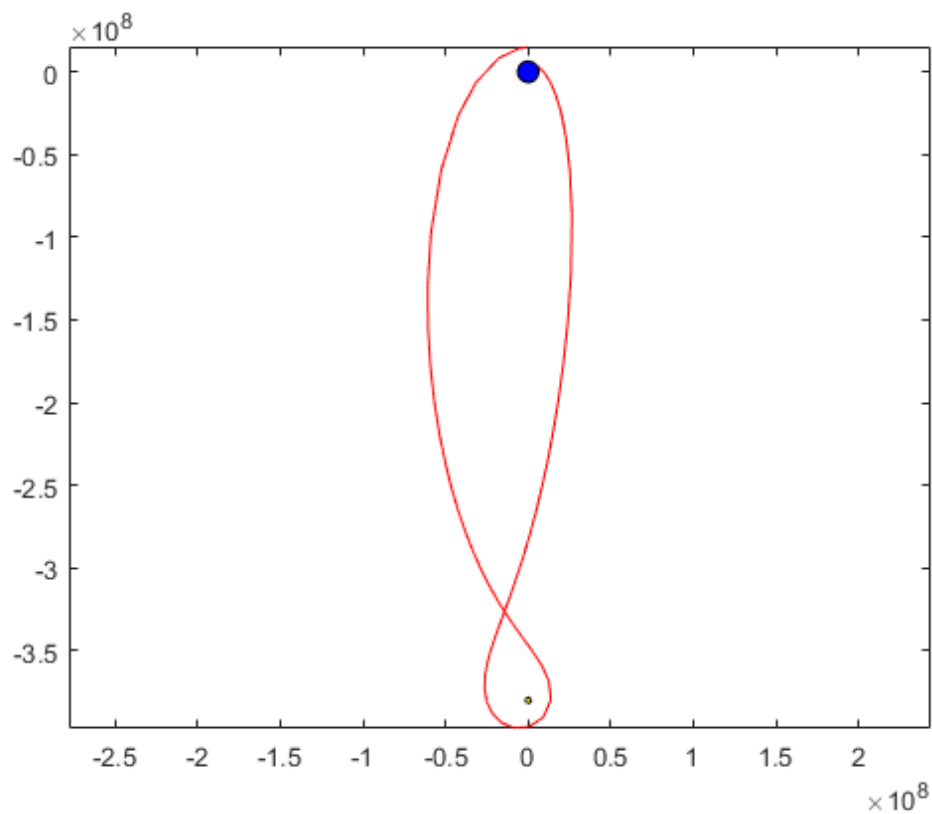


Abbildung 6: Der Satellit fliegt eine acht zum Mond und wieder zur Erde zurück

### 3 Teilaufgabe 3 - Crazy Pendulum

In dieser Teilaufgabe gilt es, die Bewegung einer Pendelkonstruktion zu berechnen. Der Versuchsaufbau ist in Abb. 7 zu sehen. In diesem Aufbau übt immer nur eine der Federn Zugkraft auf die Seiltrommel aus, während die andere Feder keine Kraft ausübt. Befindet sich das Pendel in senkrechter Position, dann übt keine der Federn eine Kraft aus. Der Einfluss der Pendelstange und der Seiltrommel werden nicht beachtet.

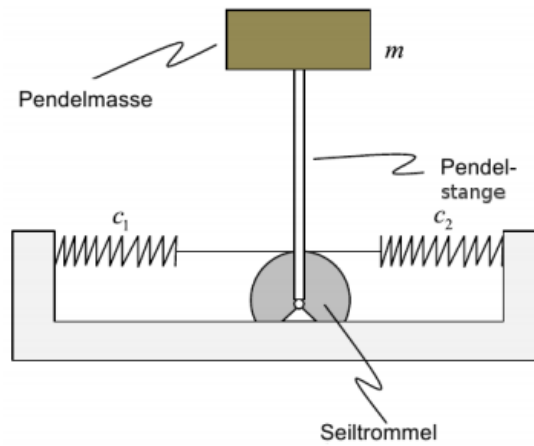


Abbildung 7:

### 3.1 Gegebene Versuchskonfiguration

Dieser Versuch wurde mit folgenden Parametern durchgeführt:

- $L = 1m$
- $m = 10kg$
- $r = 0.3m$
- $w = 0.3m$
- $h = 0.2m$
- $c_1 = 5000N/m$
- $c_2 = 500\,000N/m$
- $\varphi(0) = 45^\circ$

## 3.2 Freikörperbild

## 3.3 Formeln

$c$  ist abhängig von  $\varphi(t)$ : es gilt entweder  $c_1$  oder  $c_2$ .

$$M_p = m \cdot g \cdot \sin(\varphi) \cdot (L + \frac{h}{2}) \quad (16)$$

$$M_s = -\varphi \cdot c \cdot r^2 \quad (17)$$

$$M_g = M_p + M_s \quad (18)$$

$$J_p = \frac{1}{12} \cdot m \cdot (h^2 + w^2) \quad (19)$$

$$J_g = J_p + m \cdot (L + \frac{h}{2})^2 \quad (20)$$

$$a = M_g / J_g \quad (21)$$

$a$  wird in der Einheit  $\text{Grad}/s^2$  angegeben.

## 3.4 Simulink-Modell

Die Berechnung von  $a$  erfolgt in der Embedded-MatLab-Function  $f_{cn}$ .

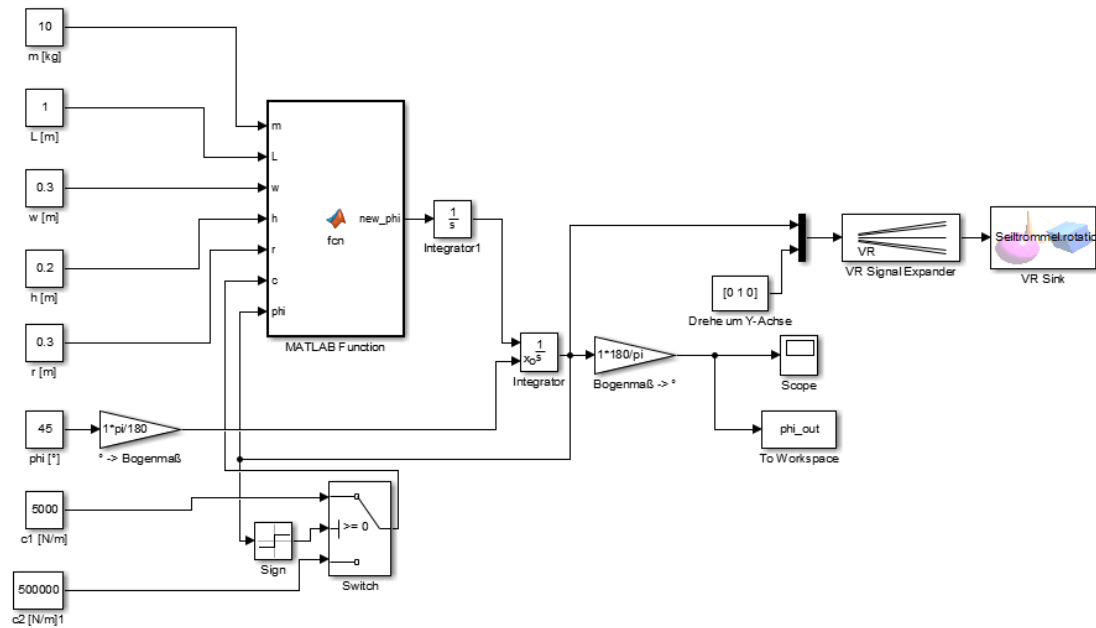


Abbildung 8:

## 3.5 Plot des Ergebnis

Die Abbildung 9 zeigt  $\varphi(t)$  des Modells als Plot. Die Abstände und Maximalstellen der Kurve verändern sich während der Laufzeit nicht nennenswert. Sie bleiben nahezu gleich,

eine Veränderung ist nur an der dritten Nachkommastelle zu sehen.

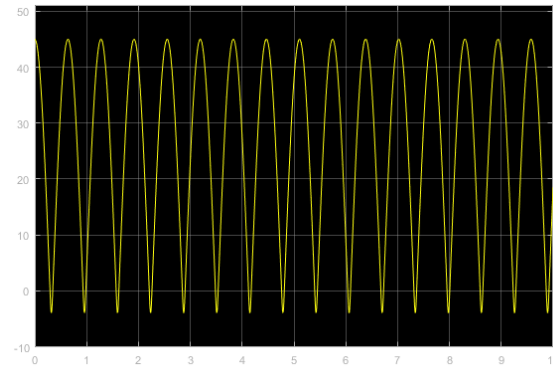


Abbildung 9:

## 4 Teilaufgabe 4 - Schwingungsgedämpfter Tisch

In dieser Teilaufgabe wird ein schwingungsgedämpfter Tisch simuliert. Der Versuchsaufbau ist in Abb. 10 zu sehen. Der Startbewegungsimpuls wird über  $u$  gegeben. Die Massen  $m_1$  und  $m_2$  reagieren darauf mit den Auslenkungen  $x_1$  und  $x_2$ .

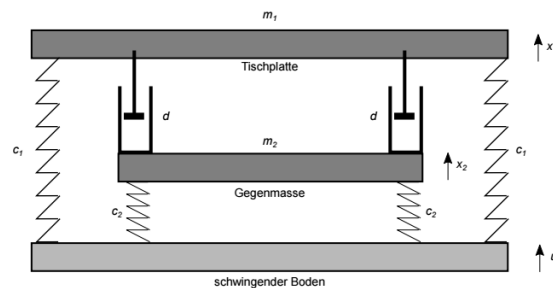


Abbildung 10:

### 4.1 Gegebene Versuchskonfiguration

Dieser Versuch wurde mit folgenden Parametern durchgeführt:

- $c_1 = 15\,000\text{ N/m}$
- $c_2 = 10\,000\text{ N/m}$
- $d = 600\text{ N s/m}$
- $m_1 = 60\text{ kg}$
- $m_2 = 450\text{ kg}$

## 4.2 Freikörperbild

## 4.3 Formeln

Folgende Formeln werden zur Berechnung der einzelnen Komponenten verwendet:

$$\Delta x_1 = u - x_1 \quad (22)$$

$$\Delta x_2 = u - x_2 \quad (23)$$

$$\Delta v = v_1 - v_2 \quad (24)$$

$$F_{G1} = m_1 \cdot g \quad (25)$$

$$F_{G2} = m_2 \cdot g \quad (26)$$

$$F_{c1} = 2 \cdot \Delta x_1 \cdot c_1 \quad (27)$$

$$F_{c2} = 2 \cdot \Delta x_2 \cdot c_2 \quad (28)$$

$$F_D = 2 \cdot \Delta v \cdot d \quad (29)$$

Ruhelage Tisch:

$$x_1(0) = \frac{m_1 \cdot g}{c_1 \cdot 2} \quad (30)$$

Ruhelage Gegengewicht:

$$x_2(0) = \frac{m_2 \cdot g}{c_2 \cdot 2} \quad (31)$$

Beschleunigung Tisch:

$$a_1 = \frac{-F_{G1} - F_D + F_{c1}}{m_1} \quad (32)$$

Beschleunigung Gegengewicht:

$$a_2 = \frac{-F_{G2} + F_D + F_{c2}}{m_2} \quad (33)$$

## 4.4 Simulink-Modell

Die Berechnung von  $x_1(t)$  erfolgt in folgendem Simulink-Modell:

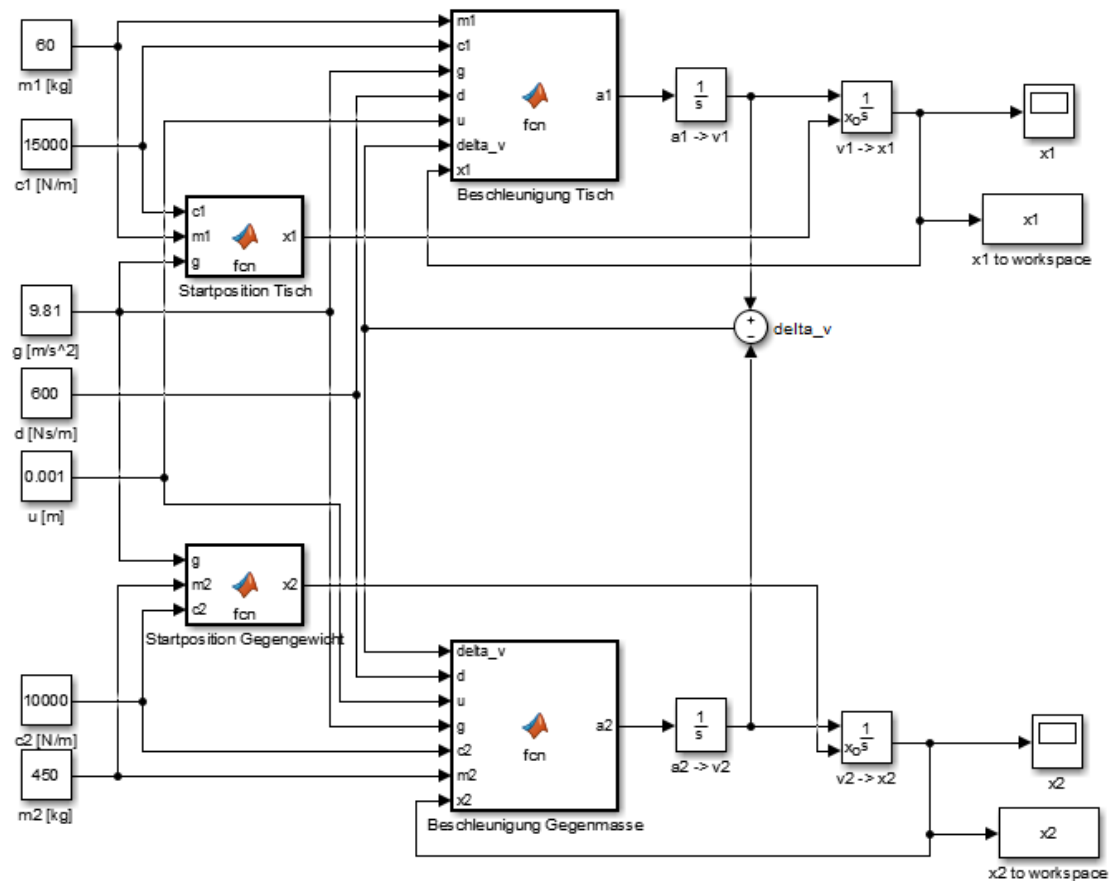


Abbildung 11:

#### 4.5 Plot des Ergebnis

Die Abbildung 12 zeigt wie sich die Auslenkung von  $x_1$  durch den Anstoß von  $u$  verändert, bis der Tisch sich wieder in seiner Ruheposition befindet.

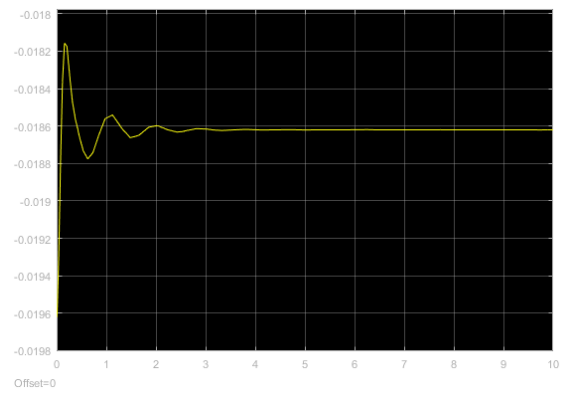


Abbildung 12: