

Modellierung dynamischer Systeme

Abgabe der Praktikumsaufgabe 1

Maria Lüdemann und Birger Kamp

March 31, 2016

1 Teilaufgabe 1

Die folgende DGL ist gegeben: $y' = 10 - 500y + 5000x$, $y(0) = 1$

Schaltbild

Das Simulink-Schaltbild zu dieser Gleichung ist:

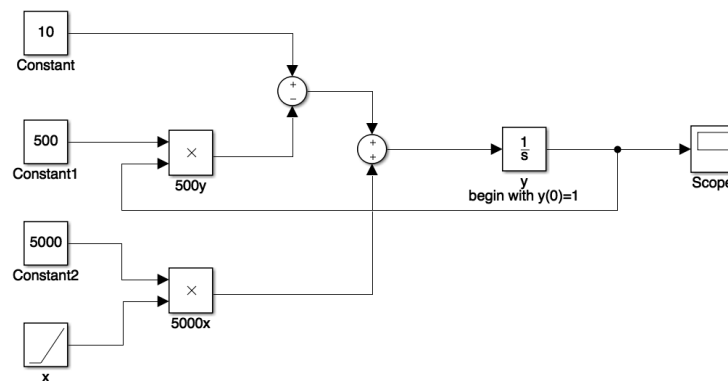


Figure 1: Simulink Schaltbild DGL1

1.1 Iterationsgleichungen

Im Folgenden die Iterationsgleichungen der jeweiligen Verfahren.

1.1.1 Euler-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n + h \quad (1)$$

$$y_{n+1} = y_n + h * f(x_n, y_n) \quad (2)$$

$$y_{n+1} = y_n + h * (10 - 500y_n + 5000x_n) \quad (3)$$

1.1.2 Runge-Kutta-Verfahren 2.Ordnung

$$x_{n+1} = x_n + h \quad (4)$$

$$k_1 = h * f(x_n, y_n) \quad (5)$$

$$k_1 = h * (10 - 500y_n + 5000x_n) \quad (6)$$

$$k_2 = h * f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \quad (7)$$

$$k_2 = h * (10 - 500 * (y_n + \frac{k_1}{2}) + 5000 * (x_n + \frac{h}{2})) \quad (8)$$

$$y_{n+1} = y_n + k_2 \quad (9)$$

1.2 Plot der Lösungen

Im Folgenden sind alle Plots der Ergebnisse der Verfahren dargestellt. Es wird außerdem jeweils die Ergebnis-Differenz eines Verfahrens zur analytischen Lösung gezeigt.

1.2.1 h=0.001

Das Ergebnis zeigt, dass die Verfahren bis $x=0.01$ sehr ähnliche Ergebnisse liefern und haben eine max. Differenz von ca. 0.12. Danach laufen alle Kurven kongruent.

1.2.2 h=0.003

Das Ergebnis zeigt, dass die Verfahren bis ca. $x=0.03$ unterschiedliche Ergebnisse liefern. Die Ergebnisse des Runge-Kutta-Verfahrens verlaufen bis ca. $x=0.03$ nahezu parallel zur analytischen Lösung. In diesem Wertebereich liefert das explizite Euler-Verfahren sehr schwankende Werte. Ab ca. $x=0.03$ laufen alle Kurven kongruent.

1.2.3 h=0.004

Bis ca. $x=0.01$ laufen alle Kurven unterschiedlich. Ab dort laufen die Kurven des Runge-Kutta-Verfahrens und der analytischen Lösung kongruent. Während der ganzen Laufzeit liefert das explizite Euler-Verfahren sehr schwankende Werte, die sich mit einer Differenz von +/- 1 in der Nähe der analytischen Lösung befinden.

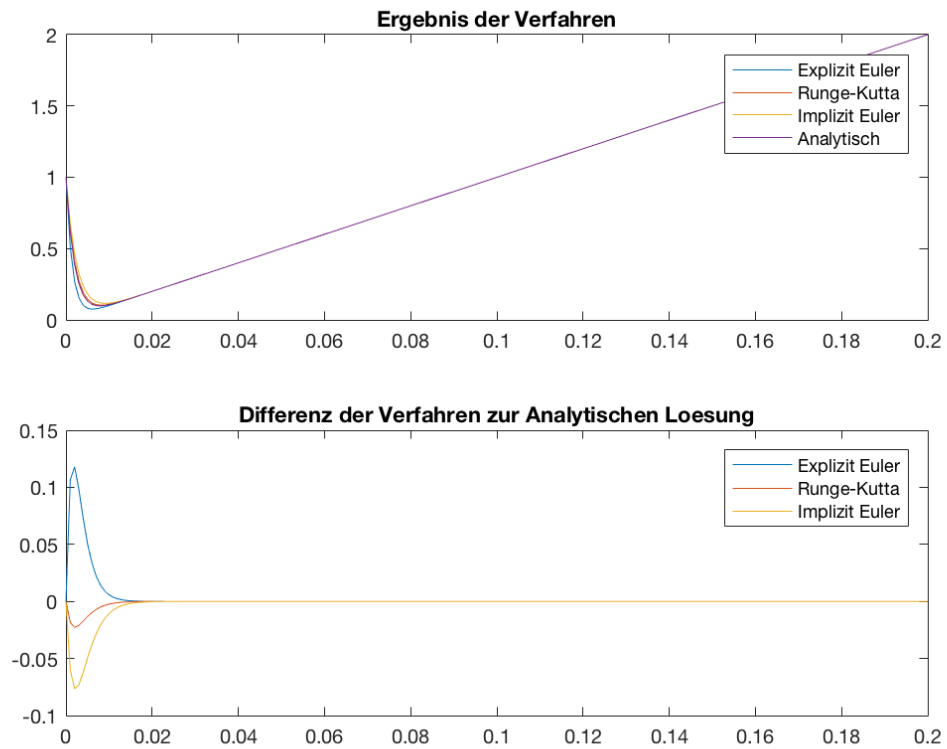


Figure 2: $h=0.001$

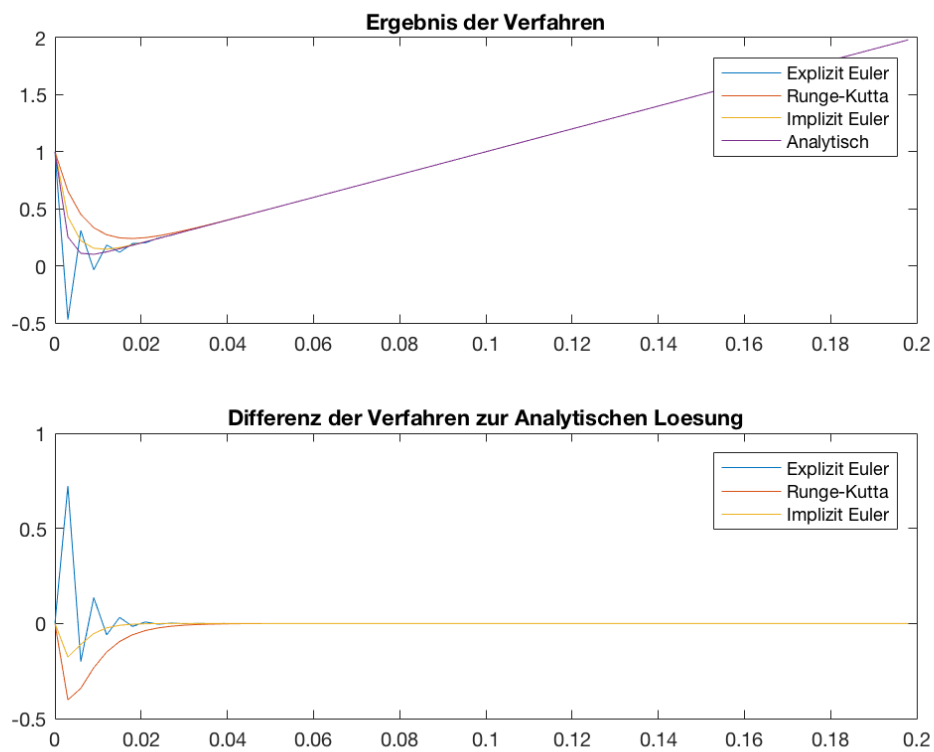


Figure 3: $h=0.003$

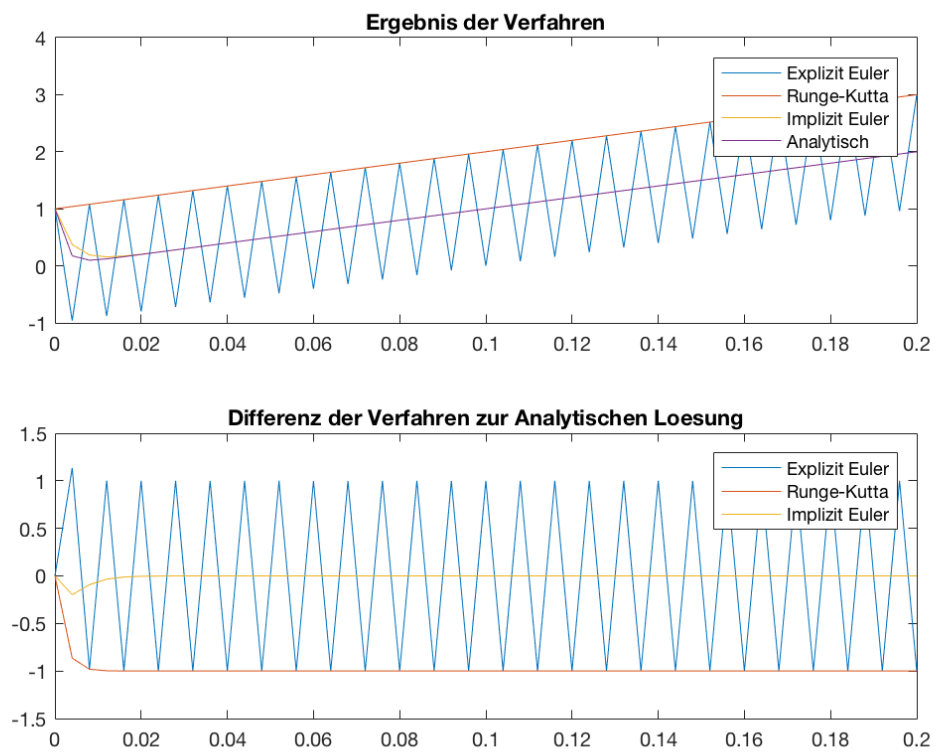


Figure 4: $h=0.004$

1.2.4 $h=0.005$

Bis ca. $x=0.15$ laufen alle Kurven kongruent. Ab dort schwanken die Werte des expliziten Euler-Verfahrens mit einer Differenz von ca. ± 0.1 um die Werte der analytischen Lösung. Die Werte des Runge-Kutta-Verfahrens hingegen werden ab ca. $x=0.15$ exponentiell größer.

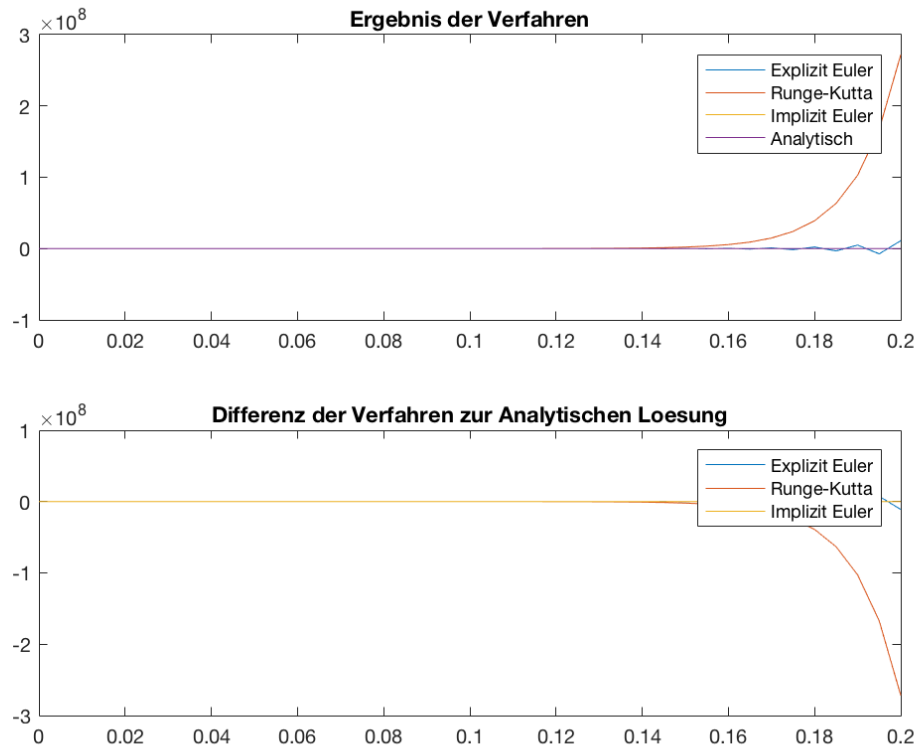


Figure 5: $h=0.005$

1.3 Interpretation der Ergebnisse

1.3.1 Explizites Euler-Verfahren

Die Ergebnisse zeigen, dass dieses Verfahren bei einer geringen Schrittweite genauere Ergebnisse liefert. Allerdings wird dadurch die benötigte Rechenzeit erhöht.

1.3.2 Runge-Kutta-Verfahren 2ter Ordnung

Die Ergebnisse zeigen, dass dieses Verfahren bei einer geringen Schrittweite genauere Ergebnisse liefert. Allerdings wird dadurch die benötigte Rechenzeit erhöht.

2 Teilaufgabe 2

Die folgende DGL ist gegeben: $y'' = 6 * (1 - y^2) * y' - y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

2.1 Schaltbild

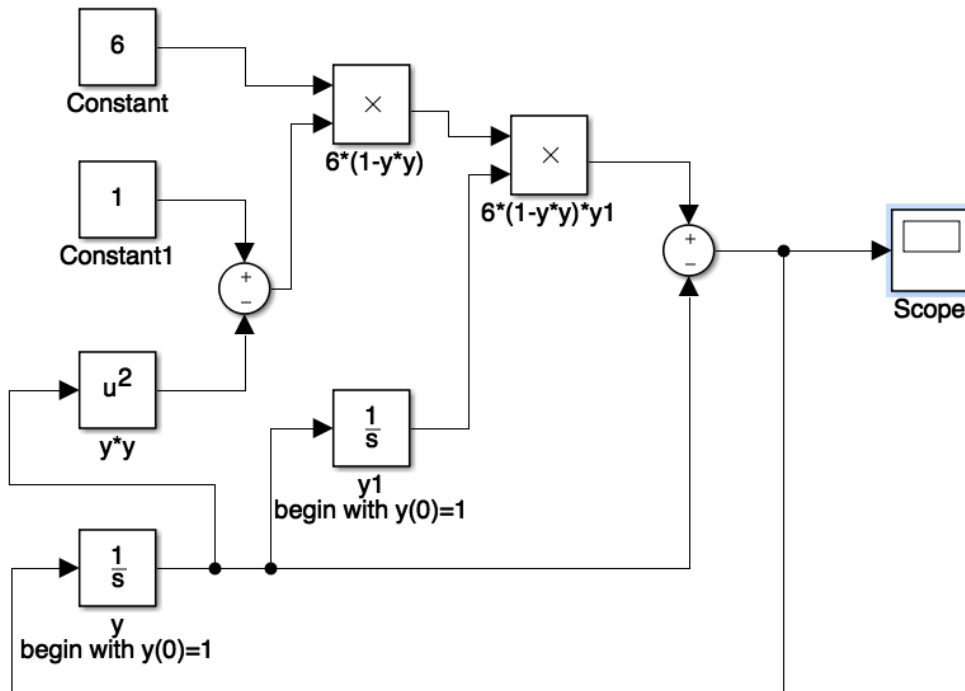


Figure 6: Simulink Schaltbild

2.2 DGLn der 1.Ordnung

$$\tilde{y} = y' \quad (10)$$

$$\tilde{y}' = 6 * (1 - y^2) * \tilde{y} - y \quad (11)$$

$$y(0) = 0 \quad (12)$$

$$\tilde{y}(0) = 1 \quad (13)$$

2.3 Iterationsgleichungen

2.3.1 Euler-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n + h \quad (14)$$

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h * (6 * (1 - y_n^2) * \tilde{y}_n - y_n) \quad (15)$$

$$y_{n+1} = y_n + h * \tilde{y}_n \quad (16)$$

2.3.2 Runge-Kutta-Verfahren 2.Ordnung

$$x_{n+1} = x_n + h \quad (17)$$

$$\tilde{k}_1 = h * (6 * (1 - y_n^2) * \tilde{y}_n - y_n) \quad (18)$$

$$k_1 = h * \tilde{y}_n \quad (19)$$

$$\tilde{k}_2 = h * (6 * (1 - (y_n + \frac{k_1}{2})^2) * (\tilde{y}_n + \frac{\tilde{k}_1}{2}) - (y_n + \frac{k_1}{2})) \quad (20)$$

$$k_2 = h * (\tilde{y}_n + \frac{\tilde{k}_1}{2}) \quad (21)$$

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + \tilde{k}_2 \quad (22)$$

$$y_{n+1} = y_n + k_2 \quad (23)$$

2.4 Plot der Lösungen

2.4.1 Euler-Verfahren

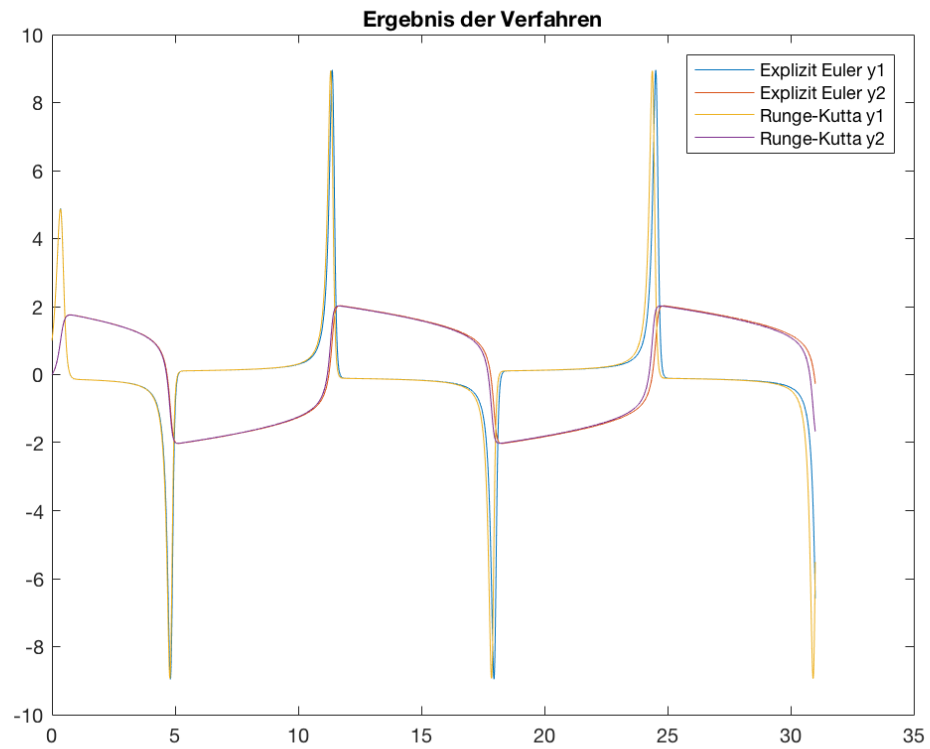


Figure 7: $h=0.001$

2.4.2 Runge-Kutta-Verfahren 2.Ordnung

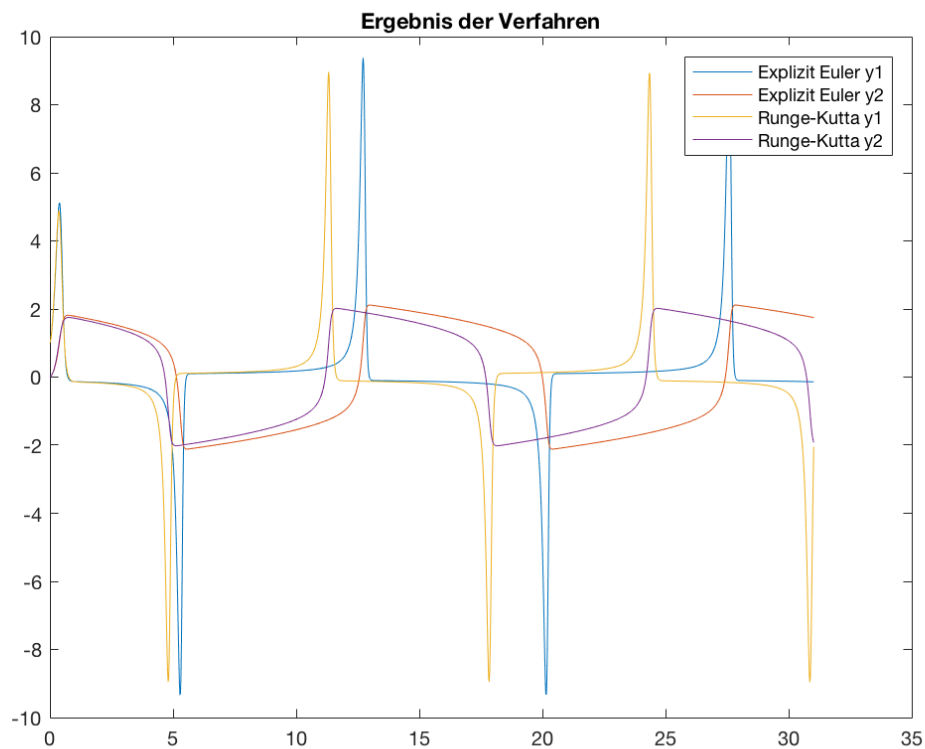


Figure 8: $h=0.02$

3 Teilaufgabe 3

Es ist folgendes DGL-System gegeben:

$$x' = -10 * (x * y), x(0) = 0,01$$

$$y' = (40 - z) * x - y, y(0) = 0,01$$

$$z' = x * y - 2,67 * z, z(0) = 0,00$$

3.1 Iterationsgleichungen

Im Folgenden die Iterationsgleichungen für das Runge-Kutta-Verfahren 2ter Ordnung bezogen auf das gegebene DGL-System.

$$k_1 = h * (-10 * (x_n * y_n)) \quad (24)$$

$$l_1 = h * ((40 - z) * x_n - y_n) \quad (25)$$

$$m_1 = h * (x_n * y_n - 2,67 * z_n) \quad (26)$$

$$k_2 = h * f(x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}, z_n + \frac{m_1}{2}) \quad (27)$$

$$k_2 = h * (-10 * ((x_n + \frac{k_1}{2}) * (y_n + \frac{l_1}{2}))) \quad (28)$$

$$l_2 = h * f(x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}, z_n + \frac{m_1}{2}) \quad (29)$$

$$l_2 = h * ((40 - (z_n + \frac{m_1}{2})) * (x_n + \frac{k_1}{2}) - (y_n + \frac{l_1}{2})) \quad (30)$$

$$m_2 = h * f(x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}, z_n + \frac{m_1}{2}) \quad (31)$$

$$m_2 = h * ((x_n + \frac{k_1}{2}) * (y_n + \frac{l_1}{2}) - 2,67 * (z_n + \frac{m_1}{2})) \quad (32)$$

$$x_{n+1} = x_n + k_2 \quad (33)$$

$$y_{n+1} = y_n + l_2 \quad (34)$$

$$z_{n+1} = z_n + m_2 \quad (35)$$

3.2 Plot der Lösung

Gelöst durch das Runge-Kutta-Verfahren 2ter Ordnung.

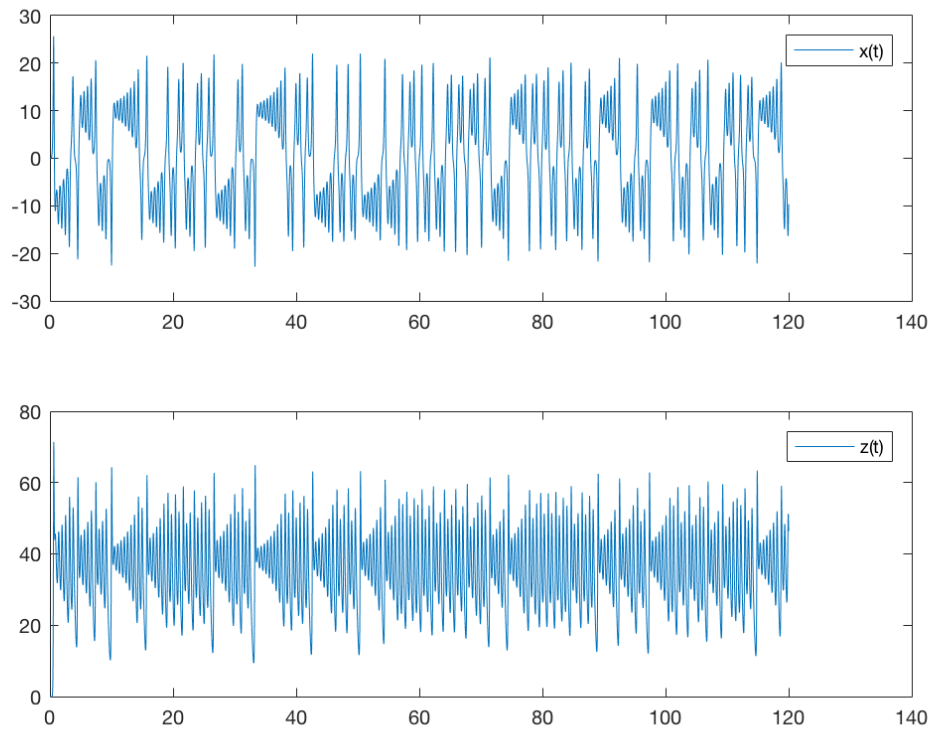


Figure 9: Vergleich von $x(t)$ und $z(t)$, $h=0.002$, $t_{end} = 120$

3.3 Schaltbild

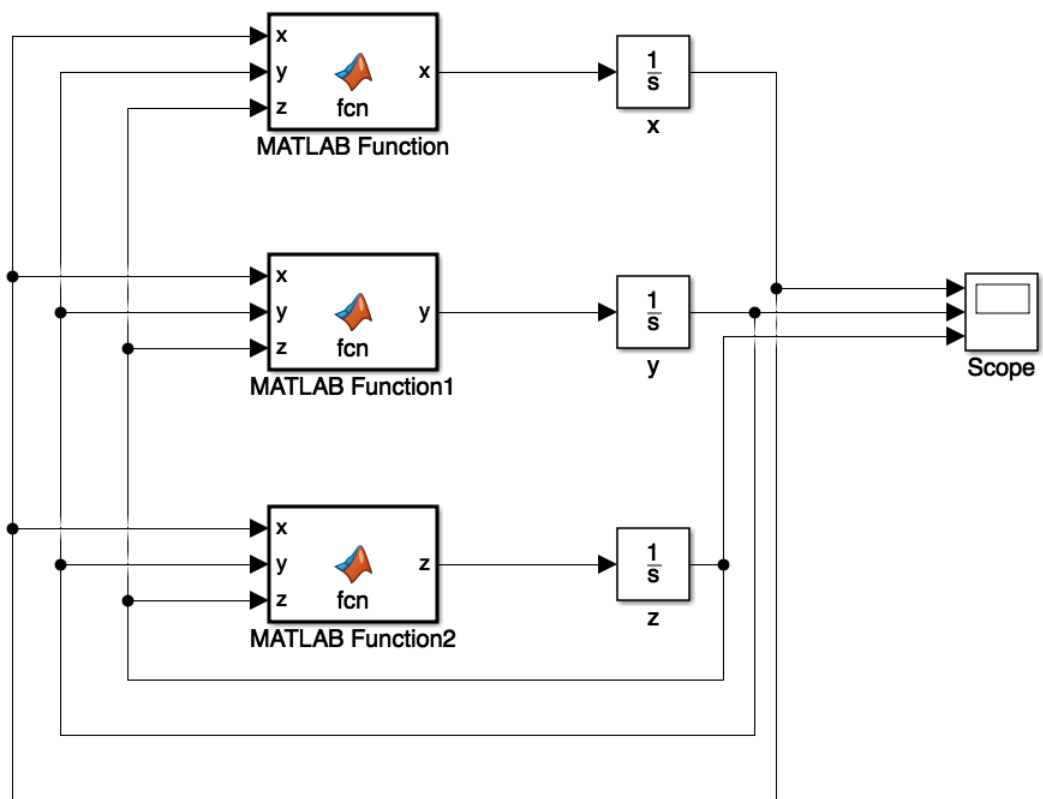


Figure 10: Simulink Schaltbild

3.4 Vergleich der Simulationen

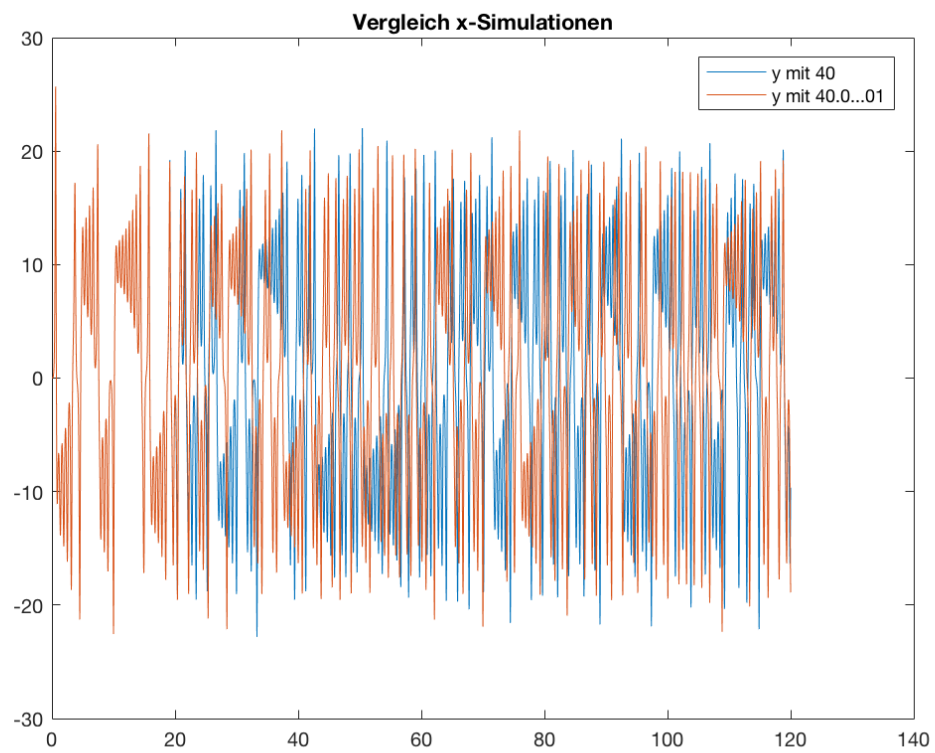


Figure 11: