Modellierung dynamischer Systeme
Abgabe der Praktikumsaufgabe 1

Maria Lüdemann und Birger Kamp

March 28, 2016

1 Teilaufgabe 1

Die zu lösende DGL ist: $y' = 10 - 500y + 5000x$, $y(0) = 1$

Schaltbild

Das Simulink-Schaltbild zu dieser Gleichung ist:

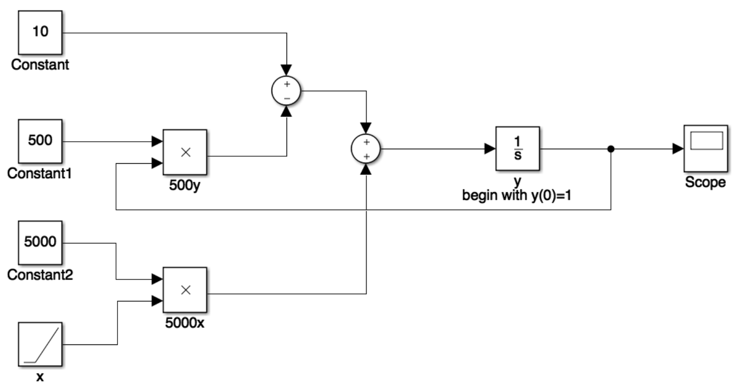

Figure 1: Simulink Schaltbild DGL1

1.1 Iterationsgleichungen

Im folgenden die Iterationsgleichungen der jeweiligen Verfahren.

1.1.1 Euler-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n + h \tag{1}$$
$$y_{n+1} = y_n + h * f(x_n, y_n) \tag{2}$$
$$y_{n+1} = y_n + h * (10 - 500y_n + 5000x_n) \tag{3}$$

1.1.2 Runge-Kutta-Verfahren 2.Ordnung

$$x_{n+1} = x_n + h \tag{4}$$
$$k_1 = h * f(x_n, y_n) \tag{5}$$
$$k_1 = h * (10 - 500y_n + 5000x_n) \tag{6}$$
$$k_2 = h * f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \tag{7}$$
$$k_2 = h * (10 - 500 * (y_n + \frac{k_1}{2}) + 5000 * (x_n + \frac{h}{2})) \tag{8}$$
$$y_{n+1} = y_n + k_2 \tag{9}$$

1.2 Plot der Lösungen

Im Folgenden sind alle Plots der Ergebnisse der Verfahren dargestellt. Es wird außerdem jeweils die Ergebnis-Differenz eines Verfahrens zur Analytischen Lösung gezeigt.

1.2.1 h=0.001

Das Ergebnis zeigt, dass die Verfahren bis x=0.01 sehr ähnliche Ergebnisse liefern, und haben eine max. Differenz von ca. 0.12. Danach laufen alle Kurven kongruent.

1.2.2 h=0.003

Das Ergebnis zeigt, dass die Verfahren bis ca. x=0.03 unterschiedliche Ergebnisse liefern. Die Ergebnisse des Runge-Kutta-Verfahrens verlaufen bis ca. x=0.03 nahezu parallel zur analytischen Lösung. In diesem Wertebereich liefert das explizite Euler-Verfahren sehr schwankende Werte. Ab ca. x=0.03 laufen alle Kurven kongruent.

1.2.3 h=0.004

Bis ca. x=0.01 laufen alle Kurven unterschiedlich. Ab dort laufen die Kurven des Runge-Kutta-Verfahrens und der analytischen Lösung kongruent. Während der ganzen Laufzeit liefert das explizite Euler-Verfahren sehr schwankende Werte, die sich mit einer Differenz von +/- 1 in der Nähe der analytischen Lösung befinden.

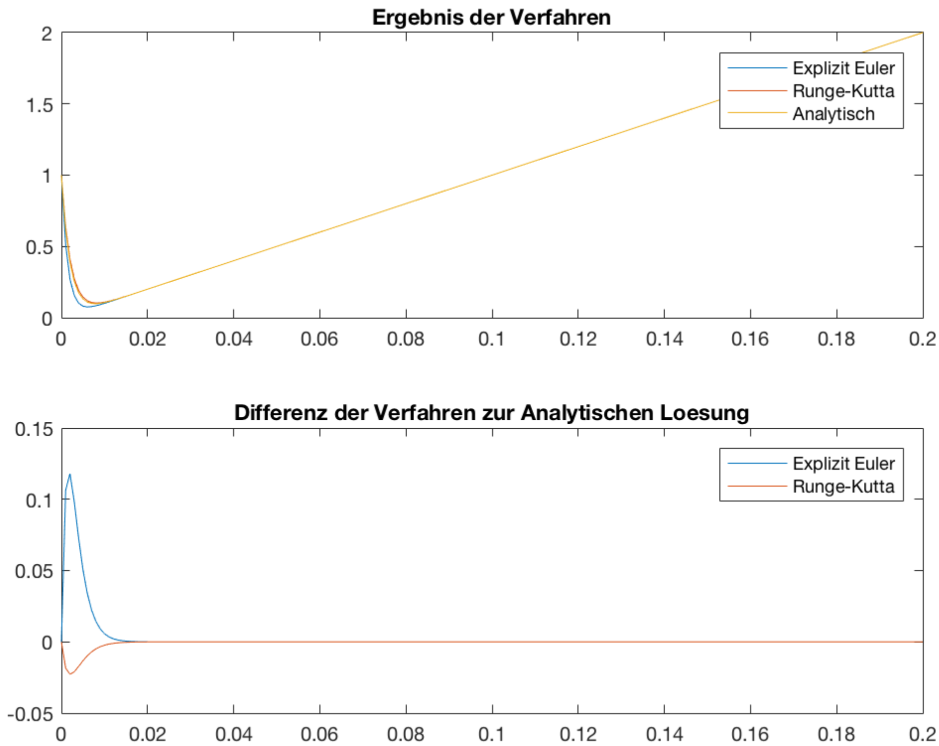

Figure 2: h=0.001

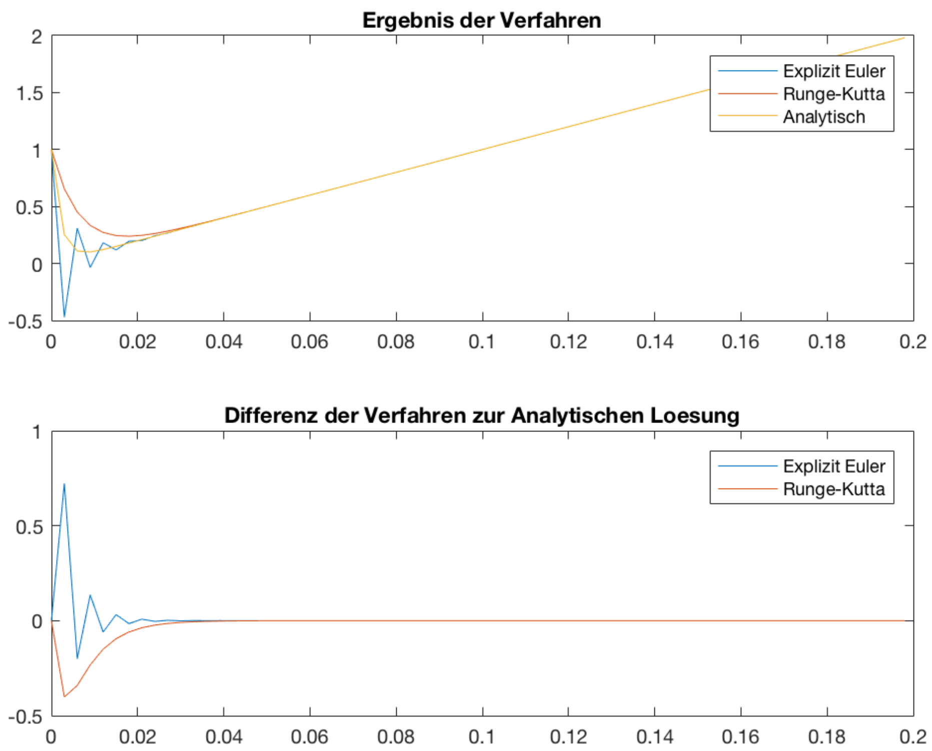

Figure 3: h=0.003

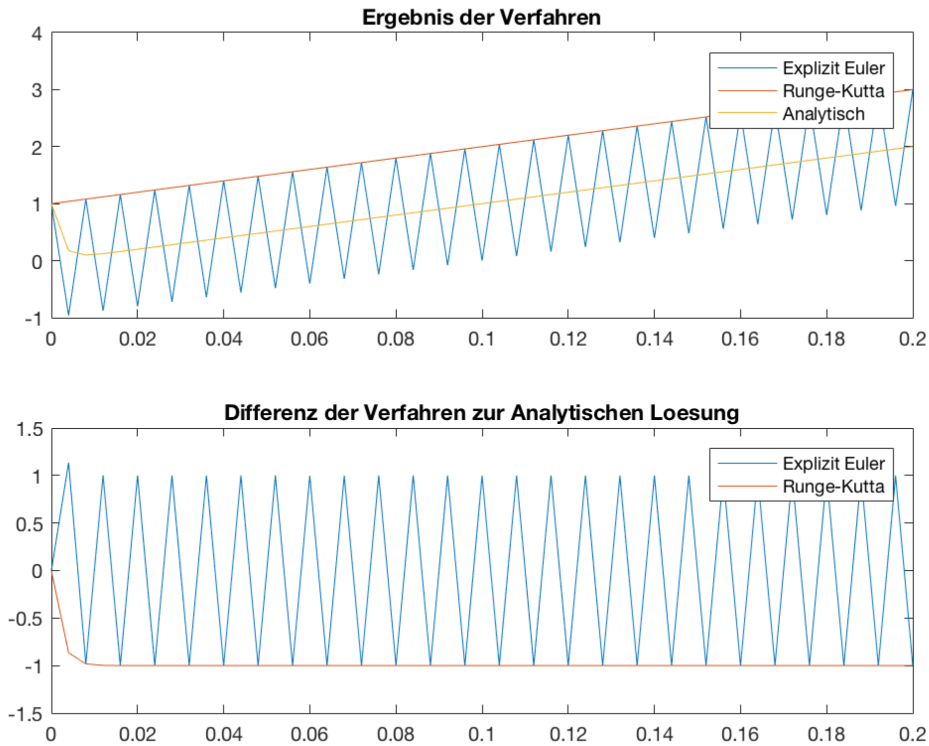

Figure 4: h=0.004

1.2.4 h=0.005

Bis ca. x=0.15 laufen alle Kurven kongruent. Ab dort schwanken die Werte des expliziten Euler-Verfahrens mit einer Differenz von ca. +/- 0.1 um die Werte der analytischen Lösung. Die Werte des Runge-Kutta-Verfahrens hingegen werden ab ca. x=0.15 exponentiell größer.

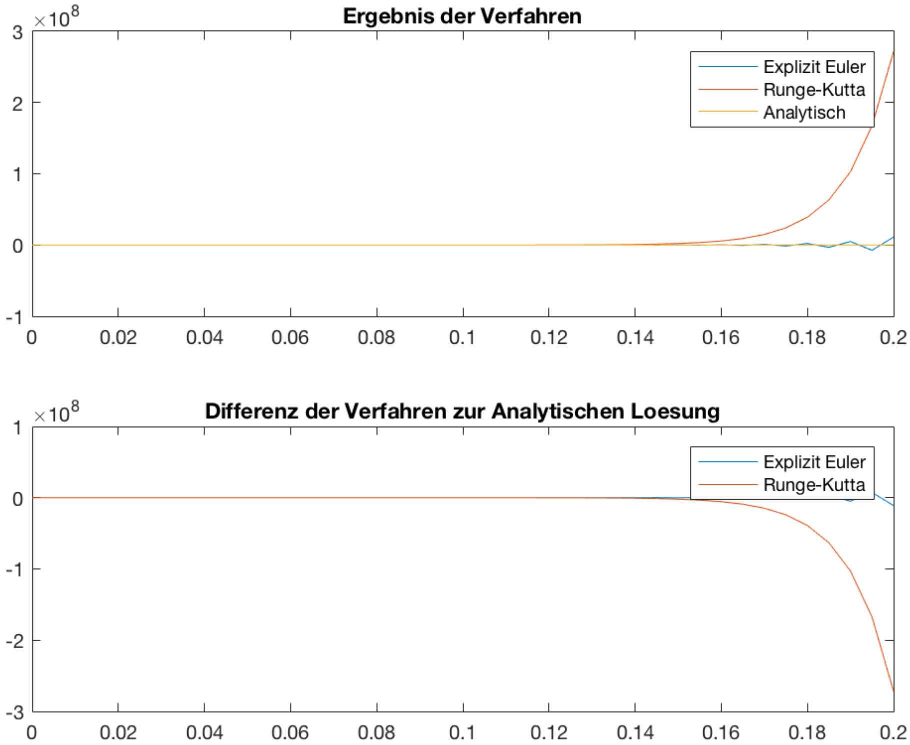

Figure 5: h=0.005

1.3 Interpretation der Ergebnisse

1.3.1 Explizites Euler-Verfahren

Die Ergebnisse zeigen, dass dieses Verfahren bei einer geringen Schrittweite genauere Ergebnisse liefert. Allerdings wird dadurch die benötigte Rechenzeit erhöht.

1.3.2 Runge-Kutta-Verfahren 2ter Ordnung

Die Ergebnisse zeigen, dass dieses Verfahren bei einer geringen Schrittweite genauere Ergebnisse liefert. Allerdings wird dadurch die benötigte Rechenzeit erhöht.

2 Teilaufgabe 2

Die zu lösende DGL ist: $y'' = 6 * (1 - y^2) * y' - y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

2.1 Schaltbild

2.2 DGLn der 1.Ordnung

$$y_1' = 6 * (1 - y_2^2) * y_2' - y_2 \tag{10}$$
$$y_2' = y_1 \tag{11}$$

2.2.1 Euler-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n + h \tag{12}$$
$$y_{n+1} = y_n + h * f(x_n, y_n) \tag{13}$$
$$y_{1_{n+1}} = y_{1_n} + h * (6 * (1 - y_{2_n}^{2_n}) * y_{1_n} - y_{2_n}) \tag{14}$$
$$y_{2_{n+1}} = y_{2_n} + h * y_{1_n} \tag{15}$$

2.2.2 Runge-Kutta-Verfahren 2.Ordnung

$$x_{n+1} = x_n + h \tag{16}$$
$$k_1 = h * f(x_n, y_n) \tag{17}$$
$$k_{1(y_1)} = h * (6 * (1 - y_{2_n}^2) * y_{1_n} - y_{2_n}) \tag{18}$$
$$k_{1(y_2)} = h * y_{1_n} \tag{19}$$
$$k_2 = h * f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \tag{20}$$
$$k_{2(y_1)} = h * (6 * (1 - (y_{2_n} + \frac{k_{1(y_2)}}{2})^2) * (y_{1_n} + \frac{k_{1(y_1)}}{2}) - (y_{2_n} + \frac{k_{1(y_2)}}{2})) \tag{21}$$
$$k_{2(y_2)} = h * (y_{1_n} + \frac{k_{1(y_2)}}{2}) \tag{22}$$
$$y_{1_{n+1}} = y_n + k_{2(y_1)} \tag{23}$$
$$y_{2_{n+1}} = y_n + k_{2(y_2)} \tag{24}$$

2.3 Plot der Lösungen

2.3.1 Euler-Verfahren

2.3.2 Runge-Kutta-Verfahren 2.Ordnung

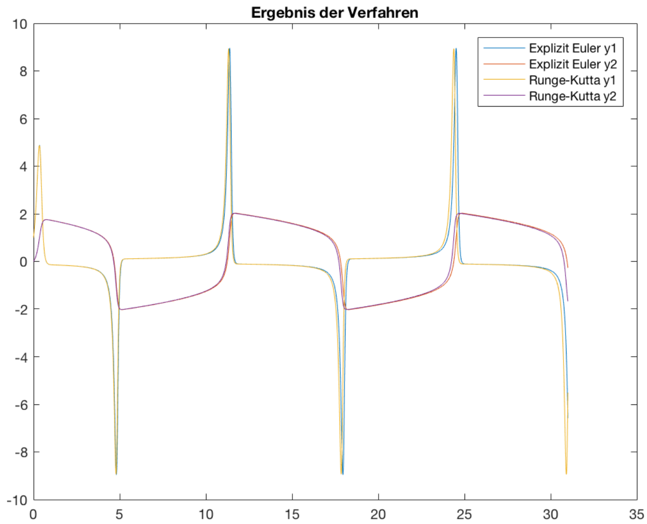

Figure 6: h=0.001

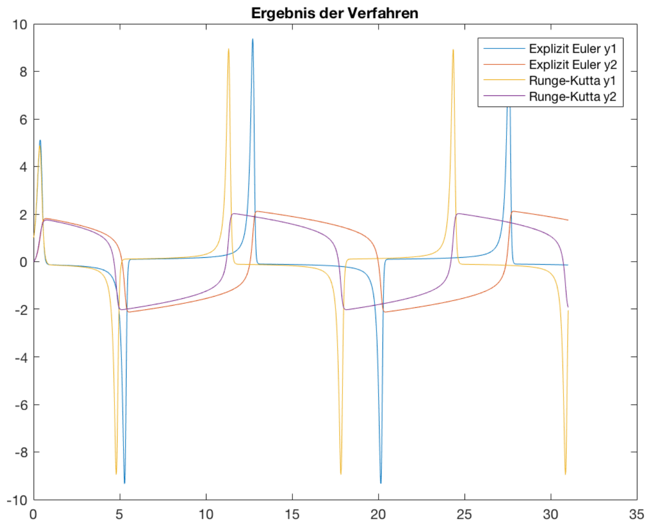

Figure 7: h=0.02