

Modellierung dynamischer Systeme

Abgabe der Praktikumsaufgabe 2

Maria Lüdemann und Birger Kamp

April 20, 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Teilaufgabe 1 - Erdumkreisung, Fluchtgeschwindigkeit und geostationäre Bahn	3
1.1	Gegebene Formeln und Konstanten	3
1.2	Konfigurierbare Parameter	4
1.3	Funktionen	4
1.3.1	Startposition	4
1.3.2	vStart	4
1.3.3	Beschleunigung	4
1.3.4	Kontakt	5
1.4	Simulink-Modell	5
1.5	Versuchsdurchführungen	6
1.5.1	Versuch 1 - Gleichmäßige Kreisbahn	6
1.5.2	Versuch 2 - Entfliehung der Erde	6
1.5.3	Versuch 3 - Erdumrundung innerhalb eines Tages	6
2	Teilaufgabe 2 - Mondumkreisung	6
3	Teilaufgabe 3 - Crazy Pendulum	6
3.1	Gegebene Versuchskonfiguration	7
3.2	Freikörperbild	8
3.3	Formeln	8
3.4	Simulink-Modell	8
3.5	Plot des Ergebnis	8
4	Teilaufgabe 4 - Schwingungsgedämpfter Tisch	9
4.1	Gegebene Versuchskonfiguration	9
4.2	Freikörperbild	10
4.3	Formeln	10
4.4	Simulink-Modell	10

4.5	Plot des Ergebnis	11
-----	-----------------------------	----

1 Teilaufgabe 1 - Erdumkreisung, Fluchtgeschwindigkeit und geostationäre Bahn

In dieser Aufgabe ist es das Ziel den Flug eines Satelliten zu modellieren die von einer Trägerrakete in eine Startposition x_0 gebracht wird. Von dort soll der Satellit antriebslos mit einer Geschwindigkeit von v_0 und einem Flugwinkel Θ weiterfliegen und die Erde umrunden. Ab der antriebslosen Phase x_0 startet unsere Simulation. Dabei haben wir wie vorgegeben den Einfluss des Satelliten auf die Erde vernachlässigt und die Simulation mithilfe des gegebenen MatLab-Skripts *Erdbahn.m* visualisiert. Die gegebenen Werte werden in Abb 2 veranschaulicht. Für die Simulation wurde aus den gegebenen Werten und angeforderten Funktionen ein Simulink Schaltbild entworfen das die Simulation durchführt.

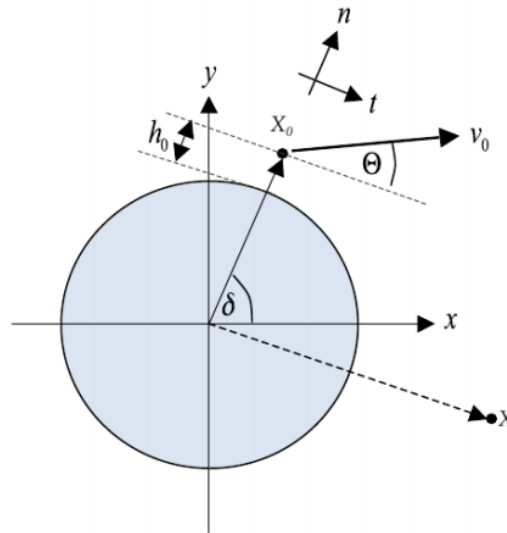


Abbildung 1:

1.1 Gegebene Formeln und Konstanten

Kraft auf den Satelliten

$$\vec{F}_S = G \cdot \frac{m_E \cdot m_S}{r^2} \cdot \vec{e}_{SE} \quad (1)$$

Erdradius

$$r_E = 6378 \text{ km} \quad (2)$$

Erdmasse

$$m_E = 5,9736 \cdot 10^{24} \text{ kg} \quad (3)$$

Gravitationskonstante

$$G = 66,743 \cdot 10^{-12} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad (4)$$

1.2 Konfigurierbare Parameter

Folgende Parameter müssen mindestens bei der Simulation konfigurierbar sein:

- v_0 Startgeschwindigkeit [km/s]
- Θ Flugwinkel [$^\circ$]
- δ Startwinkel [$^\circ$]
- h_0 Starthöhe [km]

1.3 Funktionen

Im Folgenden werden die benötigten Funktionen erklärt.

1.3.1 Startposition

Die Funktion *Startposition* berechnet den Startpositionsvektor x_0 aus den gegebenen Parametern $\gamma(^\circ)$, der Starthöhe h_0 (km) und der Konstante Erdradius.

Dafür verwenden wir eine Formel die sich aus der Geometrie ableitet da hier mithilfe der Winkel die Ankathete und Gegenkathete der Hypotenuse von $r+h_0$ berechnet werden aus denen sich die Position ableiten lässt.

Die Formel dazu beschreibt sich als

$$\vec{x} = [\cos(\delta) \cdot (r + h_0), \sin(\delta) \cdot (r + h_0)] \quad (5)$$

1.3.2 vStart

Die Funktion *vStart* berechnet den Startgeschwindigkeitsvektor \vec{v}_0 aus dem Startpositionsvektor v_0 , dem Flugwinkel θ und dem durch die Funktion *Startposition* berechneten Startpositionsvektor x_0 .

Um den Vektor bestimmen zu können werden zuerst die Einheitsvektoren in Tangential- und Normalrichtung (\vec{t}, \vec{n} aus x_0 konstruiert. Danach werden die Tangential- und Normalkomponenten der Startgeschwindigkeit (v_t, v_n) berechnet. Aus diesen Parametern lässt sich dann die Startgeschwindigkeit zusammenbauen.

Die genaue Durchführung findet sich im MatLab Code

1.3.3 Beschleunigung

Diese Funktion berechnet aus der Satellitenposition \vec{x} die Satellitenbeschleunigung. Die Kräfte die auf den Satelliten wirken summieren sich.

$$\Sigma F = m \cdot a \quad (6)$$

Daraus ergibt sich

$$a = \frac{\Sigma F}{m} \quad (7)$$

Wobei hier m die Masse des Satelliten ist und sich heraus kürzt. Daraus folgt:

$$a = \Sigma F_{SE} \quad (8)$$

Daraus ergibt sich

$$a = G \cdot \frac{m_E \cdot m_S}{r_{SE}^2} \cdot e_{\vec{SE}} \quad (9)$$

hierbei ist m_E die Masse der Erde, m_S die Masse des Satelliten, G die Gravitationskonstante, $e_{\vec{SE}}$ der Einheitsvektor vom Satelliten zur Erde und r_{SE} der Abstand vom Erdmittelpunkt zum Satelliten. Auch hier ist die Masse des Satelliten vernachlässigbar und wird in der Berechnung nicht berücksichtigt.

1.3.4 Kontakt

Der Kontakt ist eine recht simple Funktion deren Aufgabe es ist festzustellen ob der Satellit einen Erdkontakt hergestellt hat. Dies wird verwendet um die Simulation zu beenden wenn der Satellit abgestürzt ist.

Die Funktion benutzt den aktuellen Positionsvektor des Satelliten \vec{x} um daraus zu bestimmen ob die aktuelle Höhe größer ist als der Radius der Erde r_E .

1.4 Simulink-Modell

Das folgende Modell veranschaulicht das Simulink-Modell das die Simulation durchführt.

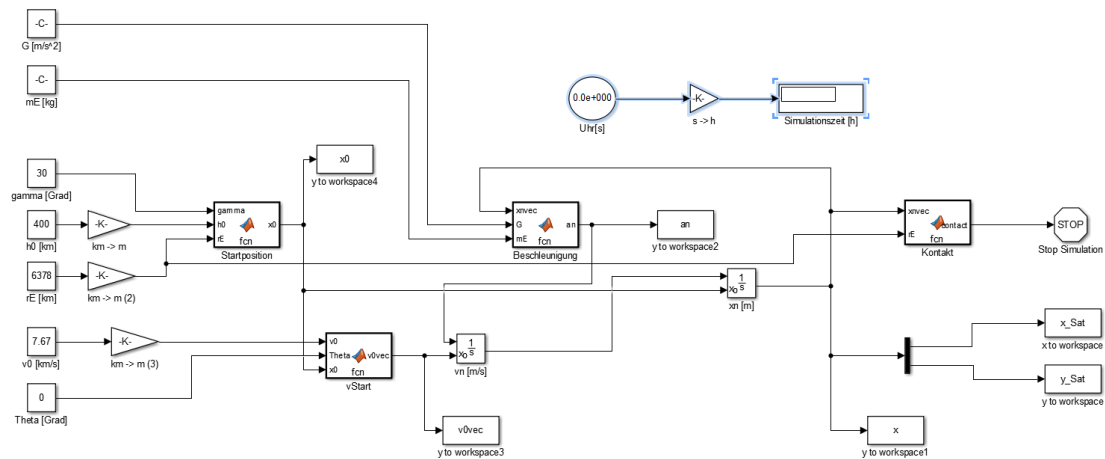


Abbildung 2: Simulink Modell für die Erdumrundung

1.5 Verschiedendurchführungen

Es wurden drei Versuche durchgeführt um mit unterschiedlichen Anfangsparametern diverses Verhalten zu provozieren.

1.5.1 Versuch 1 - Gleichmäßige Kreisbahn

Dieser Versuch wurde mit den Versuchsparametern $\delta = 30^\circ, h_0 = 400km, \Theta = 0^\circ$ durchgeführt.

1.5.2 Versuch 2 - Entfliehung der Erde

In diesem Versuch soll der Parameter v_0 bestimmt werden, sodass der Satellit gerade der Erde entflieht. Dafür werden folgende Startparameter $\delta = 30^\circ, h_0 = 400km, \Theta = 0^\circ$ und eine Simulationszeit $1 \cdot 10^6$ von angenommen werden.

1.5.3 Versuch 3 - Erdumrundung innerhalb eines Tages

In diesem Versuch sollen die Parameter h_0 und v_0 so gewählt werden, dass der Satellit genau einen Tag benötigt um die Erde zu umkreisen.

Es ergab sich, dass der Versuch mit den folgenden Parametern durchgeführt werden muss um das gewünschte Ergebnis zu erreichen. $\delta = 30^\circ, h_0 = \Theta = 0^\circ$

2 Teilaufgabe 2 - Mondumkreisung

In der Teilaufgabe 2 ging es darum das Modell aus Aufgabe 1 so umzubauen, dass der Satellit nicht mehr nur um die Erde sondern nun auch um den Mond kreist. Dafür wurden folgende Parameter hinzugefügt:

Mondposition(fest)

$$x_M = (0, -380000)^T km \quad (10)$$

Mondmasse

$$m_M = 7,3480 \cdot 10^{22} kg \quad (11)$$

Dabei ist zu beachten, dass der Mond als feststehend angesehen wird.

3 Teilaufgabe 3 - Crazy Pendulum

In dieser Teilaufgabe gilt es, die Bewegung einer Pendelkonstruktion zu berechnen. Der Versuchsaufbau ist in Abb. 3 zu sehen. In diesem Aufbau übt immer nur eine der Federn Zugkraft auf die Seiltrommel aus, während die andere Feder keine Kraft ausübt. Befindet sich das Pendel in senkrechter Position, dann übt keine der Federn eine Kraft aus. Der Einfluss der Pendelstange und der Seiltrommel werden nicht beachtet.

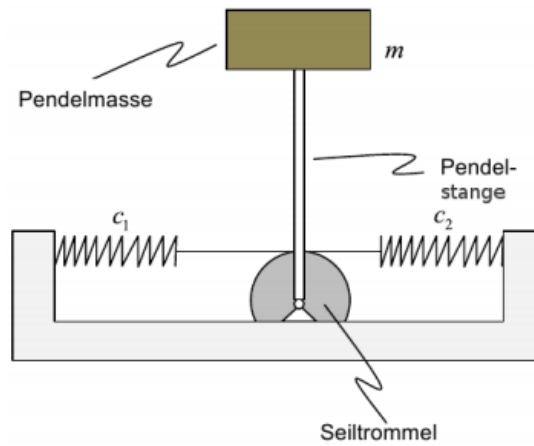


Abbildung 3:

3.1 Gegebene Versuchskonfiguration

Dieser Versuch wurde mit folgenden Parametern durchgeführt:

- $L = 1m$
- $m = 10kg$
- $r = 0.3m$
- $w = 0.3m$
- $h = 0.2m$
- $c_1 = 5000N/m$
- $c_2 = 500\,000N/m$
- $\varphi(0) = 45^\circ$

3.2 Freikörperbild

3.3 Formeln

c ist abhängig von $\varphi(t)$: es gilt entweder c_1 oder c_2 .

$$M_p = m \cdot g \cdot \sin(\varphi) \cdot (L + \frac{h}{2}) \quad (12)$$

$$M_s = -\varphi \cdot c \cdot r^2 \quad (13)$$

$$M_g = M_p + M_s \quad (14)$$

$$J_p = \frac{1}{12} \cdot m \cdot (h^2 + w^2) \quad (15)$$

$$J_g = J_p + m \cdot (L + \frac{h}{2})^2 \quad (16)$$

$$a = M_g / J_g \quad (17)$$

a wird in der Einheit Grad/s^2 angegeben.

3.4 Simulink-Modell

Die Berechnung von a erfolgt in der Embedded-MatLab-Function f_{cn} .

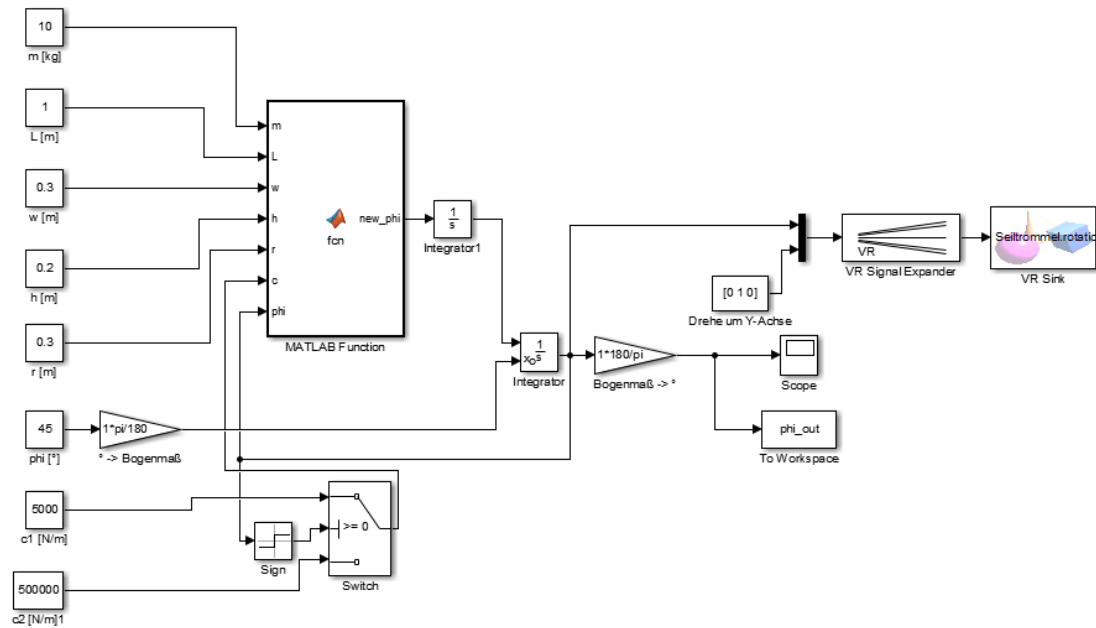


Abbildung 4:

3.5 Plot des Ergebnis

Die Abbildung 5 zeigt $\varphi(t)$ des Modells als Plot. Die Abstände und Maximalstellen der Kurve verändern sich während der Laufzeit nicht nennenswert. Sie bleiben nahezu gleich,

eine Veränderung ist nur an der dritten Nachkommastelle zu sehen.

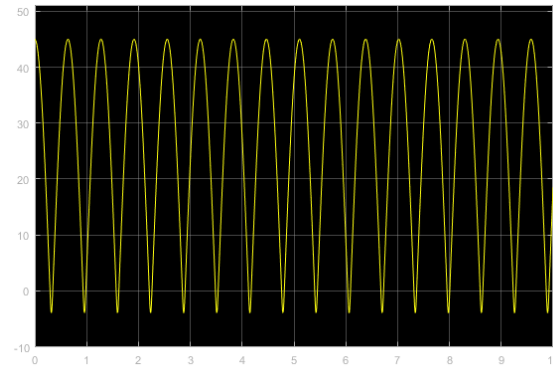


Abbildung 5:

4 Teilaufgabe 4 - Schwingungsgedämpfter Tisch

In dieser Teilaufgabe wird ein schwingungsgedämpfter Tisch simuliert. Der Versuchsaufbau ist in Abb. 6 zu sehen. Der Startbewegungsimpuls wird über u gegeben. Die Massen m_1 und m_2 reagieren darauf mit den Auslenkungen x_1 und x_2 .

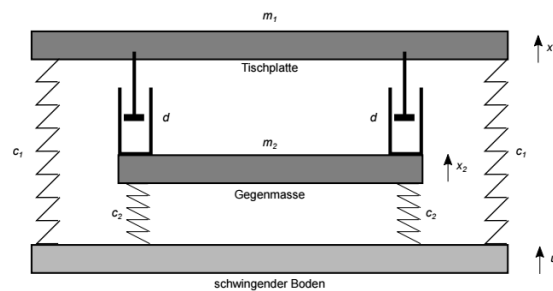


Abbildung 6:

4.1 Gegebene Versuchskonfiguration

Dieser Versuch wurde mit folgenden Parametern durchgeführt:

- $c_1 = 15\,000\text{N/m}$
- $c_2 = 10\,000\text{N/m}$
- $d = 600\text{Ns/m}$
- $m_1 = 60\text{kg}$
- $m_2 = 450\text{kg}$

4.2 Freikörperbild

4.3 Formeln

Folgende Formeln werden zur Berechnung der einzelnen Komponenten verwendet:

$$\Delta x_1 = x_1 - u \quad (18)$$

$$\Delta x_2 = x_2 - u \quad (19)$$

$$\Delta v = v_1 - v_2 \quad (20)$$

$$F_{G1} = m_1 \cdot g \quad (21)$$

$$F_{G2} = m_2 \cdot g \quad (22)$$

$$F_{c1} = 2 \cdot \Delta x_1 \cdot c_1 \quad (23)$$

$$F_{c2} = 2 \cdot \Delta x_2 \cdot c_2 \quad (24)$$

$$F_D = 2 \cdot \Delta v \cdot d \quad (25)$$

Ruhelage Tisch:

$$x_1(0) = -\frac{m_1 \cdot g}{c_1 \cdot 2} \quad (26)$$

Ruhelage Gegengewicht:

$$x_2(0) = -\frac{m_2 \cdot g}{c_2 \cdot 2} \quad (27)$$

Beschleunigung Tisch:

$$a_1 = \frac{-F_{G1} - F_D - F_{c1}}{m_1} \quad (28)$$

Beschleunigung Gegengewicht:

$$a_2 = \frac{-F_{G2} + F_D - F_{c2}}{m_2} \quad (29)$$

4.4 Simulink-Modell

Die Berechnung von $x_1(t)$ erfolgt in folgendem Simulink-Modell:

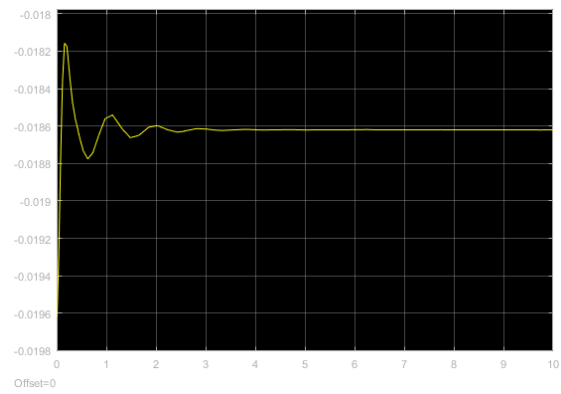


Abbildung 8: