

# Modellierung dynamischer Systeme

## Abgabe der Praktikumsaufgabe 1

Maria Lüdemann und Birger Kamp

March 29, 2016

### 1 Teilaufgabe 1

Die folgende DGL ist gegeben:  $y' = 10 - 500y + 5000x$ ,  $y(0) = 1$

#### Schaltbild

Das Simulink-Schaltbild zu dieser Gleichung ist:

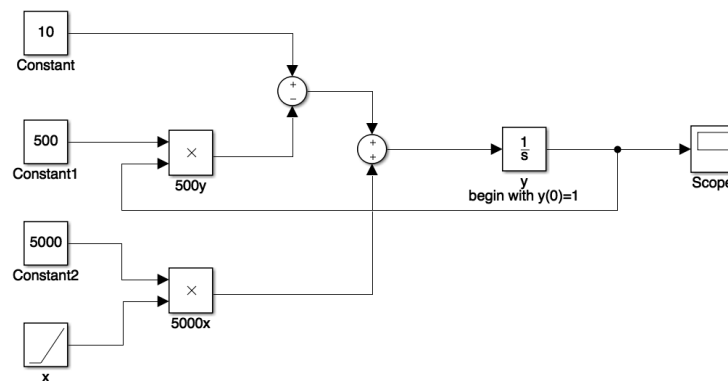


Figure 1: Simulink Schaltbild DGL1

#### 1.1 Iterationsgleichungen

Im Folgenden die Iterationsgleichungen der jeweiligen Verfahren.

### 1.1.1 Euler-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n + h \quad (1)$$

$$y_{n+1} = y_n + h * f(x_n, y_n) \quad (2)$$

$$y_{n+1} = y_n + h * (10 - 500y_n + 5000x_n) \quad (3)$$

### 1.1.2 Runge-Kutta-Verfahren 2.Ordnung

$$x_{n+1} = x_n + h \quad (4)$$

$$k_1 = h * f(x_n, y_n) \quad (5)$$

$$k_1 = h * (10 - 500y_n + 5000x_n) \quad (6)$$

$$k_2 = h * f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \quad (7)$$

$$k_2 = h * (10 - 500 * (y_n + \frac{k_1}{2}) + 5000 * (x_n + \frac{h}{2})) \quad (8)$$

$$y_{n+1} = y_n + k_2 \quad (9)$$

## 1.2 Plot der Lösungen

Im Folgenden sind alle Plots der Ergebnisse der Verfahren dargestellt. Es wird außerdem jeweils die Ergebnis-Differenz eines Verfahrens zur analytischen Lösung gezeigt.

### 1.2.1 h=0.001

Das Ergebnis zeigt, dass die Verfahren bis  $x=0.01$  sehr ähnliche Ergebnisse liefern und haben eine max. Differenz von ca. 0.12. Danach laufen alle Kurven kongruent.

### 1.2.2 h=0.003

Das Ergebnis zeigt, dass die Verfahren bis ca.  $x=0.03$  unterschiedliche Ergebnisse liefern. Die Ergebnisse des Runge-Kutta-Verfahrens verlaufen bis ca.  $x=0.03$  nahezu parallel zur analytischen Lösung. In diesem Wertebereich liefert das explizite Euler-Verfahren sehr schwankende Werte. Ab ca.  $x=0.03$  laufen alle Kurven kongruent.

### 1.2.3 h=0.004

Bis ca.  $x=0.01$  laufen alle Kurven unterschiedlich. Ab dort laufen die Kurven des Runge-Kutta-Verfahrens und der analytischen Lösung kongruent. Während der ganzen Laufzeit liefert das explizite Euler-Verfahren sehr schwankende Werte, die sich mit einer Differenz von +/- 1 in der Nähe der analytischen Lösung befinden.

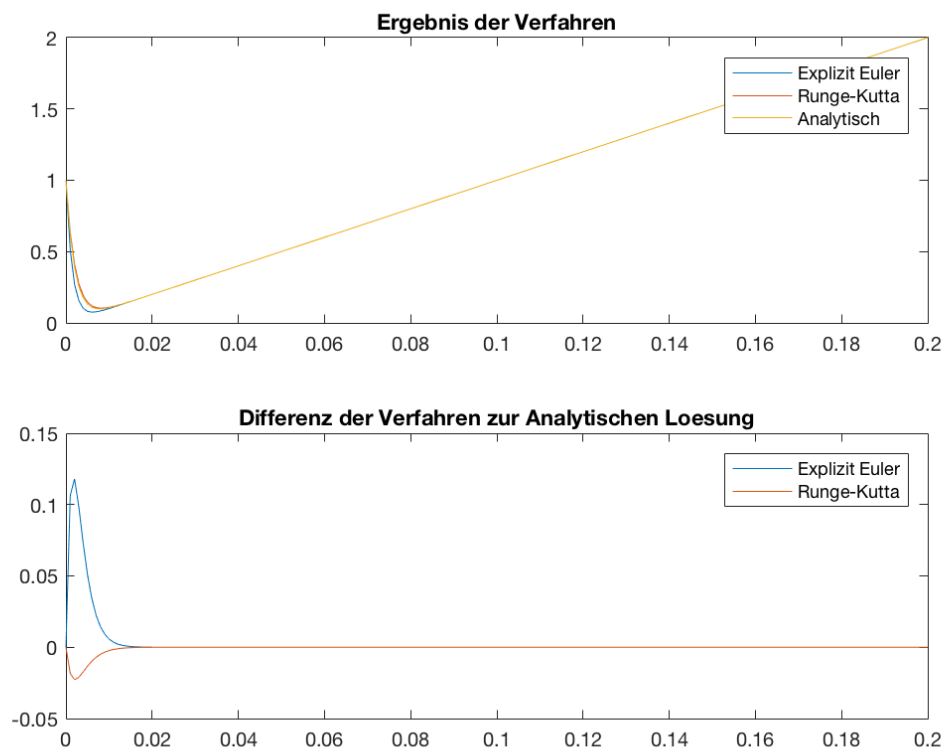


Figure 2:  $h=0.001$

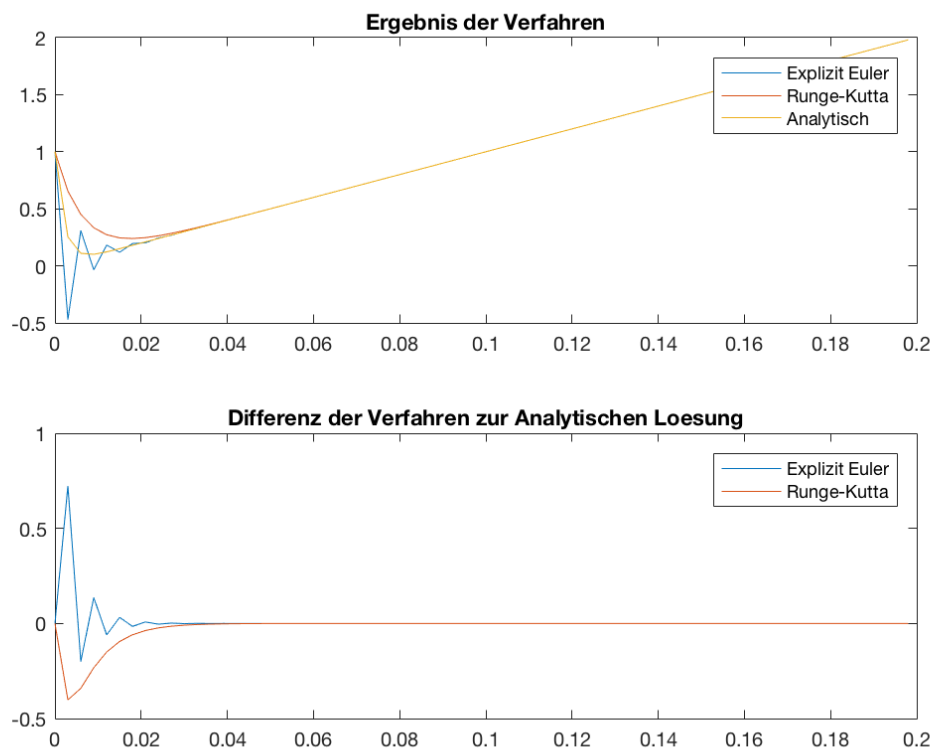


Figure 3:  $h=0.003$

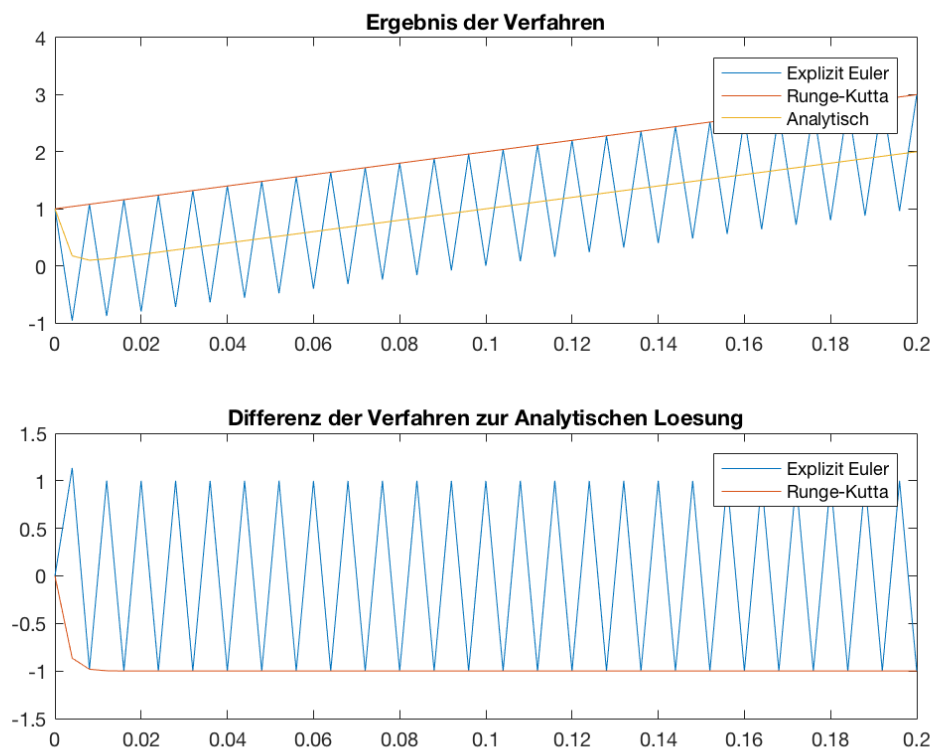


Figure 4:  $h=0.004$

### 1.2.4 $h=0.005$

Bis ca.  $x=0.15$  laufen alle Kurven kongruent. Ab dort schwanken die Werte des expliziten Euler-Verfahrens mit einer Differenz von ca.  $\pm 0.1$  um die Werte der analytischen Lösung. Die Werte des Runge-Kutta-Verfahrens hingegen werden ab ca.  $x=0.15$  exponentiell größer.

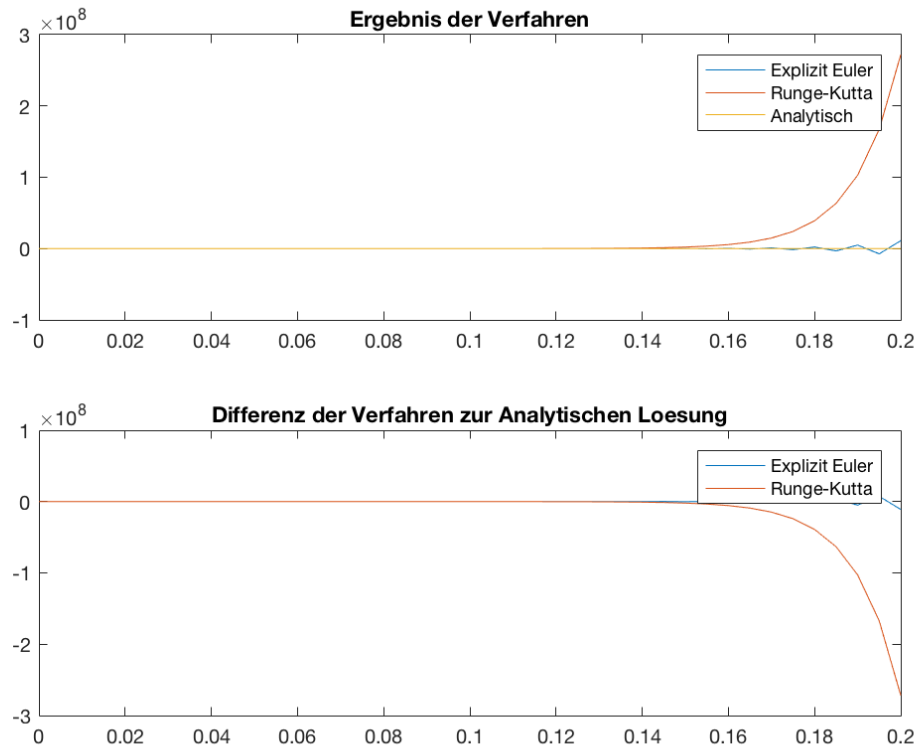


Figure 5:  $h=0.005$

## 1.3 Interpretation der Ergebnisse

### 1.3.1 Explizites Euler-Verfahren

Die Ergebnisse zeigen, dass dieses Verfahren bei einer geringen Schrittweite genauere Ergebnisse liefert. Allerdings wird dadurch die benötigte Rechenzeit erhöht.

### 1.3.2 Runge-Kutta-Verfahren 2ter Ordnung

Die Ergebnisse zeigen, dass dieses Verfahren bei einer geringen Schrittweite genauere Ergebnisse liefert. Allerdings wird dadurch die benötigte Rechenzeit erhöht.

## 2 Teilaufgabe 2

Die folgende DGL ist gegeben:  $y'' = 6 * (1 - y^2) * y' - y$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$

### 2.1 Schaltbild

### 2.2 DGLn der 1.Ordnung

$$\tilde{y} = y' \quad (10)$$

$$\tilde{y}' = 6 * (1 - y^2) * \tilde{y} - y \quad (11)$$

$$y(0) = 0 \quad (12)$$

$$\tilde{y}(0) = 1 \quad (13)$$

### 2.3 Iterationsgleichungen

#### 2.3.1 Euler-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n + h \quad (14)$$

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h * (6 * (1 - y_n^2) * \tilde{y}_n - y_n) \quad (15)$$

$$y_{n+1} = y_n + h * \tilde{y}_n \quad (16)$$

#### 2.3.2 Runge-Kutta-Verfahren 2.Ordnung

$$x_{n+1} = x_n + h \quad (17)$$

$$\tilde{k}_1 = h * (6 * (1 - y_n^2) * \tilde{y}_n - y_n) \quad (18)$$

$$k_1 = h * \tilde{y}_n \quad (19)$$

$$\tilde{k}_2 = h * (6 * (1 - (y_n + \frac{k_1}{2})^2) * (\tilde{y}_n + \frac{\tilde{k}_1}{2}) - (y_n + \frac{k_1}{2})) \quad (20)$$

$$k_2 = h * (\tilde{y}_n + \frac{\tilde{k}_1}{2}) \quad (21)$$

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + \tilde{k}_2 \quad (22)$$

$$y_{n+1} = y_n + k_2 \quad (23)$$

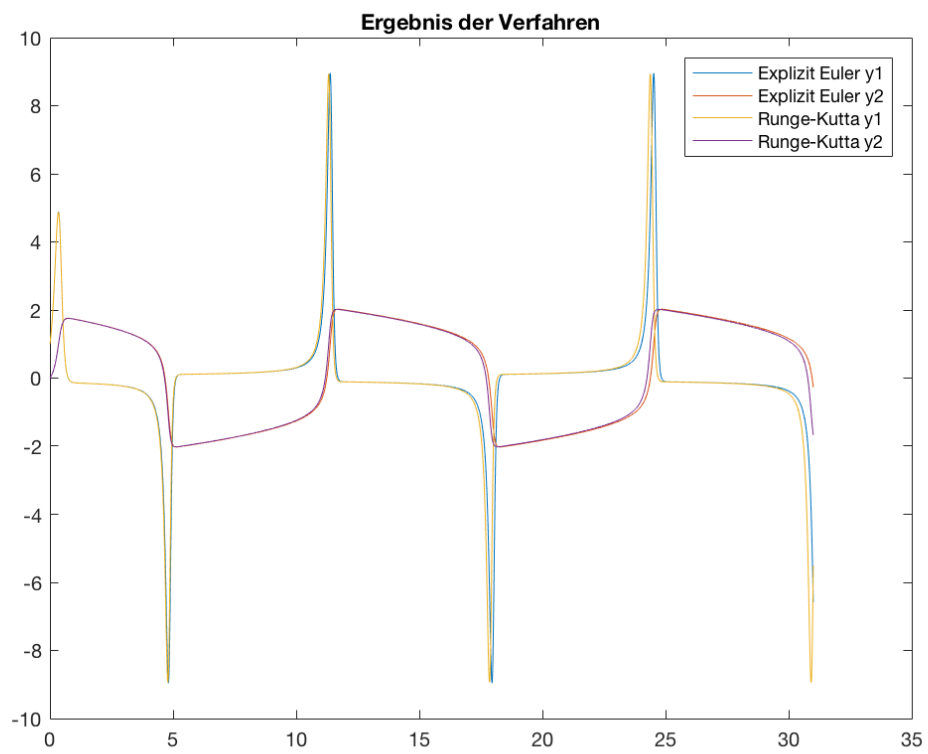


Figure 6:  $h=0.001$



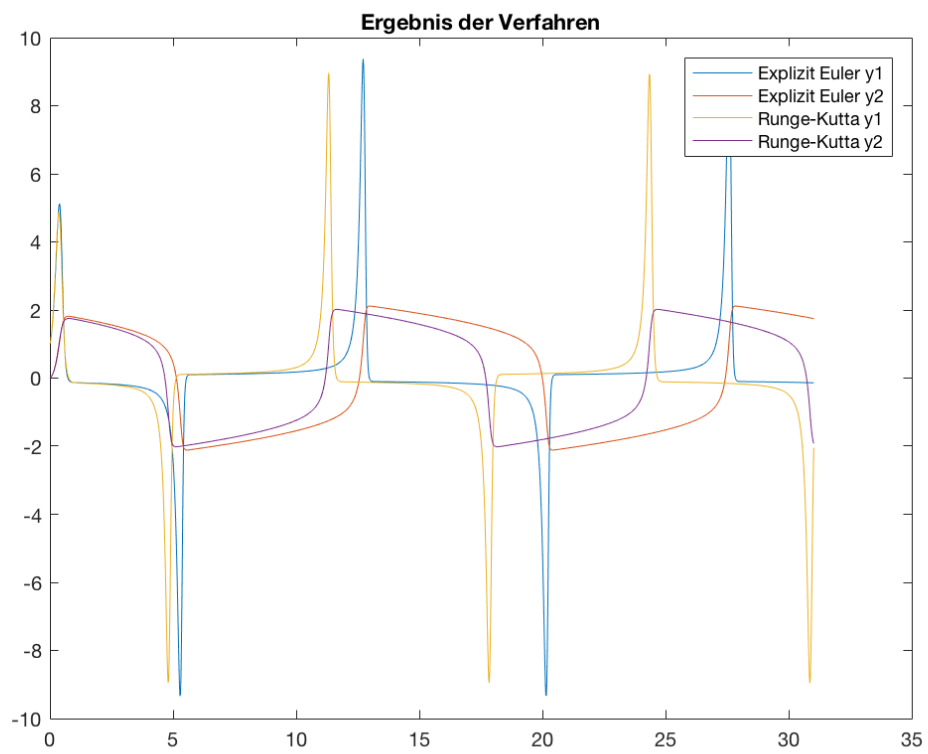


Figure 7:  $h=0.02$

## 2.4 Plot der Lösungen

### 2.4.1 Euler-Verfahren

### 2.4.2 Runge-Kutta-Verfahren 2.Ordnung

## 3 Teilaufgabe 3

Es ist folgendes DGL-System gegeben:

$$x(0) = 0,01 \quad (24)$$

$$y(0) = 0,01 \quad (25)$$

$$z(0) = 0,00 \quad (26)$$

$$x' = -10 * (x * y) \quad (27)$$

$$y' = (40 - z) * x - y \quad (28)$$

$$z' = x * y - 2,67 * z \quad (29)$$

### 3.1 Iterationsgleichungen

Im Folgenden die Iterationsgleichungen für das Runge-Kutta-Verfahren 2ter Ordnung bezogen auf das gegebene DGL-System.

$$x_{n+1} = x_n + h \quad (30)$$

$$k_1 = h * f(x_n, y_n, z_n) \quad (31)$$

$$k_{1(x)} = h * (-10 * (x_n * y_n)) \quad (32)$$

$$k_{1(y)} = h * ((40 - z) * x_n - y_n) \quad (33)$$

$$k_{1(z)} = h * (x_n * y_n - 2,67 * z_n) \quad k_2 = h * f(x_n + \frac{k_{1(x)}}{2}, y_n + \frac{k_{1(y)}}{2}, z_n + \frac{k_{1(z)}}{2}) \quad (34)$$