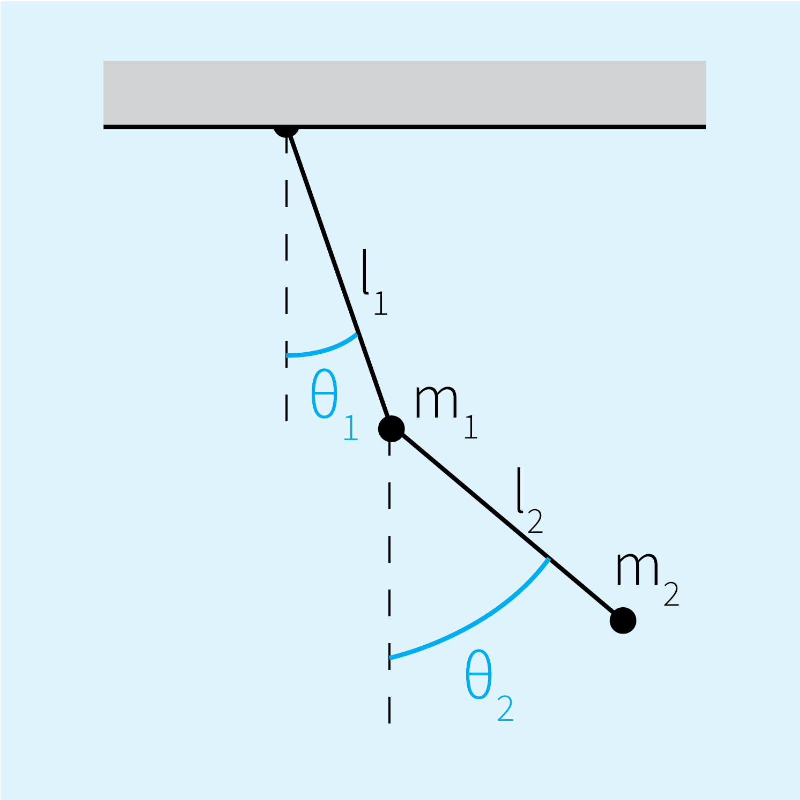
Kettősinga modellezése Sympy segítségével

Feladatkitűzés

Modellezzünk egy kettősingát adott (ismert) l_1 és l_2 hosszú rudakkal és végpontjaikra helyezett m_1 és m_2 nagyságú tömegekkel az alábbi ábárán látható módon:



Könnyen látható, hogy a kettősinga 2 DoF (szabadsági fokú) rendszert alkot. A mozgást leíró időfüggő koordináták legyenek a $\theta_1(t)$ és $\theta_2(t)$ szögek, szintén az ábra szerinti értelemben. A rendszer kezdeti állapota $\theta_1(0)$, $\theta_2(0)$, $\dot{\theta}_1(0)$ és $\dot{\theta}_2(0)$ adott, a kettősingára mozgása során csak a gravitációs erő hat - azaz a rendszert kívülről gerjesztő hatások nem érik, és a súrlódástól is eltekintünk.

Levezetés

Az m_1 és m_2 tömegpontok helyét az x-y koordinátarendszerben, geometriai úton könnyen megkaphatjuk:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \sin(\theta_1) \\ -l_1 \cos(\theta_1) \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2) \\ -l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Ismeretes, hogy a mozgásegyenlet származtatható a *másodfajú Lagrange-egyenlet* alapján, az alábbi módon:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} + \frac{\partial U}{\partial \theta_1} = 0 \tag{1.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} + \frac{\partial U}{\partial \theta_2} = 0 \tag{1.4}$$

Ahol a rendszer T *kinetikus energiája* és U *potenciális energiája* felírható, mint:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \tag{1.5}$$
$$U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \tag{1.6}$$

Megoldás

Szükséges importok a feladatmegoldáshoz

In [1]:
```
# Feladatmegoldás
import numpy as np                                          # Alap matematikai eszköztár
import sympy as sp                                          # Szimbolikus levezetés
from scipy.integrate import odeint                          # A mozgásegyenletek numerikus megol

# Animáció
import matplotlib.pyplot as plt                             # Plotolás
from matplotlib import animation                            # Animálás
from matplotlib.animation import PillowWriter               # .gif formátumba exportálás
```

Fizikai mennyiségek definiálása

In [2]:
```
# Az adatok definiálása
t, g, l_1, l_2, m_1, m_2 = sp.symbols("t g l_1 l_2 m_1 m_2")

# A (keresett) függvények definiálása
θ_1, θ_2 = sp.symbols(r"\theta_1, \theta_2", cls=sp.Function)

# Az időfüggés explicit megadása
θ_1, θ_2 = θ_1(t), θ_2(t)
```

A levezetéshez szükségünk van az első és második deriváltakra is. A `sp.diff()` függvény segítségével származtathatjuk a deriváltakat az alábbi módon:

In [3]:
```
θ_1d = sp.diff(θ_1, t)
θ_2d = sp.diff(θ_2, t)
θ_1dd = sp.diff(θ_1d, t)
θ_2dd = sp.diff(θ_2d, t)
```

A mozgásegyenlet felírása Sympy segítségével (levezetés)

Az (1.1) és (1.2) egyenletek alapján fel tudjuk írni az (abszolút) x-y koordinátarendszerben a tömegpontok (m_1, m_2) helyét:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \sin(\theta_1) \\ -l_1 \cos(\theta_1) \end{bmatrix} \tag{1.1}$$
$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2) \\ -l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

In [4]:
```
# Az m_1 helye az abszolút koordinátarendszerben
x_1 = l_1*sp.sin(θ_1)
y_1 = -l_1*sp.cos(θ_1)

# Az m_2 helye az abszolút koordinátarendszerben
x_2 = l_1*sp.sin(θ_1)+l_2*sp.sin(θ_2)
y_2 = -l_1*sp.cos(θ_1)-l_2*sp.cos(θ_2)
```

Az (1.5) és (1.6) egyenletek alapján felírhatjuk a T *kinetikus* és U *potenciális energiákat*:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \tag{1.5}$$
$$U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \tag{1.6}$$

In [5]:
```
# A kinetikus energia
T_1 = 1/2*m_1*(sp.diff(x_1,t)**2+sp.diff(y_1,t)**2)
T_2 = 1/2*m_2*(sp.diff(x_2,t)**2+sp.diff(y_2,t)**2)
T = T_1+T_2
display(T)

# A potenciális energia
U = m_1*g*y_1+m_2*g*y_2
display(U)
```

$$0.5m_1\left(l_1^2\sin^2\left(\theta_1(t)\right)\left(\frac{d}{dt}\theta_1(t)\right)^2 + l_1^2\cos^2\left(\theta_1(t)\right)\left(\frac{d}{dt}\theta_1(t)\right)^2\right) + 0.5m_2\left(\left(l_1\sin\left(\theta_1(t)\right)\frac{d}{d}\right.\right.$$

$$-gl_1m_1\cos\left(\theta_1(t)\right) + gm_2\left(-l_1\cos\left(\theta_1(t)\right) - l_2\cos\left(\theta_2(t)\right)\right)$$

Ezt követően az (1.3) és (1.4) egyenletekből adódik a mozgásegyenlet:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} + \frac{\partial U}{\partial \theta_1} = 0 \tag{1.3}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} + \frac{\partial U}{\partial \theta_2} = 0 \tag{1.4}$$

In [6]:
```
# Másodfajú Lagrange ϑ_1-re:
LagEq1 = sp.diff(sp.diff(T,θ_1d),t).simplify() - sp.diff(T, θ_1) + sp.diff(U, θ_1)

# Másodfajú Lagrange ϑ_2-re:
LagEq2 = sp.diff(sp.diff(T,θ_2d),t).simplify() - sp.diff(T, θ_2) + sp.diff(U, θ_2)
```

A mozgásegyenlet numerikus megoldása

Közönséges differenciálegyenletek (ODE) numerikus megoldása során az alábbi eljárást követjük:

1. Rendezzük az egyenleteiket a legmagasabb rendű deriváltra! Jelölje a legnagyobb rendű deriváltat n.
2. Ha $n \neq 1$, azaz legalább másodrendű a differenciálegyenletünk, akkor alkalmazzuk a **Cauchy-átírást**! Ez mindig megtehető és ennek segítségével egy n-edrendű ODE átírható n darab, elsőrendű ODE-re. A módszer lényege, hogy az eredeti függvényünk deriváltjaira *bevezetünk új függvényeket*.
3. A Cacuhy-átírás során kapott ODE-rendszert foglaljuk egy $\vec{S}$ vektorba az egyszerűség kedvéért. (S: system)
4. Írjuk fel a rendszer **kezdeti feltételeit** (IVP)!
5. Végül **numerikus integrálás** segítségével megkapjuk az eredményt. Ezt már fel tudjuk dolgozni, ábrázolni, esetleg animálni.

1. lépés: Rendezzük a mozgásegyenleteket az `sp.solve()` függvény segítségével `θ_1dd(t)` -re és `θ_2dd(t)` -re (azaz a második deriváltakra)! Erre a numerikus megoldás során lesz szükségünk. Figyelem: az alábbi szintaxisban feltételezzük, hogy az egyenletek már **nullára redukált** állapotban vannak!

In [7]:
```
solution = sp.solve([LagEq1, LagEq2], (θ_1dd, θ_2dd), simplify=False, rational=False
```

2. lépés: Amit most megkaptunk az nem más, mint a második deriváltak:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta_1(t)}{\mathrm{d}t^2} = \ldots \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}^2\theta_2(t)}{\mathrm{d}t^2} = \ldots$$

Ami problémát jelent a numerikus eszköztárunkban, hogy a **numerikus integrálást csak elsőrendű differenciálegyenleten lehet elvégezni!** Ami viszont jó hír, hogy a *Cauchy-átírás* segítségével könnyedén előállíthatjuk az elsőrendű egyenleteket. Ehhez vezessünk be új változókat az első deriváltakra:

$$Q_1 := \frac{\mathrm{d}\theta_1}{dt} \qquad\qquad Q_2 := \frac{\mathrm{d}\theta_2}{dt}$$

Ezeket tovább deriválva:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q_1 = \frac{\mathrm{d}^2\theta_1}{\mathrm{d}t^2} = \ldots \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q_2 = \frac{\mathrm{d}^2\theta_2}{\mathrm{d}t^2} = \ldots$$

Amire még ezen felül szükségünk van, hogy a **szimbolikus egyenleteket átírjuk numerikus egyenletekké** az `sp.lambdify(<argumentum(ok)>, <függvény>)` függvény segítségével. Az úgynevezett *lambda függvények* pusztán csak egy hatékony és gyors megoldást kínálnak arra, hogy numerikusan kiszámítsunk bonyolult összefüggéseket.

In [8]:
```
# Q1 és Q2 deriváltja
dQ_1n = sp.lambdify((t,g,l_1, l_2, m_1, m_2, θ_1, θ_2, θ_1d, θ_2d), solution[θ_1dd])
dQ_2n = sp.lambdify((t,g,l_1, l_2, m_1, m_2, θ_1, θ_2, θ_1d, θ_2d), solution[θ_2dd])

# ϑ_1 és ϑ_2 deriváltja
dθ_1n = sp.lambdify(θ_1d, θ_1d)
dθ_2n = sp.lambdify(θ_2d, θ_2d)
```

3. lépés: Foglaljuk össze egy $\vec{S} = (\theta_1,\ Q_1,\ \theta_2,\ Q_2)$ vektorban a rendszer paramétereit! Ekkor ennek időbeli deriváltja az előzőekben definiált lambda függvényekkel:

In [9]:
```
def dSdt(S, t, g, l_1, l_2, m_1, m_2):
    θ_1, Q_1, θ_2, Q_2 = S
    return [
        dθ_1n(Q_1),
        dQ_1n(t, g, l_1, l_2, m_1, m_2, θ_1, θ_2, Q_1, Q_2),
        dθ_2n(Q_2),
        dQ_2n(t, g, l_1, l_2, m_1, m_2, θ_1, θ_2, Q_1, Q_2),
    ]
```

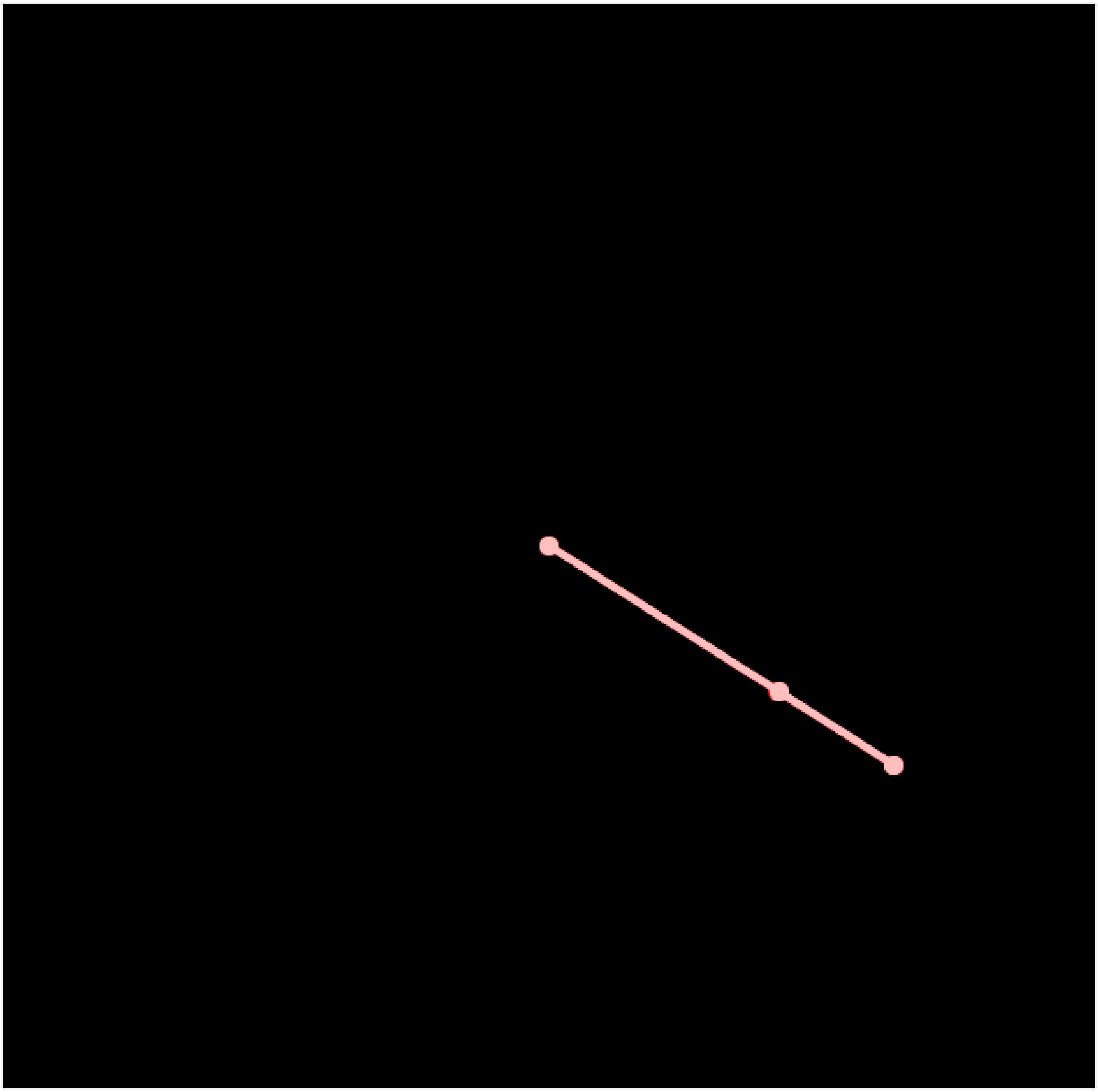
4-5. lépés: Ebben a formában már meg tudjuk oldani a mozgásegyenleteket az `odeint(<rendszer>, <kezdeti feltételek>, <paraméterek>)` függvény segítségével!

In [45]:
```
# Időtartam felosztása "kellően kicsiny" szakaszokra
t = np.linspace(0,20,1001)

# Paraméterek megadása
g = 9.81     # [m/s^2]
l_1 = 2      # [m]
l_2 = 1      # [m]
m_1 = 3      # [kg]
m_2 = 4      # [kg]

# Mozgásegyenlet megoldása adott kezdeti feltételekre
result1 = odeint(dSdt, y0=[1, -3, 1, 4], t=t, args=(g, l_1, l_2, m_1, m_2))
result2 = odeint(dSdt, y0=[1.001, -3, 1, 4], t=t, args=(g, l_1, l_2, m_1, m_2))
result3 = odeint(dSdt, y0=[1.002, -3, 1, 4], t=t, args=(g, l_1, l_2, m_1, m_2))
```

Animáció készítése

In [47]:
```
# Konvertáljuk a globális x-y koordinátarendszerbe a pontokat:
def theta2xy(t, θ_1, θ_2, l_1, l_2):
    return (l_1*np.sin(θ_1), -l_1*np.cos(θ_1),
             l_1*np.sin(θ_1)+l_2*np.sin(θ_2), -l_1*np.cos(θ_1)-l_2*np.cos(θ_2))

x_11, y_11, x_21, y_21 = theta2xy(t, result1.T[0], result1.T[2], l_1, l_2)
x_12, y_12, x_22, y_22 = theta2xy(t, result2.T[0], result2.T[2], l_1, l_2)
x_13, y_13, x_23, y_23 = theta2xy(t, result3.T[0], result3.T[2], l_1, l_2)
```

In [48]:
```
# A kettősingát törött vonalakkal jelenlítjük meg
def animate(i):
    ln1.set_data([0, x_11[i], x_21[i]], [0, y_11[i], y_21[i]])
    ln2.set_data([0, x_12[i], x_22[i]], [0, y_12[i], y_22[i]])
    ln3.set_data([0, x_13[i], x_23[i]], [0, y_13[i], y_23[i]])

# Elkészítjük a rajzteret
fig, ax = plt.subplots(1,1, figsize=(8,8))

# Plotolás
ax.set_facecolor('k')             # Háttérszín: fekete
ax.get_xaxis().set_ticks([])     # x-tengely felirat eltüntetése
ax.get_yaxis().set_ticks([])     # y-tengely felirat eltüntetése
ln1, = plt.plot([], [], 'o-', color = "red", lw=3, markersize=7)           # 1. ren
ln2, = plt.plot([], [], 'o-', color = '#ff8484',lw=3, markersize=7)        # 2. ren
ln3, = plt.plot([], [], 'o-', color = '#ffbfbf', lw=3, markersize=7)       # 3. ren
ax.set_ylim(-4,4)
ax.set_xlim(-4,4)

# Animáció
ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=1000, interval=50)
ani.save('double_prendulum_chaotic.gif', writer='pillow',fps=50)
```



Epilógus

Kiegészítés az órai anyaghoz:

- Python dokumentációja: https://docs.python.org/3/
- NumPy dokumentációja: https://numpy.org/doc/1.25/
- SymPy dokumentációja: https://docs.sympy.org/latest/index.html
- MatPlotLib dokumentációja: https://matplotlib.org/stable/index.html

Bármilyen kérdés, kérés vagy probléma esetén keressetek minket az alábbi elérhetőségeken:

- Monori Bence - m.bence02@outlook.hu
- Wenesz Dominik - weneszdominik@gmail.com

Illetve anonim üzenetküldésre is lehetőséget biztosítunk, ezt az alábbi linken tudjátok elérni: https://forms.gle/8LR5QdMf2fCpxtMK7