Teorías del Crecimiento y Desarrollo Económico (Notas de Clase)

Juan José Berrio Galeano

17 de agosto de 2024

Índice general

1. Introducción **5**
- 1.1. Teoría Macroeconómica 5
- 1.2. Algunas metodologías de pensamiento Clásicas 5
- 1.3. Pensamiento neoclásico de crecimiento 5
- 1.4. La evolución y crisis de la teoría de crecimiento económico 5
- 1.5. Teorías de crecimiento endògeno visualización 6

2. Modelos con tasas de ahorro e inversion constantes (I parte) **7**
- 2.1. Generalidades 7
- 2.2. Modelo de Solow- Swan (visión general) 8
  - 2.2.1. Estado Estacionario 10
  - 2.2.2. Consideraciones importantes del modelo neoclásico 12
- 2.3. Tecnología AK Crecimiento Endogeno (visión inicial) 12
- 2.4. Continuación Introducción 13

3. Modelos con tasa de ahorro constante(instrumento de visualización) **17**
- 3.1. Crecimiento Neoclásico: Modelo de Solow-Swan 17
  - 3.1.1. Tasa de Crecimiento y Diferencia Vertical 20
- 3.2. Una medida cuantitativa de la duración de la transición hacia el nuevo estado estacionario 22
  - 3.2.1. Importancia de la Aproximación de Taylor y la Log-linealización 24
- 3.3. La Hipótesis de convergencia 25
  - 3.3.1. Sesgo en las Estimaciones cuando k^* no es Constante 25
  - 3.3.2. Demostración del Sesgo en la Estimación del Coeficiente de $\log(k)$ cuando se Omite $\log(k^*)$ 25
- 3.4. El modelo de solow ampliado 26
- 3.5. Introducción a una economía abierta 28
- 3.6. Crecimiento Endógeno 30
- 3.7. El modelo de Harrod-Domar 32
  - 3.7.1. Configuraciones de Parámetros 35
- 3.8. La Crítica de la Escuela de Cambridge a la Teoría del Crecimiento Neoclásica 36
  - 3.8.1. Problemas de la Agregación del Capital 36
  - 3.8.2. El Problema de la Medición del Capital en Dinero 36
  - 3.8.3. La Función de Producción y la Distribución del Ingreso 36
  - 3.8.4. Implicaciones para la Teoría del Crecimiento 37
  - 3.8.5. Conclusión 37

A. Apéndice **39**

Capítulo 1

Introducción

1.1. Teoría Macroeconómica

Trata de investigar las causas de los movimientos cíclicos(periodos de auge y recesión) y así descubrir los factores que determinan la tasa de crecimiento a largo plazo.
La batalla intelectual entre los clásicos y keynesianos sobre la neutralidad del dinero y la efectividad de la política fiscal en macroeconomía es un debate a corto plazo.

1.2. Algunas metodologías de pensamiento Clásicas

Los Primeros clásicos: Adam smith (1723-1790), David Ricardo (1772-1823), Tomas Mlthus (1766-1834). Estudiaron el tema de crecimiento e introdujeron conceptos como el de rendimientos decrecientes y su relación con el progreso tecnológico y la especialización del trabajo. Usaron un enfoque competitivo como instrumento de análisis de equilibrio dinámico.
Los clásicos de los principios del siglo XX: Frank ramsey (1903-1930), Allyn young (1876-1929), Frank Knight(1885-1972), Joseph Sgumpeter (1883-1950). Contribuyeron de manera fundamental al entendimiento de las determinantes de la tasa de crecimiento y progreso tecnológico.

1.3. Pensamiento neoclásico de crecimiento

:

Partiendo del trabajo de Robert Solow (1924-2023) y trevor Swan (1919-1989) que sentó las bases metodológicas para los macroeconomistas modernos; que con un enfoque de optimización intertemporal para analizar el comportamiento del consumo realizado por David Cass(1937-2008), Tjalling Koopmans(1910-1985) y el supuesto de rendimientos decrecientes de cada uno de los factores llevaba a concluir que el crecimiento económico a largo plazo se daba por una acumulación de capital, hecho que es insostenible. Lo anterior obligo a introducir algo llamado Çrecimiento tecnológico exògeno" motor del crecimiento económico a largo plazo.

1.4. La evolución y crisis de la teoría de crecimiento económico

Los economistas neoclásicos en su esfuerzo por explicar el crecimiento económico a largo plazo expusieron el crecimiento tecnológico como un factor exògeno el cual condujo a que la teoría se alejase de la realidad empírica y se centrase en la sofisticación y pureza matemática. Es por esta exogeneidad en la tecnología que las teorías de desarrollo económico tomaron protagonismo; se prefería modelos

menos sofisticados matemáticamente centrando su análisis en el ciclo económico y demás fenómenos de corto plazo alentados también por el fracaso de la metodología keynesiana en los años 70.
Mas adelante, Paul Romer(1955-) y Robert Lucas (1937-2023), hicieron renacer la teoría de crecimiento económico construyendo modelos que a diferencia de los modelos neoclásicos, la tasa de crecimiento a largo plazo fuera positiva sin suponer alguna variable exògena.

1.5. Teorías de crecimiento endògeno visualización

Suponer que la tasa de crecimiento de la economía a largo plazo es positiva sin la necesidad de suponer que alguna variable del modelo (como la tecnología) crece de manera exogena se le denomina teorías de crecimiento endogeno.

Sergio Robelo (1989 -) , Rober Barro, Lucas y Romer, consiguieron esto a base de eliminar los rendimientos decrecientes de escala a través de externalidades o de introducir capital humano. Los macroeconomistas usaron el entorno de competencia imperfecta para construir un modelo en los que la inversión y desarrollo (I+D) de las empresas generaban progreso tecnológico; es decir, la sociedad premia con monopolio la creación de un producto nuevo o la mejora de uno ya existente. Lo anterior genera que la tasa de crecimiento no sea eficiente en el sentido de pareto por lo que el actuar gubernamental es fundamental para este enfoque endogeno.

Capítulo 2

Modelos con tasas de ahorro e inversion constantes (I parte)

2.1. Generalidades

Supongamos que no existen los mercados ni las empresas; en cambio, las familias-productoras poseen tanto los factores de producción como la tecnología necesaria para producir o proporcionar lo que necesitan. Debido a esto, deben decidir qué parte de su producción consumen y qué parte usan en su proceso productivo.

El único activo de esta economía (cerrada) es denominado K_t, que puede ser cualquier factor acumulable (como conocimiento intelectual o habilidades). L_t es el otro factor de producción; este no es acumulable, aunque aumenta a una tasa determinada que se supone independiente de las decisiones individuales, como el trabajo o recursos no reproducibles como la tierra o la energía. La tecnología combina estos factores en la producción final, de manera que su función de producción agregada está dada por:

$$Y_t = F(K_t, L_t) \tag{2.1}$$

Supongamos ahora que el producto consiste en un bien homogéneo que puede ser consumido o ahorrado. Las familias productoras ahorran porque el producto no consumido puede transformarse en capital a través de un proceso llamado ***inversión***.

Sea s la fracción del producto que se ahorra e invierte en capital, y sea δ la tasa de depreciación del capital, que se supone una variable exógena dada.

Para llegar a la ecuación que describe la evolución del capital agregado, partimos de la definición de la evolución del capital K_t en función de la inversión y la depreciación. A continuación, se detallan los pasos:

1. **Inversión en Capital:** La inversión en capital en un tiempo t está dada por una fracción s del output total Y_t. Esto se puede expresar como:

$$\text{Inversión} = sY_t$$

Dado que la producción total está dada por una función de producción $F(K_t, L_t)$, podemos reescribirlo como:

$$\text{Inversión} = sF(K_t, L_t)$$

2. **Depreciación del Capital:** El capital se deprecia a una tasa constante δ, lo que implica que la depreciación total en el tiempo t es:

$$\text{Depreciación} = \delta K_t$$

3. **Evolución del Capital Agregado:** El cambio en el capital agregado K_t en el tiempo, denotado como $\dot{K}$, está dado por la diferencia entre la inversión en capital y la depreciación del capital. Así:

$$\dot{K} = \text{Inversión} - \text{Depreciación}$$

Sustituyendo los términos:

$$= \frac{dk}{dt} = sF(K_t, L_t) - \delta K_t \tag{2.2}$$

Esta ecuación describe la **evolución del capital agregado** en el tiempo, expresando cómo el capital total cambia debido a la inversión neta (ahorro menos depreciación) en la economía.

2.2. Modelo de Solow- Swan (visión general)

Es correcto suponer que las familias eligen su trayectoria de consumo mediante la maximizacion de una función de utilidad sujeta a alguna restricción presupuestaria intertemporal. Supongase que la tasa de ahorro s, es determinada exogenamente y la función de producción es de tipo cobb-douglas: ($\frac{dk}{dt}$ es la derivada del capital con respecto al tiempo).

$$Y_t = AL_t^{\alpha}K_t^{\beta} \tag{2.3}$$

Siendo A el nivel de tecnología desde una perspectiva macroeconómica.Es decir, existen condiciones externas que favorecen o no a la producción.Así pues, el aumento del capital en una economía cerrada que se consigue por el proceso de inversion esta dada por (2.2):

$$\dot{K} = \frac{dk}{dt} = sAL_t^{\alpha}K_t^{\beta} - \delta K_t \tag{2.4}$$

Supóngase también que toda la población está empleada, por lo que las cuestiones relativas al desempleo y a la participación de la fuerza de trabajo en la producción se consideran nulas. Además, considérese que la población crece a una tasa constante n, la cual es determinada exógenamente. De modo que:

4. **Evolución de la Fuerza Laboral** Si asumimos que la población o fuerza laboral crece a una tasa constante n, entonces:

$$L_t = L_0 e^{nt}$$

Donde L_0 es el tamaño inicial de la fuerza laboral.

Para encontrar la tasa de cambio de la fuerza laboral con respecto al tiempo, diferenciamos L_t con respecto al tiempo t:

$$\frac{dL_t}{dt} = \frac{d}{dt}\left(L_0 e^{nt}\right)$$

Aplicando la regla de la cadena, obtenemos:

$$\frac{dL_t}{dt} = L_0 \frac{d}{dt}\left(e^{nt}\right)$$

$$\frac{dL_t}{dt} = L_0 \cdot ne^{nt}$$

Sustituyendo de nuevo por L_t, tenemos:

$$\frac{dL_t}{dt} = nL_0e^{nt} = nL_t$$

Por lo tanto, la derivada de L_t con respecto al tiempo es:

$$\dot{L} = nL$$
$$\frac{\dot{L}}{L} = n$$

5. **Sustitución en la Derivada de k** Para obtener la derivada del capital per cápita k, primero usamos las derivadas de K y L:

$$\dot{k} = \left(\frac{\dot{K}}{L} - \frac{K\dot{L}}{L^2}\right)$$

Sustituyendo las expresiones de $\dot{K}$ y $\dot{L}$:

$$\dot{k} = \left(\frac{sF(K,L) - \delta K}{L} - \frac{KnL}{L^2}\right)$$

$$\dot{k} = \frac{sF(K,L)}{L} - \frac{\delta K}{L} - \frac{nK}{L}$$

$$\dot{k} = s\frac{F(K,L)}{L} - \delta\frac{K}{L} - n\frac{K}{L}$$

6. **Relación de Producción per Cápita** Si la función de producción es de la forma $F(K,L) = Lf(k)$, donde $f(k) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$, entonces:

$$\frac{F(K,L)}{L} = f(k)$$

Así, la expresión final para la derivada del capital per cápita $\dot{k}$ se convierte en:

$$\dot{k} = sf(k) - (\delta + n)k$$

En esta última ecuación, $\dot{k}$ representa la tasa de cambio del capital per cápita, $sf(k)$ es el ahorro per cápita (o inversión en capital), y $(\delta + n)k$ es la suma de la depreciación y el crecimiento de la población, ambos ajustados por el capital per cápita. En otras palabras, el comportamiento del stock de capital por persona mediante el proceso de inversion depende adicionalmente del dinamismo de la población en una economía cerrada.

Dada la función de producción Cobb-Douglas:

$$Y_t = AL_t^{\alpha}K_t^{\beta}$$

La ecuación para la evolución del capital agregado es:

$$\dot{K} = sAL_t^{\alpha}K_t^{\beta} - \delta K_t$$

Definimos el capital per cápita k_t como:

$$k_t = \frac{K_t}{L_t}$$

La evolución del capital en términos per cápita se obtiene sustituyendo $K_t = k_t L_t$ en la ecuación de evolución del capital:

$$\dot{K} = sAL_t^{\alpha}(k_t L_t)^{\beta} - \delta(k_t L_t)$$

$$\dot{K} = sAk_t^{\beta} L_t^{\alpha+\beta} - \delta k_t L_t$$

Dividiendo por L_t:

$$\frac{\dot{K}}{L_t} = sAk_t^{\beta} L_t^{\alpha+\beta-1} - \delta k_t$$

Finalmente, usando $\frac{\dot{L}}{L_t} = n$:

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L_t} - k_t \frac{\dot{L}}{L_t}$$

Sustituyendo la expresión para $\frac{\dot{K}}{L_t}$ y $\frac{\dot{L}}{L_t}$:

$$\dot{k} = sAk_t^{\beta} L_t^{\alpha+\beta-1} - \delta k_t - k_t n$$

$$\dot{k} = sAk_t^{\beta} L_t^{\alpha+\beta-1} - (\delta + n)k_t \tag{2.5}$$

Definimos la tasa de crecimiento del capital per cápita γ_k:

$$\gamma_k = \frac{\dot{k}}{k_t}$$

Luego,

$$\frac{\dot{k}}{k_t} = \frac{sAk_t^{\beta} L_t^{\alpha+\beta-1}}{k_t} - \frac{(\delta + n)k_t}{k_t}$$

la tasa de crecimiento del capital per cápita es:

$$\gamma_k = sAk_t^{\beta-1} L_t^{\alpha+\beta-1} - (\delta + n)$$

2.2.1. Estado Estacionario

Se define como aquella situación en la cual todas las variables clave de una economía, como el capital per cápita, el producto per cápita, y otros indicadores, crecen a una tasa constante o permanecen constantes en el tiempo. En particular:

- **Para el capital per cápita** (k): El estado estacionario se alcanza cuando la tasa de cambio del capital per cápita es cero ($\dot{k} = 0$).

- **Para el producto per cápita** (y): Se puede alcanzar un estado estacionario cuando el producto per cápita también crece a una tasa constante o se mantiene constante, dependiendo del crecimiento de la tecnología y otros factores.

- **Para la fuerza laboral** (L_t): En un modelo con crecimiento poblacional exógeno, el estado estacionario puede implicar que la fuerza laboral crezca a una tasa constante, lo que afecta a la evolución del capital y el producto per cápita.

En términos matemáticos, para una función de producción Cobb-Douglas, el estado estacionario se encuentra cuando la inversión neta en capital per cápita iguala la depreciación del capital más la tasa de crecimiento de la población.

$$\gamma_k^* = sAk_t^{\beta-1}L_t^{\alpha+\beta-1} - (\delta + n) = 0$$

$$\frac{\gamma_k^* + (\delta + n)}{sA} = k_t^{\beta-1}L_t^{\alpha+\beta-1}$$

Donde todas las variables del lado izquierdo son constantes. Luego, aplicando logaritmo natural a ambos lados:

$$\ln\left(\frac{\gamma_k^* + (\delta + n)}{sA}\right) = \ln\left(k_t^{\beta-1}L_t^{\alpha+\beta-1}\right)$$

Descomponemos el lado derecho usando la propiedad de los logaritmos:

$$\ln\left(\frac{\gamma_k^* + (\delta + n)}{sA}\right) = (\beta - 1)\ln k_t + (\alpha + \beta - 1)\ln L_t$$

Derivamos con respecto al tiempo t, pero dado que el lado izquierdo es una constante, se tiene:

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{\gamma_k^* + (\delta + n)}{sA}\right)\right] = 0$$

Para el lado derecho, aplicamos la derivada:

$$\frac{d}{dt}\left[(\beta - 1)\ln k_t + (\alpha + \beta - 1)\ln L_t\right]$$

Usamos la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt}\left[(\beta - 1)\ln k_t\right] = (\beta - 1)\frac{\dot{k}_t}{k_t}$$

$$\frac{d}{dt}\left[(\alpha + \beta - 1)\ln L_t\right] = (\alpha + \beta - 1)\frac{\dot{L}_t}{L_t}$$

Sabemos que:

$$\frac{\dot{L}_t}{L_t} = n$$

Así que:

$$\frac{d}{dt}\left[(\beta - 1)\ln k_t + (\alpha + \beta - 1)\ln L_t\right] = (\beta - 1)\frac{\dot{k}_t}{k_t} + (\alpha + \beta - 1)n$$

Sustituyendo $\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \gamma_k^*$:

$$(\beta - 1)\gamma_k^* + (\alpha + \beta - 1)n$$

Igualando a cero:

$$(\beta - 1)\gamma_k^* + (\alpha + \beta - 1)n = 0 \tag{2.6}$$

2.2.2. Consideraciones importantes del modelo neoclásico

En primer lugar, la función de producción neoclásica supone rendimientos contantes de escala y rendimientos decrecientes aunque positivos de cada uno de los factores.Esto es:

$$\alpha + \beta = 1, y, 0 < \beta < 1$$

por tanto, (2.6) se expresa como:

$$(\beta - 1)\gamma_k^* = 0 \tag{2.7}$$

Lo que muestra que la única tasa de crecimiento sostenible bajo las hipótesis neoclásicas en los rendimientos es $\gamma_k^* = 0$.

El anterior resultado conlleva a inducir que si existe una tasa de crecimiento positiva es gracias a que la tecnología que se tiene a disposición mejoró a lo largo del tiempo; por tanto se podrá aumentar exogenamente. Cuando la tecnología crece a una tasa constante, el resto de variables también lo hacen a esa misma tasa. De este modo, en el modelo neoclásico con un crecimiento exògeno de la productividad, las tasas de crecimiento de las rentas perca-pita, el capital perca-pita y el consumo perca-pita en el estado estacionario son iguales.

2.3. Tecnología AK Crecimiento Endogeno (visión inicial)

:

Anteriormente se evidenció que, bajo los supuestos neoclásicos de rendimientos constantes de escala y rendimientos decrecientes pero positivos en los factores, la tasa de crecimiento en el estado estacionario es constante e igual a cero.

Ahora bien, si se desea que existan rendimientos constantes de escala y que se obtengan tasas de crecimiento positivas ($\gamma_k^* > 0$), entonces, esto ocurre si y solo si la función de producción agregada está únicamente en términos del factor que es susceptible de ser acumulado.

Suponiendo que la función de producción agregada de la economía es del tipo $Y_t = AL_t^\alpha k_t^\beta$, si $\alpha + \beta = 1$, entonces $\alpha = 0$ y $\beta = 1$. Luego, con A constante, se tiene que:

$$Y_t = Ak_t \tag{2.8}$$

Esta tecnología AK es denominada como modelo endogeno porque las tasas de crecimiento en el estado estacionario pueden ser positivas sin que se postule que sean determinadas exógenamente. Más bien, son determinadas por decisiones tomadas por los individuos, como la tasa de ahorro que deciden adoptar. Existen varias formas de introducir el crecimiento endogeno en la economía.

1. Considerese el trabajo como un tipo de capital. Pensemos que lo que importa realmente para la producción no es el numero de personas (trabajo bruto), sino la cantidad de trabajo corregido por la calidad. La calidad puede ser acumulada a través de la inversion en educación o salud de los individuos; Robelo (1991) indico el termino como **Capital Humano**.

2. Considerese ahora que junto con el capital privado, existen factores cuya provisión corre a cargo del sector publico como lo son las carreteras, puentes, diversas infraestructuras, el sistema legal y demás.Dado a esto, considerando una función de producción de tipo cobb-douglas, se tendrá que:

$$Y_t = AK^\beta G^{\beta-1}$$

Donde K seria el capital privado y G los bienes públicos proporcionados por el estado. Barro(1990) plantea que ,si el estado aumenta la oferta de bienes públicos en la misma proporción que el capital privado, la producción total de la economía aumentaría. Esto se debe a que los bienes públicos complementan al capital privado, mejorando la productividad y reduciendo costos. Un entorno empresarial favorable, gracias a infraestructura y servicios públicos adecuados, atrae más inversiones y promueve la innovación y recaudación tributaria.

2.4. Continuación Introducción

Tomemos de nuevo la tasa de crecimiento del capital per cápita (ecuación 2.6):

$$(\beta - 1)\gamma_k^* + (\alpha + \beta - 1)n = 0$$

$$\gamma_k^* = -\frac{(\alpha + \beta - 1)n}{\beta - 1}.$$

Supongamos ahora que el crecimiento de la población es nulo ($n = 0$). Para que exista un crecimiento positivo en el estado estacionario ($\gamma_k^* > 0$) con factores acumulables y no acumulables, debe existir algún tipo de rendimientos crecientes de escala. Esto implica que:

$$\beta > 1$$

y para asegurar que el capital per cápita crezca, la condición es que el capital acumulable tenga rendimientos no decrecientes:

$$\alpha > 0 \quad \text{y} \quad \alpha + \beta > 1.$$

En el contexto de crecimiento económico, cuando se menciona que $n = 0$, no se refiere a que sea igual a cero en el sentido literal $(\alpha + \beta - 1)n = 0$, sino a que el crecimiento de la población se está considerando constante y sin cambios. Es una simplificación para analizar el comportamiento del modelo bajo la condición de que el crecimiento poblacional es nulo, lo cual facilita la identificación de las condiciones necesarias para que exista crecimiento positivo en el capital per cápita.

Observamos que la tasa de crecimiento γ_k^* es inversamente proporcional a la tasa de crecimiento de la población n. En otras palabras, a medida que n aumenta, γ_k^* disminuye, y viceversa. Esto destaca la importancia de los rendimientos de escala en la determinación de la tasa de crecimiento del capital per cápita en el estado estacionario.

En el caso que $n > 0$, no existe ninguna tasa de crecimiento en el estado estacionario que satisfaga (2.6). Existe algo que se denomina **efecto de escala**, el cual relaciona el tamaño de un país con su tasa de crecimiento. Así en los modelos de crecimiento endogeno con rendimientos crecientes a escala excluyen siempre el crecimiento de la población.

Afirmación: *Si se postula directamente la existencia de una funcion de produccion con rendimientos crecientes de escala,entonces las tecnicas usuales de optimizacion no pueden emplearse, ya que no se verifican los supuestos habituales de concavidad para que las condiciones de primer orden sean así mismo; suficientes.*

Demostración:

1. Supongamos que $F(K, L)$ es una función de producción con rendimientos crecientes de escala. Esto significa que para cualquier $\lambda > 1$,

$$F(\lambda K, \lambda L) > \lambda F(K, L).$$

2. Queremos verificar si $F(K, L)$ puede ser cóncava. Recordemos que una función F es cóncava si para todo $\lambda \in [0, 1]$,

$$F(\lambda K_1 + (1 - \lambda)K_2, \lambda L_1 + (1 - \lambda)L_2) \geq \lambda F(K_1, L_1) + (1 - \lambda)F(K_2, L_2).$$

3. Supongamos que $F(K, L)$ es cóncava. Entonces, para cualquier $\lambda \in [0, 1]$,

$$F(\lambda K_1 + (1 - \lambda)K_2, \lambda L_1 + (1 - \lambda)L_2) \geq \lambda F(K_1, L_1) + (1 - \lambda)F(K_2, L_2).$$

4. Consideremos un caso especial donde $K_1 = K_2 = K$ y $L_1 = L_2 = L$. En este caso, la condición de cóncavidad se convierte en:

$$F(K, L) \geq \lambda F(K, L) + (1 - \lambda)F(K, L) = F(K, L),$$

lo que es una igualdad que siempre se cumple.

5. Ahora, para comprobar la contradicción, aplicamos la propiedad de rendimientos crecientes de escala con $\lambda > 1$:

$$F(\lambda K, \lambda L) > \lambda F(K, L).$$

6. Según la suposición de cóncavidad aplicada a λK y λL, tenemos:

$$F(\lambda K, \lambda L) \leq \lambda F(K, L) + (1 - \lambda)F(K, L) = F(K, L).$$

7. Combinando ambas propiedades, obtenemos:

$$F(\lambda K, \lambda L) > \lambda F(K, L) \text{ y } F(\lambda K, \lambda L) \leq F(K, L).$$

Esto es una contradicción para $\lambda > 1$ porque $\lambda F(K, L) > F(K, L)$ cuando $\lambda > 1$. La contradicción indica que nuestra suposición de que $F(K, L)$ es cóncava es incorrecta.

8. Por lo tanto, hemos demostrado que una función de producción con rendimientos crecientes de escala no puede ser cóncava.

Alfred Marshall (1923) introdujo una forma para abordar el problema de los rendimientos crecientes de escala a nivel agregado. Supuso que, aunque existen rendimientos crecientes de escala a nivel agregado, cada empresa individual experimenta rendimientos constantes. Esta diferencia puede explicarse mediante la existencia de externalidades en la producción denominadas **efectos desbordamiento**. En este contexto, la decisión de cada productor individual afecta positivamente la producción de todos los demás productores, aunque ninguno de ellos toma en consideración este efecto.

De este modo, los productores enfrentan una función de producción concava a nivel individual, permitiendo la aplicación de los instrumentos habituales de optimización. Sin embargo, la economía en su conjunto enfrenta una función de producción con rendimientos crecientes de escala que, bajo ciertas condiciones que se mostrarán más adelante, promueven el crecimiento endógeno.

En este modelo, la función de producción es de tipo:

$$Y = AL^{1-\beta}K^{\beta}\kappa^{\psi}$$

donde K es el capital privado y κ es el stock de capital agregado de la economía. Las empresas individuales no reconocen que sus decisiones de inversión afectan a κ y, por lo tanto, lo toman como dado.

En el conjunto de la economía, el capital total es la suma de los stocks de capital de las empresas individuales; en consecuencia, $K = \kappa$. Así, la producción agregada está dada por:

$$Y = AL^{1-\beta}K^{\beta+\psi} \tag{2.9}$$

Es importante destacar que, si la condición $\beta + \psi = 1$ se cumple, se obtienen rendimientos constantes de capital en un contexto de rendimientos crecientes de escala. Al modelizar los rendimientos crecientes de escala mediante externalidades, se aborda el problema desde la perspectiva de un equilibrio competitivo. Sin embargo, un desafío es que estos modelos de equilibrio general con externalidades tienden a generar soluciones que pueden requerir alguna intervención estatal en la economía.

Una segunda forma de evitar el problema de la inexistencia de equilibrio competitivo consiste en eliminar el supuesto de comportamiento competitivo. Este enfoque, a veces denominado el **enfoque de Chamberlin**, se basa en la idea de competencia imperfecta. Bajo condiciones de competencia imperfecta, la retribución de todos los factores de producción no agota el producto total. En consecuencia, existen rentas que pueden ser asignadas a actividades de investigación y desarrollo. Aunque estas actividades no son directamente productivas, tienen el potencial de expandir las fronteras del conocimiento en la economía.

Capítulo 3

Modelos con tasa de ahorro constante(instrumento de visualización)

Es importante identificar las diferencias básicas entre los modelos de crecimiento exógenos y endógenos y entender por qué la tasa de ahorro e inversión no afecta el crecimiento a largo plazo en los modelos exógenos, pero sí lo hace en los modelos endógenos. Un instrumento útil para clarificarlo sería un gráfico. En esta sección, se analizará el supuesto de que una de las condiciones necesarias para el crecimiento económico y el desarrollo reside en aumentar la tasa de ahorro. Este mecanismo se basa en una economía cerrada donde la inversión es igual al ahorro y es una constante.

3.1. Crecimiento Neoclásico: Modelo de Solow-Swan

:

Una función de producción neoclásica presenta rendimientos constantes de escala y rendimientos decrecientes pero positivos en cada uno de ls factores. Se conoce que el capital por persona se acumula según (2.5) para una función de producción cobb-douglas.

$$\dot{k} = sAk_t^{\beta} L_t^{\alpha+\beta-1} - (\delta + n)k_t$$

Como $\alpha + \beta = 1$ y $0 < \beta < 1$, se tiene entonces que

$$\dot{k} = sAk_t^{\beta} - (\delta + n)k_t$$

Si se divide lo anterior por k_t, se tiene la tasa de crecimiento instantánea del capital percapita.

$$\frac{\dot{k}}{k_t} = \frac{sAk_t^{\beta} - (\delta + n)k_t}{k_t}$$

$$\gamma_k = sAk_t^{-(1-\beta)} - (\delta + n) \tag{3.1}$$

Que es igual a la diferencia entre la curva de ahorro la cual es decreciente(tiende a infinito cuando k_t se aproxima a cero y se aproxima a cero cuando k_t tiende a ser muy grande) y la llamada curva de depreciación que es independiente de k_t.

Dado que la curva de depreciación es estrictamente positiva y la curva de ahorro toma valores entre en los reales positivos, las dos curvas se cruzan al menos una vez. Como la curva de ahorro es estrictamente decreciente , las dos curvas se cruzan una sola vez en el cuadrante I.

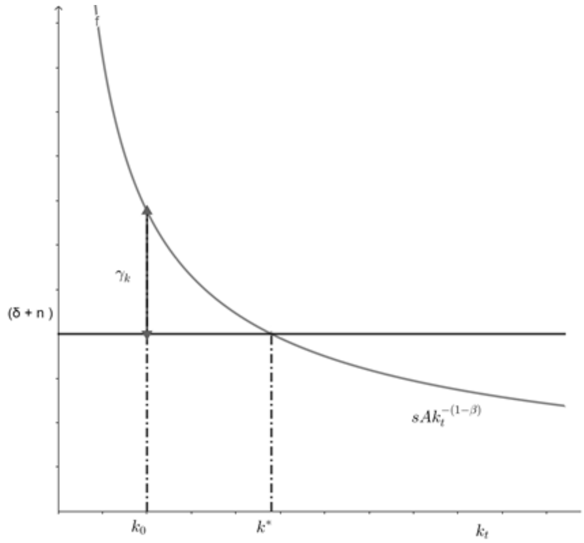

Figura 3.1:

Afirmación El punto de intersección γ_k^* es el capital por trabajador en el estado estacionario, existe y es único.

Demostración:

Premisas

1. **Función de Producción Cobb-Douglas:** Consideramos una función de producción neoclásica con rendimientos constantes de escala y rendimientos decrecientes pero positivos en cada uno de los factores, expresada como $Y = AK^{\beta}L^{1-\beta}$, donde $0 < \beta < 1$, $A > 0$, y $\alpha + \beta = 1$. La acumulación de capital por trabajador se describe por:

$$\dot{k} = sAk^{\beta} - (n + \delta)k$$

donde:

- $k = \frac{K}{L}$ es el capital por trabajador.
- s es la tasa de ahorro (fracción del producto destinada al ahorro), $0 < s < 1$.
- δ es la tasa de depreciación del capital, $\delta > 0$.
- n es la tasa de crecimiento de la población, $n > 0$.

2. **Tasa de Crecimiento del Capital per Cápita:** La tasa de crecimiento del capital per cápita está dada por:

$$\gamma_k = \frac{\dot{k}}{k} = sAk^{\beta-1} - (n + \delta).$$

Análisis de las Curvas

1. **Curva de Ahorro $sAk^{\beta-1}$:**

- **Definición:** $f(k) = sAk^{\beta-1}$.
- **Comportamiento:**
  - Para $k \to 0$, $f(k) \to \infty$.

- Para $k \to \infty$, $f(k) \to 0$.

- **Monotonía:** La derivada de $f(k)$ con respecto a k es $f'(k) = sA(\beta - 1)k^{\beta-2}$. Dado que $0 < \beta < 1$, $f'(k) < 0$, indicando que $f(k)$ es estrictamente decreciente para $k > 0$.

2. **Curva de Depreciación $n + \delta$:**

- **Definición:** $d(k) = n + \delta$.

- **Comportamiento:**

- Es una constante positiva para todo $k > 0$.

Demostración de la Existencia y Unicidad del Estado Estacionario
Existencia

- En el límite cuando $k \to 0$, $f(k)$ tiende a ∞ y $d(k)$ es constante. Esto implica que para valores muy pequeños de k, $f(k) > d(k)$.

- En el límite cuando $k \to \infty$, $f(k)$ tiende a 0 y $d(k)$ es constante. Por lo tanto, para valores grandes de k, $f(k) < d(k)$.

Dado que $f(k)$ es estrictamente decreciente y $d(k)$ es una constante, por el **Teorema del Valor Intermedio**, existe al menos un punto $k^* > 0$ tal que $f(k^*) = d(k^*)$. Es decir, existe un k^* tal que:

$$sAk^{*\beta-1} = n + \delta$$

Unicidad

- La función $f(k)$ es estrictamente decreciente y la función $d(k)$ es constante. Esto implica que ambas curvas pueden cruzarse a lo sumo una vez, ya que después de cualquier punto de intersección, si existiera otro, $f(k)$ no podría volver a sobrepasar a $d(k)$ debido a su naturaleza monótona decreciente y la constancia de $d(k)$.

Por lo tanto, el punto de intersección k^* es único como se quería demostrar.

Dado lo anterior, se pide entonces el valor de capital para el cual Ahorro = Depreciacion
Reescribimos para aislar $k^{*\beta-1}$:

$$k^{*\beta-1} = \frac{n + \delta}{sA}$$

Aplicamos el exponente inverso $\frac{1}{\beta-1}$ a ambos lados:

$$k^* = \left(\frac{n + \delta}{sA}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$$

Reescribimos el exponente para mayor claridad:

$$k^* = \left(\frac{sA}{n + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$$

Por lo tanto, el capital por trabajador en el estado estacionario es:

$$k^* = \left(\frac{sA}{n + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$$

Determinación del Capital en el Estado Estacionario
Dado que en el estado estacionario, el ahorro iguala a la depreciación, tenemos:

$$sAk^{*\beta} = (n + \delta)k^*.$$

Dividimos ambos lados de la ecuación por k^*:

$$sAk^{*\beta-1} = n + \delta.$$

Aislamos $k^{*\beta-1}$:

$$k^{*\beta-1} = \frac{n+\delta}{sA}.$$

Aplicamos el exponente inverso $\frac{1}{\beta-1}$ a ambos lados:

$$k^* = \left(\frac{n+\delta}{sA}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}.$$

Reescribimos el exponente para mayor claridad:

$$k^* = \left(\frac{sA}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Por lo tanto, el capital por trabajador en el estado estacionario es:

$$k^* = \left(\frac{sA}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

3.1.1. Tasa de Crecimiento y Diferencia Vertical

La tasa de crecimiento del capital per cápita, γ_k, está dada por la diferencia vertical entre la curva de ahorro y la curva de depreciación:

$$\gamma_k = sAk^{\beta-1} - (n+\delta).$$

1. **Si el capital inicial k_0 es menor que k^* ($k_0 < k^*$):** - En este caso, la tasa de crecimiento del capital, γ_k, es positiva porque $sAk^{\beta-1} > n + \delta$. - Esto implica que el capital per cápita aumenta con el tiempo hasta alcanzar el estado estacionario k^*.

2. **Si el capital inicial k_0 es mayor que k^* ($k_0 > k^*$):** - Aquí, la tasa de crecimiento del capital, γ_k, es negativa porque $sAk^{\beta-1} < n + \delta$. - En consecuencia, el capital per cápita disminuye con el tiempo, acercándose al estado estacionario k^*.

La relación entre la tasa de crecimiento del capital per cápita y la producción per cápita es proporcional. Dado que la producción por trabajador $y = Ak^\beta$, podemos expresar la tasa de crecimiento de la producción per cápita γ_y en términos de la tasa de crecimiento del capital per cápita γ_k asi:

Primero, tomamos el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación:

$$\ln y = \ln(Ak^\beta)$$

Usando las propiedades de los logaritmos, podemos separar los términos:

$$\ln y = \ln A + \beta \ln k$$

A continuación, diferenciamos ambos lados con respecto al tiempo t:

$$\frac{d}{dt}(\ln y) = \frac{d}{dt}(\ln A + \beta \ln k)$$

Dado que A es una constante, su derivada con respecto al tiempo es cero:

$$\frac{d}{dt}(\ln y) = \beta \frac{d}{dt}(\ln k)$$

La derivada del logaritmo natural de una función es la derivada de la función dividida por la función misma. Aplicamos esto a y y k:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \beta \frac{\dot{k}}{k}$$

Recordemos que $\gamma_y = \frac{\dot{y}}{y}$ es la tasa de crecimiento de la producción per cápita y $\gamma_k = \frac{\dot{k}}{k}$ es la tasa de crecimiento del capital per cápita. Sustituyendo estas definiciones en la ecuación, obtenemos:

$$\gamma_y = \beta \gamma_k$$

Esto muestra que la tasa de crecimiento de la producción per cápita (γ_y) es proporcional a la tasa de crecimiento del capital per cápita (γ_k), con el factor de proporcionalidad β.

Dado que $\gamma_y = \beta \gamma_k$, podemos concluir que la evolución temporal de y es paralela a la de k. Es decir, cualquier cambio en k se refleja de manera proporcional en y. Si k crece o decrece a una cierta tasa, y también lo hará, pero ajustado por el factor de proporcionalidad β. Este parámetro, representa la elasticidad de la producción con respecto al capital .

La razón intuitiva que explica la ausencia de crecimiento en el estado estacionario es el supuesto de rendimientos de capital decrecientes y su aproximación a cero.

Cuando el stock de capital es bajo, cada aumento genera un incremento considerable en la producción debido a una elevada productividad marginal del capital. Según la hipótesis, los agentes ahorran e invierten una fracción constante del producto adicional.

Sin embargo, debido a la productividad decreciente del capital, cada unidad adicional de capital produce menos unidades de producto a medida que k aumenta. Como los agentes siguen ahorrando un porcentaje constante de la producción, los aumentos en el stock de capital son cada vez más pequeños. Estos incrementos se aproximan a cero si el stock de capital se volviese arbitrariamente grande.

Antes de llegar a este extremo, la economía alcanza un punto en el que los incrementos del stock de capital compensan exactamente la depreciación del capital y el crecimiento de la población (a una tasa n). Por lo tanto, el capital per cápita permanece en un nivel constante, conocido como estado estacionario.

**Consideremos que, a partir del estado estacionario, la tasa de crecimiento del capital per cápita está dada por:

$$\gamma_k = sAk^{\beta-1} - (n+\delta).$$

Si la tasa de ahorro s experimenta un aumento repentino y permanente, por ejemplo, debido a un cambio en la estructura impositiva del gobierno, observamos los siguientes efectos:

- **Desplazamiento de la Curva de Ahorro:** El aumento en la tasa de ahorro s provoca un desplazamiento hacia la derecha de la curva de ahorro. La nueva curva de ahorro se representa como $s'Ak^{\beta-1}$, donde $s' > s$. Esto implica que para cualquier nivel de capital per cápita k, la inversión (ahorro) es mayor.

- **Curva de Depreciación Constante:** La curva de depreciación, que es $\delta + n$, permanece constante ya que no depende de la tasa de ahorro.

- **Nuevo Estado Estacionario:** El aumento en la tasa de ahorro desplaza la curva de ahorro hacia la derecha, y esta nueva curva cruza la curva de depreciación en un punto más alto de k. Esto resulta en un nuevo nivel de capital per cápita en el estado estacionario. El nuevo nivel de capital por trabajador k^* se determina resolviendo:

$$sAk^{\beta-1} = \delta + n.$$

  Resolviendo para k^*, obtenemos:

$$k^* = \left(\frac{sA}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

- **Transición hacia el Nuevo Estado Estacionario:** Tras el aumento en la tasa de ahorro, la economía transitará del antiguo estado estacionario al nuevo. Durante este ajuste, el capital per cápita crecerá hacia el nuevo nivel de equilibrio.

- **Efectos a Corto y Largo Plazo:** Aunque el aumento en la tasa de ahorro lleva a un incremento en el nivel de capital per cápita y a una tasa de crecimiento del capital más alta a corto plazo, es crucial observar que la tasa de crecimiento del capital per cápita en el estado estacionario permanece inalterada.

El hecho crucial de este modelo es que, aunque un aumento en la tasa de ahorro puede conducir a un incremento en la tasa de crecimiento a corto plazo y en el nivel de capital por trabajador, la tasa de crecimiento en el estado estacionario no se modifica. En el estado estacionario, el crecimiento del capital per cápita y de la producción per cápita se detiene y se mantiene constante, a pesar del aumento en la tasa de ahorro. Esto resalta la característica de que las tasas de crecimiento a largo plazo están determinadas por factores exógenos como el crecimiento de la población y la tasa de depreciación, y no por la tasa de ahorro en el estado estacionario.

3.2. Una medida cuantitativa de la duración de la transición hacia el nuevo estado estacionario

Un aspecto fundamental del modelo es identificar la rapidez con la que la economía alcanza el estado estacionario.

La tasa de crecimiento del capital per cápita está dada por:

$$\gamma_k = sAk^{\beta-1} - (\delta + n),$$

Donde γ_k representa la derivada con respecto al tiempo del logaritmo natural de k. En modelos económicos, a menudo se utiliza el logaritmo natural de una variable para simplificar el análisis y facilitar la interpretación de las tasas de crecimiento.

Observación:*Sea $k(t)$ una función del tiempo que representa el capital en un momento dado. Al aplicar el logaritmo natural y derivar con respecto al tiempo, obtenemos:*

$$\frac{d}{dt}\ln(k(t)) = \frac{1}{k(t)}\frac{dk(t)}{dt} = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)},$$

donde $\dot{k}(t)$ es la derivada de $k(t)$ con respecto al tiempo. Esto representa la tasa de cambio absoluta del capital. La expresión $\frac{d}{dt}\ln(k(t))$ representa la tasa de cambio del capital en términos relativos, o la tasa de crecimiento del capital.

Se conoce que $sAk^{-(1-\beta)} = sAk^{\beta-1} = sAe^{(\beta-1)\ln(k)}$, entonces en el estado estacionario:

$$sAe^{(\beta-1)\ln(k^*)} = (\delta + n)$$

donde k^* representa el capital per cápita en el estado estacionario.

Para log-linealizar alrededor del estado estacionario, se toma una aproximación de Taylor de primer orden de la forma:

$$F(x) \approx F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$$

- $F(x)$ es la función a aproximar.
- x_0 es el punto alrededor del cual estamos exponiendo.
- $F'(x_0)$ es la derivada de la función en el punto x_0.

Esta aproximación es válida para valores de x cercanos a x_0 y permite simplificar el análisis de funciones no lineales.

Ahora, sea $F(k) = e^{(\beta-1)\ln(k)}$, se requiere aproximar esta función alrededor de $\ln(k^*)$, el cual es el punto que representa el estado estacionario. Luego:

- $F(k^*) = e^{(\beta-1)\ln(k^*)}$ es la función a aproximar.
- $F'(k^*) = \frac{d}{dk}(e^{(\beta-1)\ln(k)})\Big|_{k=k^*} = (\beta - 1)e^{(\beta-1)\ln(k^*)}\frac{1}{k^*}$

Reemplazando adecuadamente en la aproximación de primer orden de Taylor, se obtiene:

$$e^{(\beta-1)\ln(k)} \approx e^{(\beta-1)\ln(k^*)} + (\beta - 1)e^{(\beta-1)\ln(k^*)}\frac{1}{k^*}(k - k^*)$$

Simplificando aún más, obtenemos:

$$e^{(\beta-1)\ln(k)} \approx e^{(\beta-1)\ln(k^*)}\left[1 + (\beta - 1)\frac{k - k^*}{k^*}\right]$$

Dado que en el estado estacionario $sAe^{(\beta-1)\ln(k^*)} = (\delta + n)$, podemos sustituir esto en nuestra ecuación log-linealizada:

$$e^{(\beta-1)\ln(k)} \approx (\delta + n)\left[1 + (\beta - 1)\frac{k - k^*}{k^*}\right]$$

Luego, la ecuación de acumulación de capital es:

$$\dot{k} = sAk^{\beta} - (\delta + n)k$$

Dividiendo por k:

$$\frac{\dot{k}}{k} = sAk^{\beta-1} - (\delta + n)$$

Utilizando nuestra aproximación log-linealizada, tenemos:

$$\frac{\dot{k}}{k} \approx (\delta + n)\left[1 + (\beta - 1)\frac{\ln(k) - \ln(k^*)}{\ln(k^*)}\right] - (\delta + n)$$

Esto se puede simplificar a:

$$\frac{\dot{k}}{k} \approx (\delta + n)(\beta - 1)\frac{\ln(k) - \ln(k^*)}{\ln(k^*)}$$

Finalmente, obtenemos:

$$\gamma_k = \frac{\dot{k}}{k} \approx -(\delta + n)(1 - \beta)(\ln(k) - \ln(k^*)) \tag{3.2}$$

De la aproximación log-linealizada, obtenemos que la tasa de crecimiento del capital per cápita γ_k en la economía está inversamente relacionada con el nivel de capital inicial k.

- Cuando el capital inicial k está muy por debajo del nivel de estado estacionario k^*, la diferencia $\ln(k) - \ln(k^*)$ es grande y negativa, lo que hace que γ_k sea grande y positiva. Esto implica que el capital crecerá rápidamente.

- La velocidad a la cual el capital converge hacia su nivel de estado estacionario está determinada por el término $(\delta+n)(1-\beta)$. Un mayor $(\delta+n)$ implica una mayor depreciación o crecimiento de la población, acelerando la convergencia. El término $(1-\beta)$ refleja los rendimientos decrecientes del capital: cuanto menor sea β, mayor será la velocidad de convergencia.

3.2.1. Importancia de la Aproximación de Taylor y la Log-linealización

La aproximación de Taylor y la log-linealización son herramientas fundamentales en el análisis económico por varias razones:

- Las funciones económicas a menudo son no lineales y complejas, lo que dificulta su análisis y la obtención de soluciones analíticas. La aproximación de Taylor permite simplificar estas funciones alrededor de un punto de interés (en este caso, el estado estacionario), facilitando el análisis.

- La log-linealización es particularmente útil para estudiar la estabilidad del estado estacionario y la dinámica alrededor de él. Permite analizar cómo pequeñas perturbaciones en el capital inicial afectan la convergencia hacia el estado estacionario.

- Proporciona una intuición clara sobre cómo las variables económicas se relacionan entre sí. Por ejemplo, en este caso, nos muestra que la tasa de crecimiento del capital disminuye a medida que nos acercamos al estado estacionario, y cómo la velocidad de convergencia depende de los parámetros del modelo.

- En modelos macroeconómicos, la log-linealización ayuda a predecir cómo la economía responde a variaciones inesperadas y políticas económicas. Por ejemplo, entender cómo cambios en la tasa de ahorro o la tasa de depreciación afectan la trayectoria del capital.

3.3. La Hipótesis de convergencia

La relación inversa entre la renta inicial y su tasa de crecimiento es conocida como la hipótesis de convergencia. El gráfico (3.1) indica que la tasa de crecimiento de una economía que parte de un capital inferior al del estado estacionario es elevada, aunque decreciente. Esto significa que, si las economías se diferenciasen solo en su relación inicial entre capital y trabajo, se debería observar un crecimiento superior en las economías pobres que en las ricas. Sin embargo, si las economías también se diferencian en su nivel de tecnología A, en su tasa de ahorro s, en la tasa de depreciación δ, o en la tasa de crecimiento de la población n, el modelo no predice necesariamente un mayor crecimiento para los países pobres.

Si un país es pobre en la actualidad pero se espera que siga siendo pobre a largo plazo, entonces su tasa de crecimiento no será muy alta. Por el contrario, si se espera que el país pobre acabe siendo rico, entonces su tasa de crecimiento actual será muy elevada. Es decir, el modelo predice convergencia únicamente después de tener en cuenta los elementos determinantes del estado estacionario. En consecuencia, es preciso que k^* sea constante para poder observar la relación existente entre el crecimiento y el nivel de capital. Si k^* no es constante y se omite del análisis, entonces las estimaciones del coeficiente de $\log(k)$ estarán sesgadas siempre que k^* y k estén correlacionados.

3.3.1. Sesgo en las Estimaciones cuando k^* no es Constante

Partimos de la relación obtenida previamente para la tasa de crecimiento del capital per cápita γ_k:

$$\gamma_k = -(\delta + n)(1 - \beta)\left(\log(k) - \log(k^*)\right)$$

Si k^* es constante, podemos escribir:

$$\gamma_k = -(\delta + n)(1 - \beta)\log(k) + C$$

donde C es una constante que incorpora $\log(k^*)$. En este caso, la relación entre γ_k y $\log(k)$ es directa y no presenta problemas de estimación.

Ahora, si k^* varía entre economías (es decir, si k^* depende de otros factores como la tasa de ahorro s, la tecnología A, la depreciación δ, o el crecimiento poblacional n), la relación debería ser:

$$\gamma_k = -(\delta + n)(1 - \beta)\left(\log(k) - \log(k^*)\right)$$

Si omitimos $\log(k^*)$ del análisis y asumimos erróneamente que k^* es constante, la estimación del coeficiente de $\log(k)$ estará sesgada siempre que $\log(k)$ y $\log(k^*)$ estén correlacionados.

Este sesgo ocurre porque $\log(k^*)$ está implícitamente relacionado con $\log(k)$ a través de los determinantes del estado estacionario. Si no se controla por $\log(k^*)$ y esta variable está correlacionada con $\log(k)$, el término omitido $\log(k^*)$ será absorbido por el término de $\log(k)$, distorsionando la estimación del coeficiente $-(\delta + n)(1 - \beta)$.

3.3.2. Demostración del Sesgo en la Estimación del Coeficiente de $\log(k)$ cuando se Omite $\log(k^*)$

Reescribiendo la tasa de crecimiento del capital percapita como:

$$\gamma_k = -(\delta + n)(1 - \beta)\log(k) + (\delta + n)(1 - \beta)\log(k^*)$$

Si omitimos $\log(k^*)$ del análisis, asumimos erróneamente que k^* es constante y la relación se modela incorrectamente como:

$$\gamma_k = -(\delta + n)(1 - \beta)\log(k) + C$$

donde C es una constante. Sin embargo, si $\log(k^*)$ no es constante y depende de otros factores que están correlacionados con $\log(k)$, este término omitido genera un sesgo.

Supongamos que existe una relación lineal entre $\log(k)$ y $\log(k^*)$:

$$\log(k^*) = \alpha_0 + \alpha_1 \log(k) + \epsilon$$

donde α_0 y α_1 son coeficientes, y ϵ es un término de error. Sustituyendo esta expresión en la ecuación original, tenemos:

$$\gamma_k = -(\delta + n)(1 - \beta)\log(k) + (\delta + n)(1 - \beta)\left(\alpha_0 + \alpha_1 \log(k) + \epsilon\right)$$

Simplificando:

$$\gamma_k = \left[-(\delta + n)(1 - \beta) + (\delta + n)(1 - \beta)\alpha_1\right]\log(k) + (\delta + n)(1 - \beta)\alpha_0 + (\delta + n)(1 - \beta)\epsilon$$

$$\gamma_k = -(\delta + n)(1 - \beta)(1 - \alpha_1)\log(k) + (\delta + n)(1 - \beta)\alpha_0 + (\delta + n)(1 - \beta)\epsilon$$

El término que acompaña a $\log(k)$ en la ecuación es:

$$-(\delta + n)(1 - \beta)(1 - \alpha_1)$$

Este coeficiente es diferente del coeficiente original $-(\delta + n)(1 - \beta)$. Esto demuestra que el sesgo en la estimación de $\log(k)$ se produce si $\alpha_1 \neq 0$, es decir, cuando $\log(k^*)$ está correlacionado con $\log(k)$. El sesgo en el coeficiente es proporcional a $(\delta + n)(1 - \beta)\alpha_1$.

Si $\alpha_1 > 0$, el coeficiente estimado de $\log(k)$ será menor (en valor absoluto) que el verdadero coeficiente. Si $\alpha_1 < 0$, el coeficiente estimado será mayor (en valor absoluto) que el verdadero coeficiente. por tanto, la omisión de $\log(k^*)$ del análisis lleva a un sesgo en la estimación del coeficiente de $\log(k)$ siempre que $\log(k^*)$ y $\log(k)$ estén correlacionados. Este sesgo altera la interpretación del efecto de $\log(k)$ sobre la tasa de crecimiento del capital γ_k.

3.4. El modelo de solow ampliado

Mankiw, Romer y Weil (1992) construyeron un modelo que incluye tres factores de producción: capital físico (K), trabajo (L) en el sentido convencional, y capital humano (H), en una tecnología de la forma:

$$Y = BK^{\lambda}H^{\alpha}L^{1-\lambda-\alpha} \tag{3.3}$$

donde:

- Y es la producción total.
- K es el capital físico.
- H es el capital humano.
- L es la fuerza laboral.

- B es un parámetro de tecnología.
- λ y α son los exponentes que representan las elasticidades de producción con respecto a K y H, respectivamente.

Suponemos además que tanto el capital físico como el capital humano se pueden acumular detrayéndolos de la producción, por lo que tenemos:

$$\dot{K} + \dot{H} = I_K + I_H - \delta_K K - \delta_H H$$

donde:

- $\dot{K}$ y $\dot{H}$ representan las tasas de cambio de K y H, respectivamente.
- I_K y I_H son las inversiones en capital físico y capital humano, respectivamente.
- δ_K y δ_H son las tasas de depreciación de K y H, respectivamente.

La inversión total, que es la producción neta de consumo C, se puede descomponer en:

$$I_K + I_H = Y - C$$

Sustituyendo Y de la función de producción:

$$I_K + I_H = BK^{\lambda} H^{\alpha} L^{1-\lambda-\alpha} - C$$

Las ecuaciones de movimiento para el capital físico y humano son:

$$\dot{K} = I_K - \delta_K K$$

$$\dot{H} = I_H - \delta_H H$$

Sumando las dos ecuaciones de movimiento:

$$\dot{K} + \dot{H} = I_K - \delta_K K + I_H - \delta_H H$$

Sustituyendo la inversión total:

$$\dot{K} + \dot{H} = BK^{\lambda} H^{\alpha} L^{1-\lambda-\alpha} - C - \delta_K K - \delta_H H$$

Por lo tanto, la ecuación final que relaciona las tasas de acumulación de capital físico y humano es:

$$\dot{K} + \dot{H} = BK^{\lambda} H^{\alpha} L^{1-\lambda-\alpha} - C - \delta_K K - \delta_H H$$

Luego, Para simplificar el análisis, supongamos que $\delta_K = \delta_H$. En este caso, el producto marginal del capital físico y del capital humano deben ser iguales en todos los momentos del tiempo. Esto implica que:

$$\frac{\lambda Y}{K} = \frac{\alpha Y}{H}$$

De esta igualdad, podemos despejar la relación entre H y K:

$$\frac{\lambda}{K} = \frac{\alpha}{H} \implies H = \frac{\alpha}{\lambda} K$$

Esto muestra que, en todo momento, la cantidad de capital humano debe ser proporcional a la de capital físico. Si sustituimos esta relación en la expresión del producto total Y, obtenemos:

$$Y = BK^{\lambda}\left(\frac{\alpha}{\lambda}K\right)^{\alpha}L^{1-\lambda-\alpha}$$

Simplificando la expresión, tenemos:

$$Y = B\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^{\alpha}K^{\lambda+\alpha}L^{1-\lambda-\alpha}$$

Finalmente, podemos expresar la producción Y como:

$$Y = AK^{\lambda+\alpha}L^{1-\lambda-\alpha}$$

Dado que la elasticidad combinada con respecto al capital físico K y al capital humano H es $\lambda + \alpha$, podemos definir un nuevo parámetro β tal que:

$$\beta = \lambda + \alpha$$

Esto nos permite reescribir la función de producción simplificada de la siguiente manera:

$$Y = AK^{\beta}L^{1-\beta}$$

donde $A = B\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^{\alpha}$ es un nuevo parámetro que combina los términos constantes y refleja la eficiencia tecnológica combinada. Esta forma de la función de producción muestra que, bajo la suposición de proporcionalidad entre H y K, la producción total Y depende de una combinación ponderada de K y L, y la elasticidad combinada con respecto al capital físico K y al capital humano H es β.

Por esta razón, el modelo de Solow ampliado para incorporar el capital humano es una forma de argumentar que la participación del capital relevante es mayor que la participación del capital físico. Al incluir el capital humano en el modelo, se reconoce que no solo el capital físico impulsa el crecimiento económico, sino también la educación, las habilidades y los conocimientos de la fuerza laboral. Esto implica que la elasticidad total de la producción respecto al capital es mayor $(\lambda + \alpha)$ cuando se considera tanto el capital físico como el humano. En términos prácticos, esta conclusión subraya la importancia de invertir no solo en infraestructura y bienes de capital, sino también en educación y formación, para promover un crecimiento económico sostenible y robusto.

3.5. Introducción a una economía abierta

Los modelos considerados hasta el momento se basan en una economía cerrada, en la cual no existe intercambio de bienes, activos o trabajo entre países. Barro, Mankiw y Sala-i-Martin (1992) presentaron un modelo de economías abiertas en el que los diferentes países pueden pedir prestado en los mercados internacionales de capital, pero no todo el capital de una economía es "movible.º puede ser usado de esta manera en un contexto internacional.

Ahora, en lugar de préstamos internacionales, podemos imaginar un mundo con dos tipos de capital, pero donde solo uno de ellos es móvil. Partiendo de la función de producción del modelo de Solow ampliado:

$$Y = BK^{\lambda}H^{\alpha}L^{1-\lambda-\alpha}$$

Supongamos que el capital físico (K) puede desplazarse libremente entre países y el capital humano (H) no. Imaginemos que existe un mercado de capital mundial que se enfrenta a una tasa de interés r^*. El supuesto de la perfecta movilidad de K exige que el producto marginal de K sea igual al tipo de interés:

$$\frac{\lambda Y}{K} = r^* + \delta$$

Esta igualdad se puede usar para reescribir K como función de Y:

$$K = \frac{\lambda Y}{r^* + \delta}$$

Sustituyendo esta expresión en la función de producción original, obtenemos:

$$Y = B\left(\frac{\lambda Y}{r^* + \delta}\right)^{\lambda} H^{\alpha} L^{1-\lambda-\alpha}$$

Simplificando:

$$Y = B\left(\frac{\lambda^{\lambda}}{(r^* + \delta)^{\lambda}}\right) Y^{\lambda} H^{\alpha} L^{1-\lambda-\alpha}$$

Dividiendo ambos lados por Y^{λ}, obtenemos:

$$Y^{1-\lambda} = B\left(\frac{\lambda^{\lambda}}{(r^* + \delta)^{\lambda}}\right) H^{\alpha} L^{1-\lambda-\alpha}$$

Elevando ambos lados a la potencia de $\frac{1}{1-\lambda}$:

$$Y = \left[B\left(\frac{\lambda^{\lambda}}{(r^* + \delta)^{\lambda}}\right) H^{\alpha} L^{1-\lambda-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\lambda}}$$

Esta expresión puede simplificarse aún más definiendo un nuevo parámetro A:

$$A = B^{\frac{1}{1-\lambda}}\left(\frac{\lambda^{\lambda}}{(r^* + \delta)^{\lambda}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}$$

Y finalmente, obtenemos la forma reducida de la función de producción:

$$Y = AH^{\frac{\alpha}{1-\lambda}} L^{\frac{1-\lambda-\alpha}{1-\lambda}}$$

Dado que:

$$\beta = \frac{\alpha}{1-\lambda}$$

La función de producción puede reescribirse como:

$$Y = AK^{\beta} L^{1-\beta}$$

Esta forma reducida de la función de producción en un modelo de economía abierta muestra que la elasticidad del producto respecto al capital físico sigue siendo β, lo que es muy cercano al modelo neoclásico. Esto sugiere que la introducción de movilidad del capital en el modelo no altera sustancialmente las predicciones cuantitativas y cualitativas sobre la velocidad de transición. Por lo tanto, tratar con modelos de economía cerrada puede ser una aproximación válida en muchos casos.

3.6. Crecimiento Endógeno

En los modelos neoclásicos tradicionales, como el modelo de Solow ampliado que hemos analizado, se asume que la función de producción presenta rendimientos decrecientes en relación con el capital. Sin embargo, una modificación clave en los modelos de crecimiento endógeno es suponer que los rendimientos respecto al capital son constantes o incluso crecientes. En este contexto, consideramos la situación en la que el parámetro β se iguala a 1.

Partiendo de la función de producción derivada previamente:

$$Y = AK^{\beta}L^{1-\beta}$$

si suponemos que $\beta = 1$, la función de producción se transforma en:

$$Y = AK$$

Esta ecuación implica que la producción total Y es directamente proporcional al capital K. En otras palabras, cualquier incremento en el capital se traduce en un incremento proporcional en la producción. Esta característica elimina los rendimientos decrecientes del capital que estaban presentes en el modelo de Solow, permitiendo que la economía crezca de manera indefinida si el capital sigue acumulándose.

Dado que $\beta = 1$, la economía ahora presenta un caso de rendimientos constantes con respecto al capital. A es una constante que combina los efectos de la tecnología y otros factores que no dependen del capital. En este caso, la tasa de crecimiento de la economía puede sostenerse en el tiempo, incluso sin la necesidad de incrementos continuos en otros factores como la fuerza laboral.

Una de las implicaciones más significativas de este supuesto es que la tasa de crecimiento del capital determina directamente la tasa de crecimiento de la economía. Si la inversión neta (la diferencia entre la inversión total y la depreciación del capital) es positiva, el capital y, por lo tanto, la producción, seguirán creciendo. Esto contrasta con el modelo de Solow, donde los rendimientos decrecientes eventualmente llevan a una tasa de crecimiento del capital cada vez menor, acercándose a un estado estacionario.

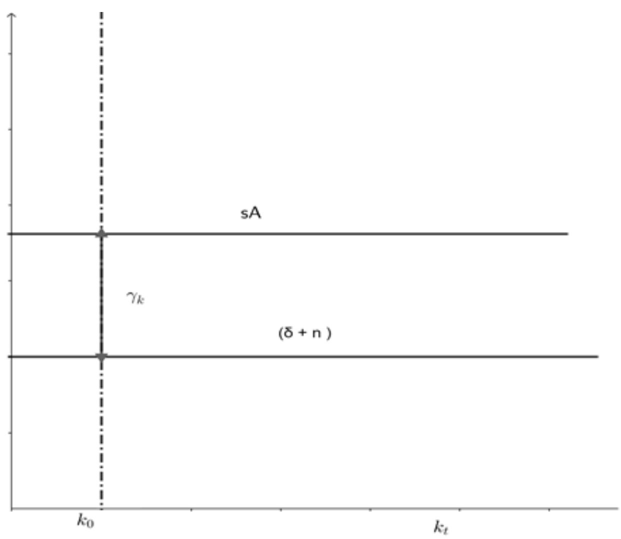

Figura 3.2:

Además, en este modelo de crecimiento endógeno, el papel de la política económica se vuelve crucial. Políticas que incentiven la inversión en capital, como subsidios a la inversión, mejoras en la infraestructura, o avances tecnológicos, pueden tener efectos permanentes en la tasa de crecimiento económico. Esto contrasta con el modelo neoclásico, donde tales políticas solo tienen efectos temporales.

Al asumir $\beta = 1$, el modelo de Solow ampliado se transforma en un modelo de crecimiento endógeno.

Ahora si se considera $\beta > 1$, la función de producción es dada por:

$$Y = AK^{\beta}L^{1-\beta}$$

Donde $\beta > 1$ implica rendimientos crecientes respecto al capital. Vamos a analizar la tasa de crecimiento del capital per cápita $k = \frac{K}{L}$.

Primero, reescribimos la función de producción en términos del capital per cápita:

$$Y = A\left(kL\right)^{\beta}L^{1-\beta}$$

$$Y = Ak^{\beta}L^{\beta}L^{1-\beta}$$

$$Y = Ak^{\beta}$$

La inversión total en capital es:

$$I = sY = sAk^{\beta}$$

La ecuación de acumulación de capital por unidad de trabajo es:

$$\dot{k} = \frac{I - (n+\delta)K}{L}$$

Reemplazando I y K:

$$\dot{k} = \frac{sAk^{\beta} - (n+\delta)k}{1}$$

$$\dot{k} = sAk^{\beta} - (n+\delta)k$$

Para encontrar la tasa de crecimiento del capital per cápita, usamos:

$$\gamma_k = \frac{\dot{k}}{k}$$

Entonces:

$$\gamma_k = \frac{sAk^{\beta} - (n+\delta)k}{k}$$

$$\gamma_k = sAk^{\beta-1} - (n+\delta)$$

Cuando $\beta > 1$, $\beta - 1 > 0$. La tasa de crecimiento del capital per cápita es entonces:

$$\gamma_k = sAk^{\beta-1} - (n+\delta)$$

Para analizar cómo cambia γ_k con el tiempo, consideramos la derivada con respecto a k:

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial k} = sA(\beta - 1)k^{\beta-2}$$

Dado que $\beta - 1 > 0$ y $k^{\beta-2} > 0$, la derivada es positiva:

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial k} > 0$$

Esto implica que la tasa de crecimiento del capital per cápita γ_k aumenta a medida que el capital percápita k aumenta de manera indefinida lo que es difícil de evidenciar de forma empírica.

3.7. El modelo de Harrod-Domar

El modelo de Harrod-Domar era el más utilizado por los macroeconomistas antes de que se popularizara el modelo neoclásico. Este modelo intentó combinar dos características de la economía keynesiana, el multiplicador y el acelerador, en un modelo que explicara el crecimiento económico a largo plazo. Puesto que se ha usado el supuesto del multiplicador desde un principio (el ahorro es una proporción constante de la renta), se va a describir en qué consiste el acelerador.

Supongamos que el aumento del capital necesario para incrementar la producción en una cuantía dada sea un valor constante. En particular, es independiente de la relación capital-trabajo, es decir:

$$\Delta Y_t = A\Delta K_t \tag{3.4}$$

donde A es una constante. Un error sería asumir que el modelo de Harrod-Domar es un modelo de crecimiento endógeno con tecnología AK. Este modelo se preocupa por los efectos del crecimiento sobre el empleo y desempleo a largo plazo. Su estudio puede entenderse como una explicación del desempleo a largo plazo que existía en los momentos de gran depresión, y aunque nunca introdujeron una función de producción explícita, el hecho de que se preocupasen por el desempleo indica que no estaban pensando en tecnología AK.

Otro tipo de función que satisface el principio de acelerador es la función Leontief. En esta, la producción se obtiene a partir de una proporción fija de trabajo y capital. Debido a la existencia de esta proporción fija, todo aumento de uno de los factores sin el consiguiente aumento del otro factor deja la producción inalterada. De este modo, la función será:

$$Y_t = \text{mín}(AK_t, BL_t) \tag{3.5}$$

donde A y B son parámetros exógenos al proceso productivo. Para obtener la producción per cápita, dividimos Y_t por L_t:

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t}$$

Sustituyendo la función de producción:

$$y_t = \frac{\text{mín}(AK_t, BL_t)}{L_t}$$

Esto se puede simplificar a:

$$y_t = \text{mín}\left(\frac{AK_t}{L_t}, B\right)$$

o:

$$y_t = \text{mín}\,(Ak_t, B)$$

Donde $k_t = \frac{K_t}{L_t}$ es el capital per cápita.

La relación entre el capital y el trabajo puede ser determinada por igualar los dos términos en la función Leontief:

$$AK_t = BL_t$$

Resolviendo para K_t:

$$K_t = \frac{B}{A}L_t$$

Esto indica que la relación entre el capital y el trabajo es:

$$\frac{K_t}{L_t} = \frac{B}{A}$$

Ahora observemos varios casos:

1. Cuando $K_t \leq \frac{B}{A}L_t$:

En este caso, el capital es el factor limitante:

$$Y_t = AK_t$$

Entonces:

$$y_t = \frac{AK_t}{L_t} = A \cdot \frac{K_t}{L_t} = Ak_t$$

donde $k_t = \frac{K_t}{L_t}$ es el capital per cápita.

2. Cuando $K_t > \frac{B}{A}L_t$:

En este caso, el trabajo es el factor limitante:

$$Y_t = BL_t$$

Entonces:

$$y_t = \frac{BL_t}{L_t} = B$$

Así pues:

$$y_t = \begin{cases} Ak_t & \text{para todo } K_t \leq \frac{B}{A}L_t \\ B & \text{para todo } K_t > \frac{B}{A}L_t \end{cases} \tag{3.6}$$

Obsèrvese que esta tecnología es similar al modelo AK, pero unicamente en relaciones capital-trabajo pequeñas, Para un k grande, la funcion de produccion es horizontal, por lo que la productividad marginal del capital es igua a cerro.

Ahora, podemos analizar el crecimiento del capital per cápita usando la ecuación de crecimiento propuesta.

$$\gamma_k = sAk^{\beta-1} - (n+\delta)$$

Caso 1: $K_t \leq \frac{B}{A}L_t$

La producción está limitada por AK_t. La producción total y per cápita se calculan de la siguiente manera:

$$Y_t = AK_t$$

La producción per cápita y_t es:

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = \frac{AK_t}{L_t}$$

La inversión total I_t es igual al ahorro, por lo que:

$$I_t = sY_t = sAK_t$$

La tasa de cambio del capital es:

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t = sAK_t - \delta K_t$$

La tasa de crecimiento del capital per cápita γ_k es:

$$\gamma_k = \frac{\dot{K}_t}{K_t} = \frac{sAK_t - \delta K_t}{K_t} = sA - \delta$$

Considerando el crecimiento de la población n, la tasa de crecimiento del capital per cápita es:

$$\gamma_k = sA - (\delta + n)$$

Caso 2: $K_t > \frac{B}{A}L_t$

Cuando $K_t > \frac{B}{A}L_t$, la producción está limitada por BL_t. La producción total y per cápita se calculan de la siguiente manera:

$$Y_t = BL_t$$

La producción per cápita y_t es:

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = B$$

La inversión total I_t es igual al ahorro, por lo que:

$$I_t = sY_t = sBL_t$$

La tasa de cambio del capital es:

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t = sBL_t - \delta K_t$$

La tasa de crecimiento del capital per cápita γ_k es:

$$\gamma_k = \frac{\dot{K}_t}{K_t} = \frac{sBL_t - \delta K_t}{K_t}$$

Dado que $L_t = \frac{K_t}{k}$ (donde $k = \frac{K_t}{L_t}$ es el capital per cápita), podemos escribir:

$$\dot{K}_t = sB\left(\frac{K_t}{k}\right) - \delta K_t$$

Por lo tanto:

$$\gamma_k = \frac{\dot{K}_t}{K_t} = \frac{sB\left(\frac{K_t}{k}\right) - \delta K_t}{K_t} = \frac{sB}{k} - \delta$$

Considerando el crecimiento de la población n, la tasa de crecimiento del capital per cápita es:

$$\gamma_k = \frac{sB}{K_t} - (\delta + n)$$

asi pues:

$$\gamma_k = \begin{cases} sA - (\delta + n) & \text{para } K_t \leq \frac{B}{A}L_t \\ \frac{sB}{K_t} - (\delta + n) & \text{para } K_t > \frac{B}{A}L_t \end{cases} \tag{3.7}$$

3.7.1. Configuraciones de Parámetros

Consideramos las siguientes configuraciones de los parámetros, Harrod-Domar expresaron que existen tres posibles casos, cada una de las cuales tiene consecuencias distintas para el crecimiento y el empleo.

Configuración: $sA < (\delta + n)$

En este caso, la tasa de crecimiento del capital per cápita γ_k es negativa en ambos intervalos de capital, lo que indica una disminución del capital per cápita.

$$\gamma_k = \begin{cases} sA - (\delta + n) < 0 & \text{para } K_t \leq \frac{B}{A}L_t \\ \frac{sB}{K_t} - (\delta + n) < 0 & \text{para } K_t > \frac{B}{A}L_t \end{cases}$$

Configuración: $sA = (\delta + n)$

En esta configuración, la tasa de crecimiento del capital per cápita es cero en el primer intervalo de capital. En el segundo intervalo, la tasa de crecimiento puede ser positiva, cero o negativa dependiendo de los valores específicos de K_t.

$$\gamma_k = \begin{cases} sA - (\delta + n) = 0 & \text{para } K_t \leq \frac{B}{A}L_t \\ \frac{sB}{K_t} - (\delta + n) \text{ puede ser positivo, cero o negativo} & \text{para } K_t > \frac{B}{A}L_t \end{cases}$$

Configuración: $sA > (\delta + n)$

En esta configuración, la tasa de crecimiento del capital per cápita es positiva en el primer intervalo de capital, y en el segundo intervalo, la tasa de crecimiento puede ser positiva o negativa dependiendo de los valores específicos de K_t.

$$\gamma_k = \begin{cases} sA - (\delta + n) > 0 & \text{para } K_t \leq \frac{B}{A}L_t \\ \frac{sB}{K_t} - (\delta + n) \text{ puede ser positivo o negativo} & \text{para } K_t > \frac{B}{A}L_t \end{cases} \tag{3.8}$$

3.8. La Crítica de la Escuela de Cambridge a la Teoría del Crecimiento Neoclásica

La teoría del crecimiento neoclásica, ampliamente representada por el modelo de Solow, se basa en la función de producción para explicar cómo el capital (K) y el trabajo (L) se combinan para producir el producto total de una economía (Y). Esta función de producción, típicamente expresada como:

$$Y = F(K, L)$$

supone que tanto el capital como el trabajo son factores homogéneos y fácilmente agregables. Sin embargo, los economistas de la escuela de Cambridge, como Joan Robinson, han cuestionado profundamente esta visión simplificada.

3.8.1. Problemas de la Agregación del Capital

Uno de los puntos centrales de la crítica de Robinson es el problema de la agregación del capital. En la formulación neoclásica, se asume que todos los tipos de capital pueden combinarse en una sola variable K. Sin embargo, diferentes formas de capital —desde máquinas y herramientas hasta infraestructura y tecnología— no son homogéneas y no pueden sumarse directamente. Este problema se puede expresar en términos matemáticos, considerando que el capital total es en realidad una función compleja de diferentes tipos de capital:

$$K_t = \sum_{i=1}^{n} v_i K_i$$

donde K_i representa diferentes tipos de capital (como maquinaria, tecnología, etc.) y v_i son ponderaciones o valores relativos de cada tipo de capital. Sin embargo, estas ponderaciones no son necesariamente constantes ni fácilmente definibles, lo que complica la agregación.

3.8.2. El Problema de la Medición del Capital en Dinero

Otro aspecto crítico es la medición del capital en términos de dinero. La teoría neoclásica tiende a tratar el capital como capital financiero, donde todo tipo de capital puede valorarse en términos monetarios. Esto simplifica los modelos económicos al asumir que la inversión, medida en dinero, es directamente proporcional a la acumulación de capital físico. Sin embargo, en la práctica, los valores monetarios del capital pueden fluctuar debido a cambios en los precios relativos, tecnología y otras variables económicas. Esto implica que:

$$K_t^{(\text{monetario})} = P_{K_t} \cdot K_t^{(\text{físico})}$$

donde P_{K_t} es el precio del capital en el momento t. La variabilidad de P_{K_t} introduce una complejidad adicional en la medición y comparación del capital a lo largo del tiempo.

3.8.3. La Función de Producción y la Distribución del Ingreso

La función de producción neoclásica también se utiliza para justificar la distribución del ingreso entre capital y trabajo, basándose en la productividad marginal de cada factor. Según esta teoría, el ingreso de cada factor debería ser proporcional a su contribución marginal al producto total. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$\text{Ingreso del trabajo} = w \cdot L = \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot L$$

$$\text{Ingreso del capital} = r \cdot K = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot K$$

donde w es el salario y r es la tasa de retorno del capital. Sin embargo, si la agregación del capital es problemática y su valor no puede medirse con precisión, entonces la justificación para esta distribución del ingreso también se vuelve cuestionable.

3.8.4. Implicaciones para la Teoría del Crecimiento

Las críticas de la escuela de Cambridge sugieren que la teoría neoclásica del crecimiento, al simplificar la complejidad del capital y del trabajo, puede llevar a conclusiones engañosas sobre la dinámica económica. En particular, si el capital no es homogéneo ni fácilmente agregable, las políticas que buscan influir en la inversión y en el crecimiento económico pueden no tener los efectos deseados. Además, la distribución del ingreso basada en la productividad marginal puede no reflejar adecuadamente la realidad económica, especialmente en economías con estructuras de capital complejas.

3.8.5. Conclusión

La crítica de la escuela de Cambridge, especialmente la formulada por Joan Robinson, destaca la necesidad de revisar las bases sobre las que se construyen los modelos de crecimiento económico. La función de producción neoclásica, si bien útil para simplificar el análisis económico, puede no capturar la complejidad del capital y las dinámicas reales de la economía. Este debate subraya la importancia de considerar modelos más realistas que puedan incluir la diversidad del capital y los problemas de agregación, ofreciendo así una comprensión más precisa del crecimiento económico y la distribución del ingreso.

.

Apéndice A

Apéndice

Material adicional, como fórmulas detalladas, gráficos adicionales, o cálculos que complementan el contenido principal.