Fundamentos de Matemáticas
(Notas de Clase)

Juan Carlos Agudelo Agudelo
Natalia Agudelo Muñetón
Raúl Eduardo Velásquez Ossa

Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas

2019

Prólogo

Índice general

Capítulo 1

La resolución de problemas en Matemáticas

Capítulo en construcción.

Capítulo 2

Introducción al razonamiento lógico-matemático

En el quehacer matemático, una de las principales actividades consiste en demostrar o refutar proposiciones. Como lo expresa Miguel de Guzmán en [de Guzmán-Ozámiz, 2004, pág. 11], “En matemáticas, una de las actividades más importantes consiste en demostrar, es decir, a partir de unas afirmaciones iniciales en las que nos ponemos de acuerdo como punto de arranque, deducimos, mediante reglas de razonamiento aceptadas, proposiciones más complejas. Y para ponernos de acuerdo, necesitamos de la máxima precisión en dichas afirmaciones iniciales, para que cualquier matemático de cualquier lugar del mundo entienda perfectamente y sin ambigüedad qué se pretende demostrar.”

Teniendo en cuenta la relevancia de las demostraciones para todo aquel que se quiera adentrar en el mundo de las matemáticas, este capítulo busca introducir los elementos de lógica necesarios para entender y construir demostraciones de proposiciones matemáticas. No se pretende aquí hacer una presentación formal de la lógica matemática, por el contrario, se busca hacer un acercamiento intuitivo, que poco a poco lleve al estudiante a entender y poner en práctica las reglas que rigen los procesos de deducción en el campo de las matemáticas.

Antes de describir los principales métodos de demostración (Sección 2.2), como bien lo indica Miguel de Guzman, es necesario establecer ciertas convenciones en cuanto al lenguaje que debe ser usado para expresar proposiciones matemáticas. Esto es lo que se hace en la siguiente sección.

2.1. Del lenguaje natural al lenguaje matemático

Por *lenguaje natural* se hace aquí referencia a cualquier lengua o idioma, hablada o escrita, usada por un grupo de humanos para comunicarse en su vida cotidiana. En general, las lenguajes naturales son intrínsecamente ambiguos. Es decir, algunas de sus expresiones pueden dar lugar a diversas interpretaciones. En el ámbito de las matemáticas, por el contrario, es necesario establecer convenciones en el lenguaje, con el objetivo de manejar un lenguaje preciso en el que se evite al máximo la posibilidad de múltiples interpretaciones.

De manera similar a como usamos el ambiguo lenguaje natural para especificar las reglas precisas de un juego (como el ajedrez, por ejemplo), es imprescindible el uso del lenguaje natural para definir las reglas precisas del lenguaje matemático. En el transcurso de esta sección, a través del lenguaje natural, se describen los elementos y las reglas del lenguaje matemático, señalando la diferencia entre ambos lenguajes. Adicionalmente, se introduce un lenguaje (lógico) simbólico que permite expresar proposiciones y demostraciones de una manera sintética y estructurada.

Para comenzar, se define lo que se entenderá por 'proposición'. Si se desea definir dicho concepto de manera precisa, es necesario entrar en profundas discusiones filosóficas y lingüísticas. Sin embargo, de manera similar a como se hace en diversos textos introductorios al razonamiento lógico, con el objetivo de ser más prácticos, se dará una definición sencilla pero suficiente para diferenciar cuando una sentencia o expresión es o no una proposición.

Definición 1. Una *proposición* (o *enunciado*) es una expresión a la que se puede asignar un (único) valor de verdad (verdadera o falsa).

A diferencia del lenguaje natural, donde algunas oraciones son usadas para expresar deseos, ideas, creencias, interrogantes, etc, en matemáticas por lo general solo se usan expresiones a las que se les puede asignar un valor de verdad, a las cuales convenimos llamar proposiciones. Bajo una determinada teoría matemática, el valor de verdad que se puede asignar a una proposición es único y solo puede ser o 'verdadero' o 'falso'.

Las siguientes expresiones son ejemplos de proposiciones, algunas de ellas matemáticas y otras de la vida cotidiana:

- Está lloviendo.
- Las vacas vuelan.

- Si 4 es divisible por 6, entonces 4 es divisible por 2.
- $\sqrt{2}$ es irracional.
- Existen números reales que no son racionales.
- Todo triángulo equilátero es isósceles.
- Todo número entero par mayor que 2 puede ser escrito como la suma de dos números primos.
- Si dos planos diferentes se cortan, su intersección es una recta.

Expresiones o sentencias interrogativas o imperativas, como los que se presentan a continuación, no son proposiciones, pues su intensión no es afirmar la veracidad o falsedad de algo, sino obtener información (en el caso de las sentencias interrogativas) o dar consejos, pedir, o dar órdenes (en el caso de las sentencias imperativas).

- ¿Está lloviendo?
- Construya una triángulo rectángulo.

Las siguientes expresiones tampoco son proposiciones, pues expresan operaciones matemáticas que producen algunos resultados, pero no afirman nada sobre dichos resultados.

- $5 + 7$.
- $\sqrt{2}$.

Afirmaciones que dependen de variables, en el sentido en que solo se les puede asignar valor de verdad si se sustituyen las variables por objetos específicos, tampoco son consideradas proposiciones. Las siguientes sentencias son ejemplos de este tipo de afirmaciones, las cuales son llamadas *funciones proposicionales* o *proposiciones abiertas*.

- $x + 3 = 5$.
- x es un número primo.

Sin embargo, a algunas sentencias que contienen variables se les puede asignar valor de verdad, y por lo tanto son proposiciones. Las siguientes sentencias son ejemplo de esto (más adelante será claro que estas sentencias tienen implícitos conectivos lógicos llamados 'cuantificadores', los cuáles hacen que los valores de verdad de estas expresiones dejen de depender de valores particulares de las variables que hay en ellas).

- La ecuación $x + 3 = 5$ tiene solución en los números enteros.
- Si a y b son las medidas de los catetos y c es la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, entonces $a^2 + b^2 = c^2$.

Existen *conectivos* (u *operadores*) lógicos que al ser aplicados a proposiciones generan nuevas proposiciones. Los conectivos lógicos básicos que serán considerados en este texto, y que son bastante usuales en la construcción de proposiciones matemáticas, son: *negación* (expresada en el lenguaje natural por 'no'), *conjunción* (expresada en el lenguaje natural por 'y'), *disyunción* (expresada en el lenguaje natural por 'o'), *implicación* (expresada en el lenguaje natural mediante la estructura 'si... entonces') y el *bicondicional* (*doble implicación* o *equivalencia*) (expresada en el lenguaje natural mediante la estructura '... si y solo si...'). Las siguientes proposiciones muestran el uso de los conectivos lógicos.

- $\sqrt{2}$ *no* es racional.
- 2 es número par *y* es primo.
- $5 < \pi$ *o* $\pi < 5$.
- *Si* las vacas vuelan, *entonces* $1 + 1 = 2$.
- Iré hoy a nadar *si y solo si* no llueve.

Las proposiciones que no tiene conectivos lógicos son llamadas *simples* (o *atómicas*), mientras que las que tienen conectivos lógicos son llamadas *compuestas*.

La verdad o falsedad de las proposiciones compuestas puede ser determinada con base en la verdad o falsedad de las proposiciones que la componen. A continuación se describen las condiciones de verdad asociadas a cada uno de los conectivos lógicos, al mismo tiempo que se introduce un lenguaje simbólico para representar proposiciones.

Las condiciones de verdad de los conectivos lógicos se derivan del uso común que en el lenguaje natural hacemos de dichos conectivos. Sin embargo, como veremos más adelante, en el lenguaje natural se presentan ciertas ambigüedades en el uso de estos conectivos. Por lo tanto, para asegurar que las proposiciones matemáticas admitan una única interpretación, es necesario establecer convenciones rigurosas para el uso de los conectivos lógicos en el ámbito de las matemáticas. Con dichas convenciones, dado el valor de verdad de las proposiciones atómicas, será siempre posible determinar de manera única el valor de verdad de cualquier proposición compuesta. De aquí en adelante, los valores de verdad 'verdadero' y 'falso' serán representados por las letras V y F, respectivamente.

De manera similar a como se usan variables en el álgebra para representar números arbitrarios, en la lógica también se usan variables para representar proposiciones arbitrarias; es decir símbolos que representan una proposición cualquiera. En este texto se usarán letras mayúsculas $P, Q, R, \ldots$ como variables proposicionales. Las expresiones que pueden ser formadas usando variables proposicionales y conectivos lógicos son llamadas *fórmulas (lógicas)* y serán denotadas por medio de letras griegas. Se dice que dos fórmulas son *lógicamente equivalentes* si para cualquier asignación de valores de verdad a sus variables proposicionales ellas siempre toman el mismo valor de verdad, se mostrarán varios ejemplos en las siguientes secciones.

2.1.1. Negación

Negar una proposición es equivalente a expresar la falsedad de dicha proposición. Por ejemplo, afirmar que '$\sqrt{2}$ *no* es racional', es equivalente a afirmar que '*es falso* que $\sqrt{2}$ es racional'. Aquí la equivalencia se refiere a que ambas afirmaciones quieren decir lo mismo, o tienen el mismo significado.

En el lenguaje lógico se usa el símbolo $\neg$ para expresar la negación. Es decir, $\neg P$ representa la negación de la proposición P. Teniendo en cuenta la definición de negación dada en el párrafo anterior, la negación de una proposición es verdadera si la proposición es falsa, y es falsa si la proposición es verdadera, lo que se representa en la Tabla 2.1.

Los siguientes son ejemplos de negación de proposiciones:

- 5 *no* es primo.
- $2+7$ *no* es par.

Como se sabe que '5 es primo' es verdadero, entonces '5 *no* es primo' es falso, y como se sabe que '$2+7$ es par' es falso, entonces '$2+7$ *no* es par' es verdadero.

P	**¬P**
V	F
F	V

Tabla 2.1: Tabla de verdad para la negación.

Bajo las condiciones de verdad dadas para el conectivo de negación, se tiene que $\neg(\neg P)$ es verdadero si P es verdadero, y que $\neg(\neg P)$ es falso si P es falso. Por lo tanto, queda claro que bajo el uso dado a dicho conectivo en matemáticas, la doble negación de una proposición es lógicamente equivalente a la afirmación de dicha proposición. Es decir, $\neg(\neg P)$ es lógicamente equivalente a P, para cualquier proposición P.

En varios idiomas, como en el español por ejemplo, en algunos contextos se usa la doble negación de manera retórica para dar énfasis a la negación. Por ejemplo, si una persona afirma 'no iré nunca a los Estados Unidos', se entiende que lo que la persona quiere decir es que 'nunca irá a los Estados Unidos'. Observe que la palabra 'nunca' tiene implícita una negación, pues afirmar 'nunca iré a los Estados Unidos', es equivalente a afirmar 'no iré a los estados unidos' (en ningún momento). Por lo tanto, la expresión 'no iré nunca a los Estados Unidos' contiene una doble negación, pero en la interpretación que se da en el uso cotidiano a dicha expresión, esa doble negación no es equivalente a la afirmación (en este caso de que la persona 'irá a los Estados Unidos'), sino que por el contrario hace énfasis a la negación. Esto muestra una primera diferencia en el uso de los conectivos lógico en el lenguaje natural y en el ámbito de las matemáticas, donde la doble negación de una proposición siempre es lógicamente equivalente a la proposición.

2.1.2. Conjunción

Cuando se juntan dos proposiciones por medio del conectivo 'y' se obtiene una nueva proposición, y se dice que la proposición resultante es la *conjunción* de las proposiciones que se juntan. Cuando se afirma una conjunción, se expresa con esto la verdad de las proposiciones que la componen. Por ejemplo, si se afirma que '2 es primo y es par', se está expresando con esto que las proposiciones '2 es primo' y '2 es par' son ambas verdaderas.[1]

[1]Note que la conjunción de estas dos proposiciones debería ser '2 es primo y 2 es par', pero en el lenguaje natural se omite la repetición de '2', ya que se sobreentiende en el contexto cuál es el objeto del que se está afirmando la paridad.

En el lenguaje lógico se usa el símbolo $\wedge$ para expresar la conjunción. Si P y Q representan proposiciones, entonces $P \wedge Q$ representa la conjunción de dichas proposiciones. Teniendo en cuenta la definición de conjunción dada en el párrafo anterior, la conjunción de dos proposiciones es verdadera si ambas proposiciones son verdaderas, y es falsa si alguna de las proposiciones es falsa, lo que se representa en la Tabla 2.2.

P	**Q**	$\mathbf{P \wedge Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla 2.2: Tabla de verdad para la conjunción.

Los siguientes son ejemplos de conjunción de proposiciones:

- 5 es primo y $\sqrt{2}$ es irracional.

- π es mayor que 2 y menor que 3.

La conjunción '5 es primo y $\sqrt{2}$ es irracional' es verdadera, ya que tanto '5 es primo' como '$\sqrt{2}$ es irracional' son proposiciones verdaderas (más adelante se darán los elementos necesarios para probar que $\sqrt{2}$ es irracional). Por otro lado, la conjunción 'π es mayor que 2 y menor que 3' es falsa, pues la proposición 'π es menor que 3' es falsa, y esto es suficientes para que la conjunción sea falsa.

En el lenguaje natural, el conectivo 'y' se usa algunas veces con una connotación temporal implícita. Por ejemplo, si una persona afirma 'descansé y presenté el examen', se entiende que la persona primero descansó y luego presentó el examen; mientras que si afirma 'presenté el examen y descansé', se entiende que la persona primero presentó el examen y luego descansó (¡inclusive se puede entender que precisamente descansó por haber presentado el examen!). Es decir, en el lenguaje natural, afirmar una proposición de la forma $A \wedge B$ en algunos casos no es equivalente a afirmar la proposición $B \wedge A$. En el ámbito de las matemáticas, por el contrario, las proposiciones son atemporales, y el valor de verdad de una conjunción es siempre independiente del orden de las proposiciones que la componen.

2.1.3. Disyunción

Cuando se juntan dos proposiciones por medio del conectivo 'o' se obtiene una nueva proposición, y se dice que la proposición resultante es la *disyunción* de las proposiciones que se juntan. Cuando se afirma una disyunción, se expresa con esto que al menos una de las proposiciones que la componen es verdadera. Por ejemplo, si dado un polígono p, se afirma que 'p es un triángulo o un rectángulo', se está expresando con esto que al menos una de las proposiciones 'p es un triángulo' o 'p es un rectángulo' es verdadera.

En el lenguaje lógico se usa el símbolo $\vee$ para expresar la disyunción. Si P y Q representan proposiciones, entonces $P \vee Q$ representa la disyunción de dichas proposiciones. Teniendo en cuenta la definición de conjunción dada en el párrafo anterior, la conjunción de dos proposiciones es verdadera si al menos una de las proposiciones que la componen es verdadera, y es falsa solo en el caso en que ambas proposiciones que la componen son falsas, lo que se representa en la Tabla 2.3.

P	**Q**	**P ∨ Q**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 2.3: Tabla de verdad para la disyunción.

Los siguientes son ejemplos de disyunción de proposiciones:

- Un triángulo rectángulo es isósceles o es escaleno.
- 128 es múltiplo 3 o de 5.

Como dado un triángulo rectángulo t se sabe que t no puede ser equilátero (¿por qué?), entonces t debe ser o bien isósceles o bien escaleno; en cualquiera de estos casos la disyunción 'Un triángulo rectángulo es isósceles o es escaleno' es verdadera. Note que aquí se está afirmando una disyunción para cualquier triángulo rectángulo t, por lo tanto implícitamente se está afirmando que 'para todo triángulo rectángulo t, t es isósceles o es escaleno' (en la Sección 2.1.9 se estudiará más a fondo este tipo de afirmaciones generales). La disyunción '128 es múltiplo 3 o de 5' es falsa, pues 128 no es múltiplo de 3 y tampoco es múltiplo de 5.

En el lenguaje natural, el conectivo 'o' se usa algunas veces de manera excluyente. Por ejemplo, cuando una persona afirma 'voy a estudiar o a escuchar música', se entiende que la persona que hizo la afirmación va a realizar alguna de las dos actividades, estudiar o escuchar música, pero no va a hacer ambas. En el ámbito de las matemáticas, por el contrario, la disyunción siempre tiene un significado inclusivo. Si se quiere hacer una afirmación excluyente se debe hacer de manera explícita (adicionar 'pero no ambos', o algo similar). Por ejemplo, si dado un número natural n se quiere afirmar que éste es divisible por 3 o por 5, pero además se quiere afirmar que solo es divisible por uno de estos números, se debe expresar esto explícitamente. Puede usarse, por ejemplo, la expresión 'n es divisible por 3 o por 5, pero no por ambos números', o alguna expresión similar; lo importante es que quede claro que lo que se quiere afirmar es que una y solo una de las dos proposiciones es verdadera. En el lenguaje lógico se usa el símbolo $\underline{\vee}$ para expresar la disyunción exclusiva. Es decir, la proposición $P\underline{\vee}Q$ es verdadera si P es verdadera y Q es falsa, o si P es falsa y Q es verdadera, en caso contrario $P\underline{\vee}Q$ es falsa. Por lo tanto, $P\underline{\vee}Q$ es lógicamente equivalente a $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$.

2.1.4. Implicación

Las implicaciones son sentencias que expresan que, si una determinada proposición (llamada *antecedente*) es verdadera, entonces otra determinada proposición (llamada *consecuente*) también tendrá que ser verdadera. Las implicaciones son también llamadas afirmaciones hipotéticas o condicionales, pues expresan que si se tiene como hipótesis la verdad del antecedente, entonces se puede concluir la verdad del consecuente. En el lenguaje natural, las implicaciones se expresan normalmente bajo la estructura 'si ..., entonces ...', donde los puntos suspensivos representan proposiciones (los primeros puntos suspensivos corresponden al antecedente y los segundos al consecuente).

Un ejemplo de una proposición condicional es 'si Juan es antioqueño, entonces es colombiano'. Con esta afirmación no se quiere decir que Juan sea necesariamente antioqueño, y por lo tanto colombiano, sino que si Juan es en efecto antioqueño (es decir, si 'Juan es antioqueño' es una proposición verdadera), entonces también tendrá que ser colombiano (es decir, la proposición 'Juan es colombiano' tendrá que ser también verdadera). Si Juan no es antioqueño (es decir, si el antecedente de la implicación es falsa), la implicación no afirma nada con respecto a si Juan es o no colombiano. Por lo tanto, si Juan no es antioqueño, la implicación será verdadera, independientemente de si Juan es o no colombiano. Una implicación será entonces verdadera en el caso en el que el antecedente sea verdadero y el consecuente también, o en el caso en el que el antecedente sea falso (independientemente del valor de verdad del consecuente), y será falsa solo en el caso en el que el antecedente sea verdadero y el consecuente sea falso.

En el lenguaje lógico se usa el símbolo $\rightarrow$ para representar la implicación. Si P y Q representan proposiciones, entonces $P \rightarrow Q$ representa la proposición 'si P, entonces Q'. Por lo que se explicó anteriormente, las proposiciones $P \rightarrow Q$ y $\neg P \vee Q$ son lógicamente equivalentes. En la Tabla 2.4 se presentan los valores de verdad para la implicación.

P	**Q**	$\mathbf{P \rightarrow Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla 2.4: Tabla de verdad para la implicación.

Algunos ejemplos de implicaciones son los siguientes:

- Si t es isósceles, entonces t tiene dos ángulos congruentes (donde t es un triángulo).

- Si n es múltiplo de 3, entonces n es múltiplo de 6 (donde n es un número entero).

La primera implicación es verdadera, pues se puede probar (usando algunos elementos de geometría básicos) que todo triángulo que es isósceles tiene (por lo menos) dos ángulos congruentes. Mientras que la segunda proposición es falsa, pues si se toma $n = 9$ se tiene que 'n es múltiplo de 3' es verdadero y 'n es múltiplo de 6' es falso. Note que en ambos ejemplos se están haciendo afirmaciones generales, en la primera implicación sobre triángulos y en la segunda sobre números naturales. En el primer caso, independientemente de cual sea el triángulo t, la implicación es verdadera, mientras que en el segundo caso se mostró un caso particular ($n = 9$) para el cual la implicación es falsa. Para otros valores de n la implicación es verdadera (¿para cuáles valores por ejemplo? y ¿por qué?), pero como la afirmación es general, basta mostrar un caso particular para el cual la implicación no vale, para refutar la validez de la implicación (esto será discutido con mayor detalle en la Sección 2.2.10).

Es necesario destacar que en una implicación, desde el punto de vista lógico, no se exige que haya relación alguna entre el antecedente y el consecuente, por esto se llama *implicación material*. Por ejemplo, bajo las consideraciones anteriores, la implicación 'si $\sqrt{2}$ es racional, entonces $1+1=2$' es verdadera, pues su antecedente es falso (además, su consecuente es verdadero). Sin embargo, no existe ninguna relación entre la verdad de la proposición '$1+1=2$' y la verdad (o falsedad) de la proposición '$\sqrt{2}$ es racional' (inclusive, si se cambia el antecedente de la implicación por '$\sqrt{2}$ es irracional', la implicación continúa siendo verdadera). Otro ejemplo es cuando una persona afirma 'si las vacas vuelan, entonces yo soy superman'. En este caso, la verdad de la implicación se debe a la falsedad del antecedente. Como el antecedente es evidentemente falso, quien hace la afirmación condicional no se está comprometiendo ni con la verdad ni con la falsedad del consecuente (podría cambiarse el consecuente por '$1+1=2$', y la implicación continuaría siendo verdadera; aunque la verdad de $1+1=2$' no tenga nada que ver con a falsedad de 'las vacas vuelan'). Aunque desde el punto de vista lógico no se exige ninguna relación entre el antecedente y el consecuente en las implicaciones, los matemáticos normalmente hacen afirmaciones condicionales donde el antecedente y el consecuente están relacionados de alguna manera.

Como el lenguaje natural es tan flexible, la estructura 'si..., entonces...' no es la única forma de expresar implicaciones. Por ejemplo, las siguientes sentencias también expresan implicaciones:

- $n+5$ es par solo si no n es impar.
- Si A es un cuadrado, A es un polígono regular.

El poder interpretativo que se tiene del lenguaje natural permite identificar en estos ejemplos (y en muchas otras sentencias) las implicaciones que hay implícitas, y permite llevarlas a la forma 'si..., entonces'.

Las implicaciones pueden ser entendidas en términos de condiciones suficientes y necesarias. Si una implicación $P \to Q$ es verdadera, la verdad de P es una *condición suficiente* para la verdad de Q, mientras que la verdad de Q es una *condición necesaria* para la verdad de P (pues P es verdadero solo si Q también lo es). Por ejemplo, como la implicación 'si n es par, entonces $n \cdot m$ es par' (donde n y m son números enteros) es verdadera, se tiene que 'n es par' es una condición suficiente para que $n \cdot m$ sea par, y también se tiene que '$n \cdot m$ es par' es una condición necesaria para que n sea par (pues no se puede dar que n sea par y $n \cdot m$ no sea par).

Dada una proposición de la forma $P \to Q$, su *recíproca* es la proposición $Q \to P$, y su *contrarrecíproca* es la proposición $\neg Q \to \neg P$. Por ejemplo, dada la proposición 'si A es un cuadrado, entonces A es un polígono regular', su recíproca es 'si A es un polígono regular, entonces A es un cuadrado' y su contrarrecíproca es 'si A no es un polígono regular, entonces A no es un cuadrado'. En este caso, tanto la implicación como su contrarrecíproca son ambas verdaderas, mientras que su recíproca es falsa. Pregúntese lo siguiente: ¿para cualquier implicación, su contrarrecíproca siempre toma el mismo valor de verdad? ¿para cualquier implicación, su recíproca siempre toma el valor de verdad opuesto?

2.1.5. Bicondicional

Para expresar que dos proposiciones se implican mutuamente, se usa la estructura '... si y solo si ...', donde los puntos suspensivos representan proposiciones. Las proposiciones que expresan esta dupla implicación son llamadas *bicondicionales*. Por ejemplo, al afirmar 'n es par si y solo si n^2 es par', se está afirmando que 'si n es par, entonces n^2 es par' y que 'si n^2 es par, entonces n es par'.

En el lenguaje lógico se usa el símbolo $\leftrightarrow$ para representar el bicondicional. Si P y Q representan proposiciones, entonces $P \leftrightarrow Q$ representa la proposición 'P si y solo si Q', que es lógicamente equivalente a $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$. Teniendo en cuenta las condiciones de verdad para los conectivos de implicación y conjunción, un bicondicional $P \leftrightarrow Q$ es verdadero en los casos en los que P y Q toman los mismos valores de verdad, y es falso en caso contrario. En la Tabla 2.5 se presentan los valores de verdad para el bicondicional.

P	**Q**	$\mathbf{P \leftrightarrow Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla 2.5: Tabla de verdad para el bicondicional.

Los siguientes son ejemplos de proposiciones bicondicionales:

- Un número entero n es múltiplo de 3 si y solo si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3.
- Dos rectángulos tienen la misma área si y solo si las longitudes de sus lados son las mismas.

El primer ejemplo es un bicondicional verdadero, mientras que el segundo ejemplo es un bicondicional falso (¿por qué?).

2.1.6. Tablas de verdad

Una *tabla de verdad* es una tabla en la que se muestran todos los posibles valores de verdad que se pueden asignar a una proposición compuesta, con base en los valores de verdad que pueden tomar las variables proposiciones que hay en ella y las tablas de verdad de los conectivos lógicos.

Dada una fórmula α, que representa una proposición, el conjunto de las *variables proposicionales* de α será denotado por $\mathrm{Var}(\alpha)$. Por ejemplo, si α es la fórmula $P \to (Q \to P)$, entonces $\mathrm{Var}(\alpha) = \{P, Q\}$. Por otro lado, las *subfórmulas* de α son las subexpresiones de α que a la vez son fórmulas, incluyendo a α. El conjunto de subfórmulas de α será denotado por $\mathrm{Sub}(\alpha)$. Por ejemplo, si α es la fórmula $(P \vee Q) \to \neg R$, entonces $\mathrm{Sub}(\alpha) = \{P, Q, R, P \vee Q, \neg R, (P \vee Q) \to \neg R\}$.

Para construir la tabla de verdad de una fórmula α se deben seguir los siguientes pasos:

1. Para cada subfórmula de α se debe crear una columna, etiquetada con la subfórmula correspondiente (iniciando con las variables proposicionales, luego las subfórmulas que son construidas aplicando conectivos lógicos a las variables proposicionales, y así sucesivamente colocando las subfórmulas que son obtenidas al aplicar conectivos lógicos a subfórmulas anteriores, hasta llegar a α).

2. Colocar en cada fila una posible combinación de valores de verdad para las variables proposicionales de α. Si α tiene n variables proposicionales, la tabla debe tener 2^n filas. Para asegurar la inclusión de todas las posibles combinaciones de valores de verdad, una estrategia consiste en colocar debajo de la primera variable proposicional 2^{n-1} valores V ('verdadero') y luego 2^{n-1} valores F ('falso'). Para la segunda variable proposicional se deben intercalar los valores V y F cada 2^{n-2} filas, y se debe continuar así hasta colocar los valores de verdad para la n-ésima variable proposicional intercalando los valores V y F cada fila (es decir, cada 2^{n-n} filas).

3. Asignar valores de verdad a las subfórmulas que hay en las columnas siguientes, hasta llegar a la columna donde está α, teniendo en cuenta los valores de verdad asignados a las subfórmulas anteriores y las tablas de verdad de los conectivos lógicos.

Como ejemplo, se muestra la tabla de verdad para la fórmula $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ (Tabla 2.6).

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Tabla 2.6: Tabla de verdad para la fórmula $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$.

Se dice que una fórmula α es una *tautología* si solo puede tomar valor de verdad V. Las tautologías también son llamadas *leyes lógicas* o *fórmulas lógicamente válidas*, pues son fórmulas verdaderas independientemente de los valores de verdad que tomen sus variables proposicionales. La Tabla 2.6 muestra que $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ es una tautología.

Como dos fórmulas α y β son lógicamente equivalentes si bajo cualquier asignación de valores de verdad a sus variables proposicionales ellas siempre toman el mismo valor de verdad, esto ocurre si y solamente si $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una tautología. La Tabla 2.6 muestra, por lo tanto, que $P \to Q$ y $\neg P \vee Q$ son fórmulas lógicamente equivalentes.

Se dice que una fórmula α es una *contradicción* si solo puede tomar valor de verdad F. Es decir, si independiente de los valores de verdad que tomen sus variables proposicionales, la fórmula es siempre falsa. La Tabla 2.7 muestra que $(P \wedge Q) \wedge \neg(P \vee Q)$ es una contradicción.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$(P \wedge Q) \wedge \neg(P \vee Q)$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F

Tabla 2.7: Tabla de verdad para la fórmula $(P \wedge Q) \wedge \neg(P \vee Q)$.

Las fórmulas que en unos casos toman valor de verdad V y en otros casos toman valor de verdad F son llamadas *contingencias*. La Tabla 2.8 muestra que $P \to \neg P$ es una contingencia (¡aunque aparentemente es una fórmula contradictoria!).

P	$\neg P$	$P \to \neg P$
V	F	F
F	V	V

Tabla 2.8: Tabla de verdad para la fórmula $P \to \neg P$.

En el álgebra es usual sustituir términos iguales donde sea necesario. Por ejemplo, si se tiene que $2x + 5 = y$ y además se tiene que $3y + 2x + 5 = 8$, sustituyendo el valor de y que hay en la primera ecuación en la segunda ecuación se puede concluir que $3y + y = 8$. De manera similar, en la lógica se pueden sustituir fórmulas lógicamente equivalentes. Por ejemplo, usando la equivalencia entre $\delta \to \gamma$ y $\neg\delta \vee \gamma$ (para cualquier par de fórmulas δ y γ), de la verdad de $Q \wedge (P \to \neg P)$ se puede concluir la verdad de $Q \wedge (\neg P \vee \neg P)$, de donde a su vez se puede concluir la verdad de $Q \wedge \neg P$ (pues $\neg P \vee \neg P$ y $\neg P$ también son fórmulas lógicamente equivalentes). De la misma manera, de la falsedad de $Q \wedge (P \to \neg P)$, se puede concluir la falsedad de $Q \wedge \neg P$.

Es importante aclarar que una tabla de verdad no permite determinar si una proposición específica es verdadera o falsa (a menos que esta sea una tautología o una contradicción). Por ejemplo, para probar que 'si n es par, entonces n^2 es par', no sirve para nada representar la proposición 'n es par' por una letra P y la proposición 'n^2 es par' por una letra Q, y hacer la tabla de verdad para $P \to Q$ (la cual es una contingencia). Sin embargo, las tablas de verdad nos permiten identificar leyes lógicas y reglas de deducción, que podrán ser usadas en las demostraciones (como se verá más adelante).

2.1.7. Negación de conjunciones, disyunciones e implicaciones

En esta sección se presentan equivalencias lógicas para la negación de conjunciones, disyunciones e implicaciones, las cuales permiten llevar el conectivo de negación a las variables proposicionales. Estas equivalencias son útiles en los procesos de deducción (o demostraciones).

Si se niega una conjunción, se quiere indicar con esto que alguna de las proposiciones que la componen (es decir, las proposiciones que son unidas a través de la conjunción) es falsa. Por lo tanto, la negación de una conjunción es lógicamente equivalente a la disyunción de las negaciones de las proposiciones que la componen. En lenguaje lógico, $\neg(P \wedge Q)$ es lógicamente equivalente a $\neg P \vee \neg Q$, lo que puede ser verificado por medio de tablas de verdad. Por ejemplo, negar que '2 es primo y es par' (es decir, afirmar 'NO (2 es primo y es par)') es lógicamente equivalente a afirmar que '2 no es primo o no es par' (en este caso, 'NO (2 es primo y es par)' y '2 no es primo o no es par' son ambas proposiciones falsas, por lo tanto son lógicamente equivalentes). Note que en el lenguaje natural no se usa decir 'NO (2 es primo y es par)', mientras que la expresión '2 no es primo o no es par' suena mucho más natural.

Si se niega una disyunción, se quiere indicar con esto que ninguna de las proposiciones que la componen es verdadera; en otras palabras, que ambas proposiciones que la componen son falsas. Por lo tanto, la negación de una disyunción es lógicamente equivalente a la conjunción de las negaciones de las proposiciones que la componen. En lenguaje lógico, $\neg(P \vee Q)$ es lógicamente equivalente a $\neg P \wedge \neg Q$, lo que puede ser verificado por medio de tablas de verdad. Por ejemplo, negar que '7 es múltiplo de 3 o de 5' (es decir, afirmar 'NO (7 es múltiplo de 3 o de 5)') es lógicamente equivalente a afirmar que '7 no es múltiplo de 3 ni de 5' (en este caso, 'NO (7 es múltiplo de 3 o 5)' y '7 no es múltiplo de 3 ni de 5' son ambas proposiciones verdaderas, por lo tanto son lógicamente equivalentes).

Las equivalencias $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ y $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$ son llamadas *leyes de De Morgan*.

La negación de implicaciones suele causar un poco más de confusión. Para entender la equivalencia de la negación de una implicación, es necesario tener muy clara la definición que se dio de este conectivo en la Sección 2.1.4. Recuerde que con la afirmación de una implicación 'si P, entonces Q' lo que se está afirmando es que, si la proposición P es verdadera, entonces la proposición Q tendrá también que ser verdadera. Por lo tanto, negar una implicación es lógicamente equivalente a afirmar que el antecedente es verdadero y que el consecuente es falso. Es decir, que puede darse la verdad del antecedente y no darse la verdad del consecuente. En lenguaje lógico, $\neg(P \to Q)$ es lógicamente equivalente a $P \wedge \neg Q$, lo que puede ser verificado por medio de tablas de verdad. Por ejemplo, negar que 'si Juan es antioqueño, entonces es brasileño' (es decir, afirmar 'NO (si Juan es antioqueño, entonces es brasileño)') es lógicamente equivalente a afirmar que 'Juan es antioqueño y no es brasileño'.

2.1.8. Ejercicios

1. Determine cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones y justifique por qué.

    a) $x^2 \geqslant 20$.

b) No hay ceros en la expansión decimal de π.

c) $x = y$.

d) $225 - 142$.

e) Si dos rectas diferentes se intersecan, existe un único plano que las contiene.

f) Ocho mil trillones es el número más grande.

g) Por favor, calcule 45^3 en su cabeza.

h) ¿Todo rombo es un cuadrado?

i) El número entero 3^{546} tiene 200 dígitos.

j) Los enteros n, $n+1$ y $2n+1$ son primos.

k) $\sqrt{15625}$ es igual a 125.

l) Si n es un número impar, entonces su cuadrado se puede escribir de la forma $8k+1$, donde k es algún entero.

m) Si $x^2 = 2$, entonces x es irracional.

n) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$.

ñ) $(\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q}$.

2. Determine cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas y justifique sus respuestas.

   a) La suma $3^3 + 4^3 + 5^3$ es igual a 6^3.

   b) Un triángulo con lados de longitud 3, 4 y 5 tiene área 6.

   c) Un cubo tiene seis caras, ocho vértices y 10 lados.

   d) El número de diagonales de un polígono con 10 lados es igual a 55.

   e) La expresión $n^2 - n + 11$ es un primo, cuando $n = 13$.

   f) Un triángulo equilátero con lados de longitud 4 tiene área $4\sqrt{12}$.

3. ¿La disyunción '$n^2 + 2$ es un múltiplo de 3 o $3n + 7$ es un cuadrado perfecto' es verdadera o falsa cuando $n = 6$? ¿Qué se puede decir cuando $n = 8$, $n = 12$ y $n = 14$?

4. Crear una disyunción de dos afirmaciones abiertas sobre un número entero n, que sea verdadera solo cuando $n = 1$ o $n = -1$.

5. ¿Para cuáles valores de k entre 0 y 10 la expresión '$2^k + 1$ es un múltiplo de 3' es verdadera?

6. Sean P, Q y R las siguientes proposiciones:

   P : 'María estudia',
   Q : 'Andrés se duerme',
   R : 'El profesor se molesta'.

   Exprese las siguientes oraciones en lenguaje lógico:

   a) Si Andrés se duerme o María no estudia, entonces el profesor se molesta.
   b) Si Andrés no se duerme, entonces María estudia.
   c) María estudia, o el profesor se molesta y Andrés no se duerme.
   d) María estudia o el profesor se molesta, y Andrés no se duerme.
   e) Si el profesor no se molesta, entonces María estudia y Andrés se duerme.

7. Construya las tablas de verdad para las siguientes fórmulas, y en cada caso indique si es ley lógica (o tautología), contradicción o contingencia.

   a) $(P \wedge (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$.
   b) $\neg(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$.
   c) $P \rightarrow (P \wedge Q)$.
   d) $P \rightarrow (P \vee Q)$.

8. Sea $\mathfrak{T}$ una tautología y $\mathfrak{C}$ una contradicción. Dada una afirmación P, verifique que las siguientes afirmaciones son tautologías.

   a) $(\mathfrak{T} \wedge P) \leftrightarrow P$ (Eliminación de una verdad en una conjunción).
   b) $\mathfrak{C} \vee P \leftrightarrow P$ (Eliminación de una falsedad en una disyunción).
   c) $\mathfrak{T} \vee P$ es tautología.
   d) $\mathfrak{C} \wedge P$ es contradicción.

9. Determine cuáles de los siguientes pares de fórmulas son lógicamente equivalentes:

   a) $P \wedge (Q \wedge R)$ y $(P \wedge Q) \wedge R$.

b) $P \to (Q \to R)$ y $(P \to Q) \to R$.

c) $P \vee Q$ y $Q \vee P$.

d) $P \to Q$ y $Q \to P$.

e) $P \to (Q \to R)$ y $(P \wedge Q) \to R$.

f) $P \to (Q \to R)$ y $Q \to (P \to R)$.

g) $P \vee Q$ y $\neg P \to Q$.

10. Responda las siguientes preguntas, y justifique sus respuestas:

    a) ¿La negación de cualquier contradicción es una ley lógica?

    b) ¿La negación de una contingencia puede ser ley lógica o contradicción?

11. Observe las cuatro cartas que aparecen en la siguiente figura. Considerando que cada una de las cartas tiene una letra por una cara y un número (entre 0 y 9) por la otra, se elabora la siguiente afirmación: 'todas las cartas que tienen una vocal por una cara tienen un número par en la otra'.

Identifique, entre los literales que aparecen a continuación, aquel que permita averiguar si la proposición elaborada anteriormente es verdadera o falsa.

    a) Es necesario dar la vuelta a todas las cartas.

    b) Es suficiente con dar la vuelta a las dos primeras cartas.

    c) Es suficiente con dar la vuelta a las dos últimas cartas.

    d) Es suficiente con dar la vuelta a las dos cartas del medio.

    e) Es suficiente con dar la vuelta a la primera y la última carta.

12. Suponga que Juan hizo la siguiente afirmación: 'si termino de estudiar temprano, entonces voy a la fiesta'. ¿Qué se tendría que dar para poder acusar a Juan de mentiroso?

13. Considere la siguiente afirmación: '$n+3 > 10$ solo si n es positivo' (donde n es un número entero).

    a) Escriba la afirmación usando la estructura 'si..., entonces...'.

    b) ¿La afirmación es verdadera? Justifique su respuesta.

    c) Escriba la proposición recíproca, e indique si es o no verdadera, justificando su respuesta.

14. Halle una condición suficiente para que la suma de dos números enteros sea par, y escriba la condición en forma de implicación (si..., entonces...).

15. Halle una condición necesaria para que el producto de dos números enteros sea par, y escriba la condición en forma de implicación (si..., entonces...).

16. Niegue las siguientes proposiciones y use equivalencias lógica para obtener proposiciones equivalentes donde las negaciones sean aplicadas solo a proposiciones atómicas.

    a) Si a y b son pares, entonces $a \cdot b$ es par.

    b) 3 es par o es primo.

    c) 2 es par y es primo.

    d) Si a no es divisible por 2, entonces a no es divisible por 4.

    e) Si p es un polígono regular y tiene máximo 4 lados, entonces p es un triángulo equilátero o un cuadrado.

17. Para las siguientes implicaciones, escriba sus recíprocas y contrarrecíprocas, y determine el valor de verdad de cada una de las proposiciones (proposiciones originales, recíprocas y contrarrecíprocas):

    a) Si x es un número real y $x \geq 0$, entonces $\sqrt{x}$ es un número real.

    b) Si x es primo, entonces $x = 2$ o x es impar.

    c) Si s es un cuadrado, entonces s es un rectángulo.

    d) Si a es un número real y $a > 0$, entonces $a^2 > 0$.

    e) Si t es un triángulo rectángulo, entonces t no es equilátero.

18. Si el invierno continúa o las inundaciones aumentan, entonces las viviendas peligran o los alimentos se encarecen. No es cierto que los

alimentos se encarecen. El invierno continúa.

Suponiendo que las proposiciones anteriores son verdaderas, ¿se puede concluir algo con respecto a la proposición 'las viviendas peligran'? (justifique su respuesta).

19. Un lógico es capturado por una tribu de salvajes y encerrado en una celda con dos salidas. El jefe de los salvajes ofrece al cautivo las siguientes posibilidades de escapar: 'una de las dos puertas conduce a una muerte segura y la otra a la libertad. Puede usted salir por la puerta que guste. Con el objetivo de ayudarlo a tomar una decisión, dos de mis guerreros estarán todo el tiempo a su lado con el propósito de contestarle una sola pregunta que se le ocurra. Sin embargo debo de advertirle que uno de mis guerreros es completamente veraz en tanto que el otro siempre miente.' Después de pensar un momento, el lógico hace una pregunta y luego que éste le ha contestado escoge la puerta correcta que lo conduce a la libertad. ¿Cuál fue la pregunta que formuló?

20. Un excursionista es capturado por caníbales y le dicen: 'si dices una mentira te matamos lentamente y si dices una verdad te matamos rápidamente.' ¿Qué debe decir el excursionista para que no lo maten?

21. Un prisionero tiene la posibilidad de ordenar su libertad si escoge una puerta adecuada entre las 3 dadas. En cada una de las puertas hay una inscripción, pero solo una de ellas es verdadera, estas son:

    - (Puerta I): Esta puerta conduce a la libertad.
    - (Puerta II): Esta puerta no conduce a la libertad.
    - (Puerta III): La puerta I no conduce a la libertad.

    ¿Cuál es la puerta que el prisionero debe escoger para tener la certeza de alcanzar su libertad?

22. Cuatro individuos deben cruzar un puente colgante destartalado, solo para peatones, durante una noche muy oscura. En algunas partes hay huecos de modo que, para no pisar en falso y caer al vacío, deben usar una linterna que ilumine el camino. El puente solo soporta el peso de dos de las personas al mismo tiempo (si fueran más, se desmoronaría). Hay solo una linterna. Los cuatro caminan a velocidades diferentes: Matías puede cruzar el puente en un minuto; Ramiro, en dos minutos; Carlos en

cinco y Hugo, que es el más lento, en 10 minutos. El puente caería en exactamente 17 minutos. ¿Cómo pueden cruzar los cuatro?

2.1.9. Cuantificadores

Anteriormente, se habló de funciones proposicionales (o proposiciones abiertas) como afirmaciones que dependen de variables, en el sentido en que solo se les puede asignar valor de verdad si se sustituyen las variables por objetos específicos. Como ejemplo, se colocó la sentencia $x + 3 = 5$. Considerando que x puede tomar cualquier valor en el conjunto de los números reales, la sentencia es verdadera en el caso en el que x tome el valor 2 y falsa en cualquier otro caso. Se puede 'cerrar' el significado de proposiciones abiertas cuantificando los objetos que satisfacen la sentencia mediante las expresiones 'para todo' (*cuantificador universal*) o 'existe' (*cuantificador existencial*). Por ejemplo, se puede decir que 'para todo x, $x + 3 = 5$' o que 'existe un x tal que $x + 3 = 5$'. Note que las sentencias obtenidas al agregar cuantificadores tienen sentido completo (desde que se tenga claro el conjunto sobre el cual se está cuantificando). Es decir, a las sentencias obtenidas mediante cuantificación se les puede asignar valor de verdad sin depender de los valores particulares que la variable x pueda tomar. En el caso de 'para todo x, $x + 3 = 5$', como se está considerando que x puede tomar cualquier valor en el conjunto de los números reales, esta es una sentencia falsa, pues hay muchos números reales que no satisfacen esta ecuación, mientras que 'existe un x tal que $x + 3 = 5$' es una sentencia verdadera, pues cuando x toma el valor de 2 la ecuación es verdadera.

Cuando se cuantifica (universal o existencialmente) sobre una variable, dicha cuantificación se hace sobre un determinado conjunto de objetos, al cual se llama en algunos textos *universo de discurso* o *dominio de interpretación*. En el ejemplo anterior, el universo de discurso es el conjunto de los números reales, pues se supone que x puede tomar valores en este conjunto. Es decir, las sentencias cuantificadas en el párrafo anterior son sentencias que 'hablan' sobre números reales. En muchos textos se encuentran afirmaciones con cuantificadores donde no se específica explícitamente el universo de discurso; sin embargo, dicho universo debe ser deducible del contexto. Por ejemplo, si se está leyendo un libro de Cálculo, se presupone usualmente que las variables pueden tomar valores en el conjunto de los números reales (a no ser que se especifique explicitamente algo diferente).

Cuando se hacen proposiciones con cuantificadores, debe quedar claro cuál es el universo de discurso, pues dependiendo de éste el valor de verdad de las proposiciones puede variar. Por lo tanto, si no es claro en el contexto sobre qué conjunto se está cuantificando, esto debe ser especificado de manera explicita. Por ejemplo, considere la proposición 'existe un x tal que $x+5=3$'. Si se toma como universo de discurso al conjunto de los números naturales, la proposición es falsa (pues ningún número natural al ser sumado con 5 da como resultado 3); mientras que si se toma como universo de discurso el conjunto de los números enteros, la proposición es verdadera (pues si x toma el valor -2, que es un número entero, se tiene que $x+5=3$). En este caso es necesario, por lo tanto, especificar el universo de discurso, diciendo por ejemplo que 'existe un número entero x tal que $x+5=3$'.

En el lenguaje lógico se usan los símbolos $\forall$ y $\exists$ para representar los cuantificadores universal y existencial, respectivamente. Si $P(x)$ representa una proposición abierta que depende de la variable x, la expresión $\forall x(P(x))$ representa la afirmación 'para todo x, $P(x)$', y la expresión $\exists x(P(x))$ representa la afirmación 'existe un x tal que $P(x)$'. Para especificar explícitamente que el universo de discurso es un conjunto U, se escribe $\forall x \in U(P(x))$ o $\exists x \in U(P(x))$. Por ejemplo, si T representa el conjunto de todos los triángulos[2] y $P(x)$ representa la proposición abierta 'x es isósceles', entonces $\forall x \in T(P(x))$ representa la proposición que afirma que 'todo triángulo es isósceles' y $\exists x \in T(P(x))$ representa la proposición que afirma que 'existe un triángulo isósceles' (o 'existen triángulos isósceles').

Si se usa una expresión de la forma $P(x)$ para representar que el objeto x satisface una determinada propiedad, cuándo se escribe $P(t)$ donde t es un término que representa un objeto específico o un objeto que depende de alguna variable, lo que se quiere expresar con esto es la sustitución de x por t en $P(x)$. Por ejemplo, si $P(x)$ es la notación que se define para expresar que 'x es un número primo', entonces $P(5)$ expresa que '5 es un número primo' (en este caso se sustituyó x por un objeto específico) y $P(y+8)$ expresa que '$y+8$ es un número primo' (en este caso se sustituyó x por un término abierto, que depende de la variable y). De manera general, si $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ representa una proposición que depende de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, entonces $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ representa la sustitución de cada una de las variables x_i por el término t_i en $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde $1 \leq i \leq n$. Por ejemplo, si $D(x, y)$ es la notación que se define para representar que 'x divide a y', entonces $D(5, 8)$ expresa que '5 divide a 8' y $D(2, 4z)$ expresa que '2 divide a $4z$'.

Con respecto al cuantificador existencial, es importante resaltar que, aunque es usual escribir 'existe un x tal que...', el cuantificador existencial siempre

[2]Como existen diferentes geometrías, es importante señalar que en este texto los objetos geométricos a los que nos referimos son los de la geometría euclidiana.

afirma la existencia de *al menos un* objeto que satisface una determinada propiedad. Por lo tanto, una sentencia existencial será verdadera si existe, en el universo de discurso, uno o más objetos que satisfacen la proposición abierta sobre la que se está cuantificando. Por ejemplo, si se dice que 'existe un número real x tal que $x \cdot x = x$' (en lenguaje lógico, $\exists x \in \mathbb{R}(x \cdot x = x)$), esta afirmación es cierta (y en este caso existen varios números reales x que satisfacen $x \cdot x = x$ ¿cuáles?). Si se quiere afirmar que existe exactamente un objeto que satisface una determinada propiedad, esto debe ser especificado explícitamente (como se verá en la Sección 2.1.12).

Teniendo en cuenta lo anterior, una sentencia de la forma $\forall x \in U(P(x))$ (o $\forall x(P(x))$, donde el universo de discurso U es claro en el contexto) es verdadera si para todo $c \in U$, se tiene que $P(c)$ es verdadero, y es falsa en caso contrario (es decir, si existe $c \in U$ tal que $P(c)$ es falso). Mientras que una sentencia de la forma $\exists x \in U(P(x))$ (o $\exists x(P(x))$, donde el universo de discurso U es claro en el contexto) es verdadera si existe por lo menos un $c \in U$ tal que $P(c)$ es verdadero, y es falsa en caso contrario (es decir, si para todo $c \in U$ se tiene que $P(c)$ es falso).

Considere, por ejemplo, que $P(x)$ representa la proposición abierta '$x \leq x^2$', entonces:

- $\forall x \in \mathbb{R}(P(x))$ es falso, pues existen varios valores que puede tomar x en $\mathbb{R}$ para los cuales $P(x)$ es falso. Por ejemplo, si $x = \frac{1}{2}$, se tiene que $\frac{1}{2} \nleq (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

- $\exists x \in \mathbb{R}(P(x))$ es verdadero, pues existen varios valores que puede tomar x en $\mathbb{R}$ para los cuales $P(x)$ es verdadero. Por ejemplo, si $x = 2$, se tiene que $2 \leq 2^2 = 4$.

- $\forall x \in \mathbb{Z}(P(x))$ es verdadero. En este caso la justificación requiere de un poco más de elaboración. Los valores que puede tomar x en $\mathbb{Z}$ pueden ser divididos en tres casos: (1) si $x < 0$, (2) si $x = 0$ y (3) si $x > 0$. En el caso (1), como $x < 0$ y $x^2 \geq 0$, entonces $x \leq x^2$. En el caso (2), $x = 0 = x^2$, y por lo tanto $x \leq x^2$. En el caso (3), como $x > 0$ y $x \in \mathbb{Z}$, entonces $1 \leq x$, y multiplicando en ambos lados por x se tiene que $x \leq x^2$. Como en todos los casos se llega a que $x \leq x^2$ es verdadero, entonces $\forall x \in \mathbb{Z}(P(x))$ es verdadero (este tipo de justificación, o demostración por casos, se describe con mayor detalle en la Sección 2.2.7).

- $\exists x \in \mathbb{Z}(P(x))$ es verdadero, pues existen varios valores que puede tomar x en $\mathbb{Z}$ para los cuales $P(x)$ es verdadero. Por ejemplo, si $x = 2$, se tiene que $2 \leq 2^2 = 4$.

Hay que tener en cuenta que no siempre los cuantificadores se expresan de manera explícita. Por ejemplo, si se afirma que 'la ecuación $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$ tiene solución en $\mathbb{R}$', donde aparentemente no hay ningún cuantificador, esto es equivalente a afirmar que 'existe un x en $\mathbb{R}$ tal que $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$', donde se hace uso explícito del cuantificador existencial. Otro ejemplo es cuando se afirma que 'si t es un triángulo equilátero, entonces t no es un triángulo rectángulo', en este caso tampoco aparece explícito ningún cuantificador, sin embargo, esta afirmación es equivalente a 'para todo triángulo t, si t es equilátero, entonces t no es rectángulo', donde está explícito el uso del cuantificador universal.

2.1.10. Combinación de cuantificadores

En la sección anterior solo se cuantificó sobre una única variable, pero es posible cuantificar sobre varias variables, y se puede usar un cuantificador diferente para cada una de ellas. A continuación, se presentan algunos ejemplos de proposiciones donde se usan varios cuantificadores, y se analiza lo que pasa si se cambia el orden de los cuantificadores.

Considere la proposición 'para todo x en $\mathbb{Z}$, existe y en $\mathbb{Z}$ tal que $x + y = 0$' (usando el lenguaje lógico, $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z}(x + y = 0)$). En este caso, la proposición es verdadera, pues dado un x cualquiera en $\mathbb{Z}$, si se toma $y = -x$ se tiene que $y \in \mathbb{Z}$ y $x + y = x + (-x) = 0$. Si se cambia el orden de los cuantificadores, se obtiene la proposición 'existe y en $\mathbb{Z}$ tal que para todo x en $\mathbb{Z}$, se tiene que $x + y = 0$', la cual es una proposición falsa, pues en los números enteros no hay un número que sumado con cualquier otro el resultado sea siempre 0 (para cualquier x que se tome en $\mathbb{Z}$, si se toma $y = -x + 1$, por ejemplo, se tiene que $y \in \mathbb{Z}$ y $x + y = x + (-x + 1) = 1 \neq 0$). Este ejemplo muestra que los cuantificadores diferentes no conmutan. Es decir, una proposición de la forma $\forall x\ \exists y(P(x, y))$ (o de la forma $\forall x \in U\ \exists y \in V(P(x, y))$), donde $P(x, y)$ representa una proposición abierta que depende de x y y, puede no ser lógicamente equivalente a la proposición $\exists y\ \forall x(P(x, y))$ (o $\exists y \in V\ \forall x \in U(P(x, y))$, respectivamente).

Considere ahora la proposición 'para todo par de números reales x y y, $x \cdot y = y \cdot x$' (usando el lenguaje lógico, $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}(x \cdot y = y \cdot x)$). Esta proposición expresa la propiedad conmutativa del producto en $\mathbb{R}$, la cual es verdadera. Si se cambia el orden de los cuantificadores, se obtiene la proposición $\forall y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}(x \cdot y = y \cdot x)$, que tiene el mismo significado de la proposición original, y por lo tanto el mismo valor de verdad. Generalizando, cualquier proposición de la forma $\forall x\ \forall y(P(x, y))$ (o de la forma $\forall x \in U\ \forall y \in V(P(x, y))$), donde $P(x, y)$ representa una proposición abierta que depende de x y y, es lógicamente equivalente a la proposición $\forall y\ \forall x(P(x,y))$ (o $\forall y \in V\ \forall x \in U(P(x,y))$, respectivamente). Para abreviar la notación, se usa $\forall x, y(P(x,y))$ para expresar $\forall x\ \forall y(P(x,y))$, y se usa $\forall x, y \in U(P(x,y))$ para expresar $\forall x \in U\ \forall y \in U(P(x,y))$. La notación se extiende para tres o más variables de manera natural.

Como último ejemplo de esta sección, considere la proposición 'existen triángulos con lados de diferente longitud y con la misma área'. Esta proposición es equivalente a 'existen triángulos x y y tales que las longitudes de los lados de x son diferentes a las de los lados de y y el área de x es igual al área de y'. Esta proposición es verdadera, pues si se toma un triángulo t con lados de longitud $1, 1$ y $\sqrt{2}$ y un triángulo s con lados de longitud $\frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{1}{2}\sqrt{5}$ y 1 (como se observan en la Figura 2.1), tanto t como s tienen área $\frac{1}{2}$. En esta

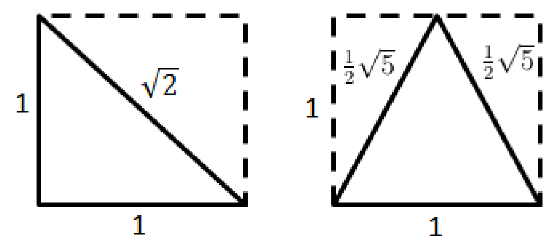


Figura 2.1: Triángulos con lados diferentes y con igual área.

proposición, si se cambia el orden de los cuantificadores existenciales, el significado de la proposición que se obtiene continua siendo el mismo, y por lo tanto continúa siendo verdadera. Generalizando, cualquier proposición de la forma $\exists x\ \exists y(P(x,y))$ (o de la forma $\exists x \in U\ \exists y \in V(P(x,y)))$, donde $P(x,y)$ representa una proposición abierta que depende de x y y, es lógicamente equivalente a la proposición $\exists y\ \exists x(P(x,y))$ (o $\exists y \in V\ \exists x \in U(P(x,y))$, respectivamente). Para abreviar la notación, se usa $\exists x, y(P(x,y))$ para expresar $\exists x\ \exists y(P(x,y))$, y se usa $\exists x, y \in U(P(x,y))$ para expresar $\exists x \in U\ \exists y \in U(P(x,y))$. La notación también se extiende para tres o más variables de manera natural.

2.1.11. Negación de cuantificadores

En los procesos de deducción también es importante tener claro las equivalencias lógicas que permiten pasar negaciones de proposiciones universales o existenciales al interior de las proposiciones, por eso se presentan en esta sección dichas equivalencias y se resaltan errores comunes que se cometen con este tipo de negaciones.

Negar que todos los objetos en un determinado universo de discurso satisfacen una determinada propiedad, es lógicamente equivalente a afirmar que existe algún objeto en el universo de discurso que no satisface dicha propiedad. En lenguaje lógico, $\neg\forall x(P(x))$ es lógicamente equivalente a $\exists x(\neg P(x))$ (especificando el universo de discurso, $\neg\forall x \in U(P(x))$ es lógicamente equivalente a $\exists x \in U(\neg P(x)))$. Por ejemplo, afirmar que 'no todos los gatos son negros' es lógicamente equivalente a afirmar que 'existen gatos que no son negros', y afirmar que 'no todos los números naturales son divisibles por 2' es lógicamente equivalente a afirmar que 'existen números naturales que no son divisibles por 2'.

Un error común es creer que $\neg\forall x(P(x))$ es lógicamente equivalente a $\forall x(\neg P(x))$ (especificando el universo de discurso, que $\neg\forall x \in U(P(x))$ es lógicamente equivalente a $\forall x \in U(\neg P(x)))$, pero cuando uno afirma que no todos los objetos de un determinado universo de discurso satisfacen una propiedad, no quiere decir con esto que todos los objetos del universo de discurso no satisfacen dicha propiedad. Por ejemplo, cuando uno afirma que 'no todos los números naturales son divisibles por 2', no quiere decir con esto que 'todos los números naturales no son divisibles por 2'. Note que la primera afirmación es verdadera, mientras que la segunda es falsa, y por lo tanto no son afirmaciones lógicamente equivalentes.

Por otro lado, negar que existen objetos en un determinado universo de discurso que satisfacen una determinada propiedad, es lógicamente equivalente a afirmar que todos los objetos en el universo de discurso no satisface dicha propiedad. En lenguaje lógico, $\neg\exists x(P(x))$ es lógicamente equivalente a $\forall x(\neg P(x))$ (especificando el universo de discurso, $\neg\exists x \in U(P(x))$ es lógicamente equivalente a $\forall x \in U(\neg P(x)))$. Por ejemplo, afirmar que 'no existen vacas que vuelan' es lógicamente equivalente a afirmar que 'todas las vacas no vuelan', y afirmar que 'no existen números reales x tales que $x^2 < 0$' es lógicamente equivalente a afirmar que 'para todo número real x, se tiene que $x^2 \geq 0$' (en este ejemplo, se debe tener en cuenta que $x^2 \geq 0$ es equivalente a la negación de $x^2 < 0$, por las propiedades de la relación $<$ en los reales).

Así como es un error creer que $\neg\forall x(P(x))$ es lógicamente equivalente a $\forall x(\neg P(x))$, también es un error creer que $\neg\exists x(P(x))$ es lógicamente equivalente a $\exists x(\neg P(x))$.

Un ejemplo de negación de una proposición que involucra varios cuantificadores es $\neg\exists x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z}(x \leq y)$, que expresa el hecho de que no existe un número entero que sea menor o igual a cualquier número entero (en otras palabras, no existe un número entero mínimo). Esta proposición es lógicamente equivalente a $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z}(x > y)$, que expresa el hecho de que para cualquier número entero que uno tome existe un número entero que es estrictamente menor que él (en este ejemplo también se debe tener en cuenta que $\neg(x \leq y)$ es equivalente a $x > y$). De manera general, una proposición de la forma $\neg Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n(P(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, donde Q_i es $\forall$ o $\exists$ para cada $1 \leq i \leq n$, es lógicamente equivalente a $\overline{Q_1} x_1 \overline{Q_2} x_2 \ldots \overline{Q_n} x_n(\neg P(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, donde $\overline{Q_i}$ es el cuantificador contrario a Q_i (es decir, si Q_i es $\forall$, entonces $\overline{Q_i}$ es $\exists$, y si Q_i es $\exists$, entonces $\overline{Q_i}$ es $\forall$). Lo mismo ocurre con cuantificadores donde se especifica el universo de discurso.

2.1.12. Existencia única

Como se mencionó anteriormente, en matemáticas cuando se dice que 'existe un objeto' que satisface una determinada propiedad, se entiende que 'existe al menos un objeto' que satisface dicha propiedad. De la misma manera, cuando se dice por ejemplo que 'un triángulo es isósceles si dos de sus lados son iguales', lo que se debe entender es que 'un triángulo es isósceles si por lo menos dos de sus lados son iguales'. Cuando se quiere expresar que es exactamente un objeto el que satisface una determinada propiedad, o que son exactamente 2, o en general exactamente n objetos, esto se debe especificar explícitamente. Por ejemplo, para expresar que en los números enteros existe un neutro multiplicativo (es decir un número entero que al multiplicarlo por cualquier otro número entero da como resultado el otro entero) y que además este es único, se debe escribir 'en los números enteros existe un único neutro multiplicativo', 'existe un y solo un neutro multiplicativo en los enteros' o expresiones similares, donde se exprese tanto la existencia como la unicidad. En lenguaje lógico se usa $\exists! x(P(x))$ para expresar que existe un único objeto x que satisface la propiedad representada por $P(x)$ (especificando el universo de discurso, $\exists! x \in U(P(x))$). El ejemplo anterior en lenguaje lógico se escribe $\exists! x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z}(x \cdot y = y)$.

En lenguaje lógico, una expresión de la forma $\exists! x(P(x))$ es lógicamente equivalente a $\exists x(P(x)) \land \forall x, y((P(x) \land P(y)) \to x = y)$, donde el símbolo ! no aparece (especificando el universo de discurso, $\exists! x \in U(P(x))$ es lógicamente equivalente a $\exists x \in U(P(x)) \land \forall x, y \in U((P(x) \land P(y)) \to x = y)$). En la expresión sin el símbolo !, la subfórmula $\exists x(P(x))$ expresa la *existencia*, mientras que la subfórmula $\forall x, y((P(x) \land P(y)) \to x = y)$ expresa la *unicidad*, indicando que cualquier dos objetos que satisfagan la propiedad P tienen que ser el mismo objeto. Para el ejemplo anterior, $P(x)$ es $\forall y \in \mathbb{Z}(x \cdot y = y)$, y se tiene que $\exists! x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z}(x \cdot y = y)$ es lógicamente equivalente a $\exists x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in$

$\mathbb{Z}(x \cdot y = y) \wedge \forall x, z \in \mathbb{Z}(((\forall y \in \mathbb{Z}(x \cdot y = y)) \wedge (\forall y \in \mathbb{Z}(z \cdot y = y))) \rightarrow x = z)$. Note que en la unicidad fue necesario usar la nueva variable z para no crear confusión con la variable y que hay en $P(x)$.

Un enunciado que expresa la existencia de un único objeto que satisface una determinada propiedad es falsa si no existe un objeto que satisface la propiedad o si existe más de un objeto que satisface la propiedad. Si se niega la expresión $\exists x(P(x)) \wedge \forall x, y((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow x = y)$ y se aplican las reglas de negación descritas anteriormente, se podrá dar cuenta que dicha negación es lógicamente equivalente a $\forall x(\neg P(x)) \vee \exists x, y((P(x) \wedge P(y)) \wedge x \neq y)$. Note que la subfórmula $\forall x(\neg P(x))$ expresa que ningún objeto satisface la propiedad P, mientras que la subfórmula $\exists x, y((P(x) \wedge P(y)) \wedge x \neq y)$ expresa que existen (al menos) dos objetos diferentes que satisfacen la propiedad P, lo que concuerda con lo que se dijo sobre la negación de la existencia única al comienzo del párrafo.

2.1.13. Ejercicios

1. Transcriba los siguientes enunciados al lenguaje lógico. El universo de discurso se indica entre paréntesis al final de cada literal.

   a) Algunos triángulos isósceles son triángulos rectángulos (todos los triángulos).

   b) No todo triángulo rectángulo es isósceles. (Todos los triángulos).

   c) Todas las personas son honestas o ninguna es honesta. (Todas las personas).

   d) Algunas personas son honestas y algunas personas no son honestas (Todas las personas).

   e) Hay un número entero positivo más pequeño. (Números enteros positivos).

   f) Entre cualquier número real y cualquier numero real mayor, hay un número racional. (Números reales).

   g) Ninguna persona ama a todas las personas. (Todas las personas).

   h) Todas las personas aman a alguna persona. (Todas las personas).

   i) Para cada número real positivo x, hay un único número real y tal que $2y = x$. (Números reales).

2. Considere que C es el conjunto de los carros. Sea $L(x, y)$: 'x es tan rápido como y', $M(x, y)$: 'x es tan caro como y', y $N(x, y)$: 'x es tan viejo como y'. Traduzca las siguientes expresiones al lenguaje ordinario.

   a) $\exists x \forall y L(x, y)$.
   b) $\forall x \exists y M(x, y)$.
   c) $\exists y \forall x (L(x, y) \vee N(x, y))$.
   d) $\forall y \exists x (\neg M(x, y) \to L(x, y))$.

3. Presente un ejemplo de una proposición abierta $P(x)$ y un universo de discurso U tal que $\exists x \in U(\neg P(x))$ es verdadero y es falso $\neg \exists x \in U(P(x))$.

4. ¿Cuáles de las siguientes sentencias son ciertas? El universo de discurso para cada uno se indica entre paréntesis.

   a) $\exists x(2x + 3 = 6x + 7)$ (Números naturales).
   b) $\exists x(3(2 - x) = 5 + 8(1 - x))$ (Números reales).
   c) $\forall x(x^2 + 6x + 5 \geqslant 0)$ (Números reales).
   d) $\forall x(x^2 + 4x + 5 \geqslant 0)$ (Números reales).
   e) $\exists x(x^2 + x + 41$ es primo$)$ (Números naturales)
   f) $\forall x \exists y(x^2 = y)$ (Números reales)
   g) $\forall y \exists x(x^2 = y)$ (Números reales)
   h) $\forall x \exists y(y < x)$ (Números enteros)
   i) $\forall x \exists y(x + y = 0)$ (Números enteros)
   j) $\exists y \forall x(x + y = 0)$ (Números enteros)
   k) $\forall x \exists y(x + y = 0)$ (Números naturales)

5. Traduzca cada una de las siguientes sentencias al lenguaje natural. El universo de discurso para cada una se indica entre paréntesis.

   a) $\forall x(x \geqslant 0)$ (Números naturales).
   b) $\exists! x(x^2 + x + \frac{1}{4} = 0)$ (Números reales).
   c) $\forall x((x$ es primo $\wedge x \neq 2) \to x$ es impar$)$ (Números naturales).
   d) $\exists! x(\log_e x = 1)$ (Números reales).

e) $\neg\exists x(x^2 < 0)$ (Números reales).

f) $\exists! x(x^2 = 0)$ (Números reales).

g) $\forall x(x \text{ es par} \to x^2 \text{ es par})$ (Números naturales).

6. ¿Cuáles de las siguientes sentencias son ciertas en los números reales?

a) $\forall x \exists y(x + y = 0)$.

b) $\exists x \forall y(x + y = 0)$.

c) $\exists x \exists y(x^2 + y^2 = -1)$.

d) $\forall x(x > 0 \to \exists y(y < 0 \wedge xy > 0))$.

e) $\forall y \exists x \forall z(xy = xz)$.

7. Escriba las siguientes sentencias usando lenguaje lógico (haciendo explícitos los cuantificadores, en los casos en los que no lo sean).

a) Sean a y b números reales, si $a \neq 0$, entonces $ax + b = 0$ tiene solución.

b) Si a y b son números reales, con $a \neq 0$, entonces $ax + b = 0$ tiene solución única.

c) Para todo entero x, se tiene que x es par o es impar.

d) Existen números racionales mayores que $\sqrt{2}$.

e) Entre cualquier par de números reales diferentes existen números irracionales.

f) Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un número primo p tal que $p > n$.

8. Niegue las siguientes sentencias y use equivalencias lógica para obtener proposiciones equivalentes donde las negaciones sean aplicadas solo a proposiciones atómicas:

a) Algunos de los estudiantes de la clase no están hoy aquí.

b) Para todo par de números enteros x y z existe un número entero y tal que $x = y + z$.

c) Existe un único número real x tal que $x^2 = 5$.

d) Todos los estudiantes de matemáticas están trabajando.

e) Algunos de los estudiantes de la clase están aquí hoy.

f) El número $\sqrt{x}$ es racional si x es un entero.

g) Para todo par de enteros x y y, si $x < y$, entonces existe un entero z tal que $x < z < y$.

h) Existen $x \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$ tales que para todo $z \in \mathbb{Q}$ se tiene que $x \geqslant z$ y $z \geqslant y$.

i) Existen $x \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$ tales que $x \geqslant y$ o para todo $z \in \mathbb{Q}$ se tiene que $x \geqslant z$ y $z \geqslant y$.

9. El *algoritmo de la división* es un teorema que establece que 'para cualquier par de números enteros a y b, con $b \neq 0$, existen únicos enteros q y r tales que $a = bq + r$ y $0 \leq r < |b|$ (donde $|b|$ representa el valor absoluto de b)'. A los números q y r se les llama, respectivamente, *cociente* y *residuo* de la división de a por b.

   a) Escriba el algoritmo de la división en lenguaje lógico.

   b) Con base en el algoritmo de la división ¿puede decirse que para cualquier número entero a se tiene que $a = 3q$ o $a = 3q + 1$ o $a = 3q + 2$, para algún número entero q? Justifique su respuesta.

   c) Con base en el algoritmo de la división, si se toma $b = 5$, ¿qué puede decirse con respecto a cualquier número entero a?

10. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Un número m es *elemento mínimo* de A si $m \in A$ y m es menor o igual a todos los elementos de A.

   a) Escriba una fórmula en lenguaje lógico que exprese que m es elemento mínimo de A.

   b) Escriba una fórmula en lenguaje lógico que exprese que A tiene elemento mínimo.

   c) Si $A = (0, 1]$, ¿A tiene elemento mínimo?

   d) Si $A = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, ¿$A$ tiene elemento mínimo?

   e) ¿Cuándo A no tiene elemento mínimo?

11. Considere la siguiente definición: 'una función f definida en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números y que toma valores reales, es *continua en el punto* a si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para cualquier $x \in \mathbb{R}$, si $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.'

   a) Escriba la definición anterior en lenguaje lógico.

   b) Indique cuál de siguientes proposiciones es la que expresa que la función f **NO** es continua en el punto a, y justifique su respuesta.

1) $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(\mid x - a \mid < \delta \wedge \mid f(x) - f(a) \mid \geq \varepsilon)$.
2) $(\exists \varepsilon < 0)\,(\forall \delta < 0)\,(\exists x \notin \mathbb{R})\,(\mid x - a \mid < \delta \wedge \mid f(x) - f(a) \mid < \varepsilon)$.
3) $(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists x \in \mathbb{R})\,(\mid x - a \mid < \delta \wedge \mid f(x) - f(a) \mid \geq \varepsilon)$.
4) $(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists x \in \mathbb{R})\,(\mid x - a \mid < \delta \vee \mid f(x) - f(a) \mid \geq \varepsilon)$.

12. Suponga que una hormiga camina "infinitamente" hacia un punto fijo P, al cual se puede acercar cuanto desee, pero que nunca puede alcanzar. Alguien describe dicha situación por medio de la siguiente proposición:

    "Para cualquier distancia $d > 0$ a la que la hormiga desee estar del punto P, siempre existe un número de pasos fijo N tal que si la hormiga da un número n de pasos igual o mayor a N, entonces la distancia D entre el punto P y la hormiga será menor que la distancia d."

    a) Exprese dicha proposición en lenguaje lógico.

    b) Escriba en lenguaje lógico la negación de la proposición que describe la situación.

    c) Escriba en lenguaje natural la negación de la proposición que describe la situación.

13. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una secuencia infinita de números reales. Un número real l es el *límite* de esta secuencia si para todo número real $\varepsilon > 0$, existe un número natural $n \geq 1$ tal que, para todo natural $x \geq n$, se tiene que $-\varepsilon < a_x - l < \varepsilon$.

    a) Escriba la definición anterior usando lenguaje lógico (tenga en cuenta que $\mathbb{R}^+$ representa los números reales mayores que 0 y que $\mathbb{N}^+$ representa los números naturales mayores o iguales a 1).

    b) Indique (en lenguaje lógico y en lenguaje natural), cuando l NO es límite de la secuencia $a_1, a_2, a_3, \ldots$

14. Escriba en lenguaje lógico una sentencia que exprese que existen exactamente dos objetos que satisfacen la propiedad representada por $P(x)$.

15. En cierta oportunidad coincidieron en una reunión cien (100) parlamentarios de cierto país. Se sabía con seguridad que al menos uno de ellos era honesto, y que de cada dos (2), al menos uno era deshonesto. ¿Cuántas personas honestas y cuántas deshonestas había en el grupo?

2.2. Elementos y métodos para hacer demostraciones

La verdad de las sentencias matemáticas se establece única y exclusivamente a través de demostraciones. Como afirma Kevin Houston en [Houston, 2009, pág. 116 - traducción nuestra] "La matemática es fantástica. Es un tema en el que no tenemos que creer en la palabra de nadie o en su opinión. La verdad no está determinada por una autoridad superior que dice 'porque yo digo eso', o porque lo vieron en un sueño, los duendes en el interior de su jardín se lo dijeron, o porque algún ser especial o mítico lo dijo, o porque proviene de alguna antigua tradición mística. La verdad está determinada y justificada con una demostración matemática." La afirmación de Houston hace diferencia entre el razonamiento lógico-matemático y las verdades establecidas a través de la retórica, el poder o las creencias. Aunque algo análogo se podría decir con respecto a ciencias como la física, la química o la biología, en dichas ciencias las verdades son verificadas o refutadas por medio de experimentación, mientras que en la matemática las justificaciones son basadas en el razonamiento puro.

Como también resalta Kevin Houston en [Houston, 2009, pág. 116 - traducción nuestra] "El concepto matemático de demostración es diferente al del uso diario. En el uso diario, por ejemplo, una evidencia es suficiente para que algo sea probablemente cierto. Los matemáticos exigen más que esto. A un matemático le gusta estar 100 % seguro de que una proposición ha sido demostrada." De aquí en adelante, cuando usamos la palabra demostración, nos referimos a demostración matemática, a menos que se especifique explícitamente algo diferente.

Teniendo en cuenta el papel fundamental que juegan las demostraciones en la matemática, todo aquel que quiera entender y construir teorías matemáticas y no ser solo un usuario de ellas, tendrá que entender los elementos, reglas y métodos que pueden ser usados en las demostraciones, para poder no solo entenderlas y verificar su validez sino también construirlas de manera correcta. En esta sección se busca precisamente develar estos componentes que muchas veces aparecen ocultos en los textos matemáticos, donde se ahorran detalles que para un matemático con experiencia resultan obvios e innecesarios, pero que para una persona que apenas se está iniciando en el razonamiento matemático causa dificultades en el entendimiento, y donde además se muestra solo el resultado final de la demostración y no el proceso que lleva a su construcción.

Puede decirse que una demostración es un argumento lógicamente válido que justifica la verdad de una determinada proposición, usualmente a partir de la verdad de un conjunto de proposiciones. Los elementos y métodos que pueden ser usados en una demostración serán descritos en las siguientes secciones, donde se abordan ejemplos de demostración de proposiciones matemáticas básicas, principalmente relacionadas con aritmética y geometría. Sin embargo, hay que tener en cuenta que no existen algoritmos o procedimientos completamente definidos para hacer demostraciones, así como no existen formas únicas y bien establecidas de resolver problemas matemáticos en general. Como lo expresa Daniel Velleman en [Velleman, 2006, pág. 84 - traducción nuestra] "Las demostraciones se parecen mucho a los rompecabezas. No hay reglas sobre cómo los rompecabezas deben ser resueltos. La única regla se refiere al producto final: todas las piezas deben encajar, y la imagen debe verse bien. Lo mismo vale para las demostraciones." Por lo tanto, los métodos de demostración que se presentan más adelante no deben tomarse como recetas detalladas e infalibles, sino como herramientas para ayudar a hacer y entender demostraciones.

Como las demostraciones son casos particulares de problemas matemáticos, toda la teoría de resolución de problemas descrita en el Capítulo 1 puede ser aplicada en la construcción de demostraciones. De manera más específica, las llamadas 'reglas de oro' propuestas por George Polya para la resolución de problemas pueden ser entendidas en el contexto de la construcción de demostraciones de la siguiente manera:

1. **Comprensión**: Antes de comenzar a intentar demostrar una proposición, se debe tener claro lo que se pretende demostrar. Para esto es útil identificar las hipótesis (las proposiciones que se dan como verdaderas) y la conclusión (la proposición que se quiere probar a partir de las hipótesis). Además, se deben tener muy claros los conceptos que hay involucrados en la proposición; si alguno de los conceptos no es totalmente claro, se debe recurrir a las definiciones.

2. **Diseño de un plan de solución**: Se debe elegir una estrategia o método de demostración. La estructura de la proposición puede servir como guía en la elección de dicha estrategia, como se explica más adelante en la descripción de cada uno de los métodos de demostración.

3. **Ejecución del plan**: Intentar construir la demostración siguiendo el método de demostración elegido, haciendo uso de los elementos permitidos en las demostraciones. Una vez construida la demostración, se debe escribir de manera detallada, justificando cada paso y usando un lenguaje correcto, claro y preciso.

4. **Análisis retrospectivo**: No se debe conformar con haber resuelto el problema, una vez construida la demostración debe hacerse preguntas del siguiente tipo: ¿dónde se usa cada una de las hipótesis? ¿qué pasa si se elimina una de las hipótesis? ¿hay pasos innecesarios en la demostración? ¿la demostración sale más fácil por otro método? ¿vale el recíproco? ¿se puede generalizar el teorema? etc.

Se debe tener en cuenta que las etapas (o reglas) propuestas por Polya no necesariamente se deben ejecutar de manera totalmente lineal, se puede siempre volver a una etapa anterior de ser necesario. Además, en la construcción de una demostración, usualmente se requiere del uso de varios métodos de demostración para probar proposiciones intermedias, que finalmente llevan a la demostración de la proposición final (como se muestra más adelante por medio de algunos ejemplos).

2.2.1. Elementos de una demostración

Una *demostración* es una secuencia de proposiciones lógicamente conectadas, usualmente comenzando por un conjunto de proposiciones que se suponen verdaderas y que son llamadas *hipótesis*, y terminando con una proposición llamada *conclusión*. La secuencia debe estar organizada de tal manera que la verdad de las hipótesis aseguren la verdad de la conclusión. Por eso, cada proposición que se incluye en la secuencia debe poder ser debidamente justificada, y las justificaciones válidas están claramente definidas por la comunidad matemática. Aunque en los textos matemáticos algunas de estas justificaciones se dejan implícitas, las demostraciones se deben escribir de tal manera que cualquier matemático pueda entender la demostración y verificar su validez (desde que entienda el lenguaje en el que fue escrita la demostración). En este texto, sin embargo, por tratarse de un texto introductorio al razonamiento matemático, se hace mucho más énfasis en la justificación de los pasos de las demostraciones y en varios casos se describen los procesos para llegar a dichas construcciones.

Los elementos que se pueden usar en una demostración son: definiciones, axiomas, proposiciones previamente demostradas (llamadas *teoremas*, *lemas* y *corolarios*), leyes lógicas y reglas de inferencia. A continuación se describe cada uno de estos elementos.

Definiciones

De manera similar a como en el lenguaje natural se crean palabras y expresiones que sirven como convenciones para referirse a ciertos objetos, propiedades y relaciones entre ellos, los matemáticos usan definiciones para crear convenciones, establecer notación y dar nombre a los conceptos, propiedades y relaciones con las que trabajan en sus teorías. El modo de expresar estas definiciones tiene un estilo particular, guiado por la precisión y el uso de un lenguaje característico que poco a poco se va apropiando con el estudio de las matemáticas. Los siguientes son ejemplos de definiciones matemáticas (en los textos matemáticos es usual enumerar las definiciones, lo que permite hacer referencia a ellas y ubicarlas fácilmente cuando sea necesario).

Definición 2. Sean x y y números enteros, se dice que x *divide* a y, lo que se denota $x \mid y$, si existe un número entero k tal que $y = k \cdot x$.

Definición 3. Sea x un número natural, x es *primo* si $x \neq 1$ y es divisible solo por 1 y él mismo.

Definición 4. Dos número primos x y y son *gemelos* si $x = y + 2$ o $y = x + 2$.

Definición 5. Dos números enteros son *coprimos* (o *primos relativos*) si sus únicos divisores comunes son 1 y -1 (en lenguaje lógico, si $(k \mid x \wedge k \mid y) \to (k = 1 \vee k = -1)$).

Definición 6. Un *polígono regular* es un polígono cuyos lados y ángulos interiores son congruentes entre sí.

Las definiciones matemáticas siempre son en ambos sentidos. Es decir, aunque las definiciones muchas veces parecen tener una forma condicional, en la que se permite llamar a un objeto de una determinada manera bajo la condición de que satisfaga ciertas propiedades, debe entenderse que un objeto puede ser llamado de esa manera si y solo si satisface las propiedades de la definición. Por ejemplo, la definición 3 debe entenderse como 'x es *primo* si y solo si $x \neq 1$ y es divisible solo por 1 y él mismo.' Esto lleva a que en las demostraciones se pueden usar las definiciones en ambos sentidos. Es decir, si se tiene que un objeto pertenece a una determinada clase de objetos (especificada por medio de una definición), entonces se puede concluir que dicho objeto satisface las propiedades que establece la definición; mientras que en el sentido contrario, si se llega a que un objeto satisface las propiedades de una determinada definición, entonces se puede concluir que dicho objeto pertenece a la clase de objetos que establece dicha definición. Por ejemplo, si en una demostración se tiene que x y $y+9$ son coprimos, y si además se tiene que z divide a x y a $y+9$, entonces se puede concluir que $z=1$ o $z=-1$, debido a la definición 5. En el otro sentido, si en una demostración se llega a que los únicos divisores comunes de x y $y+9$ son 1 y -1, entonces se puede concluir que x y $y+9$ son coprimos.

Los nombres que los matemáticos dan a sus objetos muchas veces son guiados por la idea intuitiva del concepto que se quiere definir (por ejemplo, *triángulo equilátero*, que es un objeto geométrico formado por tres ángulos y cuyos lados son todos congruentes), otras veces el nombre proviene del nombre de quien creó el concepto (por ejemplo, *álgebra de Boole*, que es una estructura matemática que fue definida y estudiada inicialmente por un reconocido matemático inglés llamado George Boole), aunque en otras ocasiones no es claro el por qué de un determinado nombre (por ejemplo, *monoide*, que es un tipo de estructura algebraica con una operación binaria que es asociativa y con elemento neutro).

Las definiciones matemáticas, además de que deben ser precisas y coherentes, deben permitir diferenciar entre objetos que cumplen la definición y los que no la cumplen. Es decir, una definición debe tener tanto *ejemplos* (objetos que cumplen la definición) como *contraejemplos* (objetos que no cumplen la definición), en caso contrario la definición es inútil. Un ejemplo para la Definición 5 es el par de números 9 y 16, pues sus únicos divisores comunes son 1 y -1; y un contraejemplo es el par de números 6 y 9, pues 3 divide a 6 y a 9, y es diferente de 1 y -1. Una práctica útil para entender una definición es encontrar ejemplos y contraejemplos.

Los siguientes son ejemplos de malas definiciones.

Definición 7. Un triángulo es *bonito* si sus ángulos están bien delineados.

Definición 8. Un triángulo es *interesante* si dos de sus ángulos son agudos.

La Definición 7 no es precisa, a menos que se de primero una buena definición matemática de lo que significa que un 'ángulo esté bien delineado'. Por el contrario, la Definición 8 es clara y coherente. Sin embargo, como todos los triángulos (en la geometría euclidiana) tienen por lo menos dos de sus ángulos agudos, bajo esta definición todos los triángulos son interesantes, lo que hace que la definición sea inútil. Otra cosa sería si se define un triángulo como siendo *interesante* si exactamente dos de sus ángulos son agudos. Esta nueva definición, a pesar de que da un nombre poco adecuado a los triángulos con exactamente dos ángulos agudos, tiene ejemplos y contraejemplos, lo que en cierta medida ya la hace interesante.

Aunque en la comunidad matemática se logran normalmente consensos en cuanto a las definiciones y notación, en algunos casos existen diferentes nombres para el mismo concepto (por ejemplo, en álgebra abstracta se usa *campo* y *cuerpo* para referirse al mismo tipo de estructuras algebraicas), y en otros casos una misma palabra se usa para definir conceptos diferentes (por ejemplo, en algunos textos el conjunto de los *números naturales* incluyen al 0, mientras que en otros textos no). Es por eso necesario dejar claro en los textos matemáticos el significado de cada expresión, principalmente cuando no hay consenso en cuanto a las definiciones que se están usando.

Axiomas

En matemáticas, las teorías siempre están basadas en un conjunto de proposiciones que se suponen verdaderas y que son llamadas *axiomas*. No se puede exigir que en una teoría matemática todas las proposiciones deban ser probadas, pues la demostración de cada proposición requiere usar otras proposiciones, que a su vez tendrían también que ser probadas, entrando de esta manera en una regresión infinita. Para fundamentar una teoría matemática se debe inevitablemente, por lo tanto, partir de un conjunto de verdades que no requieren ser probadas, que deben ser escogidas con apelo a criterios de facilidad de aceptación intuitiva. Como consecuencia, todo lo que se prueba en una teoría matemática siempre está supeditado a la verdad de los axiomas sobre los cuales está fundamentada.

Un ejemplo prototípico de axioma es el llamado *quinto postulado de Euclides*, de la geometría euclidiana, que dice lo siguiente:

> **Postulado V de Euclides**: Si dos rectas son cortadas por una secante de tal manera que la suma de la medida de los ángulos internos en alguno de los lados de la secante es menor a 180°, entonces las dos rectas se cortan en dicho lado.

En la geometría euclidiana se puede probar, por ejemplo, que la suma de la medida de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180°. Pero existen otras geometrías, en las que no se acepta el quinto postulado de Euclides, y donde la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es menor a 180°.

En la teoría de los números reales, dos axiomas comunes son los siguientes:

> **Existencia de neutro multiplicativo**: Para todo número real x, se tiene que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

Existencia de inverso multiplicativo: Para todo número real x, si $x \neq 0$, existe un único número real denotado por x^{-1} tal que $x \cdot x^{-1} = 1$ (a x^{-1} se le llama *inverso multiplicativo de* x).

En cualquier punto de una demostración se puede hacer uso de los axiomas de la teoría. Pero como este texto no se dedica a una teoría matemática específica, y como el enfoque es más intuitivo que formal, no presentamos aquí una lista exhaustiva de axiomas de ninguna teoría matemática, y son pocos los ejemplos y ejercicios donde se usan axiomas.

Teoremas, lemas y corolarios

A una proposición que ha sido demostrada en una teoría matemática se le da el nombre de *teorema*, *lema* o *corolario*, y en los textos matemáticos estas proposiciones son enumeradas para poder hacer referencia a ellas y ubicarlas fácilmente. La elección de cuál de estos nombres se asigna depende de la relevancia que se le quiera dar a la proposición que fue demostrada. Normalmente se usa *teorema* para las proposiciones a las que se les quiere dar mayor importancia, se usa *lema* para proposiciones que son demostradas solo con el objetivo de luego ser usadas para demostrar otras proposiciones más interesantes, y se usa *corolario* para proposiciones que son consecuencias inmediatas de algún teorema previo. En algunos textos también se llama *proposición* a una sentencia que ha sido demostrada pero que se considera de poca importancia. Como en este texto, y también en otros, se usa la palabra 'proposición' con otro sentido (como sentencias que pueden ser verdaderas o falsas), el uso de esta palabra para hacer referencia a proposiciones ya demostradas puede crear confusión. Por lo tanto, en este texto se seguirá usando la palabra 'proposición' para referirnos a sentencias a las que se les puede asignar un valor de verdad, independiente de que este sea verdadero o falso, o que no se conozca su valor de verdad.

En las demostraciones siempre se pueden usar proposiciones previamente demostradas, pues su verdad ya ha sido establecida. Sin embargo, hay que tener en cuenta que en los teoremas, lemas o corolarios, la verdad de la conclusión normalmente depende de la verdad de un conjunto de hipótesis. Por lo tanto, al usar una proposición previamente demostrada se debe verificar que se cumplan las hipótesis. Por ejemplo, considere el siguiente teorema:

Teorema 1. *Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, con $x \neq 0$. Si $x \cdot y = x \cdot z$, entonces $y = z$.*

Note que este teorema tiene como hipótesis que x es un un número real diferente de cero, por lo tanto si el teorema es usado sin asegurar esta condición se puede llegar a demostrar cosas falsas.

En matemáticas, las proposiciones que se cree que son verdaderas pero para las cuales no existe una demostración son llamadas *conjeturas*. Desde luego las conjeturas no pueden ser usadas en las demostraciones, pues todavía no se tiene certeza de que sean verdaderas. Sin embargo, es usual mostrar ciertas propiedades bajo la hipótesis de que una cierta conjetura es verdadera, pero debe quedar claro que lo que se demuestra depende de la verdad de la conjetura. Un ejemplo de conjetura es la siguiente:

> **Conjetura de los números primos gemelos**: Existe un número infinito de pares de números primos gemelos.

Leyes lógicas

Las *leyes lógicas* son estructuras proposicionales que pueden ser solo verdaderas, independientemente de lo que expresen. Por ejemplo, una expresión de la forma $P(x) \vee \neg P(x)$ es siempre verdadera, independientemente de lo que exprese $P(x)$. Por lo tanto, se dice que $P(x) \vee \neg P(x)$ es una ley lógica (y es llamada *tercer excluido*). En cualquier paso de una demostración puede ser usados casos particulares de leyes lógicas, pues su verdad está asegurada por la estructura de la proposición. Por ejemplo, en una demostración se puede usar el hecho que para un número real x se tiene que $x = 0$ o $x \neq 0$, pues este es un caso particular del tercer excluido (más adelante veremos que esta ley lógica permite hacer demostraciones por disyunción de casos).

Teniendo en cuenta la utilidad que tienen las leyes lógicas en la construcción de demostraciones, se presenta a continuación una lista de algunas de las más conocidas, identificándolas con nombres para facilitar la referencia y el uso de ellas.

- $P \vee \neg P$ (*tercer excluido*),
- $\neg(P \wedge \neg P)$ (*no contradicción*),
- $(P \vee P) \leftrightarrow P$ (*idempotencia disyunción*),
- $(P \wedge P) \leftrightarrow P$ (*idempotencia conjunción*),
- $\neg\neg P \leftrightarrow P$ (*doble negación*),
- $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ (*def. implicación*),
- $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \to Q) \wedge (Q \to P))$ (*def. bicondicional*).

Leyes conmutativas

- $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$,
- $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$.

Leyes asociativas

- $(P \vee (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$,
- $(P \wedge (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R)$.

Leyes distributivas

- $(P \wedge (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$,
- $(P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$.

Leyes de De Morgan

- $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$,
- $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$.

Leyes para $\rightarrow$

- $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ (*contrarrecíproco*),
- $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$ (*ley de hipótesis*),
- $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R))$ (*conmutatividad de hipótesis*),
- $\neg(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$ (*negación implicación*).

Las leyes anteriores pueden ser verificadas por medio de tablas de verdad. Se debe tener en cuenta que la asociatividad de los conectivos solo aplica cuando todos los conectivos son conjunciones o cuando todos con disyunciones, si hay combinación de conjunciones y disyunciones la ley que aplica es la distributividad. Las leyes que hay a continuación tienen que ver con las propiedades de los cuantificadores y su verificación requiere de mayores tecnicismos, los cuales no son abordados en este texto.

Leyes conmutativas

- $\forall x \forall y (P(x,y)) \leftrightarrow \forall y \forall x (P(x,y))$,
- $\exists x \exists y (P(x,y)) \leftrightarrow \exists y \exists x (P(x,y))$.

Leyes distributivas

- $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\forall x (P(x)) \wedge \forall x (Q(x)))$,
- $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow (\exists x (P(x)) \vee \exists x (Q(x)))$.

Equivalencias entre $\forall$ y $\exists$

- $\forall x (P(x)) \leftrightarrow \neg \exists x (\neg P(x))$,
- $\neg \forall x (P(x)) \leftrightarrow \exists x (\neg P(x))$,
- $\exists x (P(x)) \leftrightarrow \neg \forall x (\neg P(x))$.
- $\neg \exists x (P(x)) \leftrightarrow \forall x (\neg P(x))$.

Se debe tener muy presente que la conmutatividad de los cuantificadores solo aplica cuando los conectivos son iguales, que el cuantificador universal solo distribuye con respecto a la conjunción y que el cuantificador existencial solo distribuye con respecto a la disyunción. Otra cosa que se debe tener presente es que, como se mencionó al final de la Sección 2.1.6, la equivalencia en lógica funciona de manera análoga a como funciona la igualdad en el álgebra. Es decir, si se tiene que dos proposiciones P y Q son lógicamente equivalentes, ellas pueden ser usadas como si fueran la misma proposición y se puede intercambiar la una por la otra donde sea necesario.

Reglas de inferencia

Una *regla de inferencia* es una regla que permite deducir la verdad de una proposición a partir de la verdad de otras proposiciones. Las reglas de inferencia, igual que las leyes lógicas, dependen de la estructura de las proposiciones y no de su contenido. Eso es lo que descubrieron Aristóteles y los filósofos estoicos varios años antes de Cristo.

En la vida cotidiana se hacen deducciones en las que se aplican reglas de inferencia de manera rutinaria, muchas veces sin ser conscientes de que nuestra forma de pensar esta guiada por esquemas bien establecidos. Las mismas reglas de deducción que son usadas en la vida cotidiana son las que se aplican en el razonamiento matemático. Sin embargo, en la vida cotidiana muchas veces se usan argumentos que parecen ser válidos pero que no lo son, algunas veces con el fin de convencer a alguien con mala intención y otras veces simplemente por error. En el campo de las matemáticas, más que en la vida cotidiana, es necesario tener claro cuáles son las reglas válidas de deducción, para poder asegurar con certeza la validez de las proposiciones que se demuestran. Por eso en esta sección se presentan algunas de las principales reglas válidas de razonamiento, y también se muestran algunos esquemas de razonamiento que no son válidos pero que son errores comunes de razonamiento, llamados *falacias*. Para comenzar con las reglas válidas de deducción, se presentan primero dos ejemplos de deducciones de la vida cotidiana.

Si se considera que las siguientes proposiciones son verdaderas:

- Si Andrés saca 5 en el último parcial, gana la materia.
- Andrés sacó 5 en el último parcial.

Se puede concluir que 'Andrés ganó la materia'. De la misma manera, si se considera que las siguientes proposiciones son verdaderas:

- Si el sol está en el cenit, entonces es medio día.
- El sol está en el cenit.

Se puede concluir que 'es medio día'.

Se puede generalizar este tipo de razonamiento de la siguiente manera:

> **Regla de modus ponens**: Si $P \to Q$ y P son proposiciones verdaderas, entonces Q es una proposición verdadera.

Note que, en la regla de modus ponens, la verdad de Q solo depende de la verdad de $P \to Q$ y de P, y es independiente de lo que estén representando las expresiones P y Q. La validez de esta regla de inferencia puede verificarse construyendo una tabla de verdad donde aparezcan las proposiciones P, Q y $P \to Q$, y observando que en todas las filas en las que $P \to Q$ y P son verdaderas, la proposición Q también es verdadera. Esta regla de inferencia también puede ser justificada con base en la definición que se dio del conectivo de implicación. Recuerde que una implicación $P \to Q$ expresa el hecho de que si P es verdadero, entonces Q también tiene que serlo. Por lo tanto, si se tiene que $P \to Q$ y P son proposiciones verdaderas, de ahí se sigue necesariamente que Q es verdadero.

A continuación se presenta un listado de algunas de las reglas de inferencia más usadas. La validez de cada una de estas reglas puede ser justificada también mediante tablas de verdad, o con base en las definiciones y condiciones de verdad descritas anteriormente para cada uno de los conectivos lógicos. Las reglas son escritas bajo el esquema:

$$\begin{array}{l} P_1 \\ \vdots \\ \underline{P_n} \\ Q \end{array}$$

para indicar que de la verdad de las proposiciones $P_1, \ldots, P_n$ se sigue necesariamente la verdad de la proposición Q.

Modus ponens

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ \underline{P \qquad\quad} \\ Q \end{array}$$

Silogismo hipotético

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ \underline{Q \to R} \\ P \to R \end{array}$$

Modus tollens

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ \underline{\neg Q \qquad\;} \\ \neg P \end{array}$$

Silogismo disyuntivo

$$\begin{array}{l} P \lor Q \\ \underline{\neg P \qquad} \\ Q \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \lor Q \\ \underline{\neg Q \qquad} \\ P \end{array}$$

Adición

$$\frac{P}{P \vee Q} \quad \frac{Q}{P \vee Q}$$

Adjunción

$$\begin{array}{l} P \\ Q \\ \hline P \wedge Q \end{array}$$

Disyunción de casos

$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ P \rightarrow R \\ Q \rightarrow R \\ \hline R \end{array}$$

Simplificación

$$\frac{P \wedge Q}{P} \quad \frac{P \wedge Q}{Q}$$

Las reglas de inferencia para los cuantificadores son las siguientes:

Generalización universal

$$\frac{P(x)}{\forall x(P(x))}$$

Generalización existencial

$$\frac{P(t)}{\exists x(P(x))}$$

Particularización universal

$$\frac{\forall x(P(x))}{P(t)}$$

Particularización existencial

$$\frac{\exists x(P(x))}{P(a)}$$

En la generalización universal, la letra x representa un objeto arbitrario (es decir, un objeto en el universo de discurso que puede ser cualquiera), mientras que en la generalización existencial, la letra t representa un objeto específico (del universo de discurso). Intuitivamente, la generalización universal establece que si la propiedad P vale para un objeto x arbitrario, entonces vale para cualquier objeto. Mientras que la generalización existencial establece que si una propiedad P vale para un objeto particular representado por un término t, entonces se puede concluir que existe (al menos) un objeto que satisface la propiedad P (que es precisamente el objeto t). En la Sección 2.2.9 se explica con mayor detalle como hacer uso de estas reglas de inferencia para demostrar proposiciones con cuantificadores.

La regla de particularización universal, establece que si una propiedad P es satisfecha por todos los objetos (de un determinado universo de discurso), entonces de ahí se puede concluir que esta propiedad vale para cualquier objeto particular t (del mismo universo de discurso). Por ejemplo, como $\forall x \in \mathbb{R}(x \cdot 1 = x)$ es una proposición valida en los números reales, de ahí se puede concluir que $\pi \cdot 1 = \pi$.

La particularización existencial permite, dada la existencia de un objeto que satisface una propiedad P, dar nombre a través de una nueva constante c (que no puede estar asociada a ningún otro objeto dentro de la demostración) a un objeto que satisface la propiedad P. Por ejemplo, si en una demostración se tiene que $\exists x(y = 2 \cdot x)$, usando particularización existencial se puede continuar la demostración diciendo 'sea c tal que $y = 2 \cdot c$', desde que la letra c no sea usada antes en demostración para representar algún otro objeto. La letra c funciona como un objeto particular, pero que no se sabe exactamente cuál es, y no puede aparecer en la proposición final de la demostración. Es como cuándo se razona en la vida cotidiana usando un nombre ficticio, por ejemplo, 'supongamos que quien hizo el segundo gol fue Peranito, con seguridad él había acabado de entrar al partido, entonces Peranito no pudo haber hecho el primer gol. Por lo tanto, los dos goles no los hizo el mismo jugador'. Note que lo que se concluyó al final no depende de 'Peranito'.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de falacias, con el objetivo de hacer evidentes y evitar este tipo de errores de razonamiento. Aunque los ejemplos que se presentan son de la vida cotidiana, los mismos tipos de errores son comunes en quienes están comenzando a construir demostraciones matemáticas.

Si se considera que las siguientes proposiciones son verdaderas:

- Si María hace deporte todos los días, mejora su estado físico.
- María mejoró su estado físico.

Muchas personas suelen concluir erróneamente que 'María hizo deporte todos los días'. Sin embargo, María pudo haber mejorado su estado físico por otras causas, como por ejemplo por haber cambiado malos hábitos alimenticios. Generalizando, de la verdad de una implicación y la de su consecuente no se sigue necesariamente (y por lo tanto no se puede concluir) la verdad de su antecedente.

Otro tipo de falacia común es mostrado en el siguiente ejemplo. Si se considera que las siguientes proposiciones son verdaderas:

- Si llueve, la tierra se moja.
- No llovió.

Muchas personas suelen concluir erróneamente que 'la tierra no se mojó'. Sin embargo, la tierra pudo haberse mojado por otros medios, por ejemplo usando una manguera. Generalizando, de la verdad de una implicación y la falsedad de su antecedente no se sigue necesariamente (y por lo tanto no se puede concluir) la falsedad de su consecuente.

También se cometen errores al generalizar indebidamente. Por ejemplo, si una persona solo conoce políticos corruptos, suele concluir que todos los políticos son corruptos. Sin embargo, aunque al parecer son bastante escasos, existen políticos íntegros. Generalizando, del hecho de que una propiedad sea verdadera para una amplia clase de objetos de un determinado universo de discurso, no se tiene necesariamente (y por lo tanto no se puede concluir) que todos los objetos de dicho universo de discurso satisfagan esa propiedad.

2.2.2. Ejercicios

1. Para cada una de las reglas de inferencia presentadas en la Sección 2.2.1:

   a) Presente un ejemplo de la vida cotidiana en el que se use dicha regla de inferencia.

   b) Justifique la regla, usando tablas de verdad o la definición de los conectivos.

2. Para cada una de las lista de proposiciones que se presentan a continuación, indique que se puede concluir y justifique su respuesta.

   a) (1) $x > y$ o $x > z$. (2) $x \leq y$ (donde x, y y z son números reales).

   b) (1) El triángulo $\triangle ABC$ es isósceles. (2) Los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ tienen medidas diferentes.

   c) (1) Si $4|x$, entonces $2|x$. (2) $2 \nmid x$.

   d) (1) Si t es un triángulo equilátero, entonces t es un polígono regular. (2) Si t es un cuadrado, entonces t es un polígono regular. (3) t es un triángulo equilátero o un cuadrado.

3. Justifique las siguientes deducciones usando leyes lógicas y reglas de inferencia.

   a)
   $$\begin{array}{l} \neg P \vee (Q \wedge R) \\ P \\ \hline (R \wedge Q) \vee Z \end{array}$$

   b)
   $$\begin{array}{l} P \wedge Q \\ (P \vee Q) \rightarrow R \\ \hline R \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{l} \neg\neg X \to Y \\ \underline{\neg X \to Z \quad\quad} \\ (\neg Z) \to \neg\neg Y \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{l} E \to F \\ (\neg G) \to \neg F \\ H \to I \\ \underline{E \vee H \quad\quad} \\ G \vee I \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{l} L \to M \\ (M \vee N) \to (L \to K) \\ \underline{\neg P \wedge L \quad\quad} \\ K \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{l} (\neg A) \to (B \to \neg C) \\ C \to \neg A \\ (\neg D \vee A) \to \neg\neg C \\ \underline{\neg D \quad\quad} \\ \neg B \end{array}$$

4. Indique cuáles son las falacias en los siguientes argumentos.

a)

$$\begin{array}{l} X \vee Y \\ \underline{X \vee Z \quad\quad\quad} \\ (X \vee Y) \wedge Z \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ll} P_1 : & a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ P_2 : & a < c \wedge c < b \\ P_3 : & \underline{d \in (a, b) \quad\quad\quad} \\ & c < d \end{array}$$

c) Buenas rejas hacen buenos vecinos. Nosotros no tenemos rejas. Luego, nosotros no somos buenos vecinos.

d) Los sordos son mudos. Pedro es mudo e invidente. Luego, Pedro es sordo.

5. Transcriba el siguiente razonamiento en afirmaciones del cálculo proposicional y demúestrelo empleando las reglas de inferencia

   a) Si Batman resuelve acertijos, entonces Batman no usa antifaz.
   b) Si Batman sale en las noches, entonces Batman usa antifaz.
   c) Si Batman no sale en las noches, entonces a Batman no le gustan las dificultades.
   d) Batman resuelve acertijos o Batman lee los diarios.
   e) A Batman le gustan las dificultades.
   f) **Conclusión:** Batman lee los diarios.

6. Transcriba el siguiente razonamiento en afirmaciones del cálculo proposicional y demuéstrelo empleando leyes lógicas y reglas de inferencia.

   a) Si Luisa está triste, entonces Luisa lee poemas.

   b) Si Luisa lee poemas, entonces Luisa no toma café.

   c) Luisa está triste o ama a la Maga.

   d) Luisa toma café.

   e) **Conclusión:** Luisa ama a la Maga.

2.2.3. Demostración directa

Para demostrar una proposición de la forma 'si $P_1, \ldots, P_n$, entonces Q', el método directo consiste en suponer $P_1, \ldots, P_n$ como hipótesis, es decir como proposiciones verdaderas, y a partir de ellas comenzar a deducir nuevas proposiciones (mediante los elementos que pueden ser usados en las demostraciones, descritos en la sección anterior) hasta llegar finalmente a deducir Q.

Aunque el método directo en principio propone construir un camino que lleve de las hipótesis a la conclusión, en la búsqueda de dicho camino se puede también usar la estrategia de trabajar hacia atrás. Es decir, además de ir construyendo el camino de las premisas hacia la conclusión, se puede al mismo tiempo ir construyendo un camino que lleve de la conclusión a las premisas. Para esto, se debe preguntar a qué proposiciones $Q_1, \ldots, Q_m$ se debe llegar para poder obtener la conclusión Q, y de manera iterada se debe preguntar a que proposiciones se debe llegar para obtener las proposiciones $Q_1, \ldots, Q_m$, y así sucesivamente hasta que los caminos que se van construyendo partiendo de las hipótesis hacia adelante y partiendo de la conclusión hacia atrás se encuentren.

El siguiente ejemplo ilustra el uso del método de demostración directa. Se quiere demostrar la siguiente proposición:

Proposición 1. *Si a, b y c son números enteros tales que $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$.*

Como se mencionó anteriormente, antes de elegir un método de demostración e intentar construir la demostración se debe tener claro qué es lo que se quiere demostrar. En el ejemplo, lo que se quiere demostrar es que si se toma como hipótesis que a, b y c son números enteros tales que $a|b$ y $b|c$, se puede concluir que $a|c$. Lo primero que se debe tener claro para entender lo que se quiere demostrar, es la notación. En este caso, se debe tener presente que el símbolo '|' se está usando para representar la relación de divisibilidad, la cual está claramente descrita en la Definición 2 (y es diferente a la operación de división). Teniendo claro esto, como se trata de una proposición condicional, se puede elegir el método de demostración directa para intentar hacer la demostración, si no se logra construir la demostración usando este método se debe intentar con otro método.

Para comenzar a hacer la demostración por el método directo, se comienza suponiendo que a, b y c son números enteros tales que $a|b$ y $b|c$. Por la definición de la relación de divisibilidad (Definición 2), de $a|b$ se puede deducir que existe un número entero k tal que $b = ka$ (se omite aquí el punto del producto, como es usual), y de $b|c$ se puede deducir que existe un número entero l tal que $c = lb$. Note que se hizo uso de una definición y que además se usaron letras diferentes (k y l) para los números que se deduce que existen por la definición de la relación de divisibilidad. Implícitamente se está usando la regla de particularización existencial dos veces, y se están usando las letras k y l como nombres ficticios para los números que la Definición 2 indica que existen. Las letras que se escogieron son diferentes, pues los números que satisfacen cada una de los productos pueden ser diferentes. Además, estas letras no aparecen antes en la demostración y no van a estar en la conclusión de la demostración.

Para continuar con la demostración, se debe tener claro a dónde se quiere llegar, que en el ejemplo es a $a|c$. Por Definición 2, para llegar a esto se debe mostrar que existe algún número entero que al multiplicarlo por a dé como resultado c (aquí se está usando la estrategia de trabajar hacia atrás). Si se observan las ecuaciones que hay en el párrafo anterior, se puede ver que sustituyendo el valor de b en la ecuación que se tiene para c se obtiene que $c = l(ka)$. Por la propiedad asociativa del producto en los números enteros (propiedad que se está suponiendo como axioma), de $c = l(ka)$ se sigue que $c = (lk)a$, y como l y k son números enteros, su producto también lo es. Por lo tanto, como se ha encontrado un número entero (que es lk) que multiplicado por a da como resultado c, se concluye que $a|c$ (usando generalización existencial).

Ahora que se obtuvo una demostración hay que escribirla adecuadamente, y para esto cada uno tiene su estilo, pero de cualquier manera la escritura debe ser clara y precisa. La demostración del ejemplo puede escribirse de la siguiente manera:

Demostración (Proposición 1)**.** *Sean a, b y c números enteros y suponga que $a|b$ y $b|c$. Por Definición 2, existen números enteros k y l tales que $b = ka$ y $c = lb$. Sustituyendo b en $c = lb$, se tiene que $c = l(ka)$ y por asociatividad del producto en los enteros $c = (lk)a$. Como k y l son enteros, lk también lo es. Por lo tanto, como existe un número entero (que es lk) que multiplicado por* *a da como resultado c, se tiene que a|c (por Definición 2).*

A continuación se muestra otro ejemplo que ilustra el uso del método de demostración directa. Se quiere probar la siguiente proposición:

Proposición 2. *Sea t es un triángulo rectángulo con catetos de medidas x y y e hipotenusa de medida z. Si el área de t es $\frac{z^2}{4}$, entonces t es isósceles.*

Para entender lo que se pide demostrar, se deben tener claras las definiciones de triángulo rectángulo, cateto, hipotenusa y triángulo isósceles, y conocer la fórmula para hallar el área de un triángulo. Si no conoce alguna de las definiciones o la fórmula, debe consultarlas. Conociendo estos elementos, lo que se quiere mostrar es que, si se supone que un triángulo t es rectángulo, tiene hipotenusa de tamaño z y su área es $\frac{z^2}{4}$, entonces necesariamente ese triángulo debe ser isósceles; es decir, dos de sus lados deben tener la misma medida. Teniendo claro lo que se quiere probar, se puede elegir el método de demostración directa para intentar hacer la demostración.

Se debe comenzar suponiendo que t es un triángulo rectángulo con catetos de medidas x y y e hipotenusa de medida z, y que su área es $\frac{z^2}{4}$. Con esto se quiere llegar a que dos de sus lados tienen la misma medida. En las demostraciones geométricas, diseñar una figura con los objetos que se están trabajando muchas veces resulta ser de gran ayuda (ver Figura 2.2, donde se asignan letras a los vértices para hacer referencia de manera más fácil a los elementos del triángulo).

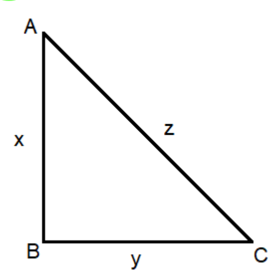


Figura 2.2: Triángulo rectángulo con medida de catetos x y y, e hipotenusa z.

Si se observa la figura, para calcular el área de t, se puede tomar como base el lado $\overline{BC}$. Como el ángulo $\angle ABC$ es recto, el lado $\overline{AB}$ es perpendicular a $\overline{BC}$, por lo tanto $\overline{AB}$ es la altura con respecto a la base que se tomó. Usando la fórmula del área de un triángulo, y la hipótesis de que el área es $\frac{z^2}{4}$, se tiene que $\frac{xy}{2} = \frac{z^2}{4}$. De donde, aplicando operaciones algebraicas, se tiene que $2xy = z^2$.

En este punto, es conveniente hacer un alto en el camino y recordar a dónde queremos llegar, que es a mostrar que las medidas de dos de los lados de t son iguales. Es decir, que $x = y$, $x = z$ o $y = z$. Note que, por el momento, ni siquiera es claro cuáles de los lados son los que deben tener igual medida.

Como la ecuación $2xy = z^2$ parece no ser suficiente para deducir lo que se busca, se debe pensar en otras propiedades del triángulo con el que se está trabajando, de tal manera que con la información adicional se pueda tal vez llegar a lo que se quiere. Si se tiene en cuenta que t es un triángulo rectángulo, con ángulo recto en el vértice B, se puede hacer uso del bien conocido Teorema de Pitágoras, con lo que se deduce que $x^2+y^2 = z^2$. Con esta ecuación y la que se había deducido anteriormente, se tiene que $2xy = x^2 + y^2$. En esta nueva ecuación ya solo aparecen dos incognitas (x y y), lo que sugiere que son estos los dos valores que deben ser iguales. De hecho, como tanto x, y y z son valores reales positivos (por ser medidas de segmentos), de la ecuación $x^2+y^2 = z^2$ se deduce que $z > x$ y que $z > y$ (¿por qué?). Entonces, se tiene ahora claridad de que los valores que deben ser iguales son x y y.

¿Cómo se puede entonces mostrar que $x = y$? Si se trabaja hacia atrás, para llegar a $x = y$, se puede hacer desde la ecuación $x - y = 0$. Se puede ahora retomar la ecuación $2xy = x^2 + y^2$, para ver si ella permite llegar a $x - y = 0$. Aplicando operaciones algebraicas en $2xy = x^2 + y^2$, se tiene que $0 = x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2$. Como $x - y$ es un número real, y si el cuadrado de un número real es 0, entonces el número real tiene que ser necesariamente 0, entonces se puede concluir que $x - y = 0$. Y ya se había observado que de ahí se deduce que $x = y$, que es finalmente a lo que se quería llegar.

Ahora que se logró construir la demostración, hay que pasar a escribirla de manera clara y precisa.

Demostración (Proposición 2)**.** *Sea $t = \triangle ABC$ un triángulo rectángulo con ángulo recto en B, donde x, y y z son las medidas de los lados $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Suponga que t tiene área $\frac{z^2}{4}$. Tomando como base a $\overline{BC}$, la altura de t es $\overline{AB}$, por lo tanto el área de t es $\frac{xy}{2}$. Por hipótesis, $\frac{xy}{2} = \frac{z^2}{4}$, de donde $2xy = z^2$. Además, por Teorema de Pitágoras, se tiene que $x^2+y^2 = z^2$. Por lo tanto $x^2+y^2 = 2xy$. Pasando $2xy$ a la izquierda y factorizando se tiene que $(x - y)^2 = 0$, de donde se deduce que $x - y = 0$ y por lo tanto $x = y$. Consecuentemente, t es isósceles.*

Para los ejemplos anteriores queda faltando el análisis retrospectivo. Esto se deja para los ejercicios.

2.2.4. Demostración por contrarecíproco

Algunas veces, al intentar construir una demostración para una proposición de la forma $P \to Q$ usando el método directo, se llega a un punto en el que no se encuentra el camino para llegar de las hipótesis a la conclusión. En estos caso, en lugar de insistir infructuosamente intentando demostrar $P \to Q$ usando el método directo, se puede intentar demostrar su contrarrecíproca $\neg Q \to \neg P$, la cual es una proposición lógicamente equivalente. Para esto, se debe suponer $\neg Q$ como hipótesis y a partir de esto comenzar a deducir nuevas proposiciones, usando los elementos permitidos en las demostraciones (igual a como en el método directo), hasta llegar a $\neg P$. En la construcción de la demostración de $\neg Q \to \neg P$, de igual manera que en el método directo, se puede trabajar simultáneamente de $\neg Q$ hacia adelante y de $\neg P$ hacia atrás, hasta que los caminos se encuentren.

El siguiente ejemplo ilustra el método de demostración por contrarrecíproco. Se quiere demostrar la siguiente proposición:

Proposición 3. *Sea m un número entero. Si m^2 es par, entonces m es par.*

Antes de comenzar la demostración, se debe tener clara la definición de número par e impar, para entender exactamente que es lo que se quiere probar. Estos conceptos se definen de la siguiente manera:

Definición 9. Un número entero n es *par* si existe un número entero k tal que $n = 2 \cdot k$.

Definición 10. Un número entero n es *impar* si existe un número entero k tal que $n = 2 \cdot k + 1$.

Como se trata de una proposición condicional, se puede comenzar a intentar hacer la demostración usando el método directo. Para eso, se supone que m es un número entero tal que m^2 es par. Es decir, existe un número entero k tal que $m^2 = 2k$ (por definición de número par). Con esto se pretende llegar a deducir que m es par. Se puede pensar en sacar raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad que se obtuvo anteriormente, para tener en uno de los lados a m. Haciendo esto, se obtiene que $m = \pm\sqrt{2k}$. Pero no es claro como esta ecuación permite determinar que m es par. Se puede entonces abandonar el intento de construir la demostración por el método directo e intentar hacer la demostración usando el método por contrarrecíproco.

Se supone ahora la negación del consecuente. Es decir, se supone que m no es par, que es equivalente a que m es impar. Por lo tanto, existe un número entero k tal que $m = 2k + 1$ (por definición de número impar). Con esto se quiere llegar a que m^2 no es par, que es equivalente a que m^2 es impar. Por lo tanto, se puede elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación, obteniendo que $m^2 = (2k + 1)^2$. Como lo que se quiere deducir es que m^2 es impar, se deben usar propiedades algebraicas que permitan expresar a m^2 como 1 más el producto de 2 por algún número entero. Lo que se puede hacer así: $m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$. Como k es un número entero, se tiene que $2k^2+2k$ también es un número entero. Por lo tanto, m^2 es impar. Note que en esta demostración también se hizo uso implícitos de las reglas de particularización y generalización existencial.

Ahora se debe escribir la demostración de manera clara y precisa.

Demostración (Proposición 3)**.** *Sea m un número entero. Suponga que m es impar (que es equivalente a que m no es par). Luego, $m = 2k + 1$ para algún número entero k. Se tiene entonces que $m^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Como k es un número entero, entonces $2k^2 + 2k$ también es un número entero, y por lo tanto m^2 es impar (que es equivalente a que m^2 no es par).*

A continuación se presenta otro ejemplo que ilustra el uso del método de demostración por contrarrecíproco. Se quiere demostrar la siguiente proposición, donde los símbolos '$\perp$' y '$\|$' denotan las relaciones de *perpendicularidad* y *paralelismo* entre rectas, respectivamente.

Proposición 4. *Sea l una recta secante a las rectas m y n. Si $m \perp l$ y $n \perp l$, entonces $m \parallel n$.*

Antes de comenzar a intentar hacer la demostración, se debe tener claro qué es lo que quiere probar. Para eso, es necesario tener claras las definiciones de cuándo una recta es secante a otras dos y de las relaciones de perpendicularidad y paralelismo entre rectas. Estas definiciones se presentan a continuación.

Definición 11. Dos rectas n y m se *intersecan* (o se *cortan*) si tienen un punto en común (es decir, si existe un punto P tal que P está en n y en m).

Definición 12. Dos rectas n y m son *paralelas*, lo que se denota $n \parallel m$, si $n = m$ o si n y m no se intersecan.

Definición 13. Dos rectas n y m son *perpendiculares*, lo que se denota $n \perp m$, si n y m se intersecan formando cuatro ángulos rectos.

Definición 14. Una recta l es *secante* a las rectas n y m si l interseca a n y m en puntos diferentes.

Se puede comenzar intentando demostrar la proposición usando el método directo. Para eso, se debe comenzar suponiendo que l es una recta secante a las rectas m y n, que $m \perp l$ y que $n \perp l$. De la definición de recta secante, se tiene que l interseca a m y a n en dos puntos diferentes. De la definición de la relación de perpendicularidad, se tiene que los ángulos que se forman en los puntos en los que se intersecan m y n con l son todos ángulos rectos. Con esto se busca deducir que $m \parallel n$; es decir, que $m = n$ o m y n no se intersecan. Como l interseca a m y n en puntos diferentes, m y n tienen que ser rectas diferentes. Por lo tanto, se debe buscar mostrar que m y n no se intersecan. Sin embargo, con la información que se tiene hasta aquí, no es claro como seguir para llegar a lo que se quiere, pues la única propiedad que se tiene para concluir que dos rectas son paralelas es el Postulado V de Euclides, y para poder usarlo se tendrían que tener dos rectas cortadas por una secante de tal manera que la suma de la medida de los ángulos internos en alguno de los lados de la secante es menor a 180°. Se debe entonces intentar usar otro método de demostración.

Usando el método de demostración por contrarrecíproco, sea l una recta secante a las rectas m y n, y suponga que $m \nparallel n$. Con esto se debe intentar deducir la negación de $m \perp l$ y $n \perp l$, que es equivalente a $m \not\perp l$ o $n \not\perp l$ (usando la ley de De Morgan). Si se usa la hipótesis que se tiene, es decir que $m \nparallel n$, se deduce que $n \neq m$ y m y n se intersecan (usando la definición de la relación de paralelismo y la ley de De Morgan). Para guiar la construcción de la demostración, puede resultar útil ahora diseñar una figura (ver Figura 2.3, donde se asignan letras a los puntos de intersección entre l, m y n para hacer referencia de manera más fácil a ellos).

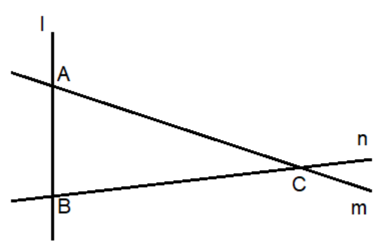


Figura 2.3: Recta l secante a m y n, y $m \nparallel n$.

Note que los puntos A, B y C forman un triángulo. Por lo tanto, es posible usar propiedades de los triángulos para intentar llegar a lo que se busca. Se sabe que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, y que la medida de cada uno de dichos ángulo es un número real positivo (es decir, estrictamente mayor que 0). Por lo tanto, como la medida del ángulo $\angle C$ es mayor a 0, la suma de las medidas de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ tiene que ser estrictamente menor a 180°. De donde se tiene que la medida de $\angle A$ o la de $\angle B$ es estrictamente menor a 90°. En el caso en el que la medida de $\angle A$ sea estrictamente menor a 90°, se tiene que $m \not\perp l$, y por lo tanto que $m \not\perp l$ o $n \not\perp l$ (usando la ley de adición). En el caso en el que la medida de $\angle B$ sea estrictamente menor a 90°, se tiene que $n \not\perp l$, y por lo tanto que $m \not\perp l$ o $n \not\perp l$ (usando la regla de adición y la ley de conmutatividad para la disyunción). Por lo tanto, se puede concluir que $m \not\perp l$ o $n \not\perp l$ (usando la regla de disyunción de casos).

La demostración que se acaba de obtener se puede escribir de la siguiente manera:

Demostración (Proposición 4)**.** *Sea l una recta secante a las rectas m y n, y suponga que $m \nparallel n$. Entonces $n \neq m$ y m y n se intersecan (por definición de la relación de paralelismo y ley de De Morgan). Sean A, B y C los puntos de intersección de l con m, de l con n y de m con n, respectivamente. Como la suma de los ángulos internos del triángulo $\triangle ABC$ es 180° y la medida del ángulo $\angle C$ es mayor a 0, entonces la suma de las medidas de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ tiene que ser estrictamente menor a 180°. De donde se tiene que la medida de $\angle A$ o la de $\angle B$ es estrictamente menor a 90°. En el caso en el que la medida de $\angle A$ sea estrictamente menor a 90°, se tiene que $m \not\perp l$, y por lo tanto que $m \not\perp l$ o $n \not\perp l$ (usando la ley de adición). En el caso en el que la medida de $\angle B$ sea estrictamente menor a 90°, se tiene que $n \not\perp l$, y por lo tanto que $m \not\perp l$ o $n \not\perp l$ (usando la regla de adición y la ley de conmutativa para la disyunción). Por lo tanto, se puede concluir que $m \not\perp l$ o $n \not\perp l$ (usando la regla de disyunción de casos).*

2.2.5. Ejercicios

1. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Si $a|b$ y $c|d$ entonces $ac|bd$.

2. Sean a, b y c enteros, si $a|(b-1)$ y $a|(c-1)$, entonces $a|(bc-1)$.

3. Sean x y y números reales. Si $x < y+\frac{1}{n}$, para todo número entero positivo n, entonces $x \leq y$.

4. Considere la siguiente definición: 'Un número entero n es *libre de cuadrados* si no existe un número primo p tal que $p^2|n$'.

   a) Presente dos ejemplos de números enteros libres de cuadrados.

b) Presente dos ejemplos de números enteros que no son libres de cuadrados.

5. El *teorema fundamental de la aritmética* establece que para todo número natural n mayor a 1 existen números naturales primos $p_1, \ldots, p_k$ y números naturales positivos $n_1, \ldots, n_k$ tales que:

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}.$$

Además, tomando $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$, dicha representación de n como producto de potencias de primos es única.

Sean n y m números naturales mayores a 1. Usando el teorema fundamental de la aritmética pruebe que si n y m son coprimos y ambos son libres de cuadrados, entonces $n \cdot m$ es libre de cuadrados.

6. Para la Proposición 2, determine si vale o no la proposición recíproca y justifique su respuesta.

7. ¿En la Proposición 4 es necesaria la hipótesis de que l es secante a m y n? Justifique su respuesta.

8. Considere la siguiente proposición: 'Si el área de un rectángulo es un número irracional, entonces el tamaño de alguno de sus lados es un número irracional'. Si se quiere demostrar la proposición por contrarrecíproco, ¿qué se debe comenzar suponiendo como hipótesis?

9. Demuestre las siguientes proposiciones:

a) Sean x y y números reales. Si $x + y$ es irracional, entonces x o y es irracional.

b) Sean n y m números enteros. Si n y m son impares consecutivos, entonces $n + m$ es múltiplo de 4.

c) Sea x un número entero. Si x es par, entonces x^2 es par.

d) Sea l una recta secante a las rectas m y n. Si la suma de la medida de los ángulos internos en alguno de los lados de la secante es mayor o igual a 180°, entonces m y n no se cortan en dicho lado.

e) Sean x y y números reales tales que $x < 2y$. Si $7xy \leq 3x^2 + 2y^2$, entonces $3x \leq y$.

f) Si t es un triángulo equilátero, su altura es $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ veces el tamaño de uno de sus lados.

g) Sea t un triángulo rectángulo con catetos de medidas x y y e hipotenusa de medida z. Si $z = \sqrt{2xy}$, entonces t es isósceles.

2.2.6. Demostración por reducción al absurdo

El método de demostración por reducción al absurdo consiste en suponer la negación de la proposición que se quiere probar y a partir de esto llegar a una contradicción (es decir, a una proposición y su negación), cualquiera que esta sea, usando los elementos permitidos en las demostraciones (igual a como en los métodos anteriores). Es decir, para demostrar una proposición P, se supone $\neg P$ y se llega a una contradicción $Q \wedge \neg Q$, donde Q es cualquier proposición. De inmediato surge la pregunta ¿por qué este método de demostración es válido? La respuesta es la siguiente: dada una proposición P, la cual se quiere demostrar, si se supone $\neg P$ y a partir de esto se deduce una contradicción $Q \wedge \neg Q$, entonces lo que se logró demostrar (por método directo) es $\neg P \to (Q \wedge \neg Q)$. La proposición $\neg P \to (Q \wedge \neg Q)$ es lógicamente equivalente a su contrarrecíproca, que es $\neg(Q \wedge \neg Q) \to \neg\neg P$, y que a su vez es lógicamente equivalente a $(\neg Q \vee Q) \to P$, por leyes de De Morgan y doble negación. Además, por la ley del tercer excluido, se tiene que $(\neg Q \vee Q)$ es verdadero, independientemente de cuál sea la proposición Q. Por lo tanto, aplicando modus ponens se deduce P. Es decir, aunque una demostración por reducción al absurdo no muestra directamente a P sino a $\neg P \to (Q \wedge \neg Q)$, las leyes y reglas lógicas aseguran que de ahí se puede deducir P, por lo tanto, se puede confiar en el método de demostración por reducción al absurdo.

El siguiente ejemplo ilustra el método de demostración por reducción al absurdo, demostrando una proposición que ya fue probada en la sección anterior usando el método por contrarrecíproco. Más adelante se presentan algunos comentarios que muestran la relación entre estos dos métodos.

Proposición 5. *Sea m un número entero. Si m^2 es impar, entonces m es impar.*

Sea m un número entero, se quiere probar que si m^2 es impar, entonces m es impar, usando el método de reducción al absurdo. Como en este caso la proposición que se quiere probar es de la forma $Q \to R$, suponer $\neg(Q \to R)$ es lógicamente equivalente a suponer $Q \wedge \neg R$. Suponga entonces que m^2 es impar y que m no es impar. Como m no es impar, entonces m es par. Luego, existe un número entero k tal que $m = 2k$ (por definición de número par). Con esto se debe intentar llegar a una contradicción, cualquiera que esta sea. Si se observa que se tiene que m^2 es impar, se puede entonces elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación que se obtuvo para intentar por ahí llegar a la contradicción. Haciendo esto, se tiene que $m^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$, de donde se deduce que m^2 es par, contradiciendo lo que se tenía.

La demostración se puede escribir de la siguiente manera:

Demostración (Proposición 5)**.** *Sea m un número entero. Suponga que m^2 es impar y que m es par. Luego, existe un número entero k tal que $m = 2k$. Elevando al cuadrado en ambos lados, se tiene que $m^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$. Como k es un número entero, entonces $2k^2$ es un número entero, y por lo tanto m^2 es par. Lo que lleva a una contradicción (pues se tenía que m^2 es impar). Por lo tanto, la proposición queda demostrada por reducción al absurdo.*

Note que, aunque la demostración que se acaba de presentar es totalmente correcta, en esencia lo que se hizo fue una demostración por contrarrecípro y se aumentó el antecedente de la implicación para llegar a una contradicción. Es decir, para demostrar $Q \to R$, se supuso Q y $\neg R$, se uso solo $\neg R$ para llegar a $\neg Q$, y como se había supuesto Q se llegó a una contradicción. En estos casos, aunque al hacer la demostración se haya usado el método de reducción al absurdo, presentar la demostración como una demostración por contrarrecíproco hace más clara y sucinta la redacción (observe la demostración presentada para la misma proposición en la sección anterior).

En el siguiente ejemplo se muestra una demostración por reducción al absurdo de una proposición condicional, la cual no se puede reducir a una demostración por contrarrecíproco. Se quiere demostrar la siguiente proposición:

Proposición 6. *Sea x un número real. Si $\sqrt[3]{x} + 5 = x$, entonces $x \neq 8$.*

Se puede inicialmente intentar demostrar la proposición usando el método directo. Para eso, se supone que x es un número real y que $\sqrt[3]{x} + 5 = x$, y con esto se debe intentar llegar a que $x \neq 8$. Sin embargo, después de intentar algunas operaciones algebraicas para determinar los posibles valores de x, se puede dar cuenta que no es fácil llegar a lo que se busca. Se debe entonces intentar otro método de demostración. Para intentar hacer la demostración por contrarrecíproco, se debe suponer que $x = 8$, y a partir de esto intentar llegar a que $\sqrt[3]{x} + 5 \neq x$, pero tampoco es fácil encontrar dicho camino. Queda una tercer posibilidad que es intentar hacer la demostración por reducción al absurdo.

Para hacer la demostración por reducción al absurdo, se debe suponer la negación de la implicación que se quiere mostrar, que es lógicamente equivalente a suponer el antecedente y la negación del consecuente. Es decir, se debe suponer que $\sqrt[3]{x}+5=x$ y que $x=8$. Sustituyendo el valor de x en la primera ecuación, y realizando las operaciones que hay en dicha ecuación, se obtiene que $7=8$. Pero como $7\neq 8$, se ha llegado a una contradicción. Por lo tanto, se ha mostrado la proposición por reducción al absurdo.

La demostración se puede escribir de la siguiente manera:

Demostración (Proposición 6)**.** *Sea x un número real. Suponga que $\sqrt[3]{x}+5=x$ y que $x=8$. Sustituyendo el valor de x en la primera ecuación, se obtiene que $7=8$. Por lo tanto, se ha llegado a una contradicción, y la proposición queda demostrada por reducción al absurdo.*

El siguiente ejemplo muestra como el método de demostración por reducción al absurdo puede ser usado para demostrar la no existencia de ciertos objetos que satisfacen una determinada propiedad, casos en los que este método es particularmente útil. Se quiere demostrar la siguiente proposición:

Proposición 7. *No existen ternas pitagóricas de números consecutivos diferentes a* $(3,4,5)$.

Antes de intentar cualquier método de demostración, es importante tener clara la definición de terna pitagórica:

Definición 15. Una *terna pitagórica* es una terna (a,b,c) donde a,b y c son enteros positivos tales que $a^2+b^2=c^2$.

Una vez se tiene claro qué es lo que se quiere demostrar, como se trata de probar la no existencia de ciertos objetos, se puede intentar de una vez con el método de demostración por reducción al absurdo, que como se dijo anteriormente, es particularmente útil para demostrar este tipo de proposiciones.

Se debe comenzar suponiendo la negación de la proposición que se quiere demostrar. Es decir, se debe suponer que existen ternas pitagóricas de números consecutivos diferentes a $(3,4,5)$. A partir de esto, usando particularización existencial, se puede suponer que (a,b,c) es una terna pitagórica de números consecutivos diferente a $(3,4,5)$. Es decir, que a,b y c son números enteros positivos tales que $a^2+b^2=c^2$ (por definición de terna pitagórica), que $b=a+1$ y $c=a+2$ (por ser a,b y c números consecutivos) y que $a\neq 3$ (por ser (a,b,c) diferente a $(3,4,5)$ y por ser a,b y c números consecutivos). Con esto, se debe intentar llegar a una contradicción. Sustituyendo los valores de b y c en $a^2+b^2=c^2$, se tiene que $a^2+(a+1)^2=(a+2)^2$, y aplicando algunas operaciones algebraicas, se sigue que $a^2-2a-3=0$. Al factorizar se tiene que $(a+1)(a-3)=0$, de donde se deduce que $a=-1$ o $a=3$. Pero como

a es un entero positivo, entonces $a \neq -1$, por lo tanto $a = 3$ (aplicando la regla de silogismo disyuntivo). Se ha llegado a una contradicción, pues se tenía que $a \neq 3$. Por lo tanto, por reducción al absurdo, queda demostrada la proposición.

La demostración puede ser escrita de la siguiente manera:

Demostración (Proposición 7)**.** *Suponga que existen ternas pitagóricas de números consecutivos diferentes a* $(3, 4, 5)$*. Sea* (a, b, c) *una terna pitagórica de números consecutivos diferente a* $(3, 4, 5)$*. Entonces,* a, b *y* c *son números enteros positivos tales que* $a^2 + b^2 = c^2$*,* $b = a + 1$*,* $c = a + 2$ *y* $a \neq 3$*. Sustituyendo* b *y* c *en* $a^2 + b^2 = c^2$*, se tiene que* $a^2 + (a + 1)^2 = (a + 2)^2$*, de donde se sigue que* $a^2 - 2a - 3 = 0$*. Al factorizar se tiene que* $(a+1)(a-3) = 0$*, de donde se deduce que* $a = -1$ *o* $a = 3$*. Pero como* a *es un entero positivo, entonces* $a \neq -1$*, por lo tanto* $a = 3$*. Como se ha llegado a una contradicción, la proposición queda demostrada por reducción al absurdo.*

2.2.7. Demostración por casos

Si se quiere demostrar una proposición P a partir de una disyunción de proposiciones $Q_1 \vee \ldots \vee Q_n$, o si la hipótesis que se tiene se puede dividir en una disyunción de proposiciones $Q_1 \vee \ldots \vee Q_n$, la demostración se puede dividir en n partes (o casos) en las que, para cada i entre 1 y n, se demuestra que Q_i implica a P. Este método de demostración se fundamenta en la equivalencia de las proposiciones $(Q_1 \vee \ldots \vee Q_n) \to P$ y $(Q_1 \to P) \wedge \ldots \wedge (Q_n \to P)$, y puede ser vista como una aplicación de la estrategia de 'dividir y conquistar' para resolver problemas.

El siguiente ejemplo ilustra el método de demostración por casos. Se quiere demostrar la siguiente proposición:

Proposición 8. *Sea* x *un número entero. Si* $3|x^2$*, entonces* $3|x$*.*

Inicialmente se puede intentar demostrar la proposición usando el método directo. Para eso, se supone que x es un número entero tal que $3|x^2$, y a partir de esto se debe intentar llegar a $3|x$. Usando la definición de la relación de divisibilidad, de $3|x^2$ se tiene que existe un número entero k tal que $x^2 = 3k$. Con esta ecuación se debe intentar llegar a mostrar la existencia de un número entero que multiplicado por 3 dé como resultado x. Para esto, se puede pensar en sacar raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación, para obtener en el lado izquierdo a x. Haciendo esto se tiene que $x = \sqrt{3k}$. Pero $\sqrt{3k}$ no se puede expresar como 3 por algún número entero. Se debe entonces intentar otro camino.

Si se intenta usar el método de demostración por contrarrecíproco, se debe iniciar suponiendo que $3 \nmid x$, para de ahí internar llegar a $3 \nmid x^2$. De $3 \nmid x$ se tiene que no existe ningún número entero k tal que $x = 3k$; o equivalentemente, que para todo número entero k, se tiene que $x \neq 3k$. Aunque en este punto no parece muy claro como se puede continuar con la demostración, si se tiene en cuenta el algoritmo de la división (ver ejercicio 9, página 34), como x es un número entero, se tiene que $x = 3l$, $x = 3l + 1$ o $x = 3l + 2$, para algún número entero l. Esta nueva información abre posibilidades para continuar con la demostración. Como se tiene que $x \neq 3k$ para cualquier número entero k, entonces $x \neq 3l$ (por particularización universal) y de la disyunción $x = 3l \vee x = 3l + 1 \vee x = 3l + 2$ se puede eliminar la opción $x = 3l$ (aplicando silogismo disyuntivo). Es decir, se puede deducir que $x = 3l+1$ o $x = 3l+2$. Se tiene entonces una disyunción, y a partir de ella se quiere llegar a que $3 \nmid x^2$. Se puede entonces proceder por casos. En el primer caso, si $x = 3l + 1$, se tiene que $x^2 = (3l + 1)^2 = 9l^2 + 6l + 1 = 3(3l^2 + 2l) + 1$. Como l es un entero, entonces $3l^2 + 2l$ es un entero y de la unicidad del algoritmo de la división se puede concluir que x^2 no puede expresarse como $3k$, para algún número entero k (pues ya se pudo expresar como $3k + 1$, donde $k = 3l^2 + 2l$). Por lo tanto, $3 \nmid x^2$. De manera análoga, para el caso en el que $x = 3l + 2$, se tiene que $x^2 = (3l + 2)^2 = 9l^2 + 12l + 4 = 3(3l^2 + 4l + 1) + 1$. Como l es un entero, entonces $3l^2 + 4l + 1$ es un entero y de la unicidad del algoritmo de la división se puede concluir que x^2 no puede expresarse como $3k$, para algún número entero k (pues ya se pudo expresar como $3k+1$, donde $k = 3l^2+4l+1$). Por lo tanto, $3 \nmid x^2$. Como en ambos casos se logró llegar a que $3 \nmid x^2$, por disyunción de casos se puede concluir que $3 \nmid x^2$, y por lo tanto se ha logrado llegar a lo que es estaba buscando.

A continuación se escribe la demostración de manera clara y precisa.

Demostración (Proposición 8)**.** *Sea x un número entero. Suponga que $3 \nmid x$. Es decir, no existe ningún número entero k tal que $x = 3k$. Por algoritmo de la división, se tiene que $x = 3l$, $x = 3l+1$ o $x = 3l+2$, para algún número entero l. Como no existe ningún número entero k tal que $x = 3k$, se tiene que $x \neq 3l$, y por silogismo disyuntivo se tiene que $x = 3l + 1$ o $x = 3l + 2$. En el primer caso, si $x = 3l + 1$, se tiene que $x^2 = (3l + 1)^2 = 9l^2 + 6l + 1 = 3(3l^2 + 2l) + 1$. Como l es un entero, entonces $3l^2 + 2l$ es un entero y de la unicidad del algoritmo de la división se concluye que x^2 no puede expresarse como $3k$, para algún número entero k. Por lo tanto, $3 \nmid x^2$. Para el caso en el que $x = 3l+2$, se tiene que $x^2 = (3l + 2)^2 = 9l^2 + 12l + 4 = 3(3l^2 + 4l + 1) + 1$. Como l es un entero, entonces $3l^2 + 4l + 1$ es un entero y de la unicidad del algoritmo de la división se puede concluir que x^2 no puede expresarse como $3k$, para algún* *número entero k. Por lo tanto, $3 \nmid x^2$. Por disyunción de casos se concluye que $3 \nmid x^2$.*

Note que en el ejemplo anterior se combinan diferentes métodos de demostración (demostración por contrarrecíproco, demostración directa y demostración por casos), esto es lo usual en las demostraciones matemáticas.

El siguiente ejemplo también ilustra el método de demostración por casos. Se quiere demostrar la siguiente proposición:

Proposición 9. *Sea θ un número real tal que $0 \leq \theta \leq \pi$. Se tiene que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.*

Antes de intentar hacer la demostración, se debe tener claro que $\operatorname{sen}^2\theta$ es lo mismo que $(\operatorname{sen}\theta)^2$ y que $\cos^2\theta$ es lo mismo que $(\cos\theta)^2$, y también se deben tener claras las definiciones de las funciones sen y cos:

Definición 16. Sea θ un número real tal que $0 \leq \theta \leq \pi$:

1. Si $\theta = 0$: $\operatorname{sen}\theta = 0$ y $\cos\theta = 1$.

2. Si $\theta = \frac{1}{2}\pi$: $\operatorname{sen}\theta = 1$ y $\cos\theta = 0$.

3. Si $\theta = \pi$: $\operatorname{sen}\theta = 0$ y $\cos\theta = -1$.

4. Si $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$: tome un triángulo recto $\triangle ABC$, con ángulo $\angle A$ de medida θ y ángulo recto $\angle C$ (ver Figura 2.4), entonces $\operatorname{sen}\theta = \frac{BC}{AB}$ y $\cos\theta = \frac{AC}{AB}$.

5. Si $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$: sea $\theta' = \pi - \theta$ (la medida del ángulo suplementario de θ), entonces $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta'$ y $\cos\theta = -\cos\theta'$ (teniendo en cuenta que $0 < \theta' < \frac{\pi}{2}$ y el numeral anterior).

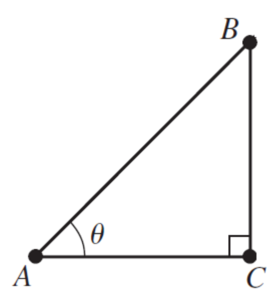


Figura 2.4: Funciones sen y cos.

Ahora se puede proceder a intentar hacer la demostración. Sea θ un número real tal que $0 \leq \theta \leq \pi$. Como la definición de las funciones $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ está dividida en caso de acuerdo con los valores de θ, se deben considerar estos casos para hacer la demostración. En el primer caso, si $\theta = 0$, entonces $\sin\theta = 0$ y $\cos\theta = 1$, por lo tanto $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 0^2 + 1^2 = 1$. En el segundo caso, si $\theta = \frac{\pi}{2}$, entonces $\operatorname{sen}\theta = 1$ y $\cos\theta = 0$, por lo tanto $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1^2 + 0^2 = 1$. En el tercer caso, si $\theta = \pi$, entonces $\operatorname{sen}\theta = 0$ y $\cos\theta = -1$, por lo tanto $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 0^2 + (-1)^2 = 1$. En el cuarto caso, si $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, entonces tomando un triángulo recto $\triangle ABC$, con ángulo $\angle A$ de medida θ y ángulo recto $\angle C$, se tiene que $\operatorname{sen}\theta = \frac{BC}{AB}$ y $\cos\theta = \frac{AC}{AB}$, y por el teorema de Pitágoras $AB^2 = BC^2 + AC^2$, por lo tanto $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = (\frac{BC}{AB})^2 + (\frac{AC}{AB})^2 = \frac{BC^2+AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$. En el quinto y último caso, si $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \phi$, entonces tomando un triángulo recto $\triangle ABC$, con ángulo $\angle A$ de medida $\theta' = \pi - \theta$ y ángulo recto $\angle C$, se tiene que $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta' = \frac{BC}{AB}$ y $\cos\theta = -\cos\theta' = -\frac{AC}{AB}$, y por teorema de Pitágoras $AB^2 = BC^2 + AC^2$, por lo tanto $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = (\frac{BC}{AB})^2 + (-\frac{AC}{AB})^2 = \frac{BC^2+AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$. Como en todos los casos se llegó a que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, por disyunción de casos se concluye que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, que es a lo que se quería llegar.

Ahora que se logró construir la demostración se debe escribir de manera clara y precisa.

Demostración (Proposición 9). *Sea θ un número real tal que $0 \leq \theta \leq \pi$. Se tienen los siguientes casos:*

1. *Si $\theta = 0$: en este caso $\operatorname{sen}\theta = 0$ y $\cos\theta = 1$, por lo tanto $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 0^2 + 1^2 = 1$.*

2. *Si $\theta = \frac{\pi}{2}$: en este caso $\operatorname{sen}\theta = 1$ y $\cos\theta = 0$, por lo tanto $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1^2 + 0^2 = 1$.*

3. *Si $\theta = \pi$: en este caso $\operatorname{sen}\theta = 0$ y $\cos\theta = -1$, por lo tanto $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 0^2 + (-1)^2 = 1$.*

4. *Si $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$: en este caso se toma un triángulo recto $\triangle ABC$, con ángulo $\angle A$ de medida θ y ángulo recto $\angle C$, y se tiene que $\operatorname{sen}\theta = \frac{BC}{AB}$ y $\cos\theta = \frac{AC}{AB}$. Además, por teorema de Pitágoras se tiene que $AB^2 = BC^2 + AC^2$. Por lo tanto $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = (\frac{BC}{AB})^2 + (\frac{AC}{AB})^2 = \frac{BC^2+AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$.*

5. *Si $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$: en este caso se toma un triángulo recto $\triangle ABC$, con ángulo $\angle A$ de medida $\theta' = \pi - \theta$ y ángulo recto $\angle C$, y se tiene que $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta' = \frac{BC}{AB}$ y $\cos\theta = -\cos\theta' = -\frac{AC}{AB}$. Además, por teorema de*

Pitágoras se tiene que $AB^2 = BC^2 + AC^2$*. Por lo tanto* $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = (\frac{BC}{AB})^2 + (-\frac{AC}{AB})^2 = \frac{BC^2+AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$.

Por disyunción de casos se concluye que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

2.2.8. Ejercicios

1. Demuestre las siguientes proposiciones:

   a) Sean x y y números enteros, $x + y$ es par si y solo si x y y son pares o x y y son impares.

   b) Sean x y y números enteros, $x \cdot y$ es par si y solo si x es par o y es par.

   c) Para cualquier número entero x se tiene que $x^2 + 3x + 7$ es impar.

   d) No existen triángulos rectángulos tales que ambos catetos miden la mitad de la hipotenusa.

   e) $\sqrt{2}$ es irracional (tenga en cuenta que si un número x es racional, entonces $x = \frac{a}{b}$, para algunos números naturales a y b, con $b \neq 0$, y además puede suponerse que a y b son escogidos de tal forma que $\frac{a}{b}$ es irreducible).

2. Considere la siguiente proposición: 'Sean a y b dos números enteros tales que sus residuos al ser divididos por 3 son iguales, entonces $a - b$ es múltiplo de 3'.

   a) Demuestre la proposición (tenga en cuenta el algoritmo de la división).

   b) ¿Qué pasa si en la proposición se cambia 3 por 4, o por 5, o por cualquier otro número entero positivo d?

   c) ¿La proposición recíproca es cierta?

3. Considere la siguiente proposición: 'Sea n un número entero, entonces $n^2 + n$ es par'.

   a) Demuestre la proposición.

   b) ¿La proposición sigue siendo verdadera si se cambia n^2 por n^3? ¿y si se cambia n^2 por n^4?

   c) Proponga y demuestre una proposición más general.

4. Sea x un número real. El *valor absoluto* de x, denotado por $|x|$, se define así:
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
Pruebe las siguientes propiedades del valor absoluto:
   a) Dado $x \in \mathbb{R}$, $|-x| = |x|$.
   b) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| = |y - x|$.
   c) Dado $x \in \mathbb{R}$, $|x|^2 = x^2$.
   d) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| = |x||y|$.
   e) Dado $x \in \mathbb{R}$, $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.
   f) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 = y^2$ si y solo si $|x| = |y|$.
   g) Dado $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.
   h) Dados $x, \epsilon \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$, $|x| = \epsilon$ si y solo si $x = \epsilon$ o $x = -\epsilon$.
   i) Dados $x, \epsilon \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$, $|x| < \epsilon$ si y solo si $-\epsilon < x < \epsilon$.
   j) Dados $x, \epsilon \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$, $|x| > \epsilon$ si y solo si $x > \epsilon$ o $x < -\epsilon$.
5. Pruebe que no existe un número racional x tal que $x^2 = 2$.
6. Pruebe que no existen pares de números reales x y y, ambos diferentes a 0, tales que $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$.

2.2.9. Demostración de proposiciones con cuantificadores

Varias de las proposiciones que se han demostrado en los ejemplos anteriores involucran cuantificadores de manera implícita, y otros de manera explícita. Por lo tanto, aunque de manera intuitiva y poco sistemática, ya se han usado métodos para probar proposiciones con cuantificadores. En esta sección se hace énfasis sobre como probar proposiciones que contienen cuantificadores tanto universales como existenciales, para que los métodos para probar este tipo de proposiciones se puedan usar de manera consciente y sistemática.

En la Proposición 1, por ejemplo, se afirma que ‘si a, b y c son números enteros tales que $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$’, que es equivalente a afirmar que ‘para todo a, b y c en los números enteros, si $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$’ (en lenguaje lógico, ‘$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}((a|b \wedge b|c) \to a|c))$’), donde el cuantificador universal aparece explícito. Note que en la demostración de la Proposición 1 se comienza suponiendo que a, b y c son números enteros arbitrarios. Es decir, que las letras a, b y c representan números enteros, pero que no están asociadas a ningún valor particular, sino que pueden tomar cualquier valor en el conjunto de los números enteros. Las letras a, b y c funcionan como *parámetros* (o variables que pueden tomar cualquier valor) en el universo de discurso, que en este caso es el conjunto de los números enteros. Por esta razón, como al suponer además que $a|b$ y que $b|c$ se llega a que $a|c$, se puede concluir que la implicación es válida para cualquier terna de números naturales a, b y c, pues cada una de estas letras representa un número entero cualquiera.

De manera general, si se quiere demostrar una proposición de la forma $\forall x \in U(P(x))$, se pude comenzar suponiendo que x es un elemento arbitrario en U. A partir de esto, usando cualquiera de los métodos de demostración descritos en las secciones anteriores, se debe probar $P(x)$. Si se logra construir dicha prueba, como x representa un elemento arbitrario en U, se puede concluir que $\forall x \in U(P(x))$. En el caso de la Proposición 1, la cual comienza con tres cuantificadores universales (pues $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ es una abreviación de $\forall a \in \mathbb{Z}\ \forall b \in \mathbb{Z}\ \forall c \in \mathbb{Z}$), el método descrito anteriormente es aplicado tres veces (una vez por cada cuantificador universal). Es necesario tener en cuenta que la letra usada para representar el elemento arbitrario debe ser una letra que no haya sido usada antes en la demostración, pues en este caso esa letra no representaría un objeto arbitrario sino otro objeto que ya está siendo considerado dentro de la demostración y el cuál ya puede tener asociadas varias propiedades. Si en medio de una demostración se busca probar una proposición de la forma $\forall x \in U(P(x))$ y la variable x ya ha sido usada antes en la demostración con otro propósito, en lugar de tomar a x como un elemento arbitrario en U para probar $\forall x \in U(P(x))$, se debe tomar otra letra para representar el elemento arbitrario. Si y, por ejemplo, no ha sido usada antes en la demostración, se puede tomar como elemento arbitrario a y y demostrar $P(y)$, con lo que se puede concluir $\forall y \in U(P(y))$, que es lógicamente equivalente a $\forall x \in U(P(x))$ (en las proposiciones cuantificadas no importa la variable que se usa, desde que ellas aparezcan exactamente en los mismos lugares y no coincidan con otras variables).

Las proposiciones de la forma $\forall x \in U(P(x))$ son llamadas *proposiciones universales*, pues su conectivo principal es un cuantificador universal. Todas las proposiciones demostradas en los ejemplos anteriores (desde la Proposición 1 hasta la Proposición 9) son equivalentes a proposiciones universales (en la Proposición 7 aparece explícitamente un cuantificador existencial, pero aparece negado, y por lo tanto es lógicamente equivalente a una proposición universal). Si revisa de nuevo las demostraciones de estas proposiciones, se podrá dar cuenta que en todas ellas se hace uso del método descrito en el párrafo anterior, aunque en algunos casos se combina el supuesto de tomar elementos arbitrarios del universo de discurso con el supuesto de algunas propiedades que ellos deben satisfacer, con el objetivo de usar algún método de demostración para llegar a $P(x_1, \ldots, x_n)$. Por ejemplo, la Proposición 2 es equivalente a la proposición 'para todo triángulo t, si t es un triángulo rectángulo con catetos de medidas x y y e hipotenusa de medida z y su área es $\frac{z^2}{4}$, entonces t es isósceles', que es una proposición universal. Como se presentó anteriormente, la demostración de esta proposición comienza así: 'Sea $t = \triangle ABC$ un triángulo rectángulo con ángulo recto en B, donde x, y y z son las medidas de los lados $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Suponga que t tiene área $\frac{z^2}{4}$ ...'. Note que se comienza suponiendo que t es un triángulo rectángulo, con otras propiedades adicionales que corresponden al antecedente de la implicación que está cuantificada universalmente. Para separar el supuesto de tomar un triángulo arbitrario t de las propiedades que aparecen en el antecedente de la implicación (supuestos que se usan para probar la implicación usando el método de demostración directa), la demostración se podría comenzar de la siguiente manera: 'Sea $t = \triangle ABC$ un triángulo. Suponga que t es rectángulo con ángulo recto en B, y que x, y y z son las medidas de los lados $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Suponga además que t tiene área $\frac{z^2}{4}$ ...'. De esta segunda forma queda más claro que se está haciendo uso del método descrito anteriormente para demostrar proposiciones universales. Cuándo se dice 'Sea $t = \triangle ABC$ un triángulo', se está suponiendo que t es un triángulo cualquiera, que también va a ser denotado por $\triangle ABC$ para hacer referencia de manera más fácil a sus vértices (y a partir de estos a sus lados y ángulos). Pero note que A, B y C son letras que representan puntos arbitrarios, por lo tanto no se está limitando t a un triángulo particular (otra cosas sería si A, B o C aparecen antes en la demostración, denotando otros puntos que ya pueden tener asociadas algunas propiedades específicas).

Por otro lado, proposiciones de la forma $\exists x \in U(P(x))$, donde el conectivo principal es un cuantificador existencial, son llamadas *proposiciones existenciales*. Un método para probar este tipo de proposiciones consiste en exhibir o construir un objeto específico a perteneciente a U que satisfaga la propiedad P (es decir, que $P(a)$ sea verdadero). Igual a como en el caso de los cuantificadores universales, si hay varios cuantificadores existenciales al comienzo de la proposición que se quiere probar, el método puede ser usado el número de veces que sea necesario.

Para ilustrar el método descrito en el párrafo anterior, considere la siguiente proposición:

Proposición 10. *Existen dos números primos tales que su suma es un número primo.*

La proposición anterior es equivalente a 'existen $x, y \in \mathbb{N}$ tales que x y y son primos y $x+y$ es primo' (en lenguaje lógico, usando $P(\cdot)$ para denotar que $\cdot$ es primo, la proposición se puede escribir así: '$\exists x, y \in \mathbb{N}(P(x) \wedge P(y) \wedge P(x+y))$'). Para probar esta proposición basta con exhibir números enteros particulares que satisfagan la propiedad enunciada. Si se toman, por ejemplo, los valores 2 y 3, se tiene que ambos son números primos y $2+3$ también es primo. Eso es suficientes para probar la proposición. La demostración puede ser escrita de la siguiente manera:

Demostración (Proposición 10)**.** *Los números 2 y 3 son números primos. Además, $2+3=5$ y 5 también es primo. Por lo tanto, existen dos números primos cuya suma es un número primo.*

El siguiente ejemplo muestra como se pueden combinar los métodos descritos anteriormente para probar proposiciones con cuantificadores universales y existenciales. Se quiere demostrar la siguiente proposición:

Proposición 11. *Para todo par de números racionales x y y, si $x < y$, entonces existe un número racional z tal que $x < z < y$.*

La proposición anterior puede ser escrita en lenguaje lógico así: '$\forall x, y \in \mathbb{Q}(x < y \to \exists z \in \mathbb{Q}(x < z < y))$', donde '$x < z < y$' es la forma usual de abreviar la conjunción '$(x < z) \wedge (z < y)$'. Como se trata de una proposición con dos cuantificadores universales al comienzo, se puede comenzar la demostración suponiendo objetos arbitrarios x y y pertenecientes a $\mathbb{Q}$. A partir de esto se debe demostrar la implicación '$x < y \to \exists z \in \mathbb{Q}(x < z < y)$', para lo cual se puede intentar inicialmente con el método de demostración directa. Siguiendo dicho método, se debe suponer el antecedente; es decir, se debe suponer que $x < y$. A partir de los supuesto que se tienen, se quiere llegar a probar que '$\exists z \in \mathbb{Q}(x < z < y)$'. Para esto, se puede intentar exhibir o construir un número racional z que satisfaga la desigualdad buscada. Como x y y representan números racionales arbitrarios, cuya única condición es que $x < y$, el número z debe ser construido de tal manera que funcione para cualquiera que sean los valores que tomen x y y. El punto medio entre x y y parece ser un buen candidato para la construcción de z, pero hay que mostrar que dicho punto medio en efecto es un número racional y que además satisface las desigualdades buscadas. Suponga entonces que z es el punto medio entre x y y; es decir, que $z = \frac{x+y}{2}$. Hay que justificar primero que $z \in \mathbb{Q}$. Como

$x, y \in \mathbb{Q}$, entonces, $x = \frac{a}{b}$ y $y = \frac{c}{d}$, para algunos números enteros a, b, c y d, con b y d diferentes de 0. Por lo tanto, $z = \frac{x+y}{2} = \frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2} = \frac{ad+bc}{2bd}$. Como $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, entonces $ad + bc \in \mathbb{Z}$, y como b y d son diferentes de 0, entonces $2bd$ es un entero diferente de 0. Por lo tanto, $z \in \mathbb{Q}$. Falta probar que $x < z$ y que $z < y$. Para la primera desigualdad, como se tiene por hipótesis que $x < y$, sumando x en ambos lados se tiene que $2x < x + y$, y dividiendo por 2 en ambos lados se tiene que $x < \frac{x+y}{2}$, que por la definición de z es lo mismo que $x < z$. La otra desigualdad se prueba de manera similar. Se deja como ejercicio la escritura de la demostración.

Un tipo particular de proposiciones que contienen varios cuantificadores son aquellas que afirman la existencia de un único objeto que satisface una determinada propiedad (ver Sección 2.1.12). Teniendo en cuenta que estas proposiciones pueden ser expresadas de la forma $\exists x \in U(P(x)) \wedge \forall x, y \in U((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow x = y)$, donde la primera parte de la conjunción afirma la existencia y la segunda la unicidad, ambas partes de la conjunción pueden ser probadas usando los métodos descritos anteriormente. El siguiente ejemplo ilustra como pueden ser probados este tipo de proposiciones. Se quiere probar la siguiente proposición:

Proposición 12. *Sean m y b números reales. Si $m \neq 0$, para todo número real y, la ecuación $mx + b = y$ tiene una única solución.*

La proposición anterior puede escribirse en lenguaje lógico así: '$\forall m, b \in \mathbb{R}(m \neq 0 \rightarrow \forall y \in \mathbb{R}\ \exists! x \in \mathbb{R}(mx + b = y))$'. Para probar esta proposición, como se trata de una proposición universal (con dos cuantificadores universales al comienzo), se puede comenzar suponiendo que m y b son números reales arbitrarios, y con esto se debe intentar probar la implicación '$m \neq 0 \rightarrow \forall y \in \mathbb{R}\ \exists! x \in \mathbb{R}(mx + b = y)$'. Para probar dicha implicación se puede usar el método directo. Para eso, se debe suponer que $m \neq 0$ y con base en esta nueva hipótesis se debe intentar probar el consecuente de la implicación. Como dicho consecuente también es una proposición universal ('$\forall y \in \mathbb{R}\ \exists! x \in \mathbb{R}(mx + b = y)$'), se puede ahora suponer que y es un número real arbitrario y con los supuestos que se tienen hasta aquí se debe probar que '$\exists! x \in \mathbb{R}(mx + b = y)$'. Como esta última proposición a la que se quiere llegar se trata de una existencia única, se puede separar la demostración de esta proposición en dos partes, la primera parte para demostrar la existencia y la segunda para probar la unicidad. La existencia corresponde a la proposición '$\exists x \in \mathbb{R}(mx + b = y)$', que se puede probar construyendo un número real x que satisfaga la ecuación para los valores arbitrarios escogidos anteriormente. Razonando hacia atrás, se puede suponer que $mx + b = y$, y usando operaciones algebraicas se puede 'despejar' x, con lo que se obtiene que $x = \frac{y-b}{m}$. El valor obtenido para x, en término de los parámetros m, b y y, parece ser el valor que se está buscando, pero hay que justificar que en efecto este valor es un número real y que satisface la ecuación dada. Como $y, b, m \in \mathbb{R}$ y $m \neq 0$, entonces x tiene que ser un número real. Además $m\frac{y-b}{m} + b = (y-b) + b = y$, lo que muestra que $x = \frac{y-b}{m}$ es en efecto una solución para la ecuación $mx + b = y$. Falta solo probar la unicidad, que corresponde a la proposición '$\forall x, z \in \mathbb{R}(((mx + b = y) \wedge (mz + b = y)) \rightarrow x = z)$' (note que la segunda variable que se escogió para cuantificar, la variable z, es una nueva variable, para no confundirla con la variable y, ni con x). Para probar dicha proposición, se puede suponer que x y z son números reales arbitrarios, y con esto se debe probar la implicación '$((mx + b = y) \wedge (mz + b = y)) \rightarrow x = z$'. Para usar el método directo, se puede además suponer el antecedente de la implicación; es decir, se puede suponer que '$mx + b = y$' y '$mz + b = y$'. De estos últimos supuestos, se tiene que $mx + b = mz + b$, debido a las propiedades de la igualdad. Usando la ley cancelativa para la suma se tiene que $mx = mz$, y como $m \neq 0$, usando la propiedad cancelativa para el producto se tiene que $x = z$, que es a lo que se quería llegar. La escritura final de esta demostración también se deja como ejercicio.

2.2.10. Refutación con contraejemplos

En los textos matemáticos es usual encontrar ejercicios que piden demostrar proposiciones (que se suponen de antemano verdaderas), pero es menos usual encontrar ejercicios que piden establecer la veracidad o falsedad de una determinada proposición. Sin embargo, el matemático en su quehacer está constantemente haciendo conjeturas, y para establecer la veracidad o falsedad de dichas conjeturas debe por un lado intentar demostrarlas y por otro lado intentar refutarlas, respectivamente.

Un método que sirve para refutar proposiciones consiste en presentar contraejemplos. Un *contraejemplo* para una determinada proposición es un objeto (o una secuencia de objetos) que no satisfacen dicha proposición.

El siguiente ejemplo ilustra el método de refutación por contraejemplos. Se quiere determinar si la siguiente proposición es verdadera o falsa:

Proposición 13. *Sean p y q números reales. Si $p \cdot q$ es un número racional, entonces p y q son números racionales.*

Al principio uno podría inclinarse por pensar que la proposición anterior es verdadera, y para establecer dicha verdad se puede intentar demostrar la proposición usando diversos métodos. Si no se cometen errores, se podrá gastar un buen tiempo intentando de manera infructuosa construir la demostración. Se debe entonces comenzar a dudar sobre la validez de la proposición. Sin embargo, el simple hecho de no haber logrado construir una demostración luego de varios intentos, y del uso fallido de múltiples métodos de demostración, no es un argumento suficiente para concluir que la proposición es falsa. Para poder establecer con certeza que la proposición es falsa, como se trata de una afirmación universal sobre pares de números reales (aunque los cuantificadores universales aparecen implícitos), basta mostrar valores particulares de números reales p y q para los cuales la implicación 'Si $p{\cdot}q$ es un número racional, entonces p y q son números racionales' es falsa. Considere, por ejemplo, que $p = \sqrt{2}$ y $q = \sqrt{2}$. En este caso se tiene que tanto p como q son números irracionales, mientras que $p \cdot q = 2$ y 2 es un número racional. Por lo tanto, como para los valores escogidos para p y q se tiene que el antecedente de la implicación es verdadero y el consecuente es falso, entonces la implicación es falsa. Se puede decir entonces que $p = \sqrt{2}$ y $q = \sqrt{2}$ es un contraejemplo para la Proposición 13 y que por lo tanto la proposición es falsa. Note que en el contraejemplo que se presentó los valores de p y q son el mismo, pero esto es válido puesto que en ningún lugar de la proposición se indica que p y q deben ser diferentes. Al igual que con las demostraciones, una vez se obtiene un contraejemplo, se debe escribir de manera clara la justificación de por qué la proposición es falsa, lo que se hace a continuación.

Refutación (Proposición 13). *Sean $p = \sqrt{2}$ y $q = \sqrt{2}$, Entonces $p \cdot q = 2$ y 2 es un número racional, mientras que p y q son números irracionales, por lo tanto la proposición es falsa.*

Como se mostró anteriormente, objetos particulares que no satisfacen una proposición universal sirven para refutarla, pero se debe tener muy en cuenta que casos particulares no sirven para justificar (o demostrar) la verdad de una proposición universal. Por ejemplo, si se toma $p = 2$ y $q = 3$ se tiene que la implicación que hay en la Proposición 13 es verdadera (¿por qué?). Sin embargo, de este caso particular de objetos que satisfacen la implicación no se puede concluir que la proposición sea verdadera, pues esta proposición afirma que la implicación es verdadera para cualquier par de números reales y no solo para algunos casos particulares. De hecho, ya se probó por medio de un contraejemplo que esta proposición es falsa, y una proposición no puede ser verdadera y falsa a la vez.

A continuación se presenta otro ejemplo de refutación de proposiciones por medio de contraejemplos.

Proposición 14. *Sean x y y números reales. Si $x < y + \frac{1}{n}$, para todo número entero positivo n, entonces $x < y$.*

De nuevo, al principio uno puede convencerse de que la proposición anterior es verdadera, y puede intentar demostrarla por varios métodos sin lograr dicho objetivo (a menos que logre construir una supuesta 'demostración', donde se comete algún error). Sin embargo, si se toma cualquier número real como valor para x y se toma $y = x$, se podrá dar cuenta que estos valores particulares sirven para refutar la proposición. Por ejemplo, si se toma $x = y = 1$, como $0 < \frac{1}{n}$ para todo número entero positivo n, entonces la desigualdad $1 < 1 + \frac{1}{n}$ también se cumple para todo número entero positivo n, y $1 \not< 1$. Por lo tanto la implicación 'Si $1 < 1 + \frac{1}{n}$, para todo número entero positivo n, entonces $1 < 1$' es falsa, lo que sirve para refutar la proposición.

2.2.11. Ejercicios

1. Para la Proposición 3 hasta la Proposición 9, escriba una proposición universal que sea equivalente (en lenguaje natural y en lenguaje lógico) y reescriba la demostración en los casos en los que no sea claro el uso de parámetros (o objetos arbitrarios), de manera que se haga evidente el uso del método de demostración para proposiciones universales descrito en la Sección 2.2.9.

2. Escriba las demostraciones de las proposición 11 y 12, las cuales fueron esbozadas en los párrafos siguientes a las respectivas proposiciones.

3. Demuestre o refute las siguientes proposiciones:

   a) Sean p y q números reales. Si $p \neq q$ y $p \cdot q$ es un número racional, entonces p y q son números racionales.

   b) Si n es un número entero positivo par, entonces $2^n - 1$ no es número primo.

   c) $\sqrt{3}$ es irracional.

   d) Sean m, n números enteros, $m \cdot n$ es impar si y solo si m y n son impares.

   e) Sean $n, m \in \mathbb{Z}$. Si $n|m$, entonces $m|n$.

   f) Todo entero es divisor de 0.

   g) Sean x y y números reales. Si x y y son diferentes de 1, entonces $x + y \leq xy$.

h) Sea n un entero impar, entonces $n = 4k+1$ o $n = 4k-1$ para algún entero k.

i) Sean n y m enteros positivos. Si $n|m$, entonces $n \leq m$.

j) Sean x y y reales positivos. $x \leq y$ si y solo si $x^2 \leq y^2$.

k) Existen enteros m y n tales que $2m + 7n = 1$.

l) No existen enteros m y n tales que $2m + 4n = 7$.

m) Para todo entero positivo m, se tiene que $2^m + 3$ es primo.

n) Sean a, b y c enteros, si $a|b$ y $a|c$, entonces $a|(bx+cy)$, para cualquier par de enteros x y y.

ñ) Sean x y y reales. Si $x^2 - 5x = y^2 - 5y$, entonces $x = y$ o $x + y = 5$.

o) Si n es racional y m es irracional, entonces $n + m$ es irracional.

4. Pruebe las siguientes propiedades del valor absoluto:

a) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ si y solo si $x = \frac{x+|x|}{2}$.

b) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \leq 0$ si y solo si $x = \frac{x-|x|}{2}$.

c) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $|x + y| \leq |x| + |y|$ (ésta propiedad es conocida como *desigualdad triangular*).

d) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $|x + y| = |x| + |y|$ si y solo si $xy \geq 0$ (es decir, $xy \geq 0$ es una condición suficiente y necesaria para que se cumpla la igualdad en la desigualdad triangular).

e) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $||x| - |y|| \leq |x - y|$ (¿cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que se cumpla la igualdad?).

f) Para todo $x, a, b \in \mathbb{R}$, si $a \leq x \leq b$, entonces $|x| \leq |a| + |b|$.

g) Para todo $x \in \mathbb{R}$, si $x \neq 0$, entonces$\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$.

h) Sean $m, n \in \mathbb{Z}$, tales que $m \neq n$. Si m y n tienen la misma paridad (ambos son pares o ambos son impares), entonces existe un único entero s tal que $|m - s| = |n - s|$.

5. Considere la proposición 'si n es un entero positivo par, entonces $2^n - 1$ no es primo'.

a) ¿La proposición es verdadera? Justifique su respuesta.

b) Indique cuál es el error en la supuesta demostración de la proposición que se presenta a continuación.

Sea n un entero positivo par, entonces existe un entero positivo k tal que $n = 2k$. Luego

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= 2^{2k} - 1 \\ &= (2^k)^2 - 1 \\ &= (2^k - 1)(2^k + 1). \end{aligned}$$

Entonces, $2^n - 1$ puede ser escrito como el producto de dos enteros y por lo tanto no es primo.

c) Con base en el error encontrado en el literal anterior, adicione las condiciones que sean necesarias en la proposición para que sea verdadera y demuestre la nueva proposición obtenida.

6. *a*) Proporcione una definición de 'máximo común divisor' (de dos números naturales) y exprese la definición usando cuantificadores.

   b) Demuestre que para cualquier par de números naturales existe un único máximo común divisor.

   c) Demuestre la siguiente proposición. Sean a, b, c números naturales. Si $c|a$ y $c|b$ entonces $c|m.c.d(a, b)$ (donde $m.c.d(a, b)$ es el máximo común divisor de a y b).

7. Demuestre que las soluciones de una ecuación cuadrática $ax^2+bx+c = 0$, con $a \neq 0$, son
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

8. Demuestre o refute las siguientes proposiciones:

   a) Para cada entero a, existe un entero b tal que $a|b$.

   b) Existe un entero b tal que para todo entero a, $a|b$.

   c) Para cada entero b, existe un entero a tal que $a|b$.

   d) Existe un entero a tal que para todo entero b, $a|b$.

9. Pruebe que las siguientes proposiciones son equivalentes:

   a) a y b son primos relativos.

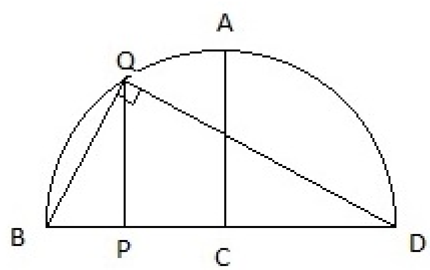
b) a y $-b$ son primos relativos.

c) $a+b$ y b son primos relativos.

d) $a-b$ y b son primos relativos.

10. Pruebe la parte de 'unicidad' del algoritmo de la división.

11. Sean x, y, h las longitudes de los segmentos $\overline{BP}$, $\overline{PD}$, $\overline{QP}$, respectivamente, y r el radio del semi-circulo (ver figura). Determine el valor de h y r en término de x y y. A partir de los valores determinados, proponga y demuestre una desigualdad entre ellos.



Capítulo 3

Teoría intuitiva de conjuntos

La *teoría de conjuntos* es una rama de las matemáticas que estudia la noción de conjunto y sus propiedades. Tuvo un gran desarrollo a partir de los trabajos de Georg Cantor sobre conjuntos infinitos, en la segunda mitad del siglo XIX. Intuitivamente, un conjunto es simplemente una colección de objetos. Bajo esta concepción intuitiva, cualquier propiedad determina un conjunto. Por ejemplo, la propiedad 'x es un número entero y x es múltiplo de 2' determina el conjunto de los números enteros pares (o múltiplos de 2). En 1901, Bertrand Russell descubrió que esta visión amplia, y aparentemente inofensiva, de lo que es un conjunto llevaba a contradicciones, mostrando que si se considera a R como siendo el conjunto de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismo, se tiene que R pertenece a sí mismo si y solo si R no pertenece a sí mismo, lo que es una contradicción. Esta contradicción ineludible en la noción intuitiva de conjunto es conocida como *paradoja de Russell*. Además de la paradoja de Russell, a comienzos del siglo XX fueron descubiertas otras paradojas en la teoría intuitiva de conjuntos, lo que llevó a la construcción de teorías formales (axiomáticas) donde se delimita la noción de conjunto para evitar las contradicciones, entre las cuales la más aceptada hoy en día es la conocida como *teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (o ZF)*, propuesta principalmente por Ernst Zermelo y Abraham Fraenkel.

Gran parte de las teorías matemáticas, si no todas, pueden ser descritas en términos de nociones de conjuntos, lo que ha llevado a que la teoría de conjuntos sea usada para fundamentar la matemática. Es por lo tanto imprescindible que cualquier matemático conozca por lo menos las nociones básicas de conjuntos, que es precisamente lo que se presenta en este capítulo. De manera análoga a como se hizo en el capítulo anterior con la lógica, no se pretende aquí hacer una presentación formal de una teoría axiomática de conjuntos, por el contrario, se busca introducir los conceptos y propiedades básicas de los conjuntos de una manera intuitiva, considerando además que los conjuntos y nociones que se van a tratar no llevan a contradicciones (es decir, no se considerarán colecciones de objetos 'peligrosas', como la descubierta por Russell).

3.1. Nociones básicas

Como se aborda aquí la teoría de conjuntos desde un punto de vista intuitivo, por *conjunto* se entiende cualquier colección de objetos. Por ejemplo:

- El conjunto de los números pares.
- El conjunto de los días de la semana.
- El conjunto de los números primos.
- El conjunto de soluciones de la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$.
- El conjunto de los triángulos rectángulos.

Los objetos que pertenecen a un conjunto se llaman *elementos* del conjunto. En este texto, se usan letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$ como variables sobre conjuntos, los conjuntos numéricos son denotados bajo las convenciones usuales ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$), y para representar variables sobre elementos de conjuntos se usan letras minúsculas $a, b, c, \ldots$ Si a es un elemento de un conjunto A, esto se denota $a \in A$, mientras que $a \notin A$ denota que a no es un elemento del conjunto A. Para todo conjunto A y todo objeto a, de acuerdo con la leyes lógicas de tercer excluido y no contradicción, se tiene que $a \in A$ o $a \notin A$, y solo una de las dos condiciones se cumple.

3.1.1. Formas de describir conjuntos

Existen básicamente dos formas de describir conjuntos: por extensión o por comprensión. Una *descripción por extensión* consiste en listar los elementos del conjunto, colocándolos entre llaves y separándolos con comas. En algunos casos se usan puntos suspensivos para indicar que hay más elementos en el conjuntos, los cuales deben ser fácilmente deducibles siguiendo la secuencia de los otros elementos que se presentan. Los siguientes son ejemplos de descripciones de conjuntos por extensión:

- $A = \{2, 5, 7, 9\}$.

- $B = \{a, e, i, o, u\}$.
- $C = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$.
- $D = \{a, b, c, d, e, \ldots, z\}$.
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (conjunto de los números naturales).
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ (conjunto de los números enteros).
- $P = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ (conjunto de los números enteros pares).

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. En las descripciones por extensión, por lo tanto, el orden en el que son presentados los elementos de un conjunto no importa (a no ser que se usen puntos suspensivos, donde el orden de los elementos que se presentan es necesario para deducir los otros elementos de la secuencia), por ejemplo $\{2, 5, 7\} = \{2, 7, 5\}$. Además, en los conjuntos no se considera repetición de elementos, por lo tanto no se deben colocar dos o más veces un mismo elemento en la descripción de un conjunto.

Una *descripción por comprensión* consiste en indicar las propiedades que satisfacen los elementos del conjunto. Dada una variable x y una proposición abierta $\alpha(x)$, se usa $\{x : \alpha(x)\}$ para denotar el conjunto cuyos elementos son precisamente los objetos x que satisfacen la propiedad $\alpha(x)$. La expresión $\{x : \alpha(x)\}$ se lee como 'el conjunto de los x tales que $\alpha(x)$', y un elemento a pertenece a $\{x : \alpha(x)\}$ si y solo si $\alpha(a)$ (es decir, si al sustituir a x por a en α se obtiene una proposición verdadera). Considere los siguientes ejemplos de descripciones por comprensión:

- $P = \{x : \exists k \in \mathbb{Z}(x = 2 \cdot k)\}$.
- $E = \{x : x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 + x - 6 = 0\}$.

En la descripción de P, la proposición abierta $\alpha(x)$ es $\exists k \in \mathbb{Z}(x = 2 \cdot k)$. Por lo tanto, se tiene que $-14 \in P$, pues $\exists k \in \mathbb{Z}(-14 = 2 \cdot k)$ es verdadero (tome a k como siendo -7), mientras que $15 \notin P$, pues $\exists k \in \mathbb{Z}(15 = 2 \cdot k)$ es falso (si se supone que existe algún $k \in \mathbb{Z}$ tal que $15 = 2 \cdot k$, se tiene que $k = \frac{15}{2}$, y por lo tanto $k \notin \mathbb{Z}$, llegando a una contradicción). En general, se tiene que $a \in P$ si y solo si $\exists k \in \mathbb{Z}(a = 2 \cdot k)$, es decir, si y solo si a es un número entero par. Para identificar cuáles son los elementos del conjunto E, basta factorizar el polinomio $x^2 + x - 6$, para determinar cuáles son los números enteros x que satisfacen la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$. Como $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$, los únicos valores que satisfacen la ecuación son -3 y 2, y ambos son números enteros, por lo tanto $E = \{-3, 2\}$.

En las descripciones por comprensión, dado un conjunto A, una variable x y una proposición abierta $\alpha(x)$, se usa también la notación $\{x \in A : \alpha(x)\}$ para denotar el conjunto cuyos elementos son los objetos x que pertenecen a A y que satisfacen la propiedad $\alpha(x)$. Es decir, $\{x \in A : \alpha(x)\} = \{x : x \in A \wedge \alpha(x)\}$. Por ejemplo:

- $F = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 4\} = \{x : x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 \leq 4\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Para denotar intervalos de números reales, se usan las siguientes convenciones (donde $a, b \in \mathbb{R}$):

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$.
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$.
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$.
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$.

Para describir por comprensión el conjunto de objetos que se obtienen al sustituir las variables $x_1, \ldots, x_n$ en una expresión $t(x_1, \ldots, x_n)$ (donde se aplican operaciones sobre las variables x_i) por objetos $a_1, \ldots, a_n$, respectivamente, que satisfacen una proposición abierta $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$, se usa también la notación $\{t(x_1, \ldots, x_n) : \alpha(x_1, \ldots, x_n)\}$. Es decir, $\{t(x_1, \ldots, x_n) : \alpha(x_1, \ldots, x_n)\} = \{z : \exists x_1, \ldots, x_n(\alpha(x_1, \ldots, x_n) \wedge z = t(x_1, \ldots, x_n)\}$. Por ejemplo:

- $\mathbb{Q} = \{\frac{x}{y} : x, y \in \mathbb{Z} \wedge y \neq 0\} = \{z : \exists x, y \in \mathbb{Z}(y \neq 0 \wedge z = \frac{x}{y})\}$.
- $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R} \wedge i = \sqrt{-1}\} = \{z : \exists a, b \in \mathbb{R}(i = \sqrt{-1} \wedge z = a + bi)\}$.
- $P = \{2 \cdot k : k \in \mathbb{Z}\} = \{z : \exists k \in \mathbb{Z}(z = 2 \cdot k)\}$.

Es importante tener en cuenta que en las descripciones por comprensión es irrelevante cuáles son las letras que se escogen como variables. Por ejemplo, $\{x : \exists k \in \mathbb{Z}(x = 2 \cdot k)\} = \{z : \exists k \in \mathbb{Z}(z = 2 \cdot k)\}$ y $\{\frac{x}{y} : x, y \in \mathbb{Z} \wedge y \neq 0\} = \{\frac{u}{v} : u, v \in \mathbb{Z} \wedge v \neq 0\}$.

3.1.2. El conjunto vacío

El conjunto que no tiene ningún elemento es llamado *conjunto vacío* y se denota $\emptyset$. Por la definición de conjunto vacío, se tiene que no existe ningún elemento x que pertenece a $\emptyset$ (en lenguaje lógico $\neg\exists x(x \in \emptyset)$), o equivalentemente, para cualquier elemento x se tiene que x no pertenece a $\emptyset$ (en lenguaje lógico $\forall x(x \notin \emptyset)$). El conjunto vacío puede describirse por extensión como $\{\}$, y para describirlo por comprensión se puede usar cualquier propiedad abierta $\alpha(x)$ que sea falsa para cualquier objeto x. Por ejemplo: $\{x : x \neq x\}$, $\{x : x \in \mathbb{N} \wedge x < 0\}$ y $\{x \in \mathbb{R} : x < -1 \wedge x > 1\}$, son todas descripciones de conjuntos que no tienen elementos, y por lo tanto representan un mismo conjunto, que es el conjunto vacío.

3.1.3. Relación de inclusión e igualdad de conjuntos

La relación de inclusión entre conjuntos está definida de la siguiente manera:

Definición 17. Dados dos conjuntos A y B, se dice que A es *subconjunto* de (o *está incluido* en) B, lo que se denota $A \subseteq B$, si todo elemento de A también es elemento de B. En lenguaje lógico, $A \subseteq B$ si $\forall x(x \in A \to x \in B)$.

Por ejemplo:

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
- $\{2, 9\} \subseteq \{2, 5, 7, 9\}$.
- $\{m \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z}(m = 4k)\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z}(n = 2k)\}$.

Las inclusiones entre los conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son bien conocidas. La inclusión $\{2, 9\} \subseteq \{2, 5, 7, 9\}$ es evidente, y puede justificarse de la siguiente manera: si $x \in \{2, 9\}$, entonces $x = 2$ o $x = 9$, y en ambos casos $x \in \{2, 5, 7, 9\}$. La inclusión $\{m \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z}(m = 4k)\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z}(n = 2k)\}$ es un poco menos evidente, y puede justificarse de la siguiente manera: sea $x \in \{m \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z}(m = 4k)\}$, entonces $x \in \mathbb{Z}$ y existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 4a$ (note los cambios de variables que fueron realizados). Luego, $x = 2(2a)$ y como $a \in \mathbb{Z}$, entonces $2a \in \mathbb{Z}$. Tomando $b = 2a$, se tiene que $x = 2b$. Por lo tanto, $\exists k \in \mathbb{Z}(n = 2k)$, de donde $x \in \{n \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z}(n = 2k)\}$.

De manera general, por la definición que se dio de la relación de inclusión, para probar que $A \subseteq B$, lo que se debe probar es que $\forall x(x \in A \to x \in B)$, y para probar dicha proposición se deben usar los métodos vistos en el Capítulo

2. En el párrafo anterior, las justificaciones que se dan para las inclusiones son precisamente demostraciones de las respectivas inclusiones usando el método de demostración directa. Observe que las justificaciones comienzan tomando un elemento arbitrario x y suponiendo que x es un elemento del conjunto que está a la izquierda del símbolo de inclusión, y terminan cuando se llega a que x es un elemento del conjunto que está a la derecha del símbolo de inclusión. Denotando por A al conjunto que está a la izquierda y por B al conjunto que está a la derecha de los respectivos símbolos de inclusión, lo que se probó fue que $x \in A \to x \in B$, y como x representa un elemento arbitrario, se tiene que $\forall x(x \in A \to x \in B)$, que por definición es lo mismo que $A \subseteq B$. Aunque este esquema para demostrar inclusión de manera directa es útil en muchos casos, cualquiera de los métodos vistos en el Capítulo 2 puede ser usado para demostrar que $\forall x(x \in A \to x \in B)$.

Se usa $A \nsubseteq B$ para expresar que A no es subconjunto de B. Por definición de $\subseteq$ y leyes lógicas, $A \nsubseteq B$ es equivalente a $\exists x(x \in A \wedge x \notin B)$. Por lo tanto, para probar que $A \nsubseteq B$, basta exhibir un elemento c tal que $c \in A$ y $c \notin B$. Por ejemplo:

- Si $A = \{2, 5, 10, 12\}$ y $B = \{2, 5, 7, 9\}$, entonces $A \nsubseteq B$; pues $10 \in A$ y $10 \notin B$ (o también $12 \in A$ y $12 \notin B$).

- Si $A = \{n^2 : n \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \{n \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z}(n = 2k)\}$, entonces $A \nsubseteq B$; pues $9 \in A$ (ya que $3 \in \mathbb{Z}$ y $9 = 3^2$) y $9 \notin B$ (ya que no existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $9 = 2k$). Note que existen muchos otros elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B, pero un caso particular es suficiente para justificar la no inclusión.

Algunas propiedades de la relación de inclusión son las siguientes:

Teorema 2 (Reflexividad de $\subseteq$)**.** *Para cualquier conjunto A, se tiene que $A \subseteq A$.*

Demostración. Sea A un conjunto. Por leyes lógicas se tiene que $x \in A \to x \in A$ (pues cualquier proposición se implica a sí misma). Generalizando se tiene que $\forall x(x \in A \to x \in A)$, y por definición de inclusión $A \subseteq A$. □

Teorema 3. *Para cualquier conjunto A, se tiene que $\emptyset \subseteq A$.*

Demostración. Sea A un conjunto. Como $x \in \emptyset$ es falso para cualquier elemento x (por definición del conjunto vacío), entonces la implicación $x \in \emptyset \to x \in A$ siempre es verdadera (independientemente de cuál sea el conjunto A). Generalizando se tiene que $\forall x(x \in \emptyset \to x \in A)$, y por definición de inclusión $\emptyset \subseteq A$. □

Teorema 4. *Para cualquier conjunto A y elemento x, se tiene que $x \in A$ si y solo si $\{x\} \subseteq A$.*

Demostración. Sea A un conjunto. Se probará primero que $x \in A$ implica $\{x\} \subseteq A$: suponga que $x \in A$, como x es el único elemento que está en $\{x\}$ y $x \in A$, se tiene que $\{x\} \subseteq A$. Se probará ahora que $\{x\} \subseteq A$ implica $x \in A$: suponga que $\{x\} \subseteq A$ (es decir, todos lo elementos que están en $\{x\}$ también están en A), como $x \in \{x\}$ y $\{x\} \subseteq A$, entonces $x \in A$. □

Teorema 5 (Transitividad de $\subseteq$)**.** *Para cualquier tres conjuntos A, B y C, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.*

Demostración. Sean A, B y C conjuntos. Suponga que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Se probará que $A \subseteq C$: sea $x \in A$, como $A \subseteq B$, entonces $x \in B$, y como $B \subseteq C$, entonces $x \in C$. Luego $x \in A \to x \in C$, y generalizando se tiene que $\forall x(x \in A \to x \in C)$, que por definición de inclusión es $A \subseteq C$. □

Los *Diagramas de Venn* son diagramas que permiten representar conjuntos, relaciones de inclusión y algunas operaciones sobre conjuntos. En los diagramas de Venn, los conjuntos se representan por medio de líneas que se cierran. Normalmente se diseña un rectángulo para representar lo que se considera como 'conjunto universal', y dentro de dicho rectángulo se diseñan los demás conjuntos. Los elementos que se colocan dentro del área encerrada por la línea que representa un conjunto son los elementos de dicho conjunto. En el caso en que $B \subseteq A$, el área encerrada por la línea que representa a B debe estar dentro del área encerrada por la línea que representa a A. Por ejemplo, si $B = \{2, 9\}$ y $A = \{2, 5, 7, 9\}$, la inclusión de B en A se representa así:

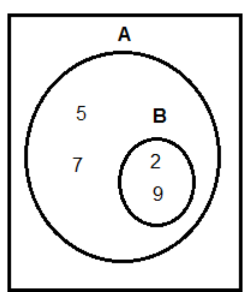


Figura 3.1: Diagrama de Venn para $B = \{2, 9\}$ y $A = \{2, 5, 7, 9\}$.

Pasando ahora al problema de determinar cuándo dos conjuntos A y B (con descripciones posiblemente diferentes) son *iguales*, se debe tener en cuenta la siguiente definición:

Definición 18. Dados dos conjuntos A y B, se tiene que $A = B$ si A y B tienen los mismos elementos. En lenguaje lógico, $A = B$ si $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$.

Considere, por ejemplo, que $A = \{x \in \mathbb{N} : \text{x es par y } x \text{ es primo}\}$ y $B = \{2\}$. Aunque A es descrito por comprensión y B es descrito por extensión, como el único número natural par que es primo es el número 2, entonces 2 es el único elemento de A, y 2 también es el único elemento de B. Por lo tanto, como los elementos de A y de B son los mismos, entonces $A = B$.

Usando las reglas lógicas estudiadas en el capítulo anterior, se puede ver que $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ es equivalente a $\forall x(x \in A \to x \in B) \wedge \forall x(x \in B \to x \in A)$, que a su vez es equivalente a $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ (por la definición de la relación de inclusión). Por lo tanto, probar que $A = B$ es equivalente a probar que $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$. El siguiente ejemplo ilustran como se demuestra la igualdad de dos conjuntos probando la *doble inclusión* (es decir, probando la inclusión en ambos sentidos).

Proposición 15. *Sean* $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 < 0\}$ *y* $B = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 3\}$*, entonces* $A = B$*.*

Demostración. Se probará primero que $A \subseteq B$: sea $x \in A$, entonces $x \in \mathbb{R}$ y $x^2 - 5x + 6 < 0$. Como $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, entonces $(x-2)(x-3) < 0$. Como el producto $(x-2)(x-3)$ es negativo, se tiene que $(x-2) > 0 \wedge (x-3) < 0$ o que $(x-2) < 0 \wedge (x-3) > 0$. Pero el caso $(x-2) < 0 \wedge (x-3) > 0$ no es posible, pues en este caso se tendría que $x < 2$ y $x > 3$, lo cual es contradictorio (pues si $x < 2$, entonces $x \not> 3$). por lo tanto, se tiene que dar que $(x-2) > 0 \wedge (x-3) < 0$, de donde se deduce que $x > 2$ y $x < 3$, y por lo tanto $x \in B$ (pues $x \in \mathbb{R}$ y $2 < x < 3$).

Se probará ahora que $B \subseteq A$: sea $x \in B$, entonces $x \in \mathbb{R}$ y $2 < x < 3$. Como $2 < x$, entonces $0 < x - 2$, y como $x < 3$, entonces $x - 3 < 0$. Por lo tanto $(x-2)(x-3) < 0$, y como $(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$, entonces $x^2 - 5x + 6 < 0$. De donde se tiene que $x \in A$.

Como se probó que $A \subseteq B$ y que $B \subseteq A$, por doble inclusión se tiene que $A = B$. □

Otra manera de probar la igualdad de dos conjuntos descritos por comprensión es demostrando la equivalencia de las propiedades usadas para describir dichos conjuntos. Es decir, si $A = \{x : \varphi(x)\}$ y $B = \{x : \psi(x)\}$, donde $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son proposiciones abiertas que dependen de x, para probar que $A = B$ basta probar que $\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$. Como un elemento x pertenece a A si y solo si satisface la propiedad φ (es decir, si $\varphi(x)$ es verdadero), y pertenece a B si y solo si satisface la propiedad ψ (es decir, si $\psi(x)$ es verdadero), si se prueba que $\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$, se tiene que $x \in A \leftrightarrow \varphi(x) \leftrightarrow \psi(x) \leftrightarrow x \in B$. Por transitividad del bicondicional, se tiene que $x \in A \leftrightarrow x \in B$, y generalizando se tiene que $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$, por lo tanto $A = B$. De igual manera, si $A = \{x \in C : \varphi(x)\}$ y $B = \{x \in C : \psi(x)\}$, donde $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son proposiciones abiertas que dependen de x y C es un conjunto cualquiera, para probar que $A = B$ basta probar que $\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$. Los siguientes ejemplos ilustran como se prueba la igualdad de dos conjuntos siguiendo este procedimiento.

Proposición 16. *Sean* $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \cdot y \text{ es par}\}$ *y* $B = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \text{ es par o } y \text{ es par}\}$*, entonces* $A = B$.

Demostración. Sea $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, entonces $x, y \in \mathbb{Z}$ y las proposiciones '$x \cdot y$ es par' y 'x es par o y es par' son equivalentes (ver ejercicio 1b, página 67), por lo tanto $A = B$. □

Proposición 17. *Sean* $A = \{x \in \mathbb{R} : x < -2\}$ *y* $B = \{x \in \mathbb{R} : x < -2 \wedge x < 7\}$*, entonces* $A = B$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. Se probará que $x < -2 \leftrightarrow (x < -2 \wedge x < 7)$. Para esto, se probará primero que $x < -2 \rightarrow (x < -2 \wedge x < 7)$: sea $x < -2$, como $-2 < 7$, por transitividad de $<$ se tiene que $x < 7$; por lo tanto $x < -2 \wedge x < 7$. La implicación $(x < -2 \wedge x < 7) \rightarrow x < -2$ vale por simplificación. Como $x < -2 \leftrightarrow (x < -2 \wedge x < 7)$, entonces $A = B$. □

Es importante tener en cuenta que, aunque los conjuntos A y B sean descritos por comprensión usando variables diferentes, los procedimientos descritos anteriormente funcionan de la misma manera. Es decir, si por ejemplo $A = \{x : \varphi(x)\}$ y $B = \{z : \psi(z)\}$, donde $\varphi(x)$ y $\psi(z)$ son proposiciones abiertas que dependen de x y z respectivamente, como $x \in B \leftrightarrow \psi(x)$ (donde $\psi(x)$ es el resultado de sustituir todas las ocurrencias de z por x en ψ), entonces para probar que $A = B$ se puede proceder por doble inclusión o probando la equivalencia $\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$, igual a como se hizo en los ejemplos anteriores. En la Proposición 17, por ejemplo, se pudo haber definido a B como $B = \{z \in \mathbb{R} : z < -2 \wedge z < 7\}$ y la demostración sería la misma.

3.1.4. Conjunto de partes

Antes de definir lo que es el conjunto de partes de un conjunto, es importante tener en cuenta que los elementos de un conjunto pueden ser a su vez conjuntos. Por ejemplo, si $A = \{\{2, 5\}, \{3\}, 2\}$, los conjuntos $\{2, 5\}$ y $\{3\}$ son elementos de A, lo miso que el número 2. Sin embargo, aunque el número 5 es un elemento de $\{2, 5\}$ y $\{2, 5\} \in A$, el 5 no es un elemento de A.

Definición 19. El *conjunto de partes* (o *conjunto potencia*) de un conjunto A, que se denota $\mathcal{P}(A)$, es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A. Es decir, $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$.

Los siguientes son ejemplos de conjuntos de partes:

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ (tenga en cuenta que $\{\emptyset\}$ y $\emptyset$ son conjuntos diferentes, pues $\emptyset$ no tiene elementos, mientras que $\{\emptyset\}$ tiene un elemento, que es $\emptyset$).
- $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$.
- $\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.
- $\mathcal{P}(\{\{3, 5\}, 2\}) = \{\emptyset, \{\{3, 5\}\}, \{2\}, \{\{3, 5\}, 2\}\}$.
- $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{2\})) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{2\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{2\}\}, \{\emptyset, \{2\}\}\}$.
- $\mathcal{P}(\mathbb{Z}) = \{B : B \subseteq \mathbb{Z}\}$. Se tiene, por ejemplo, que $\{2m : m \in \mathbb{Z}\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, pues $\{2m : m \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$. Mientras que $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \neq 0\} \notin \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, pues $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \neq 0\} \nsubseteq \mathbb{Z}$.

Para cualquier conjunto A, como $A \subseteq A$ y $\emptyset \subseteq A$ (ver Teoremas 2 y 3), entonces $\emptyset, A \in \mathcal{P}(A)$.

3.1.5. Ejercicios

1. ¿Qué se puede decir acerca de un conjunto A si $x \notin A$ para todo x?
2. Dado un conjunto A, se usa $|A|$ para denotar el *número de elementos* (o *cardinal*) del conjunto A. Teniendo en cuenta esto, determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas y justifique sus respuestas:
   a) Si A es el conjunto de letras en la palabra 'matemáticas', entonces $|A| = 11$.
   b) Para el conjunto A del numeral anterior, se tiene que $u \in A$ o $e \in A$.
   c) Si $B = \{n : n \in \mathbb{Z} \text{ y } 10 \leq n \leq 20\}$, entonces $|B| = 10$.
   d) Para el conjunto B del numeral anterior, se tiene que $11 \in B$ y $\sqrt{200} \in B$.
3. Presente un ejemplo de 3 palabras p_1, p_2 y p_3, cada una con 5 letras, tales que definiendo B_i como el conjunto de letras en la palabra p_i, para $i \in \{1, 2, 3\}$, se tiene que $|B_i| = 5 - i$.

4. Para los conjuntos B_i obtenidos en el numeral anterior, halle $B_i \cap B_j$, para cada $i \neq j$ y $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

5. ¿Cuáles son los elementos del conjunto $A = \{0, 1, \{1, 2\}\}$?

6. Considere el conjunto $B = \{2m + 5n \ : \ m, n \in \mathbb{N}\}$. ¿$10 \in B$? ¿$13 \in B$? ¿$3 \in B$?, justifique sus respuestas.

7. Describa por extensión los siguientes conjuntos:

   a) $\{x \in \mathbb{N} \ : \ 0 \leqslant x \leqslant 10 \text{ y } x \text{ es par}\}$.
   b) $\left\{\dfrac{1}{n^2} \ : \ n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \text{ y } -3 \leqslant n \leqslant 3\right\}$.
   c) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1, \{0\}\}))$.
   d) $\{2n + 5 \ : \ n \in \mathbb{N} \text{ y } 0 \leqslant n \leqslant 3\}$.

8. Describa por comprensión:

   a) El conjunto de todos los números reales positivos.
   b) El conjunto de todos los enteros pares mayores que 10.
   c) El conjunto de todos los números racionales que tienen un factor de 5 en su denominador.
   d) El conjunto $\{0, 1, 8, 27, 64\}$.
   e) El conjunto $\{1, 5, 9, 13, 17, 21, \dots\}$.

9. Para cada uno de los siguientes pares de conjuntos, indique si $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ o $A = B$, y demuestre sus afirmaciones:

   a) $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 - 6x + 8 = 0\}$ y $B = \{2y \ : \ y \in \mathbb{N} \text{ y } 1 \leq y \leq 2\}$.
   b) $A = \{3k \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \{6k \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$.
   c) $A = \{z \in \mathbb{R} \ : \ z^2 - 4 \leq 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq 2\}$.

10. Pruebe que $\{x : \exists k \in \mathbb{Z}(x = 3 \cdot k) \wedge \neg \exists k \in \mathbb{Z}(x = 6 \cdot k)\} = \{6 \cdot l + 3 : l \in \mathbb{Z}\}$.

11. Pruebe que $\{x : x \in \mathbb{Z} \wedge \neg \exists k \in \mathbb{Z}(x = 3 \cdot k)\} = \{x : x \in \mathbb{Z} \wedge (\exists k \in \mathbb{Z}(x = 3 \cdot k + 1) \vee \exists k \in \mathbb{Z}(x = 3 \cdot k + 2))\}$.

12. Sea $A \subseteq \mathbb{Z}$ un conjunto tal que $|A| \geq 3$. Demuestre que existen $m, n \in A$ tales que $m - n$ es par.

13. Sean A, B y C tales que $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ y $C \subseteq A$. ¿Se puede concluir que $A = B = C$? Justifique su respuesta.

14. Sean A y B conjuntos. Se dice que A es *subconjunto propio* de B si $A \subseteq B$ y $A \neq B$, lo que se denota por $A \subsetneq B$. Responda las siguientes preguntas y justifique sus respuestas.

    a) ¿Se puede dar que $A \subsetneq B$ y $B \subseteq A$?
    b) ¿Existen subconjuntos propios del conjunto vacío?

15. ¿Es cierto que $A \subseteq B$ o $A = B$ o $B \subseteq A$, para cualquier par de conjuntos A y B? Presente una prueba o un contraejemplo.

16. Sean A y B conjuntos. Demuestre que $A \subseteq B$ si y solo si $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

17. Responda verdadero o falso según el caso y justifique sus respuesta.

    a) $\{\emptyset\} \subseteq A$ para todo conjunto A.
    b) $\emptyset \subseteq A$ para todo conjunto A.
    c) $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$ para todo conjunto A.
    d) $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ para todo conjunto A.
    e) $\emptyset \in A$ para todo conjunto A.
    f) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ para todo conjunto A.
    g) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \mathcal{P}(\emptyset)$.
    h) $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}\}$.
    i) $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

3.2. Operaciones básicas sobre conjuntos

De manera análoga a como existen operaciones, como la suma y el producto, que aplicadas a números dan como resultados otros números, también existen operaciones que aplicadas a conjuntos dan como resultado otros conjuntos. En esta sección se presentan algunas de las operaciones básicas sobre conjuntos; a saber, las operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento. Además, se demuestran algunas de las propiedades que satisfacen dichas operaciones.

3.2.1. Unión

La *unión* de dos conjuntos A y B es el conjunto que contiene los elementos que están en A o en B. Es decir:

Definición 20. Dados dos conjuntos A y B, se llama A *unido* B, y se denota $A \cup B$, al conjunto definido por:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

La unión de dos conjuntos se representa por medio de diagramas de Venn como se muestra en la Figura 3.2, donde el área con rayas diagonales, que comprende las áreas tanto de A como de B, representa a $A \cup B$. Más adelante se verá cómo los diagramas de Venn pueden ayudar a probar o refutar proposiciones relacionadas con operaciones entre conjuntos.

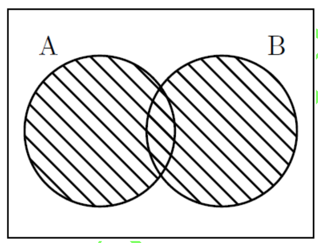


Figura 3.2: Diagrama de Venn para $A \cup B$.

A continuación se presentan algunos ejemplos de unión de conjuntos:

- Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{z, b\}$, entonces $A \cup B = \{a, b, c, z\}$ (note que, aunque b es un elemento tanto de A como de B, este elemento aparece solo una vez en $A \cup B$; esto se debe a que en los conjuntos no se considera repetición de elementos, como se mencionó en la Sección 3.1.1).

- Si $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$, entonces $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \vee x \leq 1\} = \mathbb{R}$ (en este ejemplo, como todo número real x satisface la proposición $x > 0 \vee x \leq 1$, entonces $\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \vee x \leq 1\} = \{x : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$).

- Si $A = \{x : \exists k \in \mathbb{Z}(x = 3 \cdot k)\}$ y $B = \{x : \exists k \in \mathbb{Z}(x = 6 \cdot k)\}$, entonces $A \cup B = \{x : \exists k \in \mathbb{Z}(x = 3 \cdot k) \vee \exists k \in \mathbb{Z}(x = 6 \cdot k)\} = A$ (en este ejemplo, como $\exists k \in \mathbb{Z}(x = 6 \cdot k) \to \exists k \in \mathbb{Z}(x = 3 \cdot k)$, se tiene que $(\exists k \in \mathbb{Z}(x = 3 \cdot k) \vee \exists k \in \mathbb{Z}(x = 6 \cdot k)) \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}(x = 3 \cdot k)$, por lo tanto $\{x : \exists k \in \mathbb{Z}(x = 3 \cdot k) \vee \exists k \in \mathbb{Z}(x = 6 \cdot k)\} = \{x : \exists k \in \mathbb{Z}(x = 3 \cdot k)\} = A$).

De la definición de unión, se tiene que $x \in A \cup B \leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$. Por lo tanto, $x \notin A \cup B \leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B)$. Teniendo en cuenta las leyes de De Morgan, se tiene que $x \notin A \cup B \leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B)$. Es decir, para que un elemento x no pertenezca a $A \cup B$, es necesario que x no pertenezca tanto a A como a B. Por ejemplo, si $A = \mathbb{Q}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : x > \frac{3}{2}\}$, entonces $\sqrt{2} \notin A \cup B$, pues $\sqrt{2}$ no es un número racional (por lo tanto $\sqrt{2} \notin A$) y $\sqrt{2} \ngtr \frac{3}{2}$ (por lo tanto $\sqrt{2} \notin B$).

Los siguientes teoremas presentan algunas propiedades de la unión de conjuntos.

Teorema 6 (Idempotencia de $\cup$)**.** *Para cualquier conjunto A, se tiene que $A \cup A = A$.*

Demostración. Sea A un conjunto. Como $(x \in A \vee x \in A) \leftrightarrow x \in A$, entonces $A \cup A = \{x : x \in A \vee x \in A\} = \{x : x \in A\} = A$. $\square$

Teorema 7 (Conmutatividad de $\cup$)**.** *Para cualquier par de conjuntos A y B, se tiene que $A \cup B = B \cup A$.*

Demostración. Sea A un conjunto. Como $(x \in A \vee x \in B) \leftrightarrow (x \in B \vee x \in A)$, entonces $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} = \{x : x \in B \vee x \in A\} = B \cup A$. $\square$

Teorema 8. *Para cualquier par de conjuntos A y B, se tiene que $A \subseteq A \cup B$.*

Demostración. Sea A un conjunto. Suponga que $x \in A$. Por adición, $x \in A \vee x \in B$. Por lo tanto, $x \in A \cup B$. $\square$

Teorema 9. *Para cualquier par de conjuntos A y B, se tiene que $A \cup B = B$ si y solo si $A \subseteq B$.*

Demostración. Se demostrará primero que si $A \cup B = B$, entonces $A \subseteq B$: Suponga que $A \cup B = B$. Para probar que $A \subseteq B$, suponga además que $x \in A$. Como $x \in A$ y $A \subseteq A \cup B$ (Teorema 8), entonces $x \in A \cup B$. Como $x \in A \cup B$ y por hipótesis $A \cup B = B$, entonces $x \in B$.
Se demostrará ahora que si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$: Suponga que $A \subseteq B$. Se probará que $A \cup B = B$ por doble inclusión. La inclusión $B \subseteq A \cup B$ es válida por los Teoremas 8 y 7. Para probar la inclusión $A \cup B \subseteq B$, sea $x \in A \cup B$, entonces $x \in A \vee x \in B$. Procediendo por disyunción de casos, si $x \in A$, como $A \subseteq B$, entonces $x \in B$. En el otro caso, es decir, si $x \in B$, eso es justo a lo que se quiere llegar. $\square$

3.2.2. Intersección

La *intersección* de dos conjuntos A y B es el conjunto que contiene los elementos que están tanto en A como en B. Es decir:

Definición 21. Dados dos conjuntos A y B, se llama A *intersectado* B, y se denota $A \cap B$, al conjunto definido por:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

La intersección de conjuntos se representa por medio de diagramas de Venn como se muestra en la Figura 3.3, donde el área con rayas diagonales, que es el área común a los conjuntos A y B, representa a $A \cap B$.

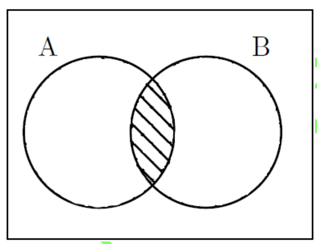


Figura 3.3: Diagrama de Venn para $A \cap B$.

Los siguientes son ejemplos de intersección de conjuntos:

- Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{z, b\}$, entonces $A \cap B = \{b\}$.
- Si $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$, entonces $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x \leq 1\} = (0, 1]$.
- Si $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$, entonces $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x \leq 1\} = \emptyset$ (en este ejemplo, como ningún número real x satisface la proposición $x > 0 \wedge x \leq -1$, entonces $\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x \leq 1\} = \emptyset$).
- Si $A = \{x : \exists k \in \mathbb{Z}(x = 3 \cdot k)\}$ y $B = \{x : \exists k \in \mathbb{Z}(x = 6 \cdot k)\}$, entonces $A \cap B = \{x : \exists k \in \mathbb{Z}(x = 3 \cdot k) \wedge \exists k \in \mathbb{Z}(x = 6 \cdot k)\} = B$ (en este ejemplo, como $\exists k \in \mathbb{Z}(x = 6 \cdot k) \to \exists k \in \mathbb{Z}(x = 3 \cdot k)$, se tiene que $(\exists k \in \mathbb{Z}(x = 3 \cdot k) \wedge \exists k \in \mathbb{Z}(x = 6 \cdot k)) \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}(x = 6 \cdot k)$, por lo tanto $\{x : \exists k \in \mathbb{Z}(x = 3 \cdot k) \wedge \exists k \in \mathbb{Z}(x = 6 \cdot k)\} = \{x : \exists k \in \mathbb{Z}(x = 6 \cdot k)\} = B$).

De la definición de intersección, se tiene que $x \in A \cap B \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$. Por lo tanto, $x \notin A \cap B \leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B)$. Teniendo en cuenta las leyes de De Morgan, se tiene que $x \notin A \cap B \leftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B)$. Es decir, para que un elemento x no pertenezca a $A \cap B$, es suficiente que x no pertenezca a A o que x no pertenezca a B. Por ejemplo, si $A = \mathbb{Q}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$, entonces $\sqrt{2} \notin A \cap B$, pues $\sqrt{2}$ no es un número racional (por lo tanto $\sqrt{2} \notin A$). También se tiene que $\frac{1}{2} \notin A \cap B$, pues $\frac{1}{2} \not> 1$ (por lo tanto $\frac{1}{2} \notin B$), y que $-\sqrt{2} \notin A \cap B$, pues $-\sqrt{2}$ no es un número racional y $-\sqrt{2} \not> 1$ (por lo tanto $-\sqrt{2} \notin A$ y $-\sqrt{2} \notin B$).

Los siguientes teoremas presentan algunas propiedades de la intersección de conjuntos. Las demostraciones se dejan como ejercicio.

Teorema 10 (Idempotencia de $A \cap B$)**.** *Para cualquier conjunto A, se tiene que $A \cap A = A$.*

Teorema 11 (Conmutatividad de $\cap$)**.** *Para cualquier par de conjuntos A y B, se tiene que $A \cap B = B \cap A$.*

Teorema 12. *Para cualquier par de conjuntos A y B, se tiene que $A \cap B \subseteq A$.*

Teorema 13. *Para cualquier par de conjuntos A y B, se tiene que $A \cap B = A$ si y solo si $A \subseteq B$.*

3.2.3. Diferencia

La *diferencia* de un conjunto A y un conjunto B es el conjunto que contiene los elementos de A que no están en B. Es decir:

Definición 22. Dados dos conjuntos A y B, se llama *diferencia entre A y B (o A menos B)*, y se denota $A \setminus B$ (o $A - B$), al conjunto definido por:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

La diferencia de conjuntos se representa por medio de diagramas de Venn como se muestra en la Figura 3.4, donde el área con rayas diagonales, que corresponde al área de A que no coincide con el área de B, representa a $A \setminus B$.

A continuación se presentan algunos ejemplos de diferencia de conjuntos:

- Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{z, b\}$, entonces $A \setminus B = \{a, c\}$.

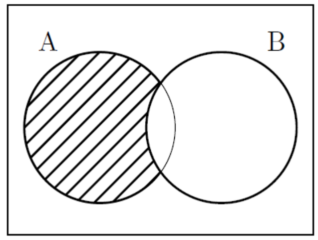


Figura 3.4: Diagrama de Venn para $A \setminus B$.

- Si $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$, entonces $A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x \nleq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x > 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\} = (1, \infty)$.
- Si $A = \{x : \exists k \in \mathbb{Z}(x = 3 \cdot k)\}$ y $B = \{x : \exists k \in \mathbb{Z}(x = 6 \cdot k)\}$, entonces $A \setminus B = \{x : \exists k \in \mathbb{Z}(x = 3 \cdot k) \wedge \neg \exists k \in \mathbb{Z}(x = 6 \cdot k)\} = \{6 \cdot l + 3 : l \in \mathbb{Z}\}$.

De la definición de diferencia de conjuntos, se tiene que $x \in A \setminus B \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$. Por lo tanto, $x \notin A \setminus B \leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \notin B)$. Teniendo en cuenta las leyes de De Morgan y la ley de doble negación, se tiene que $x \notin A \setminus B \leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B)$. Es decir, para que un elemento x no pertenezca a $A \setminus B$, es suficiente que x no pertenezca a A o que x pertenezca a B. Por ejemplo, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (pues $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$) y $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ (pues $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Los siguientes teoremas muestran algunas propiedades de la operación de diferencia entre conjuntos. Las demostraciones se dejan como ejercicios.

Teorema 14. *Si $A \subseteq B$, entonces $A \setminus B = \emptyset$.*

Teorema 15. *Para cualquier conjunto A, se tiene que $A \setminus A = \emptyset$.*

Teorema 16. *Para cualquier par de conjuntos A y B, se tiene que $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$.*

3.2.4. Complemento

Si se fija un conjunto U como 'universo' y se toma un conjunto A tal que $A \subseteq U$, el *complemento* de A con respecto a U es el conjunto que contiene todos los elementos de U que no están en A. Es decir:

Definición 23. Dados conjuntos U y A tales que $A \subseteq U$, se llama *complemento de A con respecto a U*, y se denota A^c, al conjunto definido por:

$$A^c = U \setminus A.$$

El complemento de un conjunto, con respecto a un universo prefijado, se representa por medio de diagramas de Venn como se muestra en la Figura 3.5, donde el rectángulo representa al universo y el área con rayas diagonales representa a A^c.

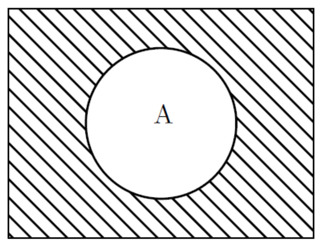


Figura 3.5: Diagrama de Venn para A^c.

A continuación se presentan algunos ejemplos de complemento de conjuntos:

- Si $U = \{a, e, i, o, u\}$ y $A = \{a, o\}$, entonces $A^c = \{e, i, u\}$.
- Si $U = \mathbb{R}$ y $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$, entonces $A^c = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x \not> 0\} = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x \leq 0\} = (-\infty, 0]$.
- Si $U = \mathbb{Z}$ y $A = \{x : \exists k \in \mathbb{Z}(x = 3{\cdot}k)\}$, entonces $A^c = \{x : x \in \mathbb{Z} \wedge \neg \exists k \in \mathbb{Z}(x = 3{\cdot}k)\} = \{x : x \in \mathbb{Z} \wedge (\exists k \in \mathbb{Z}(x = 3{\cdot}k+1) \vee \exists k \in \mathbb{Z}(x = 3{\cdot}k+2))\}$.

De la definición de complemento, fijado un conjunto U como universo, se tiene que $x \in A^c \leftrightarrow (x \in U \wedge x \notin A)$. Por lo tanto, si $x \in U$, entonces $x \in A^c \leftrightarrow x \notin A$. Por ejemplo, si se toma $U = \mathbb{R}$, entonces $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^c$ (pues $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) y $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Q}^c$ (pues $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$).

En los siguientes teoremas, donde se muestran algunas propiedades de la operación de complemento, se supone prefijado un conjunto U como universo. Los demostraciones también se dejan como ejercicio.

Teorema 17. *Si $A = \emptyset$, entonces $A^c = U$.*

Teorema 18. *Si $A = U$, entonces $A^c = \emptyset$.*

Teorema 19. *Para cualquier conjunto A tal que $A \subseteq U$, se tiene que $(A^c)^c = A$.*

3.2.5. Uso de diagramas de Venn para decidir igualdad de conjuntos

Los diagramas de Venn son útiles para convencernos de la verdad de ciertas igualdades de conjuntos, o para construir contraejemplos que refuten dichas igualdades. Sin embargo, es importante dejar claro que dichos diagramas por sí solos no constituyen una demostración o una refutación de una determinada igualdad.

Si se quiere determinar la verdad o falsedad de una igualdad en la que en ambos lados aparecen operaciones sobre conjuntos, se puede diseñar un diagrama de Venn para las expresiones en cada lado de la ecuación, para luego comparar las áreas que representan el resultado de las respectivas operaciones y concluir si la igualdad se cumple o no (dependiendo de si las áreas son o no las mismas, respectivamente). Para diseñar el diagrama correspondiente a cada lado de la ecuación, se debe iniciar diseñando un rectángulo (que representa el conjunto universal), y dentro de dicho rectángulo se deben diseñar la líneas cerradas que representen los conjuntos en consideración. Se debe tener en cuenta que los conjuntos deben ser diseñados de tal manera que se contemplen áreas para todas las posibles combinaciones de pertenencia de elementos a dichos conjuntos. Para ecuaciones que involucran 2 o 3 conjuntos (denotados por A, B y C), los diagramas iniciales se muestran en la Figura 3.6.

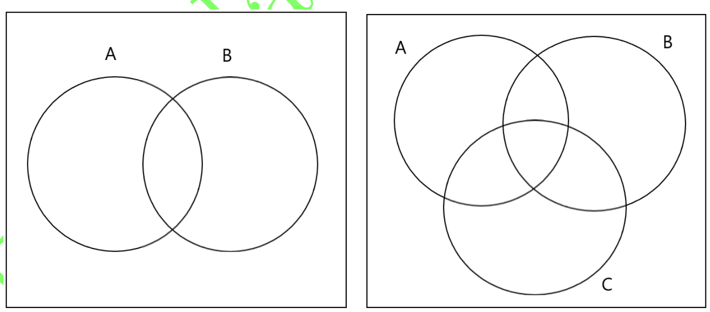


Figura 3.6: Diagrama inicial de Venn (para 2 y 3 conjuntos).

Para determinar el área correspondiente a las operaciones de cada lado de la igualdad, se deben usar colores o patrones diferentes para delimitar las áreas correspondientes a cada operación realizada, siguiendo las convenciones indicadas anteriormente para la representación de cada una de las operaciones por medio de diagramas de Venn. Los siguientes ejemplos ilustran el uso de diagramas de Venn para determinar igualdad de conjuntos.

Suponga que se quiere determinar si la ecuación $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ es o no válida, para cualquier tres conjuntos A, B y C. Para eso se construyen los diagramas de Venn para cada uno de los lados de la ecuación, los cuales se muestran en la Figura 3.7. En dicha figura, en el diagrama de

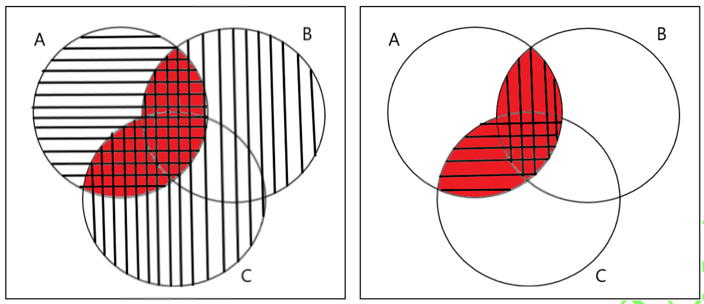


Figura 3.7: Diagramas de Venn para $A \cap (B \cup C)$ y $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

la izquierda, que corresponde a la expresión $A \cap (B \cup C)$, el área con líneas horizontales representa el conjunto A y el área con líneas verticales representa el conjunto $B \cup C$. Por lo tanto, el área donde estos dos patrones se juntan, formando cuadrados y con fondo en color rojo, representa a $A \cap (B \cup C)$. Por otro lado, en el diagrama de la derecha, que corresponde a la expresión $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, el área con líneas verticales representa a $A \cap B$ y el área con líneas horizontales representa a $A \cap C$. Por lo tanto, el área donde aparece al menos uno de estos dos patrones, que aparece con fondo en color rojo, representa a $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Como las áreas que representan a $A \cap (B \cup C)$ y a $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ son las mismas, se puede concluir que la igualdad es válida. Sin embargo, este procedimiento gráfico no es admitido como una demostración rigurosa, y para poder afirmar con certeza que la igualdad es válida se debe realizar una demostración formal (siguiendo lo métodos descritos en el capítulo anterior), lo que se deja como ejercicio.

Suponga ahora que se quiere determinar si $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, para cualquier tres conjuntos A, B y C. Para eso se construyen los diagramas de Venn para cada uno de los lados de la ecuación, los cuales se muestran en la Figura 3.8. En dicha figura, en el diagrama de la izquierda, que corresponde a la expresión $A \setminus (B \cup C)$, el área con líneas verticales representa el conjunto $B \cup C$ y el área con fondo en color rojo representa a $A \setminus (B \cup C)$. Por otro lado, en el diagrama de la derecha, que corresponde a la expresión $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, el área con líneas horizontales representa a $A \setminus B$ y el área con líneas verticales representa a $A \setminus C$. Por lo tanto, el área donde aparece al menos uno de estos

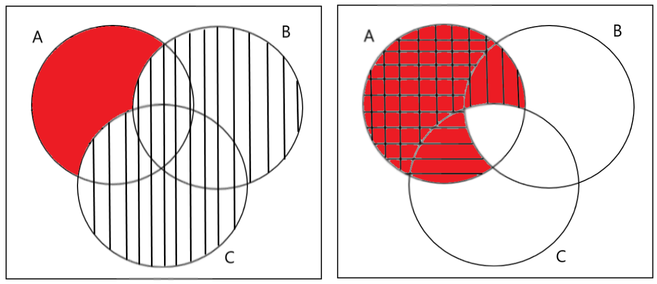


Figura 3.8: Diagramas de Venn para $A \setminus (B \cup C)$ y $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

dos patrones, que aparece con fondo en color rojo, representa a $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Como las áreas que representan a $A \setminus (B \cup C)$ y a $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ son diferentes, se puede concluir que la igualdad no es válida. Aunque este procedimiento gráfico no es suficientes para refutar dicha igualdad, permite construir fácilmente un contraejemplo que la refute, colocando elementos en las áreas que no coinciden. Si se coloca, por ejemplo, el elemento 1 en el área con solo líneas verticales y fondo rojo en el diagrama de la derecha, se estaría representando el caso particular en el que $A = B = \{1\}$ y $C = \emptyset$. Para estos conjuntos se tiene que $1 \notin A \setminus (B \cup C)$ (pues $1 \in B \cup C$) y que $1 \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ (pues $1 \in A \setminus C$), y por lo tanto $A \setminus (B \cup C) \neq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Los conjuntos A, B y C que se construyeron son, por lo tanto, un contraejemplo que refuta la igualdad $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

3.2.6. Ejercicios

1. Sean $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{a, e\}$, $C = \{a, i, u\}$ y $D = \{a, e, o\}$. Describa por extensión los siguientes conjuntos:

   a) $(A \cup B) \cap C$.

   b) $(A \cap D) \setminus B$.

   c) $(B \cup C)^c$ (Tomando como universo $U = A$).

   d) $(B \cap C)^c$ (Tomando como universo $U = A$).

   e) $A \setminus (B \cap C)$.

   f) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

   g) $A \setminus (B \cup C)$.

   h) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

2. Considere a $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ como conjunto universal. Construya conjuntos $A \subseteq U$ y $B \subseteq U$ tales que $|A| = 5$, $|B| = 4$ y $|A \cap B^c| = 2$.

3. ¿Existen conjuntos A y B tales que $A \cap B = \{f, o, u, r\}$ y $A \cup B = \{f, o, r, t, y, s, i, x\}$?

4. En los siguientes ejercicios realice un diagrama de Venn que ilustre la situación y resuelva el problema.

   a) Se revisó el uso del suelo de 48 edificios. Los usos que tienen dichos edificios son:

      1) 35 son para oficinas.
      2) 8 son de uso comercial y para oficinas pero no son residenciales.
      3) 6 son exclusivamente de uso residencial.
      4) 5 son únicamente para oficinas.
      5) 16 no son de uso residencial.
      6) 10 tiene los tres usos.
      7) Todos tienen al menos un uso de suelo.

      Determine el número de edificios que:

      1) Solo tienen uso de suelo comercial.
      2) Tienen uso de suelo comercial y residencial pero no de oficina.
      3) Tienen uso de suelo residencial y de oficina pero no comercial.

   b) En una encuesta realizada en un colegio de la ciudad a un total de 150 estudiantes, se hallaron los siguientes datos:

      1) 54 estudian álgebra.
      2) 10 estudian álgebra solamente.
      3) 89 estudian inglés.
      4) 20 estudian álgebra y ciencias.
      5) 80 estudian ciencias.
      6) 15 estudian las tres materias simultáneamente.
      7) 60 estudian ciencias e inglés.

      Determine el número de estudiantes que:

      1) Estudian álgebra e inglés pero no estudian ciencias.
      2) Estudian solo una materia.
      3) Estudian a lo sumo dos materias.

5. Sean $A = \{2k \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \ : -3 \leqslant x \leqslant 5\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z} \ : \ x \text{ es cuadrado perfecto}\}$ y $D = \{2n^2 + 3 \ : \ n \in \mathbb{Z} \text{ y } -2 \leqslant n \leqslant 2\}$. Describa, por extensión o comprensión, los siguientes conjuntos:

   a) $(A \cup B)\backslash C$.
   b) $A \cap C$.
   c) A^c (Tomando como universo $U = \mathbb{Z}$).
   d) $B \cap D$.
   e) $(B \cup D) \cap C$.
   f) $(B^c \cap C)^c$ (Tomando como universo $U = \mathbb{Z}$).

6. Considere a $\mathbb{R}$ como conjunto universal. Sean $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -1 < x < 1\}, B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -2 \leq x \leq 2\}$ y $C = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -2 < x < 3\}$. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando sus respuestas.

   a) $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$.
   b) $C^c \subseteq B^c$ o $B^c \subseteq A^c$.
   c) $A \setminus C = \emptyset$.
   d) $C \setminus B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x = -2 \text{ ó } 2 < x < 3\}$.
   e) A^c y B son disjuntos (es decir, $A^c \cap B = \emptyset$).

7. Responda las siguientes preguntas y justifique sus respuestas:

   a) ¿$A \setminus B = B \setminus A$, para cualquier par de conjuntos A y B?
   b) ¿Qué debe suceder para que $A \setminus B = B \setminus A$?

8. Sean A y B conjuntos cualquiera y considere la siguiente proposición: si $B \subseteq A$, entonces $(A \setminus B) \cup B = A$.

   a) ¿La proposición es verdadera? Justifique su respuesta.
   b) ¿La proposición recíproca es verdadera? Justifique su respuesta.

9. Demuestre que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

10. Demuestre del Teorema 10 al Teorema 19.

11. Sean A, B y C conjuntos. Suponga que $x \in A \cup (B \cup C)$ y que $x \notin A \cap (B \cap C)$. ¿Máximo cuántos de los conjuntos A, B y C tienen a x como elemento?

12. ¿Puede existir alguna relación de inclusión entre dos conjuntos A y B si se tiene que $A \cap B = \emptyset$?

13. Considere a U como conjunto universal y sean $A, B \subseteq U$. Si $A \subseteq B$, ¿qué relación hay entre A^c y B^c?

14. Sean A, B y C conjuntos tales que $C \subseteq (B \setminus A)$. ¿Cuál es la relación entre C y A? ¿Cuál es la relación entre C y B?

15. Demuestre o presente un contraejemplo de las siguientes afirmaciones:

    a) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.
    b) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.
    c) $A \cup B = (A \backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash A)$.
    d) $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$.
    e) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
    f) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
    g) $A \subseteq \mathcal{P}(A)$.
    h) $(A \backslash B) \cap (B \backslash A) = \emptyset$.
    i) Si $A \cup B = A \cap B$, entonces $A = B$.
    j) $A \backslash B = \emptyset$ si y solo si $A \subseteq B$.
    k) $(A \backslash B) \cap B = B$.
    l) Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup C \subseteq B \cup C$.

16. Sean A y B conjuntos. La *diferencia simétrica* de A y B, denotada $A \triangle B$, es el conjunto $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Demuestre o refute las siguientes proposiciones:

    a) $A \triangle \emptyset = A$.
    b) $A \triangle (B \cup C) = (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$.
    c) $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

Capítulo 4

Relaciones

4.1. Pares ordenados y producto cartesiano

"Los matemáticos no estudian objetos, sino las relaciones entre objetos" (Henri Poincaré).

Para iniciar, si se revisa el significado de la palabra *relación* en el diccionario de la lengua española, de la real academia española, se encuentran entre las posibles acepciones que las siguientes corresponden a una misma clase, las cuales están asociadas al concepto matemático que se busca:

1. Conexión, correspondencia de algo con otra cosa.

2. Conexión, correspondencia, trato, comunicación de alguien con otra persona.

3. (Gramática) Conexión o enlace entre dos términos de una misma oración.

En general, se observa que una relación es una conexión o correspondencia entre objetos de algún tipo y en algún contexto. Algunos ejemplos de relación son los siguientes:

Ejemplo 1.

1. La persona A es el padre de la persona B.

2. La ciudad x es la capital del país y.

En el caso de las matemáticas, el diccionario presenta el siguiente significado:

(Matemática) Resultado de comparar dos cantidades expresadas en números.

En el caso de las matemáticas, y contrario al significado anterior, las relaciones en matemáticas van mucho más allá de solamente comparar números. Realmente las relaciones se encuentran en todas las estructuras matemáticas y mucho de la teoría matemática se desarrolla en el contexto de clasificar estructuras a partir de relaciones entre ellas, o de identificar objetos de la misma naturaleza matemática estableciendo relaciones de similitud entre ellos.

Ejemplo 2.

1. El número entero n *es un divisor de* un número entero m si es posible hallar un entero k tal que $m = nk$.

2. El triángulo ABC *es congruente con* el triángulo DEF si sus lados y ángulos correspondientes tienen todos las mismas medidas.

3. Los conjuntos finitos A y B *son equipotentes* si tienen la misma cantidad de elementos.

4. La recta l *es paralela a* la recta t si no tienen puntos en común y l no coincide con t.

5. El conjunto A *es un elemento* del conjunto $\mathcal{P}(A)$.

6. El número natural n es menor que el número natural m, si existe un número natural $k \neq 0$ tal que $m = n + k$.

La cita de Henri Poincaré, uno de los matemáticos más importantes de la historia, al inicio de este capítulo identifica uno de los objetivos centrales del estudio de las matemáticas, y por lo tanto uno de los principales aspectos del quehacer de los matemáticos. Establecer qué significa la expresión *relaciones entre objetos* conduce a introducir una de las más importantes y esenciales definiciones en matemáticas, la definición de relación, que a su vez permite definir el concepto de función, que son los temas de estudio de este capítulo.

Teniendo en cuenta los ejemplos desarrollados hasta ahora, es claro que las relaciones dependen en muchos casos del orden en que se enuncien, ya que al cambiarlo no siempre se satisface la relación propuesta. Así, en las relaciones el orden en que se enuncien los objetos relacionados es muy importante. Un ejemplo natural se da en las relaciones de parentesco: decir que "A es el padre de B" es diferente a decir que "B es el padre de A". Es claro que si una de las afirmaciones anteriores es cierta, la otra no lo es.

Intuitivamente, lo que se ha propuesto hasta ahora conduce a que una relación se establece entre dos objetos de algún tipo y que el orden en que se presenta la relación es fundamental. Así, es necesario en principio definir el concepto de par ordenado, y teniendo en cuenta que los conjuntos $\{x, y\}$ y $\{y, x\}$ son iguales, es importante establecer la pareja relacionada de manera que se defina claramente el orden en que se presenta. La anterior cuestión fue resuelta, de manera independiente y en términos conjuntistas, por Norbert Wiener (ver [NW]) y Kazimierz Kuratowski (ver [KK]).

Definición 24. Un *par ordenado* de objetos x y y, con x en primer lugar y y en el segundo lugar, se define como el conjunto $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, y se denota por (x, y). En el par ordenado (x, y), se denomina *primera componente* al elemento x y *segunda componente* al elemento y. En general, a las componentes de un par ordenado se les denominan *coordenadas*.

De la anterior definición se sigue la propiedad fundamental de los pares ordenados:

Proposición 18. *Dos pares ordenados* (x, y) *y* (z, w) *son* iguales *si y solo si* $x = z$ *y* $y = w$.

Demostración. *Se supone inicialmente que las parejas ordenas* (x, y) *y* (z, w) *son iguales. Para los elementos* x *y* y *se tienen dos posibilidades, por lo cual es necesario hacer disyunción de casos:*

1. *Si* $x = y$, *entonces se tiene que* $\{x, y\} = \{x, x\} = \{x\}$, *y por lo tanto* $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}, \{x\}\} = \{\{x\}\}$. *De la igualdad entre las parejas ordenadas se tiene que*

$$\{\{x\}\} = (x, y) = (z, w) = \{\{z\}, \{z, w\}\}.$$

   Por la igualdad entre conjuntos se tiene que $\{x\} = \{z\} = \{z, w\}$, *y por lo tanto* $x = z$ *y* $x = w$. *Como* $x = y$, *se concluye que* $x = z$ *y* $y = w$.

2. *Si* $x \neq y$, *por hipótesis y la definición de par ordenado, se tiene que* $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, w\}\}$. *Como* $\{z\} \neq \{x, y\}$, *en caso contrario se tendría que* $z = x = y$, *lo cual no es posible por hipótesis, entonces por la igualdad entre conjuntos* $\{x\} = \{z\}$ *y* $\{x, y\} = \{z, w\}$. *De lo anterior se concluye que* $x = z$ *y* $y = w$.

Para probar el reciproco, se supone que $x = z$ y $y = w$, luego por la definición de par ordenado y la igualdad entre conjuntos se tienen que

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, w\}\} = (z, w).$$

Corolario 1. *Si $x \neq y$, entonces $(x, y) \neq (y, x)$.*

Observación 1. *En la definición de un conjunto no se repiten elementos, es decir no existe el conjunto $\{x, x\}$, lo que existe es el conjunto $\{x\}$. En el caso de pares ordenadas, el par (x, x) esta bien definido y lo que sucede es que el primer elemento coincide con el segundo. En este caso la pareja (x, x)corresponde al conjunto $\{\{x\}\}$.*

Dado que las parejas ordenadas son formadas por objetos, estos deben pertenecer a algún conjunto referencial y las componentes de la pareja ordenada no son necesariamente elementos del mismo conjunto.

Considerando la relación *la ciudad x es la capital del país y*, se tiene la pareja ordenada (x, y). En este caso x es un elemento de las ciudades del mundo, mientras que y es un elemento en el conjunto de los países del mundo. Claramente, la pareja ordenada esta bien definida, pero los conjuntos no son los mismos. Así, dados dos conjuntos se puede construir un nuevo conjunto, el cual tiene como elementos las posibles parejas ordenadas construidas con elementos de dichos conjuntos.

Teniendo en cuenta que si $x \in A$ y $y \in B$, entonces se tiene que $\{x\} \subseteq A \cup B$ y $\{x, y\} \subseteq A \cup B$, y por lo tanto $\{x\}, \{x, y\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$ o equivalentemente $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. Lo anterior indica que las parejas ordenadas son elementos del conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$, lo que permite introducir la siguiente definición.

Definición 25. (Producto cartesiano) Dados dos conjuntos arbitrarios A y B, el *producto* (o *producto cartesiano*) de A y B, el cual se denota $A \times B$, se define como el conjunto de todas las parejas ordenadas con primera componente en A y segunda componente en B. Es decir

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \ \wedge y \in B\}.$$

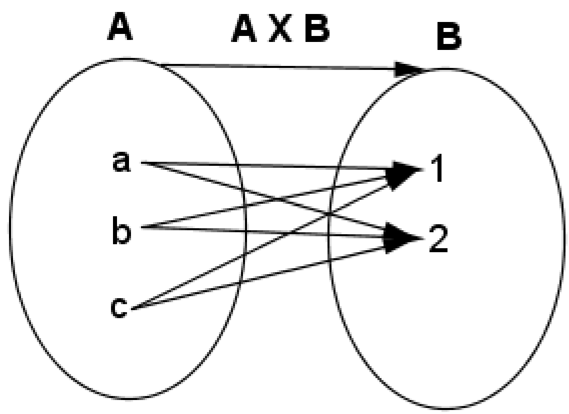
De la anterior definición, se tiene que $A \times B \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. Más aún, formalmente se tiene que el producto cartesiano de los conjuntos A y B es el conjunto

$$A \times B = \{Z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \, : \, \exists x \in A \, \exists y \in B \, (Z = \{\{x\}, \{x, y\}\})\}.$$

Ejemplo 3. Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2\}$, para formar el producto cartesiano se debe por cada elemento de A tomar un elemento de B y formar la pareja ordenada, así

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

En este caso A tiene 3 elementos, B tiene 2 elementos y $A \times B$ tiene $3 * 2 = 6$ elementos. Gráficamente:



Observación 2. *El producto cartesiano $A \times A$ se denota por A^2. Por ejemplo, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$ (conjunto de puntos del plano cartesiano).*

”Los pares ordenados de números reales se denominan coordenadas cartesianas. *Fueron introducidas por René Descartes a principios del siglo XVII, y se denominan así en su honor (teniendo en cuenta que el nombre Descartes se latinizó con el nombre Cartesius). De este orígen también se deriva el nombre de* produto cartesiano..*El conjunto de los pares ordenados de números reales, es decir $\mathbb{R}^2$, se grafica por medio de dos rectas perpendiculares, y dicha representación es conocida como plano cartesiano.*

Si un conjunto A tiene n elementos y un conjunto B tiene m elementos, se puede determinar cuantos elementos tiene el producto cartesiano $A \times B$. Para cada elemento $a \in A$, se pueden formar m parejas ordenadas con primera componente a, ya que B tiene m elementos. Como esto sucede para cada elemento de A, entonces hay n posibles primeras componentes, y por lo tanto $n * m$ posibles parejas, así que $A \times B$ tiene en total $n * m$ elementos.

Gráficamente se puede ver el producto cartesiano $A \times B$ por medio de una cuadrícula (o *forma tabular*), en la que las entradas horizontales (las filas) están los elementos de A, en la parte vertical (las columnas) están los elementos de B y en el resto de la cuadrícula se escriben las parejas ordenas acorde a sus componentes. Lo anterior se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4. Dados los conjuntos $A = \{\alpha,\ \beta\}$ y $B = \{a, e, i, o, u\}$, se tiene que el producto $A \times B$ se representa por

	a	e	i	o	u
α	(α, a)	(α, e)	(α, i)	(α, o)	(α, u)
β	(β, a)	(β, e)	(β, i)	(β, o)	(β, u)

El producto A^2 se representa como

	α	β
α	(α, α)	(α, β)
β	(β, α)	(β, β)

El concepto de producto cartesiano es muy importante y utilizado en matemáticas. Algunos ejemplos conocidos, varios de los cuales no siempre son identificados de esta manera en la literatura matemática, serán presentados a continuación.

Ejemplo 5.

1. Al momento de determinar la probabilidad de sacar dos bolas del mismo color de una bolsa que contiene 6 bolas, las cuales corresponden a dos azules, dos blancas y dos rojas, es necesario determinar las posibles parejas. Si asignamos la letra a al color azul, la letra b al color blanco y la letra r al color rojo, se tiene que las posibles combinaciones corresponden al producto cartesiano del conjunto $\{a, b, r\}$ consigo mismo:

$$A^2 = A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, r), (b, a), (b, b), (b, r), (r, a), (r, b), (r, r)\}.$$

2. El conjunto de los números racionales, como subconjunto del conjunto de los números reales, se definen como las fracciones formadas por un número entero (el numerador) y un número entero diferente de cero (el denominador). Es decir $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0\}$, cuyos elementos corresponden intuitivamente a la noción de razón. Siguiendo la definición anterior, se puede ver que realmente los números racionales corresponden a parejas ordenadas y que si consideramos al conjunto $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, se tiene que el conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$ se puede hacer corresponder

con el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, asociando a la pareja ordenada $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ el racional $\frac{m}{n}$.

La igualdad entre dos números racionales se define posteriormente y corresponde a lo que se conoce como una relación de equivalencia (ver definición 33). De manera similar, y usando el orden en los números naturales, se puede definir el conjunto de los números enteros como el producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y a la pareja ordenada (m, n) se le asocia el entero $m - n$.

Algunas propiedades del producto cartesiano y su relación con operaciones entre conjuntos son presentadas a continuación.

Teorema 20. *Si A, B, C, D y E son conjuntos arbitrarios, se tiene que*

1. $A \times B = \emptyset$ *si y solo si* $A = \emptyset$ *o* $B = \emptyset$.
2. *Si A y B son conjuntos no vacíos,* $A \times B = B \times A$ *si y solo si* $A = B$.
3. *Si A y B son conjuntos no vacíos,* $A \times B = D \times E$ *si y solo si* $A = D$ *y* $B = E$.
4. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
5. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
6. $(A \cup B) \times (C \cup D) \subseteq (A \times C) \cup (B \times D)$.
7. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.
8. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.
9. *Si* $B \subseteq C$, *entonces* $A \times B \subseteq A \times C$.

Demostración. *Se presentan algunas pruebas y las demás se proponen como ejercicio al lector.*

1 *Usando el método de demostración por contrarreciproco y equivalencias, se tiene que* $A \neq \emptyset$ *y* $B \neq \emptyset$ *si y solo si existen* $x \in A$ *y* $y \in B$, *lo que es equivalente a que existe la pareja* $(x, y) \in A \times B$, *es decir si y solo si* $A \times B \neq \emptyset$.

2 *Sean A y B conjuntos no vacíos tales que $A \times B = B \times A$. Dado $x \in A$ arbitrario, como $B \neq \emptyset$, existe $y \in B$, y por lo tanto la pareja $(x, y) \in A \times B$. Como $A \times B = B \times A$, se tiene que $(x, y) \in B \times A$ y por lo tanto $x \in B$. Así, queda demostrado que $A \subseteq B$. De manera análoga se muestra que $B \subseteq A$. De lo anterior, se concluye que $A = B$.*

De otro lado, si se supone que $A = B$, entonces $A \times B = A \times A = B \times A$.

4 *Como $(x, y) \in A \times (B \cup C)$ si y solo si $x \in A$ y $y \in B \cup C$, es decir que $x \in A$, y $y \in B$ o $y \in C$, lo que es equivalente a que $(x, y) \in A \times B$ o $(x, y) \in A \times C$, o sea que $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. De las equivalencias anteriores, se tiene que $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.*

9 *Se supone que $A \subseteq C$, y sea $(x, y) \in A \times B$ arbitrario. De la definición de pareja ordenada se tiene que $x \in A$ y $y \in B$, y por lo tanto $x \in A$ y $y \in C$, es decir $(x, y) \in A \times C$. De lo anterior se sigue que $A \times B \subseteq A \times C$.*

4.2. Relaciones

Retornando al ejemplo de las capitales de países, si se considera el conjunto C como el de las ciudades del mundo y el conjunto P como el de todos los paises del mundo, es claro que los elementos (Madrid, Japón), (Tokio, Colombia), (Bogotá, España) y (Medellín, Colombia) pertenecen a $C \times P$, pero es claro que ni Madrid es la capital de Japón, ni Tokio es la capital de Colombia, y menos aún que Bogotá es la capital de España o que Medellín es la capital de Colombia, aunque en este último ejemplo Medellín es una ciudad de Colombia. Lo anterior quiere decir que los elementos en el producto cartesiano no necesariamente están relacionados por la correspondencia *ser capital de*, ni *ser ciudad de*, ni muchas otras asociaciones que podrían definirse entre ciudades y países.

De otro lado, las parejas (Madrid, España), (Tokio, Japón) y (Bogotá, Colombia) pertenecen a $C \times P$ y además satisfacen la correspondencia *ser capital de*, es decir el primer elemento en la pareja ordenada tiene conexión con el segundo elemento por la correspondencia *la ciudad x es la capital del país y*.

De lo anterior se establece, informalmente, que una relación puede verse como un subconjunto de un producto cartesiano de conjuntos, en el cual las componentes poseen alguna propiedad que establece una correspondencia entre las primeras y las segundas componentes. Así, si en el ejemplo se denota la relación *ser capital de* por R, entonces la proposición *Tokio es la capital de*

Japón se puede escribir como tRj, donde t y j representan a Tokio y Japón, respectivamente. En este caso, se puede escribir $(t, j) \in R$, y por lo tanto $(t, j) \in C \times P$. También podría expresarse la relación en términos de las parejas para las cuales la fórmula proposicional $P(x, y)$*: la ciudad x es la capital del país y* es válida.

Lo anterior permite inferir que para definir una relación en principio sería necesario dos conjuntos referenciales y algún tipo de conexión entre elementos del primer conjunto y los elementos del segundo conjunto, por medio de alguna fórmula proposicional en dos variables que permita construir los pares ordenados correspondientes. Aunque en general no es necesario tener los dos conjuntos y alguna fórmula proposicional, situación que se desarrolla en textos formales de teoría de conjuntos, en el presente texto se consideraran solamente relaciones asociadas a dos conjuntos referenciales, sin que necesariamente se tenga una fórmula proposicional. Así, se puede precisar la definición de relación en términos matemáticos entre dos conjuntos de la siguiente manera.

Definición 26. Dados dos conjuntos A y B, *una relación entre A y B, o de A en B*, es un conjunto de parejas ordenadas R tal que $R \subseteq A \times B$. En el caso particular en que $A = B$, se dice que R es una relación en A.

Observación 3. *En términos más generales, una relación puede ser definida como una tripleta de conjuntos (A, B, R) tales que $R \subseteq A \times B$. La pertenencia $(x, y) \in R$ se les denota xRy, para enfatizar que al elemento $x \in A$ le corresponde por medio de la conexión determinada por la relación R el elemento $y \in B$. Si existe una fórmula proposicional $P(x, y)$ que establezca cómo se forman las parejas ordenadas, entonces la relación se puede describir en términos de conjuntos como $R = \{(x, y) \in A \times B \, : \, P(x, y)\}$.*

Algunos ejemplos de relaciones son:

Ejemplo 6.

1. *La relación vacía:* el conjunto vació define una relación entre cualquier par de conjuntos A y B, ya que $\emptyset \subseteq A \times B$. La relación vacía establece que ningún elemento de A está relacionado con ningún elemento de B, es decir que $(x, y) \notin \emptyset$, para todo $x \in A$ y todo $y \in B$.

2. *La relación de divisibilidad en $\mathbb{Z}$*: como el símbolo de divisibilidad es $|$, entonces se tiene que la relación está definida como

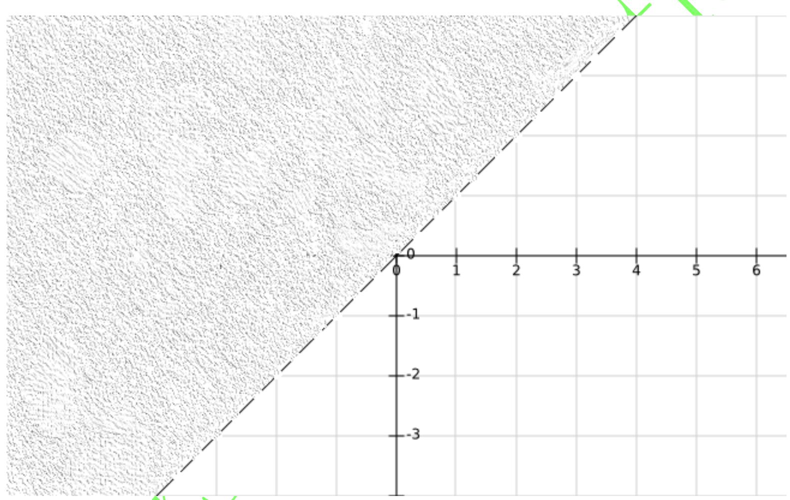
$$| = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z}(m = nk)\}.$$

En este ejemplo se cumple que $(n, 0) \in |$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y en particular que $0|0$. Además, se tiene que $(0, n) \notin |$, para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, y por lo tanto $| \neq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

3. *La relación "menor que" en* $\mathbb{R}$*:* ésta es la relación de orden entre números reales y puede ser definida por:

$$< := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y - x \in \mathbb{R}^+\}.$$

Gráficamente la relación $<$ corresponde a la parte sombreada sobre la recta punteada (sin incluir la recta):

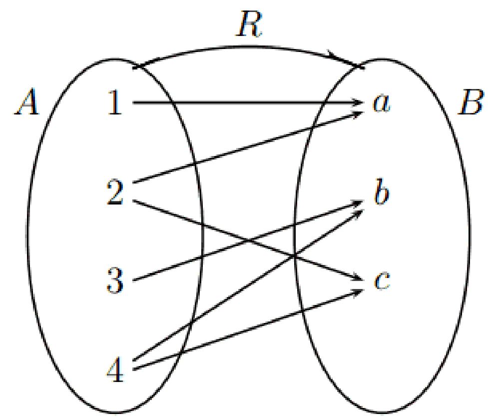


4. *La relación de inclusión sobre* X*:* dado un conjunto arbitrario X, sobre el conjunto de partes de X se define la relación de inclusión

$$\mathcal{I}_X = \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) : A \subseteq B\}.$$

Esta relación se suele denotar por el símbolo de contención restringido al conjunto X, es decir $\mathcal{I}_X \ = \subseteq_X$. Como $\emptyset, X \in \mathcal{P}(X)$ y para todo $A \in \mathcal{P}(X)$ se tiene que $\emptyset \subseteq A \subseteq X$, entonces $(\emptyset, A), (A, X) \in \mathcal{I}_X$, para todo $A \in \mathcal{P}(X)$.

5. Dados $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c\}$, el conjunto de parejas ordenadas $R = \{(1, a), (2, a), (2, c), (3, b), (4, b), (4, c)\}$ es una relación de A en B. Gráficamente:

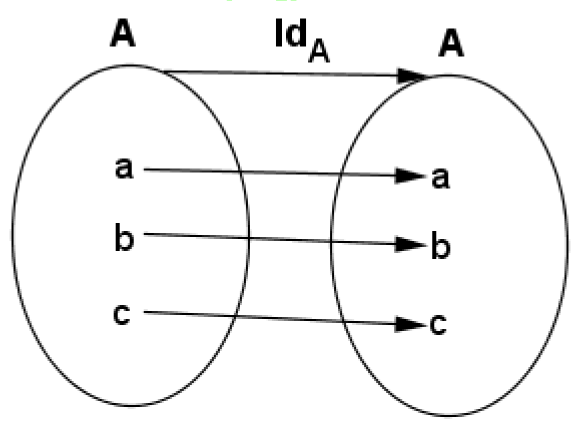


Una relación importante en matemáticas es la siguiente:

Definición 27. Dado un conjunto A, la relación *identidad* en A, se define por:

$$Id_A = \{(x, x) : x \in A\}.$$

Ejemplo 7. Si $A = \{a, b, c\}$, entonces $Id_A = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$. Gráficamente:



Observación 4. *Una forma de definir o representar relaciones de un conjunto finito A en un conjunto finito B es por medio de la forma tabular usando los digitos 0 y 1 en lugar de las parejas ordenadas de la siguiente manera:*

1. *En la columna vertical más a la izquierda de la tabla se listan los elementos de A (en la columna inicial), y en la fila horizontal superior se listan los elementos de B.*

2. *Para el par ordenado $(a, b) \in A \times B$ que se ubica en la fila correspondiente al elemento $a \in A$ y en la columna correspondiente al elemento $b \in B$ (en el cruce de la horizontal de a con la vertical de b) se coloca el número 1 si $(a, b) \in R$, en caso contrario se coloca el número 0. Lo anterior se hace para todos los pares ordenados.*

Ejemplo 8. Si $A = \{\alpha, \beta\}$ y $B = \{a, e, i, o, u\}$ y la relación R de A en B está dada por

$$R = \{(\alpha, a), (\alpha, e), (\alpha, o), (\beta, a), (\beta, i), (\beta, o)\},$$

entonces al relación queda representada tabularmente por medio de la tabla

R	a	e	i	o	u
α	1	1	0	1	0
β	1	0	1	0	1

De otro lado, si la relación S está definida tabularmente por

S	α	β
a	0	1
e	1	1
i	1	0
o	0	1
u	0	0

se tiene que $S = \{(a, \beta), (e, \alpha), (e, \beta), (i, \alpha), (o, \beta)\}$ es una relación de B en A.

Si se eliminan la columna correspondiente a los elementos de A y la fila correspondiente a los elementos de B, se obtiene una **matriz** de ceros y unos (binaria) que representa la relación. Esta forma de representar relaciones permite utilizar técnicas del álgebra lineal y métodos computacionales para estudiar propiedades de las relaciones y realizar algunas operaciones entre relaciones de manera más simple. El manejo matricial corresponde a cursos de análisis matricial y álgebra lineal.

De manera similar las relaciones se representan gráficamente por medio de los llamados grafos dirigidos o digrafos, teoría que se desarrolla normalmente en un curso de matemáticas discretas.

4.2.1. Dominio y rango de relaciones

Dado que una relación es un subconjunto del producto cartesiano de dos conjuntos, se pueden construir dos conjuntos a partir de la relación de manera única. Estos dos conjuntos, que son completamente definidos por la relación, son fundamentales en el estudio de relaciones, y más importante aún en la noción de función.

Definición 28. Sea R una relación de A en B.

1. Si $(x, y) \in R$, se dice que y es la *imagen* de x en R, y que x es la *preimagen* de y en R.

2. El *dominio* de R, denotado $\mathrm{Dom}(R)$, es el conjunto de las *preimágenes* de R, es decir:

$$\mathrm{Dom}(R) = \{x \in A : \exists y \in B\ (xRy)\} = \{x \in A : \exists y \in B\,((x, y) \in R)\}.$$

3. El *rango* de R, denotado $\mathrm{Ran}(R)$, es el conjunto de las *imágenes* de R, es decir:

$$\mathrm{Ran}(R) = \{y \in B : \exists x \in A(xRy)\} = \{y \in B \mid \exists x \in A\,((x, y) \in R)\}.$$

Por la definición anterior, se tiene que el dominio de R es *el conjunto de las primeras coordenadas de los pares ordenados en* R, y el rango de R es *el conjunto de las segundas coordenadas de los pares ordenados en* R. Así, por definición si $R \subseteq A \times B$, entonces $Dom(R) \subseteq A$, $Ran(R) \subseteq B$ y $R \subseteq Dom(R) \times Ran(R)$, pero no necesariamente se dan las igualdades.

Ejemplo 9. Si se denota por L el conjunto de las letras del abecedario, y se considera la relación $R = \{(1, a), (2, a), (2, c), (3, b), (4, b), (4, c)\}$ de $\mathbb{N}$ en L, entonces:

1. Como $(2, c) \in R$, se tiene que c es *imagen* de 2 en R, y que 2 es *preimagen* de c en R.

2. De la definición de R se tiene que a es *imagen* de 1 y de 2, y que 4 es *preimagen* de b y de c.

3. El dominio de R es: $\mathrm{Dom}(R) = \{1, 2, 3, 4\}$.

4. El rango de R es: $\mathrm{Ran}(R) = \{a, b, c\}$.

5. Como $(3, a) \notin R$, entonces $R \neq Dom(R) \times Ran(R)$.

Ejemplo 10. Para $F = \{(x, y) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times \mathbb{Q} : y = \frac{1}{x}\}$.

1. Como $(7, \frac{1}{7}) \in F$, se tiene que $\frac{1}{7}$ es *imagen* de 7 en F, y que 7 es *preimagen* de $\frac{1}{7}$ en F.

2. El dominio de F es: $\mathrm{Dom}(F) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

3. El rango de F es: $\mathrm{Ran}(F) = \{\frac{1}{x} : \ x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

En múltiples situaciones es necesario conocer o establecer cuáles elementos están relacionados para algunos subconjuntos particulares de los conjuntos que definen la relación.

Definición 29. Sea R una relación de A en B. Para $X \subseteq A$ y $Y \subseteq B$, definimos los conjuntos:

1. La *imagen de X bajo R* como:

$$R[X] = \{y : \exists x \in X\, ((x, y) \in R)\}.$$

2. La *preimagen de Y o la imagen inversa de Y bajo R*, como:

$$R^{-1}[Y] = \{x : \exists y \in Y\, ((x, y) \in R)\}.$$

De la definición anterior se sigue que $R[A] = Ran(R)$ y que $R^{-1}[B] = Ran(R)$.

Ejemplo 11. Para $R = \{(1, a), (2, a), (2, c), (3, b), (4, b), (4, c)\} \subseteq \mathbb{N} \times L$, se tiene que

1. Si en el conjunto de los números naturales se denota por $P_{\mathbb{N}}$ al conjunto de los números naturales pares y por $I_{\mathbb{N}}$ al conjunto de los números naturales impares, se tiene que $R[P_{\mathbb{N}}] = \{a, c, b\}$ y $R[I_{\mathbb{N}}] = \{a, b\}$.

2. Si V es el conjunto de las vocales, entonces $R^{-1}[V] = \{1, 2\}$, ya que las únicas parejas ordenadas en R con segunda componente una vocal son $(1, a)$ y $(2, a)$. De igual manera, si C denota el conjunto de las consonantes se tiene que $R^{-1}[C] = \{2, 3, 4\}$, y $R^{-1}(\{b\}) = \{3, 4\}$.

Algunas propiedades de la imagen directa y la imagen inversa de una relación con respecto a un conjunto se dan a continuación.

Teorema 21. *Sea R una relación de A en B, y sean $X \subseteq A$ y $Y \subseteq B$.*

1. *Si $X \subseteq Dom(R)$, entonces $X \subseteq R^{-1}[R[X]]$.*
2. *Si $Y \subseteq Ran(R)$, entonces $Y \subseteq R[R^{-1}[Y]]$.*
3. *$R[Dom(R)] = Ran(R)$.*
4. *$R^{-1}[Ran(R)] = Dom(R)$.*

Demostración. *Se demuestran los items 2 y 3, los otros dos se dejan como ejercicio al lector.*

2. *Si $Y \subseteq Ran(R)$, para $y \in Y$ existe $x \in Dom(R)$ tal que $(x, y) \in R$, y por la definición de $R^{-1}[Y]$ se tiene que $x \in R^{-1}[Y]$. Dado que $(x, y) \in R$ y $x \in R^{-1}[Y]$, se sigue que $y \in R[R^{-1}[Y]]$.*

3. *Si $b \in R[Dom(R)]$, luego existe $a \in Dom(R)$ tal que $(a, b) \in R$. Por lo tanto, $b \in Ran(R)$. Dado que $b \in R[Dom(R)]$ es arbitrario, se concluye que $R[Dom(R)] \subseteq Ran(R)$.*

   Para probar la otra inclusión, sea $y \in Ran(R)$ arbitrario. De la definición de rango de una relación, se sigue que existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in R$, de donde $x \in Dom(R)$. Por lo anterior, se concluye que $y \in R[Dom(R)]$, y por lo tanto que $Ran(R) \subseteq R[Dom(R)]$.

   Por la doble inclusión se tiene que $R^{-1}[Ran(R)] = Dom(R)$.

4.2.2. Relaciones inversas

Ahora se formula la definición de relación inversa.

Definición 30. Dada una relación R, la *relación inversa* de R, denotada R^{-1}, es la relación que se obtiene al invertir el orden de los elementos en todos los pares ordenados de R, es decir

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}.$$

Si R es una relación de A en B, entonces la relación inversa R^{-1} es una relación de B en A, dado que invierte el orden en las parejas. Es decir que si $R \subseteq A \times B$, entonces $R^{-1} \subseteq B \times A$. Más aún, de la definición anterior se tiene que $(x, y) \in R$ si y solo si $(y, x) \in R^{-1}$.

Ejemplo 12. 1. La relación inversa de $\leq$ es la relación $\geq$, es decir $\leq^{-1} = \geq$ (demostrarlo).

2. La relación inversa de *ser divisor de* en el conjunto de los números naturales es *ser múltiplo de*. En efecto, para $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene que $(n, m) \in |$, o sea $n|m$, si y solo si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = nk$, es decir si y solo si m es un múltiplo de n.

3. Si $R = \{(1, a), (2, a), (2, c), (3, b), (4, b), (4, c)\}$, entonces la relación inversa es $R^{-1} = \{(a, 1), (a, 2), (c, 2), (b, 3), (b, 4), (c, 4)\}$.

4. Si $F = \{(x, \frac{1}{x}) : x \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})\}$, entonces $F^{-1} = \{(\frac{1}{x}, x) : x \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})\}$

En el ítem 3, $\text{Dom}(R^{-1}) = \{a, b, c\}$ y $\text{Ran}(R^{-1}) = \{1, 2, 3, 4\}$, que corresponden al rango y al dominio de R, respectivamente. En general, el dominio y el rango de una relación inversa quedan descritos en el siguiente teorema.

Teorema 22. *Sea R una relación de A en B. Entonces*

1. *$Dom(R^{-1}) = Ran(R)$.*

2. *$Ran(R^{-1}) = Dom(R)$.*

3. *$(R^{-1})^{-1} = R$.*

Demostración. *La definición de relación inversa y el hecho de que R es una relación de A en B, implican que:*

1. *Por equivalencias, $y \in Dom(R^{-1})$ si y solo si existe $x \in A$ tal que $(y, x) \in R^{-1}$, es decir si y solo si existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in R$, lo que es equivalente a que $y \in Ran(R)$.*

2. *La prueba es análoga a la anterior.*

3. *Como $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$, entonces*

$$\left(R^{-1}\right)^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R^{-1}\} = \{(x, y) \mid (x, y) \in R\} = R.$$

La relación inversa no necesariamente se describe invirtiendo las componentes de la relación original, es posible que esté descrita de alguna manera diferente.

Ejemplo 13. Dada la relación $\mathcal{C} = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$, se tiene que la relación inversa esta determinada por las parejas (x^2, x), para todo $x \in \mathbb{R}$, pero también corresponden a la relación

$$\mathcal{C}^{-1} = \left\{(y, x) \in \left(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}\right) \times \mathbb{R} : x = \sqrt{y} \ \vee \ x = -\sqrt{y}\right\}.$$

Aunque esta segunda forma de describir la relación inversa de $\mathcal{C}$ en principio se ve más compleja, es de mayor utilidad cuando se aborden las funciones en el capítulo siguiente.

4.2.3. Composición de relaciones

Dado que una relación es un conjunto de parejas ordenadas, entonces dadas dos relaciones R y S se puede construir el producto cartesiano de ellas, es decir $R \times S$, y en este caso cada componente de las parejas ordenadas en $R \times S$ es una pareja ordenada, lo que es equivalente a que $((x,y),(a,b)) \in R \times S$ si y solo si $(x,y) \in R$ y $(a,b) \in S$.

Ejemplo 14. Dadas las relaciones $M = \{(1,a),(3,b)\}$, de los números naturales en el abecedario, y $N = \{(1,1),(9,\frac{1}{9})\}$, de los dígitos en los números racionales, se tiene que la relación $M \times N$ es

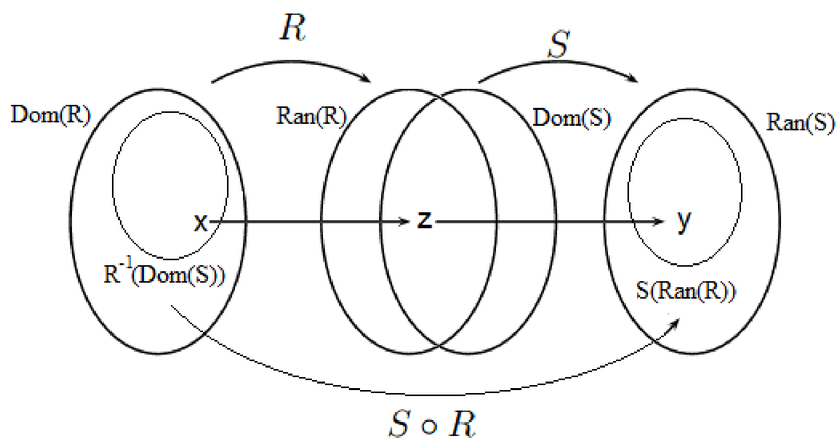
$$M \times N = \left\{((1,a),(1,1)),((1,a),(9,\frac{1}{9})),((3,b),(1,1)),((3,b),(9,\frac{1}{9}))\right\}.$$

En está parte del capítulo punto la cuestión que se estudia es cómo definir, a partir de dos relaciones, una nueva relación que no sea el producto cartesiano de ellas. La respuesta a esta cuestión es uno de los principales tópicos de estudio en matemáticas.

Si regresamos a la relación P, donde $(A,B) \in P$ si "A es el padre de B", se tiene que si $(A,B) \in P$ y $(B,C) \in P$, entonces entre A y C se tiene la relación "A es el abuelo de C", es decir una nueva relación. Para que la relación ser abuelo se pueda dar entre A y C, es necesario que exista B tal que "A es el padre de B" y "B es el padre de C". El tipo de relaciones a las que pertenece la relación ser abuelo de se definen a continuación.

Definición 31. Sean R una relación de A en B y S una relación de C en D. La *relación compuesta* de R con S o la *composición* de R y S, denotada $S \circ R$, es la relación de A en D definida por:

$$S \circ R = \{(x,y) \in A \times D : \exists z \in B \cap C\,((x,z) \in R \ \wedge\ (z,y) \in S)\}.$$



La composición de R y S es una relación de A en D, ya que $S \circ R \subseteq A \times D$. De igual manera, de la definición anterior se sigue que $Dom(S \circ R) \subseteq Dom(R)$ y $Ran(S \circ R) \subseteq Ran(S)$, pero en general no se da la igualdad, como se verá en los ejemplos siguientes.

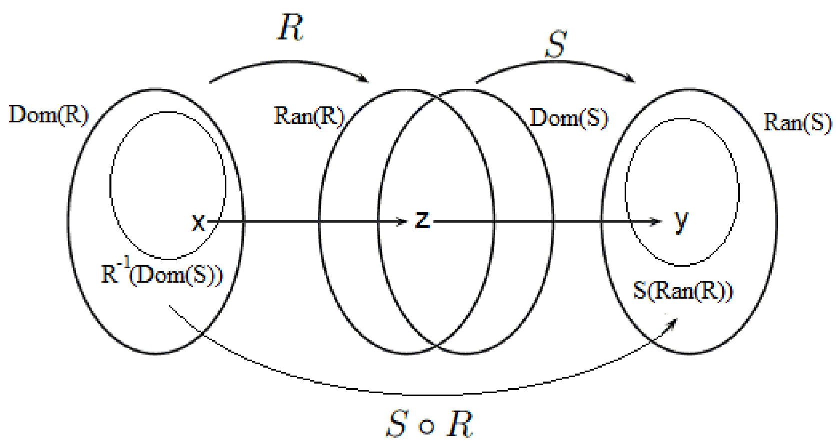
Además, si $B \cap C = \emptyset$, entonces $S \circ R = \emptyset$, es decir la composición es la relación vacía. Más aún, si $Ran(R) \cap Dom(S) = \emptyset$, entonces $S \circ R$ es la relación vacía.

La notación adoptada $S \circ R$ implica que la relación que actúa primero es la que está a la derecha, es decir R, y luego la de la izquierda, o sea S. Así, para determinar las parejas en la composición, es necesario determinar cuáles de las parejas ordenadas de R tienen como segunda componente la primera componente de algún par ordenado de S.

Ejemplo 15.

1. Si componemos las relación "ser padre de ..." consigo misma, se obtiene la relación "ser abuelo paterno de ...". Si se denota por P la relación ser padre de, es decir $(A, B) \in P$ si "A es el padre de B", y por R la relación ser abuelo paterno de, es decir $(G, B) \in R$ si "G es el abuelo paterno de B", se tiene que $P \circ P = R$.

   Ahora, como el dominio de P es todos los seres humanos que son padres, es decir un subconjunto propio del conjunto de los seres humanos, y todos lo seres humanos son hijos, se tiene que el rango de P son todos los seres humanos. Dado que existen familias donde ninguno de sus hijos tiene hijos, entonces sus respectivos padres no son abuelos, y por lo tanto $Dom(R) = Dom(P \circ P) \subseteq Dom(P)$.



2. Dadas las relaciones $R = \{(1,a),(2,a),(2,c),(3,b),(4,b),(4,c)\}$ y $S = \{(a,\Box),(b,\Diamond),(e,\bigcirc)\}$, se tiene que $S \circ R = \{(1,\Box),(2,\Box),(3,\Diamond),(4,\Diamond)\}$.

3. Si $R = \{(x,\frac{1}{x}) : x \in (\mathbb{N}\setminus\{0\})\}$ y $S = \{(y,y^2) : y \in \mathbb{R}\}$, entonces $S \circ R = \{(x,\frac{1}{x^2}) : x \in (\mathbb{N}\setminus\{0\})\}$.

El siguiente resultado especifica el dominio y el rango de una relación compuesta.

Teorema 23. *Sean R una relación de A en B y S una relación de C en D, entonces se tiene que*

$$Dom(S \circ R) = R^{-1}\left[Ran(R) \cap Dom(S)\right] = R^{-1}\left[Dom(S)\right]$$

y

$$Ran(S \circ R) = S\left(Ran(R) \cap Dom(S)\right) = S\left[Ran(R)\right].$$

El teorema anterior se representa gráficamente como:

Del anterior teorema y la definición de composición de relaciones, se concluye que la relación compuesta $S \circ R$ es no vacía si y solo si $Ran(R) \cap Dom(S) \neq \emptyset$.

Algunas propiedades de la composición de relaciones se presentan a continuación.

Teorema 24. *Sean A, B, C, D, E y F conjuntos arbitrarios, R una relación de A en B, S una relación de C en D y T una relación de E en F. Entonces*

1. $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

2. $I_B \circ R = R$ *y* $R \circ I_A = R$.

3. $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

4. $S \circ R = \emptyset$ *si y solo si* $Dom(S) \cap Ran(R) = \emptyset$.

4.2.4. Operaciones de conjuntos en relaciones

Dado que una relación R de A en B es un subconjunto de $A \times B$, si S es otra relación de A en B, existen los conjuntos $R \cup S$ y $R \cap S$, los cuales son subconjuntos de $A \times B$, es decir que $R \cup S$ y $R \cap S$ son relaciones de A en B. Más aún, el Teorema 20 permite generalizar la unión y la intersección de relaciones definidas no necesariamente sobre los mismos conjuntos, es decir a relaciones R de A en B y S de C en D.

Ejemplo 16. En el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ la relación *"mayor o igual que"* es equivalente a la unión de las relaciones *"mayor que"* e *"igual que"*, y esta última no es más que la relación identidad sobre $\mathbb{R}$, y por lo tanto se tiene que $\leq = > \cup Id_{\mathbb{R}}$.

De manera análoga, si se interceptan las relaciones *"mayor o igual que"* y *"menor o igual que"* en $\mathbb{R}$, se obtiene la relación *"igual que"*, es decir que $\leq \cap \geq = Id_{\mathbb{R}}$.

Teorema 25. *Dadas dos relaciones arbitrarias R de A en B, y S de C en D, se tiene que $R \cup S$ y $R \cap S$ son relaciones de $A \cup C$ en $B \cup D$ y de $A \cap C$ en $B \cap D$, respectivamente. Además,*

1. $Dom(R \cup S) = Dom(R) \cup Dom(S)$.

2. $Ran(R \cup S) = Ran(R) \cup Ran(S)$.

3. $Dom(R \cap S) \subseteq Dom(R) \cap Dom(S)$.

4. $Ran(R \cap S) \subseteq Ran(R) \cap Ran(S)$.

Demostración. *La demostración se sigue directamente de las definiciones respectivas. Queda como ejercicio hallar dos relaciones para las cuales no se dé la igualdad en el caso de las intersecciones.*

Dado que una relación R de A en B es un subconjunto de $A \times B$, se puede definir la relación complemento de R con respecto al conjunto $A \times B$ como $(A \times B) \setminus R$, la cual se denota $\not R$, es decir que

$$\not R = \{(a, b) \in A \times B : (a, b) \notin R\}.$$

Ejemplo 17. Para la relación *"menor que" en* $\mathbb{R}$, se tiene que la relación complemento corresponde a $\not<$, es decir no ser menor que. Por la propiedad de tricotomía en los números reales, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ si x no es menor que y $(x \not< y)$, entonces $x > y$ o $x = y$, lo que equivale a que $x \geq y$ y por lo tanto $\not< = \geq$.

Algunas relaciones pueden escribirse en términos de otras, como por ejemplo usando composición de una o varias relaciones, relaciones inversas y operaciones entre relaciones. El siguiente ejemplo ilustra lo expresado.

Ejemplo 18. Sea S la relación *ser primos por parte de padre con igual abuelo paterno* definida sobre H^2, donde H es el conjunto de los seres humanos. Escribir la relación S en términos de la relación P dada por ser padre de.

Solución. *Teniendo en cuenta que "A es primo por parte de padre de B" si y solo si el padre de A es hermano del padre de B, si se denota por α al padre de A y por β al padre de B, respectivamente, entonces (α, A), $(\beta, B) \in P$. Como α y β son hermanos, entonces son distintos, es decir que $(\alpha, \beta) \in \cancel{Id_H}$.*

Dado que α y β son hermanos con el mismo padre, existe $G \in H$ que es el padre de ambos y por lo tanto $(\alpha, G), (\beta, G) \in P^{-1}$. Así, usando relación inversa, composición de relaciones y la relación complemento de la identidad en los humanos, se concluye que $(\alpha, \beta) \in (P \circ P^{-1}) \cap \cancel{Id_H}$. En estos términos se mostró que la relación hermano por parte de padre queda definida por $(P \circ P^{-1}) \cap \cancel{Id_H}$.

Dado que A y B son primos paternos con igual abuelo paterno, entonces $(A, B) \in P \circ ((P \circ P^{-1}) \cap \cancel{Id_H}) \circ P^{-1}$, lo que determina que la relación ser primos por parte de padre es la relación $P \circ ((P \circ P^{-1}) \cap \cancel{Id_H}) \circ P^{-1}$.

4.3. Relaciones de equivalencia y de orden

En la mayoría de las áreas del saber humano existen tres principios que se aplican para organizar información o conjuntos de datos o elementos de trabajo, etcétera. En Biología por ejemplo, la Zoología clasifica especies en mamíferos, aves reptiles, etc; la química clasifica los elementos gases nobles, metales, no metales, metaloides, y actínidos. Otro elemento esencial es dividir la información o separar poblaciones o particionar conjuntos en subconjuntos más pequeñas y disjuntos permitan clasificar o dividir el trabajo o organizar algún tipo de estructura: Finalmente, un eje central en el desarrollo humano es jerarquizar o comparar datos, información, objetos, estructuras empresariales, especies, etcétera. En este sentido, existen tres principios básicos con respecto a estas ideas asociadas a las relaciones y los conjuntos: Las relaciones de quivalencia, las particiones y las relaciones de orden.

En el contexto matemático, por ejemplo, con respecto a los números enteros se puede decir que dos números tienen el mismo signo si su producto es positivo, lo que equivale a tener una propiedad común que permite clarificarlos por una propiedad común, es decir por una relación de equivalencia. De igual manera, los números enteros se clasifican por ejemplo en pares e impares, es decir se dividen en dos conjuntos disjuntos, y esta idea corresponde a lo que se denomina una partición. Finalmente, la otra noción común es compáralos acorde cuál es mayor que cuál, es decir usar desigualdades para ordenarlos en sentido de menor a mayor, que es lo que se conoce como una relación de orden.

Estos tres conceptos serán los que se desarrollan en esta parte, y como puede inferirse las relaciones de equivalencia estar muy relacionadas con las particiones, lo cuál en efecto se cumple y por lo tanto se desarrollan de manera conjunta y luego se desarrollan las ideas correspondientes a las relaciones de orden.

Para poder desarrollar estás ideas es necesario definir algunas de las principales propiedades que pueden tener las relaciones sobre un conjunto.

4.3.1. Tipos de relaciones

El tipo de características comunes entre objetos matemáticos generalmente corresponden a relaciones que permiten establecer correspondencias entre dichos objetos. Al momento de clasificar objetos, se tiene el conjunto formado por estos y se busca establecer una relación entre sus elementos, por lo cual definiremos las propiedades de relaciones sobre un conjunto A (es decir de A en A).

Definición 32. Dada una relación R sobre A, diremos que R es

1. **Reflexiva** (o refleja) si para todo $a \in A$, se tiene que aRa, es decir $(a, a) \in R$, para todo $a \in A$.

2. **Irreflexiva** (o antireflexiva o antirefleja) si para todo $a \in A$, se tiene que $a\not R a$, es decir $(a, a) \notin R$, para todo $a \in A$.

3. **Arreflexiva** si no es ni reflexiva, ni irreflexiva, es decir existen $a, b \in A$ tales que $a \neq b$, $(a, a) \in R$ y $(b, b) \notin R$.

4. **Simétrica** siempre que aRb se tiene que bRa, es decir para todo $(a, b) \in A^2$, si $(a, b) \in R$ entonces $(b, a) \in R$.

5. **Antisimétrica** Si aRb y bRa, entonces $a = b$.

6. **Asimétrica** Si aRb, entonces $b \not R a$, es decir para todo $(a, b) \in A^2$, si $(a, b) \in R$ entonces $(b, a) \notin R$. Por lo tanto una relación que no es simétrica ni antisimétrica, es una relación asimétrica.

7. **Transitiva** Si aRb y bRc, entonces aRc, es decir siempre que $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, se tiene que $(a, c) \in R$.

8. **Intransitiva** Si aRb y bRc, entonces $a \not R c$, es decir siempre que $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, se tiene que $(a, c) \notin R$.

Observación 5. *La relación vacía es un ejemplo extremo de relación, ya que ella cumple con cualquier propiedad que se enuncie por medio de elementos. En efecto, al suponer que existe $(x, y) \in \emptyset$, que es una falacia, cualquier conclusión que se formule constituye una implicación verdadera.*

Por lo anterior, en adelante las relaciones que se consideran son no vacías.

Se debe tener especial cuidado en el momento de determinar las posibles similitudes o diferencias entre las propiedades anteriores. En lo que sigue se presentan, para los conceptos análogos, algunas observaciones y ejemplos que clarifican las ideas.

Observación 6. *Para las relaciones reflexivas e irreflexivas se tienen las siguientes observaciones:*

1. *Una relación R es reflexiva si y solo si R' es irreflexiva.*

2. *El hecho de que R no sea reflexiva, no implica que R sea irreflexiva, es decir la negación de reflexiva no es irreflexiva. De igual manera, si R no es irreflexiva, no necesariamente implica que R sea reflexiva.*

3. *Si una relación es reflexiva, entonces no es irreflexiva. Además, existen relaciones que no son reflexivas y no son irreflexivas.*

4. *Si una relación es irreflexiva, entonces no es reflexiva.*

5. *Una relación R es reflexiva en A si y solo si la relación identidad en A esta contenida en R ($Id_a \subseteq R$). Pero debe tenerse claro que si una relación es reflexiva, esta no es necesariamente igual a la relación identidad.*

6. *Una relación R es irreflexiva en A si y solo si no se intercepta con la relación identidad en A ($R \cap Id_A = \emptyset$).*

Para clarificar las observaciones anteriores, se tienen los siguientes ejemplos.

Ejemplo 19. 1. En geometría Euclidiana plana la relación de paralelismo, $\parallel$, sobre el conjunto de las rectas es una relación reflexiva, ya que para toda recta l se tiene que $l \parallel l$.

En la relación de perpendicularidad entre rectas en el plano, $\perp$, es una relación irreflexiva, ya que ninguna recta l es perpendicular así misma. Además, esta relación no es transitiva ya que si $l_1 \perp l_2$ y $l_2 \perp l_3$, entonces $l_1 \parallel l_3$ y por lo tanto no son perpendiculares.

2. En el conjunto de los números enteros la relación menor que, $<$, no es reflexiva y es irreflexiva; pero la relación menor o igual, $\leq$ es reflexiva y no es irreflexiva (¿porqué?).

3. La relación valor absoluto en $\mathbb{R}$, definida por $|\ | = \{(x, |x|) \mid x \in \mathbb{R}\}$, no es reflexiva ya que $(-1, -1) \notin |\ |$ y no es irreflexiva por que $(1, 1) \in |\ |$.

Observación 7. *Para las relaciones simétricas, asimétricas y antisimétricas se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Se debe tener en cuenta que una relación puede ser simétrica y antisimétrica, o ser una de las dos únicamente o ninguna de las dos. Aunque el prefijo* anti *parece indicar negación de simetría, este no es el caso para relaciones simétricas.*

2. *Si una relación es simétrica, entonces no es asimétrica. De igual modo, si una relación es asimétrica, entonces no es simétrica.*

3. *Existen relaciones que no son simétricas, ni asimétricas, ni antisimétricas.*

4. *Si una relación R es simétrica y antisimétrica, entonces se tiene que $R \subseteq Id_A$. En efecto, si $(x, y) \in R$ se tiene por simetría que $(y, x) \in R$, de donde por la antisimetría se concluye que $x = y$; es decir $(x, y) \in R$ únicamente si $x = y$; y por lo tanto es un subconjunto de la relación identidad en A.*

5. *Si R es una relación asimétrica, entonces es antisimétrica. En este caso, $Id_A \cap R = \emptyset$.*

Los siguientes ejemplos sirven para aclarar las observaciones anteriores y visualizarlas.

Ejemplo 20. 1. Sea P la relación en $\mathbb{Z}$ definida por $(a, b) \in P$ si a, b tienen la misma paridad. Es claro que $(1, 1), (2, 4), (3, -5) \in P$, pero $(6, 11) \notin P$. La relación P es reflexiva y simétrica, pero no es antisimétrica. Por ejemplo, $(3, 7)$ y $(7, 3)$ están en P, pero $3 \neq 7$.

2. La relación $<$ en $\mathbb{R}$ es asimétrica, y no es simétrica ni antisimétrica. De otro lado, la relacion $\geq$ en $\mathbb{R}$ es antisimétrica, pero no es ni simétrica ni asimétrica. La relación $\neq$ es simétrica, ya que si $x \neq y$ entonces $y \neq x$; pero no es asimétrica, ni antisimétrica.

   En este caso en particular, se puede ver que la relación $<$ es un subconjunto propio de la relación $\neq$ en $\mathbb{R}$, que es claro si lo escribimos en el lenguaje formal: si $x < y$, entonces $x \neq y$, para $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Dada la relación ser *divisor* en los enteros positivos, definida por $n \mid m$ si existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $m = nk$, esta es una relación que no es simétrica, ni asimétrica, pero si es antisimétrica. En efecto, como $2 \mid 4$ y $4 \nmid 2$; y $n \mid n$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $\mid$ no es simétrica, ni asimétrica. Además, si $n \mid m$ y $m \mid n$ se tiene que $n = m$ (probarlo), entonces $\mid$ es una relación antisimétrica.

   Es importante observar que si extendemos la relación de divisibilidad a los números enteros, entonces la relación no es antisimétrica (¿porqué?).

4.3.2. Relaciones de equivalencia y particiones

Uno de los propósitos esenciales en matemáticas es agrupar objetos que tengan características similares en conjuntos y clasificar aquellos conjuntos cuyos elementos tengan características diferentes. Tal vez la principal forma de agrupar objetos con características similares es por medio de cierto tipo de relaciones que permitan identificar propiedades comunes.

Por ejemplo, en geometría decimos que dos triángulos son semejantes si sus ángulos internos son congruentes. Así, intuitivamente todos los triángulos semejantes son iguales en forma, pero difieren en tamaño.

De otro lado, si se considera el conjunto de los triángulos en un plano, este conjunto se puede dividir en tres subconjuntos, clasificados acorde a las relaciones de igualdad entre sus lados, es decir en el conjunto de los triángulos equiláteros, el de los isósceles y el de los escalenos.

Los números enteros se pueden clasifican en números enteros pares y números enteros impares, clasificación que viene definida por la relación de divisibilidad ya que los enteros pares son aquellos divisibles por 2 y los enteros impares son aquellos que no son divisibles por 2.

Este tipo de relación, que se define a continuación, además de su importancia en matemáticas y estadística, son también de mucha importancia en muchas áreas del conocimiento, que van desde la Biología, pasando por las ciencias exactas y la ingeniería, hasta en las ciencias sociales y las humanidades.

Definición 33. Una relación R en un conjunto A se dice que es una relación de *equivalencia* si R es una relación reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo 21.

1. Si en el conjunto de los seres Humanos, definimos la relación ser "hijos de..." como las parejas de personas que tienen los mismos padres Biológicos, se tiene que todo ser humano está relacionado consigo mismo, por lo que la relación es reflexiva. Si la persona a tiene los mismos padres que la persona b, entonces la persona b tiene los mismos padres que la persona a, es decir la relación es simétrica. Finalmente, si a y b tienen los mismos padres; y b y c tienen los mismos padres, claramente a y c tienen los mismos padres y por lo tanto la relación es transitiva.

2. La relación de igualdad en cualquier conjunto es una relación de equivalencia.

3. La relación definida en $\mathbb{R}$ por aRb si $|a| = |b|$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, es una relación de equivalencia (probarlo).

4. El algoritmo de la división permite definir una relación de equivalencia sobre los enteros, para cada $n \in \mathbb{Z}$. En efecto, fijado un elemento $n \in \mathbb{Z}$, diremos que a es "congruente" con b módulo n si se cumple que $n \mid b-a$; lo que es equivalente a que a y b tienen igual residuo al ser divididos por n. Dado que para todo $a, b \in \mathbb{Z}$ existen únicos $q_a, q_b, r_a, r_b \in \mathbb{Z}$ tales que

$$a = nq_a + r_a, \quad 0 \leq r_a < |n|$$

y

$$b = nq_b + r_b, \quad 0 \leq r_b < |n|,$$

se tiene que $n \mid b - a$ si y solo si $n \mid (q_b - q_a)n + (r_b - r_a)$, y como $n \mid (q_b - q_a)n$, entonces $n \mid b-a$ es equivalente a que $n \mid r_b - r_a$, lo cual se cumple si y solo si $r_b - r_a = 0$, ya que como $0 \leq r_a < |n|$ y $0 \leq r_b < |n|$, se tiene que $0 \leq |r_b - r_a| \leq< |n|$. Esta relación se le denomina **congruencia módulo** n, y cuando dos elementos a y b están relacionados se denota por $a \equiv b \text{ mód } n$.

5. La relación P^+ sobre $\mathbb{Z}$ definida por $P^+ := \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a + b \text{ es un número entero par}\}$ es una relación de equivalencia. En efecto, dado que para todo $a \in \mathbb{Z}$ se tiene que $a + a = 2a$ es un entero par, entonces $(a,a) \in P^+$ y por lo tanto la relación es reflexiva. Como la suma de números enteros es conmutativa, entonces $a + b = b + a$, para todo $a, b \in \mathbb{Z}$; y por lo tanto si $(a,b) \in P^+$, entonces $(b,a) \in P^+$, es decir P^+ es una relación simétrica. Finalmente, si $(a,b), (b,c) \in P^+$, entonces $a+b$ y $b+c$ son números pares; y como $a + c = (a+b) - (b+c) + 2c$, se tiene que $a+c$ es un número par, es decir que $(a,c) \in P^+$, por lo cual la relación es transitiva.

   En contraste, la relación $I^+ :=:= \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a + b \text{ es un número entero impar}\}$ no es una relación de equivalencia dado que I^+ no es reflexiva, ni transitiva (probarlo).

6. En geometría Euclidiana, la propiedad de paralelismo entre rectas en un plano es una relación de equivalencia sobre el conjunto de las rectas en un plano determinado. De igual manera, fijada una recta l y se define que dos rectas están relacionadas si ambas son perpendiculares a l entonces la relación así definida es de equivalencia. Igual podría definirse una relación de equivalencia entre rectas por medio de un punto fijo P imponiendo la condición que el punto petrtenesca a ambas rectas.

7. La relación Z en $\mathbb{R}$ definida por aZb si $b - a$ es un número entero, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, es una relación de equivalencia. En efecto, como $a - a = 0$, se tiene que aZa, es decir Z es reflexiva. Dado que $b - a = -(a-b)$, se tiene que $b - a$ es un entero si y solo si $a - b$ es un entero, es decir aZb si y solo si bZa, por lo cual Z es simétrica. Finalmente, si $c - b$ y $b - a$ son enteros, entonces $c - a = (c-b) + (b-a)$, es decir que $c - a$ es un entero, y por lo tanto se tiene que Z es una relación transitiva.

Las relaciones de equivalencia tienen la propiedad de que permiten agrupar los elementos de A en una colección de subconjuntos de A que comparten propiedades o que son de algún tipo particular, es decir clasifican los elementos de A en subconjuntos particulares. Los subconjuntos que se forman son las llamadas "clases de equivalencia" definidas por R en A, y que se definen a continuación.

Definición 34. Sean A un conjunto no vacio y R una relación de equivalencia sobre A. Para cada $a \in A$ se define la clase de equivalencia de a, determinada por R, como el conjunto $[a]_R := \{b \in A : (a,b) \in R\}$.

Al conjunto de todas las clases de equivalencia determinadas por una relación R se le denomina el conjunto cociente de A con respecto a R, o simplemente A partido por R, y se denota por A/R, es decir que

$$A/R := \{[a]_R : a \in A\}$$

Ejemplo 22. Si consideramos la relación P^+ en $\mathbb{Z}$, se tiene que $a+b$ es par si y solo si a y b son ambos pares, o a y b son ambos impares. Por lo tanto la relación de equivalencia P^+ genera dos tipos de conjuntos, la clase correspondiente a los números pares y la clase correspondiente a los números impares, las cuales corresponden a la clase del cero $[0]$, y a la clase del uno $[1]$. Por lo tanto $\mathbb{Z}/P^+ = \{[0],[1]\}$.

Otro ejemplo interesante es el siguiente, el cual se usará más adelante para estudiar la noción de orden.

Ejemplo 23. Si se denota por $\mathcal{A}$ al conjunto de las letras del abecedario y por $P_{\mathcal{A}}$ el conjunto de todas las palabras que se pueden formar con las letras del abecedario (tengan o no sentido en el idioma español); se define la relación $\cong$ sobre $P_{\mathcal{A}}$ definida por $p_1 \cong p_2$ si ambas palabras inician con la misma letra. Por ejemplo, *cuadrado*$\cong$*cubo*, *kilo*$\cong$*koala*, etcétera.

Claramente, $\cong$ es una relación de equivalencia y se tienen en total 27 clases de equivalencia, cada una asociada a cada letra del abecedario. A esta relación se le llamará la relación *lexicógrafa o lexicográfica*.

Algunas propiedades importantes de las clases de equivalencia y de los conjuntos cociente se presenta a continuación.

Teorema 26. *Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A no vacio. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $(a,b) \in R$
2. $[a]_R = [b]_R$
3. $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$

Demostración. *Supongase que $(a,b) \in R$. Si $c \in [a]_R$, entonces $(a,c) \in R$, y como R es simétrica, entonces $(c,a) \in R$. Dado que $(a,b) \in R$, se tien por* *transitividad que $(c,b) \in R$, es decir que $c \in [b]_R$. Por lo anterior, se tiene que $[a]_R \subseteq [b]_R$. De manera análoga se muestra que $[b]_R \subseteq [a]_R$, y por lo tanto $[a]_R = [b]_R$.*

Ahora, si se supone que $[a]_R = [b]_R$, entonces como $a \in [a]$, ya que por reflexividad $(a,a) \in R$, y por lo tanto $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$.

Finalmente, si se supone que $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, entonces existe $c \in A$ tal que $(c,a) \in R$ y $(c,b) \in R$, lo cual implica por la simetría y la transitividad que $(a,b) \in R$.

Las pruebas anteriores muestran que $(a,b) \in R$ implica que $[a]_R = [b]_R$; que $[a]_R = [b]_R$ implica que $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$; y que $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$ implica que $(a,b) \in R$, con lo cual se concluye que las tres afirmaciones son equivalentes.

El teorema anterior muestra que $[a]_R = [b]_R$ si y solo si $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, y por lo tanto se tiene que $[a]_R \neq [b]_R$ si y solo si $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$, lo cual nos lleva al siguiente resultado.

Corolario 2. *Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A no vacio. Para todo $a, b \in A$, se cumple una y solo una de las siguientes afirmaciones: $[a]_R = [b]_R$ o bien $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.*

Este corolario muestra que una relación de equivalencia R sobre un conjunto A, divide al conjunto A en subconjuntos no vacios disjuntos dos a dos. Este tipo de propiedad se define a continuación.

Definición 35. Una **partición** de un conjunto no vacio A es una colección $\mathcal{S}$ de subconjuntos no vacios de A, los cuales son disjuntos dos a dos y tales que su unión es A, es decir $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(A)$ tal que

1. Para todo $C \in \mathcal{S}$, se tiene que $C \neq \emptyset$.
2. Si $C, \widetilde{C} \in \mathcal{S}$ son tales que $C \neq \widetilde{C}$, entonces $C \cap \widetilde{C} = \emptyset$.
3. La unión de los $C \in \mathcal{S}$ es A, osea que
$$\bigcup_{C \in \mathcal{S}} C = A\,.$$

Ejemplo 24. Algunos ejemplos de particiones conocidos son los siguientes:

1. Los números enteros no nulos de dividen en enteros positivos $\mathbb{Z}^+$ y enteros negativos $\mathbb{Z}^-$. Estos dos conjuntos, junto con el conjunto $\{0\}$, forman una partición disyunta del conjunto de los números enteros.

2. Los intervalos del tipo $[n, n+1)$, para $n \in \mathbb{Z}$, determinan una partición del conjunto de los números reales.

3. Para un conjunto no vacio A, con $n \in \mathbb{N}$ elementos, el conjunto de partes de A, $\mathcal{P}(A)$, se puede particionar formando la colección $\mathcal{S}$ de subconjuntos de A que tienen k elementos, para $0 \leq k \leq n$. Es decir, que dos subconjuntos de A estan en el mismo sunconjunto de $\mathcal{P}(A)$ si tienen el mismo número de elementos.

En el último ejemplo se ve que la propiedad que define la partición corresponde a una relación de equivalencia (tener el mismo número de elementos). En general, las relaciones de equivalencia corresponden a la existencia de particiones de conjuntos en el siguiente sentido.

Teorema 27. *Sea A un conjunto no vacio.*

1. *Toda relación de equivalencia R sobre A determina una partición de A, la cual corresponde al conjunto cociente $A/R = \{[a]_R : a \in A\}$.*

2. *Toda partición $\mathcal{S}$ de A determina una relación de equivalencia $R_{\mathcal{S}}$ sobre A cuyo conjunto cociente es $\mathcal{S}$, es decir $A/R_{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$.*

Demostración. *La prueba de la primera afirmación se sigue del Teorema 26 y del corolario 2.*

Para probar la segunda afrimación, supongamos que $\mathcal{S}$ es una partición de A y definimos la relación $R_{\mathcal{S}}$ sobre A como $(a, b) \in R_{\mathcal{S}}$ si existe $C \in R_{\mathcal{S}}$ tal que $a, b \in C$. Queda como ejercicio al lector verificar que $R_{\mathcal{S}}$ es una relación de equivalencia y que $A/R_{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$.

En los ejemplos previos al anterior teorema, tenemos que

1. Dos enteros no nulos n, m son enteros positivos o son enteros negativos, si $nm > 0$. Así, la relación Sig sobre $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definida por $(m, n) \in Sig$ si $nm > 0$ es una relación de equivalencia.

2. Para cada $x \in \mathbb{R}$, se define la parte entera de x como el entero n tal que $n \leq x < n+1$, el cual se denota por $\lfloor x \rfloor$. Así, podemos definir la relación $P_{\mathbb{Z}} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor\}$ sobre $\mathbb{R}$. La relación $P_{\mathbb{Z}}$ es de equivalencia y las particiones que ella forma corresponden a los intervalos $[n, n+1)$.

4.3.3. Relaciones de orden

En muchos contextos de la vida común y de las diferentes áreas del conocimiento es comparar o ordenar o categorizar información, datos, elementos, etcétera; es decir definir un orden de algún tipo que sea en general jerárquico de alguna manera. Esta idea esta fuertemente asociada a la noción de desigualdad y corresponden a las relaciones que se presentan a continuación y que pretender ordenar por medio de alguna propiedad los elementos de un conjunto dado, de allí su nombre.

Definición 36. Dada una relación R en A, se dice que R es

1. *un orden parcial (o orden parcial debil)* en A si R es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva.

2. *un orden estricto (o riguroso)* en A si R es una relación antirreflexiva, asimétrica y transitiva.

De la definición anterior se tiene como consecuencia directa el siguiente resultado:

Lema 1. *Sea R una relación sobre un conjunto no vacío A.*

1. *Si R es un orden parcial, entonces $Id_A \subseteq R$ y $R - Id_A$ es un orden estricto.*

2. *Si R es un orden estricto, entonces $Id_A \cap R = \emptyset$ y $R \cup Id_A$ es un orden parcial.*

La idea de la relaciones de orden es que dos elementos pueden compararse, pero en general esto no sucede.

Ejemplo 25.
1. Sea A un conjunto no vacío y $\mathcal{P}(A)$ el conjunto de partes de A. La contención define una relación de orden (no estricto) $\subseteq$ define una relación de orden parcial en $\mathcal{P}(A)$, mientras que la contención estricta $\subset$ define una relación de orden estricto en $\mathcal{P}(A)$. En ambos casos se tiene que no todos los elementos de $\mathcal{P}(A)$ son comparables. En efecto, si $a, b \in A$ y $a \neq b$, entonces $\{a\}$, $\{b\} \in \mathcal{P}(A)$, pero $\{a\}$ no es subconjunto de $\{b\}$, ni $\{b\}$ es subconjunto de $\{a\}$, es decir no son comnparables.

2. La relación $|$ es un orden parcial sobre $\mathbb{N}$. En efecto, para todo $n, m, k \in \mathbb{N}$ se tiene que $n|n$ (reflexividad), si $n|m$ y $m|n$, entonces $n = m$ (antisimetría), y finalmente si $n|m$ y $m|k$, entonces $n|k$ (transitividad).

Si en lugar de $\mathbb{N}$ se toma a $\mathbb{Z}$, se tiene que $|$ **no** es orden parcial sobre $\mathbb{Z}$, ya que $2|-2$ y $-2|2$ y $2 \neq -2$, es decir que $|$ no es antisimétrica sobre $\mathbb{Z}$, aunque si es reflexiva y transitiva.

3. Sobre $\mathbb{N}$ se definen las relaciones $\leq$ y $<$ como:

   a) Para $m, n \in \mathbb{N}$, se tiene que $n \leq m$ si existe $k \in \mathbb{N}$ talque $m = n+k$. Esta relación es reflexiva, ya que $n = n + 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. La relación es antisimétrica, ya que si $n \leq m$ y $m \leq n$, entonces existen $k, l \in \mathbb{N}$ talque $m = n + k$ y $n = m + l$; y reemplazando se concluye que $m = m + k + l$ lo cual se cumple si y solamente si $k + l = 0$, lo que es equivalente a que $k = l = 0$ (lo anterior se prueba más adelante usando inducción), es decir que $m = n$. Finalmente, la transitividad se sigue directamente de la definición de $\leq$ (probarlo). Así, la relación $\leq$ es un orden parcial sobre $\mathbb{N}$.

   b) Para $m, n \in \mathbb{N}$, se tiene que $n < m$ si existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ talque $m = n+k$. Esta relación es antireflexiva, ya que $n = n+k$ sii $k = 0$, por lo cual $n \nless n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. La relación es asimétrica, ya que si $n < m$, entonces $m \nless n$ (probarlo). Finalmente, de la definición de $<$ se sigue que la relación es transitividad. Por lo tanto $<$ es un orden estricto.

   Es claro que si consideramos la relación de igualdad en $\mathbb{N}$, que es la relación identidad $Id_{\mathbb{N}}$, se tiene que $\leq$ es la relación $< \cup =$.

La idea de orden en el mundo real conlleva a la conclusión, no necesariamente válida, de que todos los objetos de un conjunto dado pueden organizarse de acuerdo a una propiedad que permite comparar cualquier par de ellos. En ese sentido, para una relación arbitraria R sobre un conjunto A existen dos posibilidades:

- la relación R satisface la condición de **comparabilidad** en A, lo cual quiere decir que para todo $a, b \in A$ se tiene que aRb o bRa (cualquier par de objetos son comparables).

- la relación R no satisface la condición de comparabilidad, es decir existen $a, b \in A$ tales que $a(\neg R)b$ y $b(\neg R)a$ (existen objetos que no son comparables).

Así, intuitivamente, para ordenar algún conjunto en un sentido similar al señalado anteriormente sería necesario tener un tipo de relación de la que se define a continuación.

Definición 37. Una relación R es *un orden total (o lineal)* sobre un conjunto A si es R es un orden parcial que satisface la condición de comparabilidad. Si R es una relación estricta sobre A y satisface la condición de comparabilidad, entonces se dice que R es un *orden total estricto* sobre A.

Ejemplo 26. Para el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, se tiene que las relaciones $\leq$ y $<$ satisfacen la condición de comparabilidad, y por lo tanto es $\leq$ un orden total y $<$ es un orden total estricto.

El orden parcial $|$ sobre $\mathbb{N}$ no es un orden total. En efecto, como $2 \nmid 3$ y $3 \nmid 2$, entonces $|$ no satisface la condición de comparablilidad.

Finalmente, si se restringen las relaciones $|$ y $\leq$ a $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, se tiene que $|$ es un orden parcial sobre $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, $|$ es un orden total sobre $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, y $| \subsetneq \leq$ (probarlo). Como $n|0$ y $0 \leq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $| \nsubseteq \leq$ como relaciones sobre $\mathbb{N}$.

Otro ejemplo de orden total que viene definido por una relación de equivalencia es el siguiente.

Ejemplo 27. Usando la relación lexicógrafa (ver ejemplo 23) y la ordenación habitual del abecedario, es decir comenzando con la letra a y finalizando con la letra z, para cada par de palabras p_1, $p_2 \in P_{\mathcal{A}}$ se dice que $p_1 \preceq p_2$ si la palabra p_1 antecede a la palabra p_2 en un diccionario. Por ejemplo, *casa* $\preceq$ *caza*, ya que *casa* $\cong$ *caza*, *asa* $\cong$ *aza* y *sa* $\ncong$ *za*, pero la letra s antecede a la letra z en el abecedario. De otro lado, *cima* $\preceq$ *sima*, ya que letra c antecede a la letra s en el abecedario. La relación $\preceq$ es un orden total sobre $P_{\mathcal{A}}$.

Para el conjunto de los número reales es claro que $a \leq b$ si y solo si $b \geq a$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$. En términos de relaciones tenemos que la relación inversa de $\leq$ es la relación $\geq$ sobre $\mathbb{R}$. Está propiedad se cunple para los ordenes, acorde al siguiente teorema.

Teorema 28. *La relación inversa de un orden (parcial o estricto o total) es un orden, el cual se denomina el orden inverso.*

4.4. Ejercicios

1. Para los siguientes pares de conjuntos, determine los productos cartesianos $A \times B$ y $B \times A$:

    a) $A = \{1, 5, 7\}$, $B = \{a, c, d, f\}$.

    b) $A = \{\emptyset, \{\triangle\}, \{0, 1\}\}$, $B = \{q, 0, \{\emptyset\}\}$.

   c) $A = \{(2,4),(3,2)\}$, $B = \{2,3,4\}$.

2. Demuestre o presente un contraejemplo de las siguientes afirmaciones:

   a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

   b) $A \times A = Id_A$.

   c) $A \times B = \emptyset$ si y solo si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.

   d) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

   e) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.

3. Sean A, B, C y D conjuntos no vacíos, determinar si las siguientes propiedades son válidas o no. En caso afirmativo hacer al prueba y en caso contrario mostrar un contraejemplo:

   a) $A \backslash (B \times C) = (A \backslash B) \times (A \backslash C)$.

   b) $A \times (B \Delta C) = (A \Delta B) \times (A \Delta C)$.

   c) $(A \Delta B) \times C = (A \times C) \Delta (B \times C)$.

4. Dadas las relaciones R y T definidas a continuación, especificar los conjuntos listados,

$$R = \{(0,1),(0,2),(1,1),(1,3),(3,1),(3,3)\}$$

   y

$$T = \{(2,5),(2,6),(3,6),(4,5)\}$$

   a) $Dom(R)$ y $Ran(R)$.

   b) $Dom(T)$ y $Ran(T)$.

   c) R^{-1}.

   d) $R \circ T$.

   e) $T \circ R$.

   f) $Dom(T \circ R)$.

   g) $Ran(T \circ R)$.

   h) $(T \circ R)^{-1}$.

   i) $R^{-1} \circ T^{-1}$.

   j) $T \circ (R \circ R^{-1})$.

5. Especifique el dominio y el rango de las siguientes relaciones R en $\mathbb{R}$ definidas por xRy si y solo si:

   a) $y = \sqrt{x-1}$.

   b) $|x| < 2$ y $y = 3$.

   c) $y = \frac{1}{x^2}$.

   d) $y \neq x$.

6. Especifique el dominio y el rango de las siguientes relaciones R en $\mathbb{R}$ definidas por xRy si y solo si:

   a) $y = \sqrt{x-1}$.

   b) $|x| < 2$ y $y = 3$.

   c) $y = \frac{1}{x^2}$.

   d) $y \neq x$.

7. Sean R y S relaciones arbitrarias:

   ¿$R^{-1} \circ R = Id_{\text{Dom}(R)}$?

   ¿$R \circ R^{-1} = Id_{\text{Ran}(R)}$?

8. Sean R y S relaciones arbitrarias. hallar contraejemplos para las afirmaciones

   $\text{Dom}(S \circ R) = \text{Dom}(R)$

   $\text{Ran}(S \circ R) = \text{Ran}(S)$

9. Para cada una de las relaciones descritas a continuación, indique cuáles son: Reflexiva, Simétrica, Transitiva, Antisimétrica, Orden parcial, Relación de equivalencia; con la prueba correspondiente.

   a) $\leqslant$ en $\mathbb{Z}$.

   b) $<$ en $\mathbb{Z}$.

   c) $=$ en $\mathbb{Z}$.

   d) $\subseteq$ en $\mathcal{P}(A)$, para un conjunto A arbitrario.

   e) $|$ en $\mathbb{Z}$.

   f) $L = \{(l, m) \ : \ l$ y m son líneas paralelas$\}$, en el conjunto de líneas en el plano real $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

g) $H = \{(x, y) \ : \ x$ y y son hermanos$\}$, en el conjunto de todas las personas.

10. Probar que el orden Lexicográfico en los números complejos es un orden total.

Bibliografía

[de Guzmán-Ozámiz, 2004] de Guzmán-Ozámiz, M. (2004). *Cómo Hablar, Demostrar y Resolver en Matemáticas*. Base Universitaria. Anaya.

[Houston, 2009] Houston, K. (2009). *How to Think Like a Mathematician*. A Companion to Undergraduate Mathematics. Cambridge University Press.

[Velleman, 2006] Velleman, D. J. (2006). *How to Prove It - A Structured Approach*. Cambridge University Press, second edition.