

# Mercado de Capitales (Notas de Clase)

Juan José Berrio Galeano

11 de Agosto de 2024



# Índice general

<b>1. Clase 1</b>	<b>5</b>
1.1. Mercado de Capitales . . . . .	5
1.2. Que relación tiene usted con el dinero? . . . . .	5
1.3. Cisnes Negros . . . . .	5
1.4. El capital privado se ha convertido en un terreno peligroso para los inversores (John Plender) . . . . .	6
1.4.1. Securities and Exchange Commission . . . . .	6
1.5. Algunos términos Financieros . . . . .	7
1.5.1. Definiciones . . . . .	7
<b>2. Visión preliminar modelo de crecimiento endogeno integrado (Notas representativas)</b>	<b>11</b>
2.1. Complementariedad entre Capital Privado y Bienes Públicos . . . . .	11
2.1.1. Impacto de los Bienes Públicos . . . . .	12
2.2. Modelo Propuesto: Impacto de las Políticas Monetarias y Riesgo en el capital privado . . . . .	12
2.2.1. Función de Producción Extendida . . . . .	12
2.2.2. Interpretación del Modelo . . . . .	12
2.3. Modelo Extendido: Capital Privado, Bienes Públicos y Fondos de Pensiones . . . . .	12
2.3.1. Función de Producción Extendida . . . . .	13
2.3.2. Interpretación del Modelo . . . . .	13
2.4. Oportunidades en Infraestructura y Capital de Riesgo . . . . .	13
2.4.1. Interpretación del Modelo Ampliado . . . . .	14
2.4.2. El Papel de $A_t$ en la Función de Producción . . . . .	14
2.4.3. Impacto de las Políticas Monetarias Laxas . . . . .	14
2.5. Función de Producción Extendida con Tecnología . . . . .	15
2.5.1. Componentes del Modelo . . . . .	15
2.5.2. Interpretación del Modelo . . . . .	16
2.6. Desarrollo del Modelo . . . . .	16
2.6.1. Incorporación del Riesgo y Costos de Financiamiento . . . . .	16
2.6.2. Efecto de la Ilusión de Liquidez . . . . .	17
<b>3. Clase 2</b>	<b>19</b>
3.1. Modelo de Evaluación de la Sostenibilidad de Sistemas Pensionales . . . . .	19
<b>A. Apéndice</b>	<b>25</b>



# Capítulo 1

## Clase 1

### 1.1. Mercado de Capitales

:

Es fundamental para entender cómo se financian las empresas y los gobiernos, y cómo los inversores asignan su capital. Se estudian los mercados financieros donde se negocian instrumentos como acciones, bonos y otros valores, que son cruciales para la financiación.

- Se estudia cómo están organizados, quiénes son los participantes y cómo se realizan las transacciones; analizando los diferentes tipos de instrumentos disponibles en los mercados de capitales, como acciones, bonos, derivados y otros productos financieros.
- Se investigan Métodos para evaluar el valor de los activos financieros para determinar cómo los inversores diversifican su capital para maximizar el retorno esperado mientras minimizan el riesgo.
- Se analizan cómo las empresas y los gobiernos obtienen fondos a través de la emisión de valores en los mercados de capitales, cómo gestionan su estructura de capital, y cómo las decisiones de política monetaria y fiscal influyen en los mercados de capitales, afectando los tipos de interés, la disponibilidad de crédito y, en última instancia, la asignación de capital.
- Se evalúa cómo se relacionan el riesgo y el retorno en los mercados de capitales y cómo los inversores toman decisiones de inversión basadas en esta relación.

### 1.2. Que relación tiene usted con el dinero?

Es una pregunta ambigua que conlleva a puntos de vista diferentes y respuestas de alguna manera arbitrarias.

Reconociendo al dinero como un método de intercambio, veo al dinero como fuente de seguridad, estabilidad, éxito y poder.

### 1.3. Cisnes Negros

Se refieren a eventos altamente improbables, impredecibles y de un gran impacto; se forman porque la complejidad de poner en un modelo una visión simplificada de la realidad es cada vez mas elevada. Su mitigación se basa en la simpleza de tomar previsiones a lo extremo. Tienen una

característica y es que después de ocurridos tienden a racionalizarse en retrospectiva, como si hubiesen sido predecibles.

## 1.4. El capital privado se ha convertido en un terreno peligroso para los inversores (John Plender)

El artículo de John Plender en el Financial Times aborda la situación actual del mercado de capitales privado, destacando su crecimiento constante desde 2018, a pesar de desafíos como el aumento de los costos de financiamiento y la disminución en la recaudación de fondos desde 2021. Plender señala que este crecimiento fue impulsado por políticas monetarias flexibles tras la crisis de 2007-2009, pero advierte que las condiciones han cambiado, afectando las valoraciones y el apalancamiento. El artículo también menciona que los fondos de pensiones enfrentan problemas debido a la exposición a activos ilíquidos, lo que complica el equilibrio de sus portafolios en la etapa final de sus obligaciones. También menciona que la falta de uniformidad en la divulgación y los conflictos de interés son preocupaciones destacadas. Pero, a pesar de estos retos, el artículo destaca que los mercados privados aún ofrecen oportunidades, especialmente relacionada con la descarbonización y la digitalización, así como en capital de riesgo para nuevas tecnologías, aunque con complejidades en la evaluación de rendimientos del capital privado que en comparación con los mercados públicos sigue siendo complicada, y los altos costos asociados, como las tarifas de gestión y los porcentajes de ganancias, pueden impactar negativamente los retornos.

### 1.4.1. Securities and Exchange Commission

#### **Tema: El Rol de la SEC en los Mercados Financieros de Estados Unidos**

La importancia de la SEC y sus desafíos desde la crisis financiera.

Cuando hablamos de la *Securities and Exchange Commission* (SEC), estamos hablando de la institución que tiene una de las responsabilidades más críticas en los mercados financieros de Estados Unidos: la protección de los inversores y la garantía de la transparencia y el orden en el mercado. Desde su creación en 1934, tras el colapso del mercado en 1929, la SEC ha sido vigilante, controlador y un generador clave de políticas que buscan prevenir fraudes y abusos en los mercados de valores.

Pero, ¿cómo opera realmente la SEC? Vigila y regula una amplia gama de actores: desde las bolsas de valores y las firmas de corretaje hasta los fondos de inversión y las agencias de calificación crediticia. Su control se extiende sobre mercados tan diversos como el mercado de acciones, bonos, y también en el creciente y complejo ámbito de los mercados privados, como el capital privado y la deuda privada.

Sin embargo, a pesar de su misión, la SEC no está exenta de críticas. Desde la crisis financiera de 2007-2008, han surgido preguntas sobre si la SEC ha cumplido adecuadamente su rol. Un área donde la SEC ha fallado es en la regulación de los mercados privados. La falta de transparencia, especialmente en las valoraciones de activos en el capital privado, ha permitido que estos mercados crezcan en un entorno menos regulado, lo que ha generado riesgos no solo para los inversores, sino para la estabilidad financiera en general.

La reciente decisión del Tribunal de Apelaciones del Quinto Circuito de los EE.UU. de anular las nuevas reglas de la SEC que exigían mayor transparencia en el desempeño y las tarifas en el capital privado, subraya las dificultades que enfrenta la SEC. Es evidente que, aunque la SEC sigue

siendo un pilar fundamental en la regulación de los mercados financieros, también debe adaptarse y fortalecer su vigilancia para evitar que los errores del pasado se repitan. Y es que, en un entorno financiero tan dinámico como el actual, la SEC no puede ser solo un espectador; debe ser un árbitro activo, que garantice que el juego sea justo para todos.

## 1.5. Algunos términos Financieros

### 1.5.1. Definiciones

#### **Bolsas de Valores**

Son plataformas organizadas donde se compran y venden valores financieros, como acciones y bonos. Ejemplos de bolsas de valores incluyen la Bolsa de Nueva York (NYSE) y el Nasdaq. Estas instituciones facilitan la liquidez y la transparencia en los mercados de valores al proporcionar un entorno regulado para la negociación de activos financieros.

#### **Firmas de Corretaje**

Empresas que actúan como intermediarios entre los inversores y el mercado financiero. Facilitan la compra y venta de valores, como acciones y bonos, en nombre de sus clientes. Las firmas de corretaje pueden ofrecer una variedad de servicios adicionales, incluyendo asesoramiento financiero y gestión de inversiones.

#### **Fondos de Inversión**

Vehículos financieros que agrupan el dinero de muchos inversores para invertir en una cartera diversificada de activos, como acciones, bonos y otros instrumentos financieros. Los fondos de inversión permiten a los inversores diversificar sus carteras sin tener que seleccionar y gestionar cada inversión individualmente. Existen varios tipos de fondos, incluidos fondos mutuos y fondos cotizados en bolsa (ETFs).

#### **Agencias de Calificación Crediticia**

Empresas que evalúan la calidad crediticia de emisores de deuda y de sus instrumentos financieros, como bonos. Las calificaciones emitidas por estas agencias ayudan a los inversores a entender el riesgo asociado con los instrumentos de deuda. Ejemplos de agencias de calificación son Standard & Poor's (S&P), Moody's y Fitch Ratings.

#### **Mercado de Acciones**

Parte del mercado financiero donde se compran y venden acciones de empresas que están cotizadas en bolsa. Las acciones representan una participación en la propiedad de una empresa y proporcionan a los accionistas derechos sobre una parte de los beneficios y activos de la empresa.

#### **Mercado de Bonos**

Sector del mercado financiero donde se compran y venden bonos, que son instrumentos de deuda emitidos por entidades como gobiernos y empresas. Los bonos representan un préstamo hecho por el inversor al emisor del bono, y el emisor se compromete a pagar intereses periódicos y devolver el valor nominal del bono en la fecha de vencimiento.

## **Mercados Privados**

Sectores del mercado financiero donde se negocian activos que no están disponibles en los mercados públicos. Estos incluyen el capital privado (private equity) y la deuda privada (private debt). En los mercados privados, las transacciones no se realizan en bolsas públicas, lo que puede resultar en menor liquidez y menor transparencia en comparación con los mercados públicos.

### **Capital Privado**

Inversiones realizadas en empresas que no están cotizadas en bolsa. Los fondos de capital privado buscan adquirir, mejorar y eventualmente vender empresas con un retorno sobre la inversión. Los fondos de capital privado suelen involucrarse en la gestión y reestructuración de las empresas en las que invierten.

### **Deuda Privada**

Préstamos o instrumentos de deuda que se negocian fuera de los mercados públicos. Los inversores en deuda privada suelen proporcionar financiamiento a empresas o proyectos que no pueden acceder a crédito a través de los canales tradicionales de mercado público. La deuda privada puede ofrecer rendimientos más altos debido a su mayor riesgo y menor liquidez en comparación con la deuda pública.

## **Instrumentos Financieros Derivados**

Son contratos financieros cuyo valor se basa en el precio de un activo subyacente, como acciones, bonos, o índices. Los derivados se utilizan para gestionar riesgos o especular sobre los movimientos de los precios de los activos subyacentes. Ejemplos incluyen futuros, opciones y swaps.

## **Riesgo de Crédito**

Es el riesgo de que una contraparte en un contrato financiero no cumpla con sus obligaciones de pago. Este tipo de riesgo es crucial para los inversores en bonos y otras formas de deuda.

## **Liquidez**

Se refiere a la facilidad con la que un activo puede ser convertido en efectivo sin afectar significativamente su precio. Activos como las acciones de grandes empresas suelen ser más líquidos que los bienes raíces o ciertos tipos de deuda.

## **Volatilidad**

Es una medida de la variabilidad o desviación estándar de los rendimientos de un activo o portafolio. Una alta volatilidad indica un mayor riesgo asociado con las fluctuaciones en el precio del activo.

## **Tasa de Interés**

Es el costo del dinero, expresado como un porcentaje del monto prestado. La tasa de interés puede ser fija o variable y afecta el costo de los préstamos y el rendimiento de las inversiones.



**Índice de Mercado**

Un índice de mercado es una medida que representa el rendimiento de un grupo de activos financieros, como acciones. Ejemplos incluyen el S&P 500 y el Dow Jones Industrial Average. Los índices se utilizan para evaluar el rendimiento del mercado y como referencia para fondos de inversión.

**Emisión de Bonos**

Es el proceso mediante el cual las empresas o gobiernos venden bonos para recaudar dinero. Los bonos son instrumentos de deuda que pagan intereses periódicos y devuelven el valor nominal al vencimiento.

**Análisis Fundamental**

Es un método de evaluación de valores basado en el análisis de factores económicos, financieros y otros cualitativos relacionados con una empresa o activo. El objetivo es estimar el valor intrínseco del activo para tomar decisiones de inversión informadas.



# Capítulo 2

## Visión preliminar modelo de crecimiento endogeno integrado (Notas representativas)

Como estudiante de economía (Universidad Autónoma Latinoamericana) y matemáticas (Universidad de Antioquia), he observado que la modelación matemática es una herramienta fundamental para comprender y resolver problemas económicos complejos. Mi interés en este campo me ha llevado a explorar cómo los modelos matemáticos pueden ofrecer perspectivas más precisas y sistemáticas en el análisis económico.

En la primera clase, el profesor afirmó que la nueva reforma pensional en Colombia podría tener un impacto negativo en el mercado financiero del país, una preocupación que se alinea con las advertencias del artículo 'Private equity has become hazardous terrain for investors'. Esto me llevó a preguntarme si realmente se puede hacer una demostración formal de esta afirmación en un contexto generalizado.

### 2.1. Complementariedad entre Capital Privado y Bienes Públicos

Consideremos una función de producción Cobb-Douglas que incorpora tanto el capital privado ( $K_t$ ) como los bienes públicos ( $G_t$ ) proporcionados por el Estado:

$$Y_t = AK_t^\beta G_t^{\beta-1} \quad (2.1)$$

Donde:

- $Y_t$  es la producción total en el período  $t$ .
- $K_t$  es el capital privado invertido en el período  $t$ .
- $G_t$  son los bienes públicos proporcionados por el Estado en el período  $t$ .
- $A$  es la tecnología desde el punto de vista macroeconómico.
- $\beta$  es la elasticidad de la producción con respecto al capital privado.

### 2.1.1. Impacto de los Bienes Públicos

Los bienes públicos, como la infraestructura y el sistema legal, complementan al capital privado al mejorar la productividad y reducir costos. Según Barro (1990), si el Estado aumenta la oferta de bienes públicos en la misma proporción que el capital privado, la producción total de la economía aumenta. Este entorno empresarial favorable, con infraestructura y servicios públicos adecuados, atrae más inversiones y promueve la innovación.

## 2.2. Modelo Propuesto: Impacto de las Políticas Monetarias y Riesgo en el capital privado

Para entender mejor el impacto de las políticas monetarias, el riesgo y los costos de financiamiento en el capital privado, se visualiza un modelo basado en la función de producción extendida:

### 2.2.1. Función de Producción Extendida

Consideremos la siguiente función de producción extendida:

$$Y_t = AK_t^\alpha G_t^\beta \times \left(1 - \frac{R_t}{R_{\max}}\right) \times \left(1 - \frac{L_t}{L_{\max}}\right) \quad (2.2)$$

Donde:

- $R_t$  es el riesgo asociado al capital privado en el período  $t$ .
- $R_{\max}$  es el nivel máximo de riesgo considerado en el modelo.
- $L_t$  es el costo de financiamiento asociado con el capital privado en el período  $t$ .
- $L_{\max}$  es el costo máximo de financiamiento considerado en el modelo.

### 2.2.2. Interpretación del Modelo

- **Efecto de los Bienes Públicos:** Un aumento en  $G_t$  mejora la producción  $Y_t$  debido a la complementariedad entre  $G_t$  y  $K_t$ .
- **Efecto del Riesgo:** Un aumento en  $R_t$  reduce la producción  $Y_t$ , reflejando cómo el riesgo en el private equity puede impactar negativamente la rentabilidad.
- **Efecto del Costo de Financiamiento:** Un aumento en  $L_t$  también reduce la producción  $Y_t$ , mostrando cómo los mayores costos de financiamiento afectan el capital privado.

Este modelo ilustra cómo los bienes públicos complementan al capital privado y cómo el entorno actual del mercado de capitales privado, influenciado por el riesgo y los costos de financiamiento, impacta la producción. La inversión en bienes públicos sigue siendo crucial para apoyar la inversión privada y mitigar los efectos adversos en un entorno de financiamiento más complicado.

## 2.3. Modelo Extendido: Capital Privado, Bienes Públicos y Fondos de Pensiones

Ahora supongamos que se desea visualizar el impacto de los fondos de pensiones en la producción agregada medido por los activos ilíquidos en a economía

### 2.3.1. Función de Producción Extendida

Partimos de una función de producción Cobb-Douglas extendida que incorpora capital privado  $K_t$ , bienes públicos  $G_t$ , riesgo  $R_t$ , costo de financiamiento  $L_t$ , y activos ilíquidos  $I_t$ :

$$Y_t = AK_t^\alpha G_t^\beta \times \left(1 - \frac{R_t}{R_{\max}}\right) \times \left(1 - \frac{L_t}{L_{\max}}\right) \times \left(1 - \frac{I_t}{I_{\max}}\right) \quad (2.3)$$

Donde:

- $I_t$  representa la proporción de activos ilíquidos en los portafolios de fondos de pensiones en el período  $t$ .
- $I_{\max}$  es el nivel máximo de activos ilíquidos permitido en los portafolios de fondos de pensiones.

### 2.3.2. Interpretación del Modelo

- **Efecto de los Bienes Públicos:** Un incremento en  $G_t$  resulta en un aumento en  $Y_t$ , dado que los bienes públicos complementan al capital privado.
- **Efecto del Riesgo:** Un aumento en  $R_t$  reduce  $Y_t$ , reflejando cómo el aumento del riesgo impacta negativamente la producción y la rentabilidad en mercados privados.
- **Efecto del Costo de Financiamiento:** Un aumento en  $L_t$  disminuye  $Y_t$ , mostrando cómo los mayores costos de financiamiento afectan la eficiencia del capital privado.
- **Efecto de los Activos Ilíquidos:** Un aumento en  $I_t$  reduce  $Y_t$ , lo que indica que una alta exposición a activos ilíquidos puede causar desequilibrios en los portafolios de fondos de pensiones, impactando negativamente la estabilidad financiera y la producción.

## 2.4. Oportunidades en Infraestructura y Capital de Riesgo

A pesar de los desafíos mencionados, Supongamos que existen oportunidades significativas en mercados privados, particularmente en infraestructura y en capital de riesgo para nuevas tecnologías. Para modelar estas oportunidades, podemos extender la función de producción para incluir un término adicional que represente las inversiones en infraestructura  $H_t$  y capital de riesgo  $V_t$ :

$$Y_t = AK_t^\alpha G_t^\beta H_t^\gamma V_t^\delta \times \left(1 - \frac{R_t}{R_{\max}}\right) \times \left(1 - \frac{L_t}{L_{\max}}\right) \times \left(1 - \frac{I_t}{I_{\max}}\right) \quad (2.4)$$

Donde:

- $H_t$  es la inversión en infraestructura en el período  $t$ .
- $V_t$  es la inversión en capital de riesgo en el período  $t$ .
- $\gamma$  es la elasticidad de la producción respecto a la inversión en infraestructura.
- $\delta$  es la elasticidad de la producción respecto a la inversión en capital de riesgo.

### 2.4.1. Interpretación del Modelo Ampliado

- **Impacto de la Inversión en Infraestructura:** Un aumento en  $H_t$  incrementa  $Y_t$ , ya que la inversión en infraestructura mejora la productividad general y apoya la inversión privada.
- **Impacto de la Inversión en Capital de Riesgo:** Un aumento en  $V_t$  también aumenta  $Y_t$ , reflejando cómo el capital de riesgo promueve la innovación y el crecimiento en sectores emergentes.
- **Complementariedad y Oportunidades:** Las inversiones en  $H_t$  y  $V_t$  no solo incrementan la producción, sino que también proporcionan oportunidades para diversificar portafolios, especialmente en un entorno de mercado privado desafiante.

El modelo propuesto integra el impacto de los bienes públicos, el riesgo, los costos de financiamiento, los activos ilíquidos, y las inversiones en infraestructura y capital de riesgo en la función de producción. Este enfoque permite analizar de manera más holística la interacción entre estos factores en la economía, destacando tanto los desafíos como las oportunidades en el mercado de capitales privado.

### 2.4.2. El Papel de $A_t$ en la Función de Producción

El término  $A_t$  puede descomponerse para captar el efecto de políticas monetarias y otros factores externos:

$$A_t = \phi(M_t, F_t, T_t, Z_t) \quad (2.5)$$

Donde:

- $M_t$  representa las políticas monetarias en el período  $t$  (e.g., tasas de interés, oferta monetaria).
- $F_t$  representa las políticas fiscales en el período  $t$  (e.g., gasto público, impuestos).
- $T_t$  representa la capacidad de tecnológica, hardware ,software ,componentes de ciberseguridad e innovación en el período  $t$ .
- $Z_t$  representa otros factores externos como la regulación, estabilidad política, y condiciones económicas globales.

### 2.4.3. Impacto de las Políticas Monetarias Laxas

Las políticas monetarias laxas, como las bajas tasas de interés y la expansión de la oferta monetaria, han actuado como un viento de cola para el crecimiento de  $A_t$  en el pasado. Sin embargo, el fin de estas políticas puede reducir  $A_t$ , afectando negativamente la productividad:

$$\frac{\partial A_t}{\partial M_t} > 0 \quad (\text{durante un período de políticas laxas}) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial A_t}{\partial M_t} < 0 \quad (\text{cuando las políticas laxas se revierten}) \quad (2.7)$$

Esto implica que un endurecimiento de la política monetaria (aumento de tasas de interés, reducción de la liquidez) puede llevar a una disminución en  $A_t$ , impactando negativamente la producción  $Y_t$ .

## 2.5. Función de Producción Extendida con Tecnología

Se desarrolla entonces una función de producción extendida que incorpora el impacto de las políticas monetarias, fiscales, tecnológicas, y otras condiciones externas sobre la producción económica. Este modelo se centra en cómo el nivel de tecnología  $A_t$  no es estático, sino que depende de un conjunto de factores macroeconómicos y externos que influyen en la productividad. Además, se integra la inversión en infraestructura y capital de riesgo para reflejar las oportunidades y desafíos en el entorno económico actual.

Consideremos la siguiente función de producción Cobb-Douglas extendida:

$$Y_t = (A_0 \times e^{(\phi_1 M_t + \phi_2 F_t + \phi_3 T_t + \phi_4 Z_t)}) K_t^\alpha G_t^\beta H_t^\gamma V_t^\delta \times \left(1 - \frac{R_t}{R_{\max}}\right) \times \left(1 - \frac{L_t}{L_{\max}}\right) \times \left(1 - \frac{I_t}{I_{\max}}\right)$$

### 2.5.1. Componentes del Modelo

Donde:

- $Y_t$  es la producción total en el período  $t$ .
- $A_0$  es el nivel base de tecnología.
- $M_t$  representa las políticas monetarias en el período  $t$ .
- $F_t$  representa las políticas fiscales en el período  $t$ .
- $T_t$  captura las tendencias tecnológicas en el período  $t$ .
- $Z_t$  incluye otras condiciones externas relevantes, como políticas regulatorias o factores geopolíticos.
- $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$  son los coeficientes que capturan la elasticidad de la tecnología respecto a cada uno de los factores  $M_t, F_t, T_t, Z_t$ .
- $K_t$  es el capital privado en el período  $t$ .
- $G_t$  son los bienes públicos en el período  $t$ .
- $H_t$  es la inversión en infraestructura en el período  $t$ .
- $V_t$  es la inversión en capital de riesgo en el período  $t$ .
- $R_t$  es el nivel de riesgo en los mercados privados en el período  $t$ .
- $R_{\max}$  es el nivel máximo de riesgo considerado en el modelo.
- $L_t$  es el costo de financiamiento en el período  $t$ .
- $L_{\max}$  es el costo máximo de financiamiento considerado en el modelo.
- $I_t$  es la proporción de activos ilíquidos en los portafolios de fondos de pensiones en el período  $t$ .
- $I_{\max}$  es el nivel máximo de activos ilíquidos permitido en los portafolios de fondos de pensiones.
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  son las elasticidades de la producción respecto al capital privado, bienes públicos, infraestructura, y capital de riesgo, respectivamente.

### 2.5.2. Interpretación del Modelo

- **Tecnología Extendida  $A_t$** : El nivel de tecnología  $A_t$  es dinámico y se ve influenciado por un conjunto de factores macroeconómicos y externos, como las políticas monetarias  $M_t$ , las políticas fiscales  $F_t$ , las tendencias tecnológicas  $T_t$ , y otras condiciones externas  $Z_t$ . Esto permite capturar cómo las condiciones externas impactan directamente la productividad.
- **Efecto del Capital y Bienes Públicos  $K_t$  y  $G_t$** : El capital privado y los bienes públicos continúan siendo elementos centrales en la función de producción, reflejando su papel tradicional en el crecimiento económico.
- **Inversión en Infraestructura  $H_t$  y Capital de Riesgo  $V_t$** : Estas inversiones se integran en el modelo para capturar las oportunidades actuales en sectores clave como la descarbonización, digitalización, y nuevas tecnologías.
- **Impacto del Riesgo  $R_t$  y Costo de Financiamiento  $L_t$** : Los términos que involucran  $R_t$  y  $L_t$  muestran cómo el aumento en el riesgo y en los costos de financiamiento puede reducir la producción, afectando negativamente el rendimiento en los mercados privados.
- **Activos Ilíquidos  $I_t$** : La exposición a activos ilíquidos, particularmente en los fondos de pensiones, también puede impactar la estabilidad financiera y, por ende, la producción total  $Y_t$ .

## 2.6. Desarrollo del Modelo

A continuación, desarrollamos el modelo propuesto:

$$Y_t = (A_0 \times e^{(\phi_1 M_t + \phi_2 F_t + \phi_3 T_t + \phi_4 Z_t)}) K_t^\alpha G_t^\beta H_t^\gamma V_t^\delta$$

La función de producción  $Y_t$  se ve afectada directamente por  $A_t$ , el cual representa la tecnología extendida. Aquí,  $A_t$  no es un parámetro fijo, sino que varía según las políticas monetarias  $M_t$ , las políticas fiscales  $F_t$ , las tendencias tecnológicas  $T_t$ , y otros factores externos  $Z_t$ .

$$A_t = A_0 \times e^{(\phi_1 M_t + \phi_2 F_t + \phi_3 T_t + \phi_4 Z_t)}$$

Donde:

- $\phi_1$  captura la sensibilidad de la tecnología  $A_t$  a las políticas monetarias  $M_t$ .
- $\phi_2$  mide el impacto de las políticas fiscales  $F_t$ .
- $\phi_3$  refleja la influencia de las tendencias tecnológicas  $T_t$ .
- $\phi_4$  incluye el efecto de otros factores externos  $Z_t$ .

### 2.6.1. Incorporación del Riesgo y Costos de Financiamiento

El riesgo  $R_t$  y los costos de financiamiento  $L_t$  también juegan un rol crucial en la función de producción. Consideramos que incrementos en el riesgo y en los costos de financiamiento pueden reducir la efectividad de la producción:

$$Y_t = (A_0 \times e^{(\phi_1 M_t + \phi_2 F_t + \phi_3 T_t + \phi_4 Z_t)}) K_t^\alpha G_t^\beta H_t^\gamma V_t^\delta \times \left(1 - \frac{R_t}{R_{\max}}\right) \times \left(1 - \frac{L_t}{L_{\max}}\right)$$



### 2.6.2. Efecto de la Ilusión de Liquidez

Finalmente, consideramos la exposición a activos ilíquidos  $I_t$  en los portafolios de fondos de pensiones:

$$Y_t = \left( A_0 \times e^{(\phi_1 M_t + \phi_2 F_t + \phi_3 T_t + \phi_4 Z_t)} \right) K_t^\alpha G_t^\beta H_t^\gamma V_t^\delta \times \left( 1 - \frac{R_t}{R_{\max}} \right) \times \left( 1 - \frac{L_t}{L_{\max}} \right) \times \left( 1 - \frac{I_t}{I_{\max}} \right)$$

Aquí,  $I_t$  mide la proporción de activos ilíquidos en el sistema, lo que puede reducir la capacidad de los fondos de pensiones para cumplir con sus obligaciones.



# Capítulo 3

## Clase 2

### 3.1. Modelo de Evaluación de la Sostenibilidad de Sistemas Pensionales

Este documento presenta un modelo dinámico para estudiar la sostenibilidad de un sistema pensional, considerando factores como la demografía, la gestión financiera y las reformas necesarias. El objetivo es evaluar si, bajo ciertas condiciones, un sistema pensional podría asemejarse a un esquema Ponzi.

#### Variables del Modelo

- $P(t)$ : Número de pensionados en el tiempo  $t$ .
- $C(t)$ : Número de cotizantes en el tiempo  $t$ .
- $A(t)$ : Aporte promedio por cotizante en el tiempo  $t$ .
- $B(t)$ : Beneficio promedio por pensionado en el tiempo  $t$ .
- $F(t)$ : Fondo acumulado del sistema pensional en el tiempo  $t$ .
- $R(t)$ : Rendimiento de las inversiones del fondo en el tiempo  $t$ .
- $G(t)$ : Gastos administrativos y de gestión en el tiempo  $t$ .

#### Ecuaciones del Modelo

##### Evolución del Fondo Pensional

$$\frac{dF(t)}{dt} = C(t) \cdot A(t) + R(t) \cdot F(t) - P(t) \cdot B(t) - G(t) \quad (3.1)$$

Esta ecuación muestra cómo el fondo acumulado cambia en el tiempo. Los ingresos del fondo provienen de los aportes de los cotizantes  $C(t) \cdot A(t)$  y los rendimientos de las inversiones  $R(t) \cdot F(t)$ . Los egresos son los pagos a los pensionados  $P(t) \cdot B(t)$  y los gastos administrativos  $G(t)$ .

## Demografía y Transición de Cotizantes a Pensionados

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda \cdot C(t - \tau) - \mu \cdot P(t) \quad (3.2)$$

Aquí,  $\lambda$  es la tasa de transición de cotizantes a pensionados, y  $\tau$  es el tiempo que tarda un cotizante en jubilarse.  $\mu$  es la tasa de mortalidad de los pensionados.

## Número de Cotizantes

$$\frac{dC(t)}{dt} = \nu(t) - \lambda \cdot C(t) - \delta \cdot C(t) \quad (3.3)$$

$\nu(t)$  es la tasa de entrada de nuevos cotizantes, y  $\delta$  es la tasa de pérdida de cotizantes (por ejemplo, por desempleo, informalidad, etc.).

## Sostenibilidad Financiera

Para evaluar la sostenibilidad, consideramos la relación entre los ingresos y egresos:

$$S(t) = \frac{C(t) \cdot A(t) + R(t) \cdot F(t)}{P(t) \cdot B(t) + G(t)} \quad (3.4)$$

El sistema es sostenible si  $S(t) \geq 1$ . Si  $S(t) < 1$  de manera persistente, el sistema está en riesgo de insolvencia.

## Escenarios de Simulación

- **Escenario de Demografía Desfavorable:** Disminución en  $\nu(t)$  (menos cotizantes nuevos) y aumento en  $\mu$  (mayor longevidad de los pensionados).
- **Escenario de Mala Gestión:** Aumento en  $G(t)$  (gastos administrativos) y disminución en  $R(t)$  (rendimientos de inversión).
- **Escenario de Ausencia de Reformas:** Mantenimiento de  $A(t)$  y  $B(t)$  sin ajustes necesarios para reflejar cambios demográficos y económicos.
- **Escenario Combinado:** Combinación de los factores anteriores para evaluar un colapso potencial del sistema.

## Conclusión

Este modelo permite simular diferentes escenarios y evaluar si el sistema pensional podría asemejarse a un esquema Ponzi bajo condiciones de insostenibilidad financiera, mala gestión, y demografía desfavorable. Implementar este modelo en un entorno de simulación permitirá obtener resultados concretos y realizar un análisis más profundo.

Un sistema pensional podría asemejarse a un esquema Ponzi bajo ciertas condiciones, principalmente cuando la sostenibilidad financiera del sistema está en riesgo y depende excesivamente de la entrada de nuevos cotizantes para pagar los beneficios de los pensionados actuales. A continuación, se explica cómo y por qué un modelo dinámico que integre factores clave como la demografía, la

sostenibilidad financiera, la gestión de los fondos y las reformas necesarias puede ayudar a entender esta situación.

Similitudes entre un Sistema Pensional Insostenible y un Esquema Ponzi Dependencia en Nuevos Cotizantes:

En un esquema Ponzi, los retornos para los inversionistas anteriores se pagan con el dinero de los nuevos inversionistas. De manera similar, un sistema pensional insostenible depende de que continúen ingresando nuevos cotizantes al sistema para financiar las pensiones de los jubilados actuales. Si la cantidad de nuevos cotizantes disminuye o si los beneficios para los pensionados aumentan sin un incremento proporcional en los aportes, el sistema podría enfrentar serios problemas de liquidez y solvencia. Falta de Sostenibilidad Financiera:

La sostenibilidad financiera de un sistema pensional se basa en que los ingresos (aportes de los cotizantes y rendimientos de las inversiones) sean suficientes para cubrir los egresos (pagos a pensionados y gastos de gestión). Si los egresos superan persistentemente a los ingresos, el sistema necesitará cada vez más cotizantes o aumentos en los aportes para mantenerse a flote, lo cual es insostenible a largo plazo, muy parecido a un esquema Ponzi que eventualmente colapsa cuando no hay suficientes nuevos inversionistas. Inadecuada Gestión y Falta de Reformas:

Un esquema Ponzi a menudo se caracteriza por una falta de transparencia y una gestión deficiente que busca ocultar la realidad financiera. De igual manera, si un sistema pensional no es gestionado de manera eficiente, y si no se implementan reformas necesarias en respuesta a cambios demográficos o económicos, el sistema podría entrar en una espiral descendente en la que los fondos acumulados se erosionan rápidamente. Justificación del Modelo Dinámico Para evaluar la sostenibilidad de un sistema pensional y su posible similitud con un esquema Ponzi, es necesario un modelo dinámico que integre varios factores clave:

Demografía:

La transición de cotizantes a pensionados (demografía) es fundamental. Un envejecimiento de la población, donde el número de pensionados aumenta mientras que el número de cotizantes disminuye, puede poner en peligro la sostenibilidad del sistema. Nuestro modelo refleja esto mediante la ecuación de la evolución del número de pensionados y cotizantes. Sostenibilidad Financiera:

La sostenibilidad financiera se evalúa en el modelo mediante la relación entre ingresos y egresos. Si el índice de sostenibilidad  $S(t)$  es menor que 1 de manera persistente, indica que el sistema está gastando más de lo que ingresa, lo que lo asemeja a un esquema Ponzi en cuanto a la dependencia en nuevos cotizantes. Gestión de Fondos:

La gestión de los fondos, incluidos los rendimientos de las inversiones y los gastos administrativos, es otra pieza clave. Un mal manejo de los fondos puede acelerar el agotamiento de los recursos del sistema, aumentando la presión sobre la necesidad de nuevos cotizantes. Reformas Necesarias:

La capacidad del sistema para adaptarse a los cambios a través de reformas (como ajustar los aportes, beneficios o mejorar la gestión de los fondos) es crucial. La ausencia de tales reformas en el modelo puede llevar a una trayectoria insostenible. Conclusión Un sistema pensional podría asemejarse a un esquema Ponzi bajo condiciones de insostenibilidad financiera, mala gestión, una demografía desfavorable, y la falta de reformas necesarias. El modelo dinámico propuesto permite evaluar estas interacciones y simular diferentes escenarios para comprender mejor las condiciones bajo las cuales el sistema podría colapsar o mantenerse sostenible. Este enfoque no solo ayuda a identificar riesgos, sino que también proporciona una base para la toma de decisiones informadas sobre políticas de pensiones y reformas necesarias.

Para abordar la afirmación de que la reforma pensional en Colombia podría asemejarse a un "esquema Ponzi legalizado", es necesario integrar una visión más profunda que considere tanto las características inherentes de un esquema Ponzi como las particularidades de los sistemas pensionales. Esto nos permitirá explorar bajo qué condiciones un sistema pensional podría comportarse de manera similar a un esquema Ponzi y cómo un modelo dinámico puede ayudar a evaluar esta posibilidad.

**Características de un Esquema Ponzi** Un esquema Ponzi es una estructura fraudulenta que depende de la entrada continua de nuevos inversores para pagar los retornos prometidos a los inversores anteriores. Las principales características de un esquema Ponzi son:

**Financiación de los retornos con nuevas entradas:** Los pagos a los primeros inversores se realizan utilizando el dinero aportado por nuevos participantes, en lugar de provenir de ganancias legítimas.

**Insostenibilidad a largo plazo:** Eventualmente, el esquema colapsa cuando no se pueden atraer suficientes nuevos participantes para continuar pagando a los inversores anteriores.

**Promesas de retornos altos sin riesgo:** Se ofrece a los participantes la expectativa de retornos elevados sin riesgo aparente, lo que atrae a más inversores.

**Comparación con un Sistema Pensional** Los sistemas de pensiones, en especial los de reparto (donde los cotizantes actuales financian las pensiones de los jubilados), presentan algunas similitudes superficiales con un esquema Ponzi:

**Financiación intergeneracional:** Las contribuciones de los trabajadores actuales se utilizan para pagar las pensiones de los jubilados, creando una dependencia entre generaciones.

**Riesgos de insostenibilidad:** Sin reformas adecuadas, cambios demográficos desfavorables (menos nacimientos, mayor longevidad) podrían hacer que el sistema sea insostenible.

**Promesas y expectativas:** Si se prometen beneficios sin un respaldo financiero adecuado, el sistema podría enfrentar serios desafíos a largo plazo.

Sin embargo, hay diferencias fundamentales:

**Transparencia y regulación:** A diferencia de un esquema Ponzi, los sistemas de pensiones están regulados y son transparentes, con la posibilidad de ser reformados para asegurar su sostenibilidad.

**Obligatoriedad y respaldo estatal:** Los sistemas de pensiones son obligatorios y, en muchos casos, están respaldados por políticas fiscales y otros ingresos del Estado.

**Redistribución intergeneracional:** El sistema busca una redistribución equitativa entre generaciones, con la expectativa de que futuras generaciones mantendrán el sistema.

**Condiciones Bajo las Cuales un Sistema Pensional Podría Asemejarse a un Esquema Ponzi** Para que un sistema pensional pueda parecerse a un esquema Ponzi, deberían cumplirse ciertas condiciones:

**Demografía Desfavorable:** Si hay un número creciente de jubilados en relación con los cotizantes, debido a una baja tasa de natalidad y una mayor esperanza de vida, el sistema puede volverse insostenible sin reformas.

**Mala Gestión o Corrupción:** Una gestión ineficiente o corrupta de los fondos de pensiones, que incluya malas inversiones o desvío de fondos, podría agotar los recursos y poner en peligro la capacidad del sistema para pagar las pensiones prometidas.

**Promesas Insostenibles:** Si el sistema promete beneficios elevados que no pueden ser respaldados por los aportes y las inversiones actuales, la estructura puede volverse insostenible y dependiente de la entrada continua de nuevos cotizantes.

**Dependencia de Nuevos Contribuyentes:** Si el sistema depende excesivamente de la entrada de nuevos cotizantes, sin fuentes de ingresos diversificadas o reservas acumuladas, podría comportarse de manera similar a un esquema Ponzi en términos de su eventual colapso.

**Integración en un Modelo Dinámico** El "Modelo de Evaluación de la Sostenibilidad de Sistemas Pensionales" que se ha propuesto es una herramienta para analizar cómo estos factores interactúan y pueden influir en la sostenibilidad del sistema:

**Demografía:** El modelo considera la evolución del número de cotizantes y pensionados, permitiendo simular cómo un cambio en las tasas de natalidad y mortalidad afecta la sostenibilidad del sistema.

**Sostenibilidad Financiera:** La relación entre los ingresos (aportes de cotizantes, rendimientos de inversiones) y los egresos (pagos a pensionados, gastos administrativos) es clave para evaluar si el sistema puede mantenerse a largo plazo sin comportarse como un esquema Ponzi.

**Gestión de Fondos:** El modelo también incorpora la gestión de los fondos, incluyendo rendimientos y gastos administrativos, para evaluar cómo una mala gestión puede llevar a la insostenibilidad.

Reformas Necesarias: Finalmente, el modelo permite simular el impacto de diferentes reformas (ajustes en aportes, beneficios, políticas de inversión) en la sostenibilidad del sistema, mostrando cómo se podría evitar un colapso similar al de un esquema Ponzi.

Conclusión Un sistema pensional podría asemejarse a un esquema Ponzi bajo condiciones específicas de insostenibilidad financiera, mala gestión, y una demografía desfavorable sin las reformas necesarias. Sin embargo, a diferencia de un esquema Ponzi, un sistema pensional tiene la posibilidad de ser reformado y ajustado para asegurar su sostenibilidad a largo plazo. El modelo dinámico propuesto ofrece una herramienta para evaluar estas condiciones y prever posibles soluciones antes de que el sistema alcance un punto crítico.





# Apéndice A

## Apéndice

Se tratará de demostrar matemáticamente las condiciones de concavidad que permitan analizar la aplicabilidad del modelo de crecimiento endogeno integrado