Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Fundamentación en Matemáticas

Taller de Métodos de demostración 1

---

1. Sean m, n y p números enteros. Pruebe, con método directo, los siguientes enunciados.
   a) Si n y m son pares, entonces $n+m$ es par.
   b) Si n y m son impares, entonces $n+m$ es par.
   c) Si n es par y m impar, entonces $n+m$ es impar.
   d) 1 divide a n.
   e) n divide a n.
   f) Si m divide a n, entonces m divide a $-n$.
   g) Si m divide a n y n divide a p, se tiene que m divide a p.
   h) Si m divide a n y m divide a p, se tiene que m divide a cualquier combinación lineal de n y p, es decir, m divide a $nx+py$, para cualquier par de enteros x y y.

2. Mediante método directo y/o contrarrecíproco, pruebe los siguientes enunciados.
   a) Sean a, b y c enteros. Si a no divide a bc, entonces a no divide a b.
   b) Sean a, b, c y d enteros tal que d divide a a y a b. Si d no divide a c, entonces la ecuación $ax+by=c$ no tiene solución para x y y enteros.
   c) Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Si xy es irracional, entonces x es irracional o y es irracional.
   d) Mediante el algoritmo de la división, justifique que, para cada $n \in \mathbb{Z}$, se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones para algún $k \in \mathbb{Z}$, ó $n=3k$ ó $n=3k+1$ ó $n=3k+2$.
   e) Mediante el algoritmo de la división, justifique que, para cada $n \in \mathbb{Z}$, se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones para algún $k \in \mathbb{Z}$, ó $n=6k$ ó $n=6k+1$ ó $n=6k+2$ ó $n=6k+3$ ó $n=6k+4$ ó $n=6k+5$.

3. Utilice los métodos de demostración para probar los siguientes enunciados.
   a) Sea n un entero. Si n^2 es múltiplo de 3 entonces n es múltiplo de 3. Sugerencia: Utilice el hecho de que $n=3k$, $n=3k+1$ ó $n=3k+2$, para algún $k \in \mathbb{Z}$, y que no se cumplen dos de éstas simultaneamente. Proceda por método directo y disyunción de casos.
   b) Dos múltiplos de 3 no son primos relativos.
   c) Sea n un entero. n^2 es múltiplo de 3 si y solo si n es múltiplo de 3.
   d) Sea $n \in \mathbb{Z}$. Probar que $6|n$ si y solo si $2|n$ y $3|n$.
   e) Dado un entero n, se tiene para n y $n+1$ que uno de los dos es par y el otro es impar.
   f) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Pruebe que ab es par si y solo si a es par ó b es par.

4. Considere la siguiente proposición: *Si x es un número real, entonces el valor máximo de la función cuadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^2+2x+1$, es menor o igual que* 2. Determinar
   a) ¿Cómo se puede probar que el valor máximo de una parábola es menor o igual que un número?
   b) ¿Cómo se puede probar que un número es mayor o igual que el valor máximo de un polinomio?
   c) ¿Cómo se puede probar que el valor máximo de la función cuadrática f es menor o igual que 2.

d) ¿Cómo se puede probar que un número es mayor o igual que el máximo de una función cuadrática?

e) Teniendo en cuenta las anteriores preguntas, demostrar la proposición enunciada.

5. Considere la pregunta: *¿Cómo se puede probar que dos rectas en un plano son paralelas?* Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas y cuáles son incorrectas como argumento para responder a la pregunta (justifique su respuesta):

   a) Probar que las pendientes de las dos rectas son iguales.

   b) Probar que cada una de las dos rectas es paralela a una tercera recta.

   c) Probar que cada una de las dos rectas es perpendicular a una tercera.

   d) Probar que cada una de las dos rectas son paralelas a dos lados opuestos de un cuadrilatero.

   e) Probar que cada una de las dos rectas son perpendiculares a dos lados de un polígono regular.

6. Demostrar que si $n \in \mathbb{Z}$ satisface la ecuación $-3n^2 + 2n + 8 = 0$, entonces satisface la ecuación $2n^2 - 3n = 2$.

7. Si a y b son reales no negativos, demostrar que $a^2 + b^2 \leq (a + b)^2$.

8. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ son tales que $a > 0$, $b < 0$ y $b^2 - 4ac = 0$, entonces la solución d la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es positiva.

9. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x^2 + 6y^2 = 25$ y $y^2 + x = 3$, entonces $y = 2$.

10. Sean n un entero mayor que 2, a, b las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo y c la longitud de la hipotenusa. Probar que $c^n > a^n + b^n$.

11. Demostrar que si en un triángulo dos de los ángulos miden $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{6}$, entonces el segemento que une al vertice y al punto medio del lado opuesto del tercer ángulo divide al triángulo en un triángulo equilatero y en uno isóceles.

12. Demostrar el siguiente resultado por método directo, por contrarrecíproco y por reducción al absurdo: Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $a^3 + 3a^2 + 3a$ es no negativo, entonces a es no negativo.

13. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a < \pi$. Para todo $t \in [0, \pi - a]$, se tiene que el valor de
$$F(t) = \frac{\sin(t) + \sin(t + a)}{\cos(t) - \cos(t + a)}$$
es independiente del valor de t.

14. Si x e y son reales positivos, probar que
$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}.$$

15. Si a, b, x, y son reales positivos, con $a + b = 1$, probar que
$$\frac{1}{\frac{a}{x} + \frac{b}{y}} \leq ax + by.$$

16. Sean a, b, c, d números naturales tales que $M = a^2 + b^2$ y $N = c^2 + d^2$, demostrar que MN es la suma de los cuadrados de dos números naturales.

17. Demostrar que si n es un número natural mayor que 2, no hay ningún entero m que cumpla que $m + n = mn$.

18. Demostrar por contrarrecíproco el siguiente resultado: Sean $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$. Si (x, y, z) es una terna pitagórica, entonces solo uno de ellos es par o los tres son pares.

19. Demostrar que si n es un número natural, que no es cudrado perfecto, entonces $\sqrt{n}$ es irracional.

20. Demostrar que una ecución polinómica con coeficientes enteros y coeficiente principal 1 no puede tener raíces racionales no enteras.

21. Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, diremos que (a, b, c) es una terna Pitagórica si $a^2 + b^2 = c^2$.

    a) Demostrar que si (a, b, c) es una terna pitagórica, entonces a, b, c son distintos dos a dos.

    b) Comprobar que las ternas $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(7, 24, 25)$, $(9, 40, 41)$, $(11, 60, 61)$ son ternas Pitagóricas.

    c) Proponer una proposición que permita construir ternas Pitagóricas del tipo presentado en el ejemplo anterior y demostrarlo.

    d) Para todo $m, n \in \mathbb{Z}^+$, con $m > n$, demostrar que si $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ y $c = m^2 + n^2$, entonces (a, b, c) es una terna Pitagórica.

22. Sea $X \neq \emptyset$ y $A \subseteq X$. La función característica de A en X, denotada por C_A, es la función $C_A : X \to 0, 1$ definida por

$$C_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

    Sean $A, B \subset X$ no vacios

    a) Encontrar una fórmula para la función $C_{A \cap B}$ en términos de las funciones C_A y C_B. Demuestre el resultado obtenido.

    b) Encontrar una fórmula para la función C_{X-A} en términos de las funciones C_A y 1. Demuestre el resultado obtenido.

    c) Demostrar que $X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X_B)$.

    d) Encontrar una fórmula para la función $C_{A \cup B}$ usando los tres resultados anteriores y demostrarla.

23. Se escriben siete enteros sobre una circunferencia. Demostrar que existen dos números adyacentes cuya suma es par.

24. El producto de 26 números enteros enteros es igual a 1. Demostrar que su suma no puede ser cero.